



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ana Paula Dantas de Souza

Equações Integro-Diferenciais de Ordem Fracionária

Maceió
2013

Ana Paula Dantas de Souza

Equações Integro-Diferenciais de Ordem Fracionária

Dissertação de mestrado na área de concentração de Análise submetida em 18 de setembro de 2013 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar de Souza Almeida

Maceió
2013

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

S729e Souza, Ana Paula Dantas de.
Equações integro-diferenciais de ordem fracionária / Ana Paula Dantas de Souza. – 2013.
67 f. : il.

Orientador: Julio Cesar de Souza Almeida.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 66-67.

1. Semigrupos de operadores lineares limitados. 2. Semigrupos analíticos.
3. Equações integro-diferenciais de ordem fracionária. I. Título.

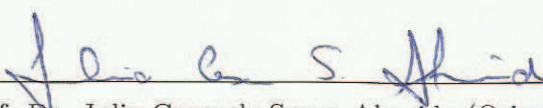
CDU: 517.98

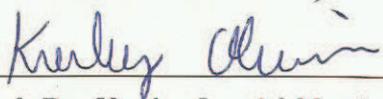
Equações Integro-Diferenciais de Ordem Fracionária

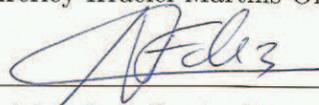
Ana Paula Dantas de Souza

Dissertação de mestrado na área de concentração de Análise submetida em 18 de setembro de 2013 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Julio Cesar de Souza Almeida (Orientador)


Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira (UFAL)


Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández (UFRJ)

AGRADECIMENTOS

A Deus por me proteger nos momentos difíceis, me dar força interior para vencer as dificuldades e mostrar os caminho nas horas incertas. À minha família pelo apoio incondicional em todos os momentos deste mestrado.

Em especial, agradeço à minha mãe Marlene que sempre esteve ao meu lado me apoiando e dando forças para que eu conseguisse meus objetivos. Ao meu pai Cândido, que com sua responsabilidade e honestidade, me ensinou a escolher sempre o melhor caminho.

Ao meu namorado Allan que esteve comigo durante toda a minha vida acadêmica e sempre me incentivou com seus valiosos conselhos.

Ao meu orientador Prof. Julio Cesar, pela liberdade e confiança referente ao presente trabalho, além da compreensão em todos os momentos necessários. Agradeço aos membros da banca examinadora, Professores Krerley Oliveira e Adán Corcho, pela disponibilidade de participar e pelas contribuições acerca da dissertação. Agradeço também a todos os professores do Instituto de Matemática, os quais se mostram grandes mestres.

Meus agradecimentos aos colegas de turma e com certeza futuros excelentes profissionais: Allan, Felipe, Marcos e Max, pelo convívio, troca de ideias e crescimento mútuo.

À FAPEAL, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação apresentaremos a demonstração de um Teorema obtido por C. Cuevas e J.C. de Souza, o qual estabelece a existência e unicidade de solução branda S -assintoticamente ω -periódica para uma equação semilinear fracionária. Além disso, abordaremos uma aplicação deste problema para uma equação diferencial parcial de ordem fracionária. Este artigo foi publicado em 2008 no *Applied Mathematics Letters*, com o título *S -asymptotically ω -periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations*.

Palavras-chave: Semigrupos fortemente contínuos de operadores limitados. Semigrupos Analíticos. Equações integro-diferenciais de ordem fracionária.

ABSTRACT

In this work we demonstrate a theorem obtained by C. Cuevas e J.C. de Souza, which establishes the existence and uniqueness of mild solution S -asymptotically ω -periodic for a semilinear fractional equation. In addition, we discuss an application of this problem for a partial differential equation of fractional order. This article was published in 2008 in Applied Mathematics Letters, as the title *S-asymptotically ω -periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations*.

Keywords: Strongly continuous semigroups of bounded operators. Analytic semigroups. Integro-differential equations of fractional order.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	7
1 PRELIMINARES	9
1.1 Integração de funções com valores vetoriais	9
1.2 Um Pouco de Topologia	12
1.2.1 Teorema de Ponto Fixo	12
1.2.2 Medidas de Não-Compacidade	14
1.3 Cálculo Fracionário	15
1.3.1 Operador Integral	17
1.3.2 Operador Diferencial	19
2 FUNÇÕES S-ASSINTOTICAMENTE ω-PERIÓDICAS	21
3 SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES LIMITADOS	26
3.1 Semigrupos Uniformemente Contínuos	26
3.2 Semigrupos Fortemente Contínuos	29
3.3 O Teorema de Hille-Yosida	34
3.4 Semigrupos Analíticos	40
3.5 O Semigrupo Gaussiano	48
4 SOLUÇÕES S-ASSINTOTICAMENTE ω-PERIÓDICAS DE EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO FRACIONÁRIA	53
4.1 Operador Solução	53
4.2 Soluções brandas S-assintoticamente ω -periódica	56
REFERÊNCIAS	66

INTRODUÇÃO

Esta dissertação está baseada no artigo *S-asymptotically ω -periodic solutions of semi-linear fractional integro-differential equations* de 2008. Neste artigo Cuevas e Souza provaram a existência e a unicidade de soluções brandas S-assintoticamente ω -periódicas da equação de evolução semilinear do tipo fracionária

$$v'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Av(s) ds + f(t, v(t)) \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$v(0) = u_0 \in X, \quad (2)$$

onde $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear densamente definido do tipo setorial num espaço de Banach complexo X e $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função contínua satisfazendo uma condição tipo Lipschitz.

O objetivo deste trabalho é demonstrar o resultado citado acima obtido por Cuevas e Souza. Com esse intuito, na primeira seção do Capítulo 1, abordamos o conceito de Integração de Bochner, que estende o conceito de integral de Lebesgue para funções com valores em um espaço de Banach. Ao longo desta dissertação, salvo menção contrária, X munido da norma $\|\cdot\|_X$ representará um espaço de Banach.

Na seção 1.2, apresentamos uma breve exposição de Medidas de Não-compacidade e enunciamos um Teorema de Ponto Fixo, sendo este, ferramenta fundamental para a demonstração do principal resultado deste trabalho.

A seção 1.3 trata do estudo do cálculo fracionário. De acordo com a abordagem feita neste capítulo, a integral do tipo convolução em (??) é conhecida como a integral de Riemann-Liouville de ordem $\alpha - 1 > 0$, ou seja,

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Av(s) ds = J^{\alpha-1} Av(t).$$

O estudo das funções contínuas e limitadas $f : [0, \infty) \rightarrow X$, para as quais existe $\omega > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t+\omega) - f(t)) = 0$, é apresentado no Capítulo 2 e retomado no Capítulo 4. No decorrer do segundo capítulo, chamaremos estas funções de S-assintoticamente ω -periódicas e estudaremos as principais propriedades desta classe de funções. Já no quarto capítulo, verificamos a existência de soluções brandas S-assintoticamente ω -periódica para o problema (??)-(??).

Os Semigrupos Lineares Limitados são abordados no Capítulo 3. Nas seções 3.1, 3.2 e 3.4, nos dedicamos ao estudo qualitativo dos Semigrupos Uniformemente Contínuos, dos C_0 -semigrupos e dos Semigrupos Analíticos, respectivamente. Na seção 3.3, estabelecemos vários resultados com a finalidade de demonstrar o Teorema de Hille-Yosida. Por fim,

na seção 3.5, apresentamos um exemplo de semigrupo analítico, a saber, o Semigrupo Gaussiano, o qual será novamente citado no último resultado deste trabalho.

O último capítulo está dividido em duas seções. Na primeira, introduzimos algumas definições relevantes para o entendimento da segunda seção. Por exemplo, veremos a importante definição de operador linear setorial tipo μ .

Definição 0.1. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ fechado é dito **setorial do tipo μ** se existem $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $M > 0$ tais que seu resolvente existe fora do setor*

$$\mu + S_\theta = \{\mu + \lambda; \lambda \in \mathbb{C}, |\arg(-\lambda)| < \theta\}$$

e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \mu|}, \quad \lambda \notin \mu + S_\theta.$$

Na seção final, definimos o conceito de solução branda S-assintoticamente ω -periódica para o problema (??)-(??).

Definição 0.0.1. *Suponha que A é o gerador de um operador solução integrável $S_\alpha(t)$. Uma função $u \in C_b([0, \infty), X)$ é dita uma **solução branda S-assintoticamente ω -periódica** do problema (??)-(??) se $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ for uma função S-assintoticamente ω -periódica e satisfaz*

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds, \quad \forall t \geq 0. \quad (3)$$

Além disso, utilizamos os capítulos anteriores para mostrar alguns resultados importantes que garantem a existência e unicidade de solução branda S-assintoticamente ω -periódica. Entre esses, destacamos o resultado abaixo:

Teorema 0.1. *Sejam A um operador setorial do tipo $\mu < 0$, $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua tal que $f(\cdot, 0)$ é integrável em $[0, \infty)$ e $L : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e integrável tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t) \|x - y\|, \quad \text{para todo } x, y \in X, t \geq 0.$$

Então o problema (??) e (??) tem uma única solução branda S-assintoticamente ω -periódica. Além disso, vale

$$\|u\|_\infty \leq \bar{C}(\|u_0\| + \|f(\cdot, 0)\|_1) \exp(\bar{C} \|L\|_1),$$

onde \bar{C} é uma constante suave e positiva.

1 PRELIMINARES

Neste capítulo fixamos notações e apresentamos os requisitos necessários para a compreensão desta dissertação.

1.1 Integração de funções com valores vetoriais

Neste seção temos como objetivo apresentar uma breve introdução da integral de Bochner. Abordaremos apenas o necessário para compreensão dos Capítulos 3 e 4. Para um estudo mais detalhado consulte [?] e [?]. Como já convencionamos, X representará um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_X$. Além disso, $\mathcal{L}(X)$ é o espaço de Banach dos operadores lineares limitados de X em X com a norma usual.

A integral de Bochner estende a definição de integral de Lebesgue para funções com valores em um espaço de Banach, como o limite de integrais de funções simples. Para isto, consideremos f uma função

$$f : J \rightarrow X$$

definida em algum intervalo $J \subset \mathbb{R}$.

Definição 1.1.1. *Uma função vetorial $f : J \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita **simples** se f pode ser representada por*

$$f = \sum_{k=1}^n x_k \chi_{J_k}, \quad (1.1)$$

para algum $n \in \mathbb{N}$, onde $x_k \in X$ e J_k são subconjuntos mensuráveis de J com medida de Lebesgue finita $\mu(J_k)$.

Se f é uma função simples, definimos sua integral por

$$\int_J f(s) ds := \sum_{k=1}^n x_k \mu(J_k),$$

a qual independe da representação em (??).

Definição 1.1.2. *Se f pode ser aproximada pontualmente por funções simples, ou seja, se existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples em J tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(s) - f_n(s)\| = 0 \quad \mu - q.t.p. \quad (1.2)$$

então f é dita (**fortemente**) **mensurável**.

Com esta definição, o conjunto das funções mensuráveis é um espaço vetorial.

Definição 1.1.3. Se f é mensurável e existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples em J , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \|f(s) - f_n(s)\| ds = 0, \quad (1.3)$$

então dizemos que f é (Bochner) integrável. A integral acima é uma integral de Lebesgue.

Se f é integrável, definimos sua integral por

$$\int_J f(s) ds := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J f_n(s) ds,$$

a qual independe da sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ na definição acima.

No que se segue, listaremos algumas propriedades elementares das funções mensuráveis. As demonstrações podem ser encontradas em [?].

Proposição 1.1. Seja $f : J \rightarrow X$ uma função vetorial, então

1. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis definidas em J que converge para f no sentido (??), então f também é mensurável.
2. Se f é mensurável e $F : J \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é fortemente contínua, então a composição $F \circ f : J \rightarrow X$ também é mensurável.

Proposição 1.2. Se f é mensurável, então as afirmações são equivalentes:

- (i) f é integrável.
- (ii) $\int_J \|f(s)\| ds < \infty$.

Como consequência imediata das Proposições ?? e ??, podemos observar que se $f : J \rightarrow X$ é uma função integrável e $F : J \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é fortemente contínua, então a composta $F \circ f : J \rightarrow X$ é também integrável. Além disso, as seguintes propriedades são válidas para a integral de Bochner.

- (i) $\| \int_J f(s) ds \| \leq \int_J \| f(s) \| ds$;
- (ii) (Teorema de Fubini) Seja $I = I_1 \times I_2$ um retângulo em \mathbb{R}^2 . Seja $f : I \rightarrow X$ mensurável e suponha que

$$\int_{I_1} \int_{I_2} \|f(s, t)\| dt ds < \infty.$$

Então f é Bochner integrável e

$$\int_{I_1} \int_{I_2} f(s, t) dt ds \quad \text{e} \quad \int_{I_2} \int_{I_1} f(s, t) ds dt$$

existem e são iguais. Além disso as integrais acima coincidem com $\int_I f(s, t) d(s, t)$.

- (iii) (Teorema da Convergência Dominada) Sejam $f_n : I \rightarrow X$, com $n \in \mathbb{N}$, funções Bochner integráveis. Se $f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ existe em μ -q.t.p. e existe uma função integrável $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ em μ -q.t.p. para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é Bochner integrável e

$$\int_I f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Além disso, $\int_I \|f(t) - f_n(t)\| dt \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

A proposição ?? será utilizada no capítulo 3 e sua demonstração segue diretamente do próximo resultado.

Teorema 1.1. *Sejam $T : X \rightarrow Y$ um operador linear limitado entre os espaços de Banach X e Y e $f : I \rightarrow X$ Bochner integrável. Então $T \circ f : t \mapsto T(f(t))$ é Bochner integrável e*

$$T\left(\int_J f(s)ds\right) = \int_J T(f(s))ds.$$

Demonstração. Sabemos que $\int_I f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n(t)dt$, onde $g_n : I \rightarrow X$ são funções simples. Assim

$$\int_I g_n(t)dt = \sum_{i=1}^{k_n} x_{in}\mu(J_{in}).$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} T\left(\int_J f(t)dt\right) &= T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} x_{in}\mu(J_{in})\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} T(x_{in}\mu(J_{in})). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_I \|T(f(t)) - T(g_n(t))\|dt \leq \|T\| \int_I \|f(t) - g_n(t)\|dt \rightarrow 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_I T(f(t))dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I T(g_n(t))dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} T(x_{in})\mu(J_{in}). \end{aligned}$$

□

O resultado a seguir nos garante, sob algumas hipóteses, que podemos comutar integração com aplicações de operadores fechados.

Proposição 1.3. *Sejam X, Y espaços de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ um operador fechado. Se $f : J \rightarrow X$ é uma função integrável, $f(s) \in D(A)$ para quase todo $s \in J$ e $Af : J \rightarrow Y$ dado por $(Af)(s) := Af(s)$ é integrável, então $\int_J f(s)ds \in D(A)$ e*

$$A\left(\int_J f(s)ds\right) = \int_J Af(s)ds.$$

Demonstração. Consideremos o espaço de Banach $X \times X$ com a norma $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Se denotamos por $G(A)$ o gráfico de A , por definição $G(A)$ é um subespaço

fechado de $X \times X$. Defina $g : I \rightarrow G(A) \subset X \times X$ por $g(t) := (f(t), A(f(t)))$. Portanto, g é mensurável e, como f e $A \circ f$ são integráveis, temos

$$\int_I \|g(t)\| dt = \int_I \|f(t)\| dt + \int_I \|A(f(t))\| dt < \infty.$$

Logo g é Bochner integrável. Considere os operadores limitados $P_i : X \times X \rightarrow X$ definidos por $P_i(x_1, x_2) = x_i$, para $i = 1, 2$. Do teorema (??), obtemos

$$\begin{aligned} \int_I g(t) dt &= \left(P_1 \left(\int_I g(t) dt \right), P_2 \left(\int_I g(t) dt \right) \right) \\ &= \left(\int_I (P_1 \circ g)(t) dt, \int_I (P_2 \circ g)(t) dt \right) \\ &= \left(\int_I f(t) dt, \int_I A(f(t)) dt \right). \end{aligned}$$

Além disso, $\int_I g(t) dt \in G(A)$, pois $\int_I g(t) dt$ é limite de pontos de $G(A)$. Portanto,

$$\int_I f(t) dt \in D(A) \quad \text{e} \quad A \left(\int_I f(t) dt \right) = \int_I A(f(t)) dt.$$

□

1.2 Um Pouco de Topologia

Nesta segunda seção, apresentaremos um Teorema de Ponto Fixo e a noção de medidas de não-compacidade, os quais são requisitos necessários para a compreensão dos principais resultados desta dissertação, a saber, os Teoremas ?? e ??.

1.2.1 Teorema de Ponto Fixo

O próximo teorema é uma consequência do Teorema do ponto fixo de Banach e sua demonstração pode ser encontrada em [?].

Sejam Y e Z espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_Y$ e $\|\cdot\|_Z$, respectivamente. Suponha a existência de uma relação de ordem parcial \preceq em Z e uma aplicação $m : Y \rightarrow Z$ satisfazendo as condições abaixo:

- (i) Para todo $y \in Y$, $0 \preceq m(y)$;
- (ii) a norma $\|\cdot\|_Z$ é monótona com respeito a ordem parcial \preceq , ou seja, se $0 \preceq z_1 \preceq z_2$, então $\|z_1\|_Z \leq \|z_2\|_Z$;
- (iii) Existem constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que

$$\|y\|_Y \leq C_1 \|m(y)\|_Z \quad \text{e} \quad \|m(y)\|_Z \leq C_2 \|y\|_Y, \quad \text{para todo } y \in Y.$$

Nestas condições, enunciamos o seguinte Teorema:

Teorema 1.2. *Sejam $S \subset Y$ um conjunto fechado e não vazio e $P : S \rightarrow S$ uma aplicação contínua. Suponha que existe um operador linear e limitado $B : Z \rightarrow Z$ tal que:*

- (I) *O raio espectral $r(B) < 1$;*
- (II) *O operador B é crescente com relação a ordem parcial \preceq , ou seja, se $0 \preceq z_1 \preceq z_2$, então $Bz_1 \preceq Bz_2$;*
- (III) *Para todo $y_1, y_2 \in S$, tem-se que $m(Py_1 - Py_2) \preceq Bm(y_1 - y_2)$.*

Então, P tem um único ponto fixo.

A seguir mostraremos um exemplo de uma aplicação $m : Y \rightarrow Z$, a qual satisfaz as hipóteses (i), (ii) e (iii). Este exemplo será utilizado na demonstração do Teorema ??.

Exemplo 1.1. *Seja $C_b([0, \infty), X)$ o espaço das funções contínuas e limitadas munido da norma da convergência uniforme. Considere os espaços $Y = C_b([0, \infty), X)$ e $Z = C_b([0, \infty), \mathbb{R})$. Considere Z com a ordem pontual, isto é, se $u_1, u_2 \in Z$, dizemos que $u_1 \preceq u_2$, quando $u_1(t) \leq u_2(t)$ para todo $t \geq 0$. Para cada $u \in C_b([0, \infty), X)$, defina*

$$m(u)(t) = \sup_{s \in [0, t]} \|u(s)\|, \quad t \geq 0.$$

Então, m é uma aplicação $m : C_b([0, \infty), X) \rightarrow C_b([0, \infty), \mathbb{R})$ que satisfaz as hipóteses (i), (ii) e (iii).

Primeiramente mostraremos que m toma valores em $C_b([0, \infty), \mathbb{R})$. Seja u uma função no espaço $C_b([0, \infty), X)$. Então, temos que

$$|m(u)(t)| \leq \sup_{s \in [0, \infty)} \|u(s)\| = \|u\|_\infty, \quad t \geq 0,$$

o que mostra que $m(u)$ é limitada. Além disso, dados $\varepsilon > 0$ e $t \geq 0$, tome $h = h(\varepsilon, t) > 0$ tal que se $\theta, \theta' \in [t, t+h]$, então $\|u(\theta) - u(\theta')\| < \varepsilon$. Se $\sup_{s \in [0, t+h]} \|u(s)\|$ for atingido no intervalo $[0, t]$, então

$$|m(u)(t+h) - m(u)(t)| = \left| \sup_{s \in [0, t+h]} \|u(s)\| - \sup_{s \in [0, t]} \|u(s)\| \right| = 0 < \varepsilon.$$

Suponha agora que $\sup_{s \in [0, t+h]} \|u(s)\|$ seja atingido no intervalo $(t, t+h]$ e seja s' o menor valor em $(t, t+h]$ tal que $\sup_{s \in [0, t+h]} \|u(s)\| = \|u(s')\|$. Seja também s'' o maior valor em $[0, t]$ tal que $\sup_{s \in [0, t]} \|u(s)\| = \|u(s'')\|$. Sabemos que $\|u(s'')\| < \|u(s')\|$ e $\|u(s'')\| \in [\|u(s'')\|, \|u(s')\|]$. Segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $\tilde{s} \in [s'', s']$ tal que $\|u(\tilde{s})\| = \|u(s'')\|$. Da escolha de s' e s'' temos que $\tilde{s} \in [t, s'] \subseteq [t, t+h]$. Logo,

$$\begin{aligned} |m(u)(t+h) - m(u)(t)| &= \left| \sup_{s \in [0, t+h]} \|u(s)\| - \sup_{s \in [0, t]} \|u(s)\| \right| \\ &= \|u(s')\| - \|u(s'')\| \\ &= \|u(s')\| - \|u(\tilde{s})\| \\ &\leq \|u(s') - u(\tilde{s})\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Com um processo análogo, mostra-se a desigualdade acima, para $h < 0$ com $t + h \geq 0$. Com isso, mostramos que $m(u)$ é contínua e, portanto, $m(u) \in C_b([0, \infty), \mathbb{R})$. As hipóteses **(i)** e **(ii)** são obviamente satisfeitas. Se $u \in C_b([0, \infty), X)$, temos

$$\begin{aligned} \|m(u)(t)\|_Z &= \sup_{t \in [0, \infty)} |m(u)(t)| \\ &= \sup_{t \in [0, \infty)} \left(\sup_{s \in [0, t]} \|u(s)\| \right) \\ &= \sup_{t \in [0, \infty)} \|u(t)\| = \|u\|_Y, \end{aligned}$$

o que mostra que vale **(iii)**, com $C_1 = C_2 = 1$.

1.2.2 Medidas de Não-Compacidade

A definição de medida de não compacidade de subconjuntos limitados mostra-se bastante útil na teoria de equações diferenciais em espaços de Banach. A seguir, definiremos medidas de não compacidade e abordaremos algumas propriedades que serão utilizadas nas próximas seções.

Definição 1.1. *Sejam E um espaço de Banach, B um subconjunto limitado de E e $\varepsilon > 0$. Uma cobertura $\{V_i\}$ de B é uma ε -cobertura se $\text{diam}(V_i) < \varepsilon$ para todo i . A **medida de não compacidade de B** é definida por*

$$\psi_E(B) = \inf\{\varepsilon > 0; \text{existe uma } \varepsilon\text{-cobertura finita de } B\}.$$

Uma cobertura $\{B_i\}$ de B por bolas de raio $\leq \varepsilon$ é chamada de ε -cobertura restrita de B . Assim, a medida restrita de não compacidade é definida por

$$\psi_E(B) = \inf\{\varepsilon > 0; \text{existe uma } \varepsilon\text{-cobertura restrita finita de } B\}.$$

A proposição a seguir apresenta várias propriedades das medidas de não compacidade que serão utilizadas no capítulo 4, cujas demonstrações podem ser encontradas em [?].

Proposição 1.4. *Sejam A e B subconjuntos limitados de um espaço de Banach E . Então*

- (a) $\psi_E(A) = 0$ se, e somente se, \bar{A} é compacto;
- (b) $\psi_E(A) = \psi_E(\bar{A})$;
- (c) $\psi_E(\lambda A) = |\lambda| \psi_E(A)$;
- (d) Se $A \subset B$, então $\psi_E(A) \leq \psi_E(B)$;
- (e) $\psi_E(A + B) \leq \psi_E(A) + \psi_E(B)$.

1.3 Cálculo Fracionário

O principal objetivo do cálculo fracionário é manter, num sentido generalizado, a relação entre operadores diferenciais e operadores integrais dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo. A seguir, serão introduzidas algumas notações convenientes para o operador diferencial e para o operador integral.

Definição 1.2. Denotemos por D o operador que corresponde uma função diferenciável a sua derivada, isto é

$$Df(x) := f'(x).$$

Definição 1.3. Denotemos por J_a o operador que corresponde uma função f , assumindo ser (Riemann) integrável no intervalo compacto $[a, b]$ a sua primitiva centrada em a , isto é

$$J_a f(x) := \int_a^x f(t) dt,$$

para $a \leq x \leq b$.

Definição 1.4. Para $n \in \mathbb{N}$, usaremos o símbolo D^n e J_a^n para denotar a n -ésima iteração de D e J_a , respectivamente, isto é

$$D^1 := D \quad e \quad J_a^1 := J_a,$$

e

$$D^n := DD^{n-1} \quad e \quad J_a^n := J_a J_a^{n-1}, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Com estas notações o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser reescrito como

$$DJ_a f = f$$

o que implica

$$D^n J_a^n f = f, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, D^n é a inversa a esquerda de J_a^n , num espaço adequado de funções. Nosso objetivo será estender num certo sentido a definição ??, para $n \in \mathbb{R}$. Para isto, desejamos preservar esta propriedade. Existem várias generalizações possíveis, em nosso caso, estamos interessados na generalização de Riemann-Liouville.

Antes de definirmos os operadores D^n e J_a^n , para $n \in \mathbb{R}$, lembraremos algumas propriedades já conhecidas para o caso $n \in \mathbb{N}$. O resultado a seguir pode ser demonstrado por indução e tem como utilidade reduzir o cálculo de J_a^n a uma única integral tipo convolução.

Lema 1.1. *Seja f uma função Riemann integrável em $[a, b]$. Então, para $a \leq x \leq b$ e $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

O lema abaixo é uma consequência do Teorema Fundamental do Cálculo.

Lema 1.2. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m > n$. Seja f uma função contínua com n -ésima derivada no intervalo $[a, b]$. Então,*

$$D^n f = D^m J_a^{m-n} f.$$

O lema ?? nos mostra que será útil generalizar a noção de fatorial para $n \in \mathbb{R}$. A esta generalização, que definiremos a seguir, denominaremos de Função Gamma.

Definição 1.5. *A função $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

*é chamada **Função Gamma de Euler**.*

O resultado a seguir prova, num certo sentido, a generalidade que propomos à Função Gamma ter:

Teorema 1.3. *Para $n \in \mathbb{N}$, vale que*

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução. Para $n = 1$, temos

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{-t} dt = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - e^{-k}) = 1.$$

Agora, suponha que o teorema valha para $n = x$ e verifiquemos para $n = x + 1$, isto é

$$\begin{aligned} \Gamma(x + 1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \lim_{k \rightarrow \infty, y \rightarrow 0^+} \int_y^k t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty, y \rightarrow 0^+} \left(e^{-y} y^x - e^{-k} k^x + x \int_y^k t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\ &= x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x) = x(x - 1)! = x!$$

□

Definição 1.6. *Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, a **integral de Beta de Euler** é definida por*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1 - t)^{\beta-1} dt.$$

Uma propriedade importante que relaciona a integral beta e a integral gama é dada pela relação

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

1.3.1 Operador Integral

Definição 1.7. *Seja $n \in (0, \infty)$. O operador J_a^n , definido em $L^1[a, b]$ por*

$$J_a^n f(x) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt,$$

para $a \leq x \leq b$, é chamado de **Operador Integral de Riemann-Liouville de ordem n** . Para $n = 0$, definimos $J_a^0 f(x) := I$, onde I representa o operador identidade.

Segue do lema ?? e do Teorema ?? que a integral fracionária de Riemann-Liouville coincide com a definição clássica de J_a^n , para $n \in \mathbb{N}$, exceto pelo fato de estendemos o domínio de Riemann integrável para Lebesgue integrável. Além disso, podemos observar que no caso $n \geq 1$, a integral $J_a^n f(x)$ existe para todo $x \in [a, b]$, pois o integrando é o produto de uma função integrável f com uma função contínua $g(t) = (x-t)^{n-1}$.

No caso em que $0 < n < 1$, a situação não é tão clara, mas é justificada pelo próximo resultado.

Lema 1.3. *Sejam $f \in L^1[a, b]$ e $n > 0$. Então, a integral $J_a^n f(x)$ existe em quase todo ponto $x \in [a, b]$. Além disso, a função $J_a^n f$ pertence a $L^1[a, b]$.*

Demonstração. Basta observar que

$$\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x-t) \phi_2(t) dt = (\phi_1 * \phi_2)(x)$$

onde

$$\phi_1(u) = \begin{cases} u^{n-1}, & \text{para } 0 < u \leq b-a \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$\phi_2(u) = \begin{cases} f(u), & \text{para } a < u \leq b \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por construção $\phi_j \in L^1(\mathbb{R})$ para $j \in \{1, 2\}$. Portanto segue da Desigualdade de Young que $J_a^n f$ existe em q.t.p. e $J_a^n f \in L^1[a, b]$.

□

A seguir, abordaremos um exemplo que será utilizado posteriormente.

Exemplo 1.2. *Considere $f(x) = (x-a)^\beta$, onde $\beta, n \in \mathbb{R}$ são tais que $\beta > -1$ e $n > 0$. Então*

$$J_a^n f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} (x-a)^{n+\beta}.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
J_a^n f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (t-a)^\beta (x-t)^{n-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^1 (s(x-a))^\beta (x-a-s(x-a))^{n-1} (x-a) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} (x-a)^{n+\beta} \int_0^1 s^\beta (1-s)^{n-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} (x-a)^{n+\beta} B(\beta+1, n) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} (x-a)^{n+\beta}.
\end{aligned}$$

Outra propriedade importante dos operadores integrais de ordem inteira também será preservada pela nossa generalização:

Teorema 1.4. *Sejam $m, n \geq 0$ e $\phi \in L^1[a, b]$. Então*

$$J_a^m J_a^n \phi = J_a^{m+n} \phi,$$

em quase todo ponto em $[a, b]$. Além disso, se $\phi \in C[a, b]$ ou $m+n \geq 1$, então a igualdade vale em todo $[a, b]$.

Demonstração. Temos que

$$J_a^m J_a^n \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{m-1} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} \phi(\tau) d\tau dt.$$

Do lema ??, segue que a integral existe. Além do mais, pelo Teorema de Fubini, podemos comutar a ordem de integração, obtendo

$$\begin{aligned}
J_a^m J_a^n \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \int_\tau^x (x-t)^{m-1} (t-\tau)^{n-1} \phi(\tau) dt d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau) \int_\tau^x (x-t)^{m-1} (t-\tau)^{n-1} dt d\tau.
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $t = \tau + s(x-\tau)$, temos

$$\begin{aligned}
J_a^m J_a^n \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau) \int_0^1 [(x-\tau)(1-s)]^{m-1} [s(x-\tau)]^{n-1} (x-\tau) ds d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau) (x-\tau)^{m+n-1} \int_0^1 (1-s)^{m-1} s^{n-1} ds d\tau.
\end{aligned}$$

Como $\int_0^1 (1-s)^{m-1} s^{n-1} ds = B(n, m) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, teremos que

$$J_a^m J_a^n \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_a^x \phi(\tau) (x-\tau)^{m+n-1} d\tau = J_a^{m+n} \phi(x),$$

em quase todo $[a, b]$. Além disso, se $\phi \in C[a, b]$, então $J_a^n \phi \in C[a, b]$ e, portanto, $J_a^m J_a^n \phi \in C[a, b]$ e $J_a^{m+n} \phi \in C[a, b]$. Assim, utilizando que duas funções contínuas que coincidem em quase todo ponto, coincidem em todo $[a, b]$. Segue que, $J_a^m J_a^n \phi(x) = J_a^{m+n} \phi(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Finalmente, se $\phi \in L^1[a, b]$ e $m+n \geq 1$, segue do resultado acima que

$$J_a^m J_a^n \phi = J_a^{m+n} \phi = J_a^{m+n-1} J_a^1 \phi,$$

em q.t.p. Como $J_a^1 \phi$ é contínua, temos que $J_a^{m+n} \phi = J_a^{m+n-1} J_a^1 \phi$ é contínua. Utilizando novamente que duas funções contínuas que coincidem quase todo ponto devem coincidir em todo intervalo $[a, b]$, o resultado segue. □

Para finalizar esta subseção, enunciaremos um corolário que é uma consequência direta do teorema anterior.

Corolário 1.1. *Sejam $\phi \in L^1[a, b]$ e $m, n \in \mathbb{R}$, tais que $m, n \geq 0$. Então*

$$J_a^m J_a^n \phi = J_a^n J_a^m \phi.$$

1.3.2 Operador Diferencial

Definição 1.8. *Sejam $n \in \mathbb{R}_+$ e $m = \lceil n \rceil$. O operador D_a^n , definido por*

$$D_a^n f := D^m J_a^{m-n} f$$

*é chamado **Operador Diferencial de Riemann-Liouville de ordem fracionária n** . Para $n = 0$, definimos $D_a^0 := I$, onde I é o operador identidade.*

Em consequência do lema ??, o operador D_a^n coincide com a definição clássica para $n \in \mathbb{N}$. O lema ?? também pode ser estendido para o caso onde $n \in \mathbb{R}_+$, como veremos a seguir.

Lema 1.4. *Sejam $n \in \mathbb{R}_+$ e $m \in \mathbb{N}$, tal que $m > n$. Então*

$$D_a^n = D^m J_a^{m-n}.$$

Demonstração. Como $m \geq \lceil n \rceil$ e $m, \lceil n \rceil \in \mathbb{N}$, temos $D^{m-\lceil n \rceil} J^{m-\lceil n \rceil} = I$ e, assim,

$$D^m J_a^{m-n} = D^{\lceil n \rceil} D^{m-\lceil n \rceil} J^{m-\lceil n \rceil} J^{\lceil n \rceil-n} = D^{\lceil n \rceil} J_a^{\lceil n \rceil-n} = D_a^n.$$

□

Teorema 1.5. *Sejam $n_1, n_2 \geq 0$ e $\phi \in L^1[a, b]$. Se $f = J_a^{n_1+n_2} \phi$, então*

$$D_a^{n_1} D_a^{n_2} f = D_a^{n_1+n_2} f.$$

Demonstração. Pela definição de derivada de ordem fracionária e pelo teorema fundamental do cálculo para o caso natural, temos que

$$\begin{aligned}
D_a^{n_1} D_a^{n_2} f &= D^{[n_1]} J_a^{[n_1]-n_1} D^{[n_2]} J_a^{[n_2]-n_2} J_a^{n_1+n_2} \phi \\
&= D^{[n_1]} J_a^{[n_1]-n_1} D^{[n_2]} J_a^{[n_2]+n_1} \phi \\
&= D^{[n_1]} J_a^{[n_1]-n_1} D^{[n_2]} J_a^{[n_2]} J_a^{n_1} \phi \\
&= D^{[n_1]} J_a^{[n_1]-n_1} J_a^{n_1} \phi \\
&= D^{[n_1]} J_a^{[n_1]} \phi = \phi.
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos ver que $D_a^{n_1+n_2} f = \phi$.

□

Com tudo que foi visto até aqui, será possível estender o Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 1.6. *Seja $n \geq 0$. Se $f \in L^1[a, b]$, então*

$$D_a^n J_a^n f = f,$$

em quase todo ponto.

Demonstração. Para $n = 0$, temos por definição que os operadores D_a^n e J_a^n são iguais ao operador identidade. Assim não há nada o que ser demonstrado.

Para $n > 0$, basta considerar $m = [n] \in \mathbb{N}$, para assim obter que

$$D_a^n J_a^n f = D_a^m J_a^{m-n} J_a^n f = D_a^m J_a^m f = f.$$

□

Para finalizar esta subseção, introduziremos a noção de transformada de Laplace, com a finalidade de obter uma relação entre esta e a integral de ordem fracionária, a qual será utilizada na demonstração da Proposição ??.

Definição 1.9. *Sejam X um espaço de Banach e $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ uma função mensurável, exponencialmente limitada com expoente $\omega \in \mathbb{R}$. Então, definimos a **transformada de Laplace** $\mathcal{L}f : \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \rightarrow X$ por*

$$\mathcal{L}f(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt.$$

Com isso, pode-se demonstrar que

$$\mathcal{L}(J^\alpha f)(z) = \frac{\mathcal{L}(f)(z)}{z^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

2 FUNÇÕES S-ASSINTOTICAMENTE ω -PERIÓDICAS

Consideremos $C_b([0, \infty), X)$ o espaço das funções contínuas e limitadas definidas em $[0, \infty)$ com valores em X , dotado da norma da convergência uniforme, a qual denotaremos por $\|\cdot\|_\infty$. Além disso, $C_0([0, \infty), X)$ e $C_\omega([0, \infty), X)$, para $\omega > 0$, serão subespaços de $C_b([0, \infty), X)$ definidos por

$$C_0([0, \infty), X) = \{f \in C_b([0, \infty), X); \lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t)\| = 0\},$$

$$C_\omega([0, \infty), X) = \{f \in C_b([0, \infty), X); f \text{ é } \omega\text{-periódica}\}.$$

Agora, introduziremos algumas definições importantes que serão utilizadas no decorrer deste capítulo e do capítulo 4.

Definição 2.1. *Sejam $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais e $l > 0$. Dizemos que \mathcal{P} é ***l-denso*** em \mathbb{R} , se $[a, a + l] \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Alternativamente, dizemos que o conjunto \mathcal{P} é *relativamente denso* em \mathbb{R} .

Definição 2.2. *Uma função $f \in C_b(\mathbb{R}, X)$ é chamada ***quase periódica*** se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto de \mathbb{R} relativamente denso, denotado por $\mathcal{H}(\varepsilon, f)$, tal que*

$$\|f(t + \xi) - f(t)\| < \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \xi \in \mathcal{H}(\varepsilon, f).$$

Definição 2.3. *Uma função $f \in C_b([0, \infty), X)$ é chamada ***assintoticamente quase periódica*** se existe uma função quase periódica g e uma função $\varphi \in C_0([0, \infty), X)$, tais que $f = g + \varphi$. Se g é ω -periódica, f é dita ***assintoticamente ω -periódica***.*

Vale ressaltar que a Proposição 1.12 em [?], garante a unicidade da decomposição $f = g + \varphi$ na definição acima.

No restante desta seção, por simplicidade, fixaremos algumas notações. Para um número positivo fixado ω e para cada $t \geq 0$, consideremos a decomposição

$$t = \xi(t) + \tau(t)\omega, \tag{2.1}$$

com $\xi(t) \in [0, \omega)$ e $\tau(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Além disso, para $h \geq 0$ e $f \in C_b([0, \infty), X)$, denotaremos por f_h a função $f_h : [0, \infty) \rightarrow X$ definida por $f_h(t) = f(t + h)$.

Agora, veremos algumas propriedades qualitativas das funções contínuas e limitadas $f : [0, \infty) \rightarrow X$, para as quais existe $\omega > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + \omega) - f(t)) = 0$ (estas funções serão chamadas funções S-assintoticamente ω -periódicas). Começaremos estabelecendo algumas terminologias.

Definição 2.4. Uma função $f \in C_b([0, \infty), X)$ é dita **S-assintoticamente periódica** se existe $\omega > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + \omega) - f(t)) = 0.$$

Neste caso, dizemos que ω é um período assintótico de f e que f é S-assintoticamente ω -periódica.

Observe que dadas duas funções S-assintoticamente ω -periódicas, a dizer f e g , e $\alpha \in \mathbb{F}$ (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), então a função $F := f + \alpha g$ também é S-assintoticamente ω -periódica. Com isso, usaremos a notação $SAP_\omega(X)$ para denotar o subespaço de $C_b([0, \infty), X)$ formado pelo conjunto das funções S-assintoticamente ω -periódicas.

O resultado a seguir é uma consequência imediata das definições anteriores.

Lema 2.1. *Sejam $f : [0, \infty) \rightarrow X$ uma função S-assintoticamente ω -periódica e $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência tal que $t_n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Se $f_{t_n} \rightarrow F$ uniformemente em compactos de $[0, \infty)$, então $F \in C_\omega([0, \infty), X)$.*

Demonstração. Como F é limite uniforme em subconjuntos compactos de $[0, \infty)$ de funções contínuas e limitadas, então $F \in C_b([0, \infty), X)$. Para $t \geq 0$ e $\varepsilon > 0$, podemos escolher $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|F(s) - f_{t_n}(s)\| = \|F(s) - f(t_n + s)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad s \in [t, t + \omega]$$

e

$$\|f(\mu + t_n + \omega) - f(\mu + t_n)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \mu \geq 0,$$

para todo $n \geq n_0$. Assim, para $n \geq n_0$, temos que

$$\begin{aligned} \|F(t + \omega) - F(t)\| &\leq \|F(t + \omega) - f(t + \omega + t_n)\| + \|f(t + \omega + t_n) - f(t + t_n)\| \\ &\quad + \|f(t + t_n) - F(t)\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $F(t + \omega) = F(t)$.

□

É importante notar que nem toda função S-assintoticamente μ -periódica é assintoticamente μ -periódica. Daremos um exemplo disso a seguir.

Exemplo 2.1. *Seja $X = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{R} \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$, munido da norma*

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Consideremos $f : [0, \infty) \rightarrow X$ definida por $f(t) = \left(\frac{2nt}{t^2 + n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. A função f assim definida é limitada, uniformemente contínua e S-assintoticamente μ -periódica para cada $\mu > 0$. No entanto, f não é assintoticamente μ -periódica.

De fato, sabemos que $(t - n)^2 \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\|f(t)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{2nt}{t^2 + n^2} \right| \leq 1, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2.2)$$

Agora, sejam $s, t \in [0, \infty)$, temos que

$$\begin{aligned} f(t+s) - f(t) &= \left(\frac{2n(t+s)}{(t+s)^2 + n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}} - \left(\frac{2nt}{t^2 + n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= \left(\frac{(t^2 + n^2)(2nt + 2ns) - 2nt(n^2 + t^2 + s^2 + 2ts)}{[(t+s)^2 + n^2](t^2 + n^2)} \right)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= \left(\frac{2sn(n^2 - st - t^2)}{[(t+s)^2 + n^2](t^2 + n^2)} \right)_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|f(t+s) - f(t)\| &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{2sn(n^2 - st - t^2)}{[(t+s)^2 + n^2](t^2 + n^2)} \right| \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \frac{2sn |n^2 - st - t^2|}{[(t+s)^2 + n^2](t^2 + n^2)} \\ &\leq 2s. \end{aligned}$$

Desta desigualdade e de (??), f é limitada e uniformemente contínua. Além disso, para $\mu > 0$ e $t \geq 1$ temos

$$\begin{aligned} \|f(t+\mu) - f(t)\| &\leq \sup_{n \geq 1} \frac{2n\mu}{(t^2 + n^2)} \\ &\leq \frac{\mu}{t}. \end{aligned}$$

Portanto f é S -assintoticamente μ -periódica para todo $\mu > 0$. No entanto, f não é assintoticamente μ -periódica. Para mostrar esta afirmação, suponha que existem $g \in C_\mu([0, \infty), X)$ e $\varphi \in C_0([0, \infty), X)$ tal que $f = g + \varphi$. Se $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, então cada coordenada f_n é assintoticamente μ -periódica e $f_n(t+k\mu) = g_n(t) + \varphi_n(t+k\mu)$, para cada $k, n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} f_n(t+k\mu) = 0$, então $g_n(t) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$. Conseqüentemente, a função g é identicamente nula e $f = \varphi$, o que não pode ocorrer, pois $\|f(n)\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Isto prova que f não é assintoticamente μ -periódica.

Proposição 2.1. *Seja $f : [0, \infty) \rightarrow X$ uma função S -assintoticamente ω -periódica e assintoticamente quase periódica. Então, f é assintoticamente ω -periódica.*

Demonstração. Podemos decompor f como $f = g + \varphi$, onde g é uma função quase periódica e $\varphi \in C_0([0, \infty), X)$. Como f é assintoticamente quase periódica, existe uma seqüência de número reais $(t_n)_{n \in \mathbb{R}}$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ e $g_{t_n} \rightarrow g$ uniformemente em $[0, \infty)$.

Portanto $f_{t_n} = g_{t_n} + \varphi_{t_n} \rightarrow g$ uniformemente em $[0, \infty)$. Segue do Lema (??) que $g \in C_\omega([0, \infty), X)$ o que, por sua vez, implica que a função f é assintoticamente ω -periódica.

□

A definição que se segue será crucial para a compreensão dos próximos resultados:

Definição 2.5. *Definimos o espaço $F(\mathbb{R}^+, X)$, como sendo o espaço das funções contínuas $h : [0, \infty) \rightarrow X$ que satisfazem a seguinte propriedade:*

I) Dado $\varepsilon > 0$, existe $T = T(\varepsilon) \geq 0$ tal que o conjunto de números reais

$$\mathcal{T}_{+,T}(h, \varepsilon) := \{\tau \geq 0; \sup_{t \geq T} \|h(t + \tau) - h(t)\| < \varepsilon\}$$

é relativamente denso em $[0, \infty)$. Desta forma, podemos encontrar $L(\varepsilon)$ tal que $\mathcal{T}_{+,T}(h, \varepsilon) \cap [a, a + L(\varepsilon)] \neq \emptyset$, para todo $a \geq 0$.

Assim, se f é uma função assintoticamente quase periódica, então $f \in F(\mathbb{R}^+, X)$. Mais geralmente, vale o próximo Teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [?].

Teorema 2.1. *Uma função f é assintoticamente quase periódica se, e somente se, $f \in F(\mathbb{R}^+, X)$.*

O seguinte corolário do Teorema acima nos dará um bom método para saber se uma dada função é assintoticamente ω -periódica.

Corolário 2.1. *Seja $\varphi \in C_b([0, \infty), X)$. Suponha que existe uma sequência $(n_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, com $n_1 = 1$ e $n_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$, tal que*

$$\alpha = \sup_{j \in \mathbb{N}} (n_{j+1} - n_j) < \infty \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t + n_j \omega) - \varphi(t)) = 0$$

uniformemente para $j \in \mathbb{N}$, então φ é assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Tomando $j = 1$, no limite posto no enunciado, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t + \omega) - \varphi(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t + n_1 \omega) - \varphi(t)) = 0.$$

Portanto, φ é S-assintoticamente ω -periódica. Agora, mostremos que φ é assintoticamente quase periódica. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\sup_{t \geq N} \|f(t + n_j \omega) - f(t)\| < \varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Tome $L(\varepsilon) = \alpha \omega + \varepsilon$. Para $a \geq 0$, existe $j_a \in \mathbb{N}$ tal que $n_{j_a} \omega \in [a, a + L(\varepsilon)]$. Além disso, se definimos $\mathcal{T}_\omega = \{n_j \omega, j \in \mathbb{N}; \sup_{t \geq N} \|f(t + n_j \omega) - f(t)\| < \varepsilon\}$, podemos ver que $n_{j_a} \omega \in \mathcal{T}_\omega$. Assim, $[a, a + L(\varepsilon)] \cap \mathcal{T}_\omega \neq \emptyset$. Além do mais, como $a \geq 0$ foi tomado arbitrariamente, segue que o conjunto \mathcal{T}_ω é relativamente denso em $[0, \infty)$. Mas,

$$\mathcal{T}_\omega \subset \mathcal{T}_{+,T}(f, \varepsilon) := \{\tau \geq 0; \sup_{t \geq T} \|f(t + \tau) - f(t)\| < \varepsilon\}.$$

Daí, $\mathcal{T}_{+,T}(f, \varepsilon)$ também é relativamente denso em $[0, \infty)$. Com isso, temos que $f \in F(\mathbb{R}^+, X)$, utilizando o Teorema ??, segue que f é assintoticamente quase periódica. \square

Concluiremos esta seção com alguns conceitos e propriedades do espaço $SAP_\omega(X)$.

Teorema 2.2. *O subespaço $SAP_\omega(X) \subset C_b([0, \infty), X)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $SAP_\omega(X)$ que converge para $f \in C_b([0, \infty), X)$. A decomposição

$$f(\omega + t) - f(t) = f(\omega + t) - f_n(\omega + t) + f_n(\omega + t) - f_n(t) + f_n(t) - f(t),$$

nos mostra que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\omega + t) - f(t) = 0$. Portanto, $f \in SAP_\omega(X)$. \square

Definição 2.6. *Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua. Dizemos que f é uniformemente S-assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados se, para todo $K \subset X$ limitado, o conjunto $\{f(t, x); t \geq 0, x \in K\}$ é limitado e, além disso,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + \omega, x) - f(t, x)) = 0,$$

uniformemente em K .

Definição 2.7. *Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua. Dizemos que f é assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados se, para todo $\varepsilon > 0$ e $K \subset X$ limitado, existem $L_{\varepsilon, K} \geq 0$ e $\delta_{\varepsilon, K} > 0$ tais que $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq L_{\varepsilon, K}$ e $x, y \in K$, com $\|x - y\| \leq \delta_{\varepsilon, K}$.*

Teorema 2.3. *Sejam X, Y espaços de Banach, $u : [0, \infty) \rightarrow X$ uma função S-assintoticamente ω -periódica e $f : [0, \infty) \times X \rightarrow Y$ uniformemente S-assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados e uniformemente contínua em conjuntos limitados. Então, $v(t) = f(t, u(t))$ é uma função S-assintoticamente ω -periódica.*

Demonstração. Como $u \in C_b([0, \infty), X)$, a imagem de u é um subconjunto limitado de X . Da definição ??, temos que o conjunto $\{v(t) = f(t, u(t)); t \geq 0\}$ é limitado, ou seja, v é uma função limitada. Assim, como u e f são contínuas segue que $v \in C_b([0, \infty), X)$.

Das Definições ?? e ??, temos que para todo $\varepsilon > 0$, existem $L_\varepsilon^1 > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$\max\{\|f(t + \omega, z) - f(t, z)\|, \|f(t, x) - f(t, y)\|\} \leq \varepsilon,$$

para todo $t \geq L_\varepsilon^1$, $x, y, z \in \mathcal{I}(u)$, com $\|x - y\| < \varepsilon$. Além disso, como $u \in SAP_\omega(X)$, existe $L_\varepsilon^2 > 0$ tal que $\|u(t + \omega) - u(t)\| < \delta$, para todo $t \geq L_\varepsilon^2$. Assim, para $t \geq \max\{L_\varepsilon^1, L_\varepsilon^2\}$, temos que

$$\begin{aligned} \|v(t + \omega) - v(t)\| &= \|f(t + \omega, u(t + \omega)) - f(t, u(t))\| \\ &\leq \|f(t + \omega, u(t + \omega)) - f(t, u(t + \omega))\| + \|f(t, u(t + \omega)) - f(t, u(t))\| \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $v \in SAP_\omega(X)$. \square

3 SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES LIMITADOS

3.1 Semigrupos Uniformemente Contínuos

Como já convencionamos, ao longo desta seção, consideremos X como sendo um espaço de Banach com norma $\| \cdot \|_X$ e $\mathcal{L}(X)$ como sendo o conjunto dos operadores lineares limitados de X em X , com a norma

$$\| T \|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\| Tx \|_X}{\| x \|_X}.$$

Por simplicidade, denotaremos ambas as normas citadas anteriormente por $\| \cdot \|$. O operador identidade em X será denotado por I .

Definição 3.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados de X em X é um **semigrupo de operadores lineares limitados em X** se*

- (i) $T(0) = I$;
- (ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

Além do mais, diremos que um semigrupo de operadores lineares limitados $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X é **uniformemente contínuo** se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \| T(t) - I \| = 0.$$

É possível demonstrar diretamente da definição que se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados, então

$$\lim_{s \rightarrow t} \| T(s) - T(t) \| = 0.$$

Definição 3.2. *Denotaremos por $\mathcal{D}(A) \subset X$ o conjunto dado por*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

O operador linear A definido por

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x \Big|_{t=0} \text{ para } x \in \mathcal{D}(A).$$

é chamado **gerador infinitesimal** do semigrupo $T(t)$ e $\mathcal{D}(A)$ é o domínio de A .

O teorema a seguir nos dará uma condição necessária e suficiente para que um operador linear seja gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo. Para provar este resultado, antes enunciaremos e demonstraremos um lema de Análise Funcional.

Lema 3.1. *Seja $T \in \mathcal{L}(X)$, com $\|T\| < 1$. Então $I - T$ é inversível e pertence a $\mathcal{L}(X)$.*

Demonstração. Defina o operador linear

$$S := \sum_{j=0}^{\infty} T^j.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S(I - T) = (I - T)S &= S - T.S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j - \sum_{j=0}^{\infty} T^{j+1} \\ &= I + \sum_{j=1}^{\infty} T^j - \sum_{j=1}^{\infty} T^j \\ &= I. \end{aligned}$$

Portanto $S = (I - T)^{-1}$. Tomando $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned} \|Sx\| &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} T^j x \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|T^j x\| \\ &\leq \|x\| \sum_{j=0}^{\infty} \|T\|^j. \end{aligned}$$

Como $\|T\| < 1$, temos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|T\|^j = \frac{1}{1 - \|T\|} =: K$$

Assim, para todo $x \in X$, existe $K > 0$, tal que $\|Sx\| \leq K \|x\|$. Portanto $S = (I - T)^{-1}$ e $S \in \mathcal{L}(X)$.

□

Teorema 3.1. *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.*

Demonstração. Seja $A : X \rightarrow X$ um operador linear limitado. Defina

$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \quad (3.1)$$

Vê-se facilmente que o lado direito da equação (??) converge em norma para cada $t \geq 0$ e, além disso, define um operador linear limitado $T(t)$. Além do mais, $T(0) = I$ e $T(s+t) = T(s)T(t)$, para todo $t, s \geq 0$. Portanto, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados em X . Mas

$$\begin{aligned}
 \|T(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} \\
 &= t \|A\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} \|A\|^{n-1}}{n!} \\
 &\leq t \|A\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} \|A\|^{n-1}}{(n-1)!} \\
 &= t \|A\| e^{t\|A\|}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Assim, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X . Além disso, A é o gerador infinitesimal deste semigrupo, pois

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n - I \right) - A \right\| \\
 &= \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} A^n \right\| \\
 &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|t|^{n-1}}{n!} \|A\|^n \\
 &= \frac{e^{t\|A\|} - 1}{t} - \|A\|.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| = 0.$$

Reciprocamente, considere $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X . Como $\|T(t) - I\| \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(t) - I\| < 1, \quad \text{sempre que } 0 < t < \delta.$$

Assim, fixado $0 < \rho < \delta$, temos que

$$\left\| I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s) ds \right\| = \left\| \frac{1}{\rho} \left[\int_0^\rho (I - T(s)) ds \right] \right\| \leq \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \| I - T(s) \| ds < 1.$$

Utilizando o lema ??, temos que $\int_0^\rho T(s) ds$ é inversível e sua inversa é um operador linear limitado. Agora, seja $h \in (0, \rho)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I) \int_0^\rho T(s) ds &= \frac{1}{h} \left\{ \int_0^\rho T(h+s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \int_h^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \int_h^\rho T(s) ds + \int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds - \int_h^\rho T(s) ds \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{T(h) - I}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}. \quad (3.2)$$

Lembrando que, para todo $t \geq 0$, vale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) ds = T(t),$$

se fizermos $h \rightarrow 0^+$ na igualdade (??), concluímos que $h^{-1}(T(h) - I)$ converge em norma e, portanto, fortemente para o operador linear limitado $(T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}$, o qual é por definição o gerador de $T(t)$.

□

3.2 Semigrupos Fortemente Contínuos

Nesta seção, definiremos a noção de semigrupo fortemente contínuo. Veremos que o gerador de um semigrupo fortemente contínuo é linear, mas em geral não é limitado. Também mostraremos que o domínio do gerador é um subconjunto denso de X .

Definição 3.3. Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de operadores lineares limitados em X é um semigrupo **fortemente contínuo** de operadores lineares limitados, se

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x, \text{ para cada } x \in X. \quad (3.3)$$

Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X é chamado de **semigrupo de classe C_0** ou simplesmente de **C_0 -semigrupo**.

No Teorema a seguir, veremos que todo C_0 -semigrupo possui uma limitação exponencial.

Teorema 3.2. *Considere $T(t)$ um C_0 -semigrupo. Existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$, tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \text{ para } 0 \leq t < \infty. \quad (3.4)$$

Demonstração. Primeiramente, mostremos que existe $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é limitado para $t \in [0, \eta]$. De fato, supondo o contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\eta = \frac{1}{n}$, existiria $0 \leq t_n \leq \frac{1}{n}$ com $\|T(t_n)\| \geq n$. Logo, existiria uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $t_n \geq 0$, satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ e $\|T(t_n)\| \geq n$. Assim, pelo Princípio da Limitação Uniforme, deve existir $x \in X$ tal que $T(t_n)x \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, contrariando (??). Desta forma, existem constantes $\eta > 0$ e $M \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq M$ para todo $t \in [0, \eta]$. E como $\|T(0)\| = 1$, temos $M \geq 1$.

Seja $t \geq 0$, existem constantes $k \in \mathbb{N}$ e $\delta \in [0, \eta]$ tais que $t = k\eta + \delta$. Portanto, pelas propriedades de semigrupos, temos

$$\|T(t)\| = \|T(k\eta + \delta)\| \leq \|T(\eta)\|^k \|T(\delta)\| \leq MM^{\frac{t}{\eta}}.$$

Tomando $\omega := \eta^{-1} \log M$, temos

$$\|T(t)\| \leq Me^{t\omega}, \text{ para } t \geq 0.$$

□

Corolário 3.1. *Se $T(t)$ é um C_0 -semigrupo, então para cada $x \in X$, a função $f_x : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow X$ definida por $f_x(t) := T(t)x$ é contínua definida \mathbb{R}_0^+ (a reta real não negativa) e tomando valores em X .*

Demonstração. Para todo $t \geq 0$, mostraremos que $\lim_{s \rightarrow t} f_x(s) = f_x(t)$ (observe que para $t = 0$, este limite só faz sentido quando $s > 0$, ou seja, quando $s \rightarrow t^+$). De fato, quando $s \rightarrow t^+$, tomando $h := s - t > 0$, temos

$$\begin{aligned} \|f_x(s) - f_x(t)\| &= \|T(t+h)x - T(t)x\| \\ &\leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \longrightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{s \rightarrow t^+} f_x(s) = f_x(t).$$

Além disso, quando $s \rightarrow t^-$, para $0 \leq h \leq t$, tomando $h := t - s$, temos

$$\begin{aligned} \|f_x(s) - f_x(t)\| &= \|T(t-h)x - T(t)x\| \\ &\leq \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^{\omega(t-h)} \|T(h)x - x\| \longrightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{s \rightarrow t} f_x(s) = f_x(t), \text{ para todo } t > 0.$$

□

Teorema 3.3. *Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo e seja A seu gerador infinitesimal. Então*

(a) *Para cada $x \in X$,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

(b) *Para cada $x \in X$, temos que $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ e*

$$A\left(\int_0^t T(s)x ds\right) = T(t)x - x.$$

(c) *Para cada $x \in D(A)$, temos que $T(t)x \in D(A)$ e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \quad (3.5)$$

(d) *Para cada $x \in D(A)$, vale*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Demonstração.

a) Seja $x \in X$. Como $f_x(t) = T(t)x$ é contínua, então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

b) Sejam $x \in X$ e $h > 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)x ds &= \frac{1}{h} \int_0^t T(h+s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{h+t} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^t T(s)x ds + \frac{1}{h} \int_t^{h+t} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_h^t T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{h+t} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds. \end{aligned}$$

Da letra (a) deste Teorema, sabemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

Portanto,

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A) \quad \text{e} \quad A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x.$$

c) Seja $x \in D(A)$ e $h > 0$. Então

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} (T(t)x) &= \frac{T(t)T(h)x - T(t)x}{h} \\ &= T(t) \left(\frac{T(h) - T(t)}{h} \right) (x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} (T(t)x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t) \left(\frac{T(h) - T(t)}{h} \right) (x) = T(t)Ax. \quad (3.6)$$

Portanto, $T(t)x \in D(A)$, $AT(t)x = T(t)Ax$ e (??) implica que

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Assim, a derivada à direita de $T(t)x$ é $T(t)Ax$. Para provar (??), temos que mostrar que para $t > 0$, a derivada à esquerda de $T(t)x$ existe e coincide com $T(t)Ax$. Mas, lembre que

$$\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax = T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right) + T(t-h)Ax - T(t)Ax.$$

Ambos os termos do lado direito vão para zero, quando $h \rightarrow 0^+$. De fato, $x \in D(A)$ e $\|T(t-h)\|$ é limitado em $0 \leq h \leq t$, então

$$\left\| T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right) \right\| \leq \|T(t-h)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } h \rightarrow 0^+.$$

Por outro lado, como $T(t)$ é fortemente contínua, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} T(t-h)Ax = T(t)Ax.$$

Portanto,

$$\frac{d^-}{dt} T(t)x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} = T(t)Ax.$$

d) Seja $x \in D(A)$. Segue da identidade (??) que

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \frac{d}{d\tau} T(\tau)x d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau.$$

□

Corolário 3.2. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $T(t)$, então $D(A)$, o domínio de A , é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Para cada $t > 0$, defina

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds.$$

Segue do item (b) do Teorema ?? que $x_t \in D(A)$ e do item (a) do mesmo Teorema, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x_t = T(0)x = x.$$

Assim, $\overline{D(A)} = X$.

Sabemos que o gerador de um semigrupo é um operador linear. Agora mostremos que A é um operador fechado. Com efeito, seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$ com $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$. Segue do item (d) do Teorema (??) que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds. \quad (3.7)$$

O integrando do lado direito de (??) converge uniformemente em intervalos compactos para $T(s)y$. Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (??), temos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds.$$

Desta forma, para $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y ds \\ &= T(0)y = y. \end{aligned}$$

Portanto, $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Desta forma concluímos que A é um operador linear fechado.

□

Lema 3.2. *Seja $H : I \rightarrow X$, onde $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ e X é um espaço normado. Se H é diferenciável e $\frac{d}{dt}H(t) = 0$, $\forall t \in I$, então $H(t) \equiv C$.*

Demonstração. Com efeito, fixado $\lambda \in X^*$, consideremos a função $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(t) = \lambda(H(t))$. Observe que f é diferenciável, pois

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda(H(t+h)) - \lambda(H(t))}{h} \\ &= \lambda \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(t+h) - H(t)}{h} \right) \\ &= \lambda(0) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $f(t) = c$, para todo $t \in I$. Em particular para $t_0 \in I$, temos

$$\lambda(H(t)) = f(t) = f(t_0) = \lambda(H(t_0)), \quad \forall t \in I.$$

□

Teorema 3.4. *Sejam $T(t)$ e $S(t)$ C_0 -semigrupos de operadores lineares limitados com geradores infinitesimais A e B , respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$, para $t \geq 0$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que para $t = 0$, temos $T(0) = I = S(0)$. Agora, sejam $x \in D(A) = D(B)$ e $t > 0$. Do item (c) do Teorema ??, segue que a função $f_x(s) := T(t-s)S(s)x$, definida em $[0, t]$ com valores em X , é diferenciável e que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} f_x(s) &= \frac{d}{ds} T(t-s)S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0. \end{aligned}$$

Assim, $f_x(s)$ é constante e, em particular, temos

$$T(t)x = f_x(t) = f_x(0) = S(t)x, \quad \forall x \in D(A).$$

Portanto, $S(t)$ e $T(t)$ coincidem em $D(A)$. Como $D(A)$ é denso em X , dado $x \in X$, existe uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ com $x_n \rightarrow x$. Logo, $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in X$, pois $S(t)$ e $T(t)$ são operadores contínuos.

□

3.3 O Teorema de Hille-Yosida

Seja $T(t)$ um C_0 -semigrupo. Já vimos, no Teorema ??, que existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para cada $t \geq 0$. Se $\omega = 0$, $T(t)$ é dito **uniformemente limitado** e se $M = 1$, $T(t)$ é dito **C_0 -semigrupo de contrações**. Esta seção é voltada para a caracterização do gerador infinitesimal de C_0 -semigrupos de contrações. Condições serão dadas sobre o resolvente de um operador A , as quais são necessárias e suficientes para que A seja o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações.

Teorema 3.5. *Se um operador linear A (não limitado) é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, então valem:*

- (i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;
- (ii) O conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, contém \mathbb{R}^+ e para cada $\lambda > 0$, temos

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (3.8)$$

Demonstração. Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo. Segue do Corolário ?? que A é fechado e $D(A)$ é denso em X , logo vale (i). Agora, para $\lambda > 0$ e $x \in X$, defina

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt. \quad (3.9)$$

Como $t \mapsto T(t)x$ é contínua e uniformemente limitada, a integral em (??) existe e define um operador linear limitado $R(\lambda)$ satisfazendo

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)x\| dt \leq \|x\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \leq \frac{1}{\lambda} \|x\|. \quad (3.10)$$

Além disso, para $h > 0$, temos

$$\begin{aligned} T(h)R(\lambda)x &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-\lambda t} T(t+h)x dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_h^{N+h} e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt + \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt \right) \\ &\quad - \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt \\ &= \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{N+h} e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt \right) - \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt \\ &= e^{\lambda h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - e^{\lambda h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt. \end{aligned}$$

Quando $h \rightarrow 0^+$, o lado direito da igualdade acima converge para $\lambda R(\lambda)x - x$. Isto implica que, para cada $x \in X$ e $\lambda > 0$, $R(\lambda)x \in D(A)$ e $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$, ou

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I. \quad (3.11)$$

Para $x \in D(A)$, pela Proposição ??, temos

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} AT(t)x dt \\ &= A \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) \\ &= AR(\lambda)x. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De (??) e (??), segue que

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x \quad \text{para } x \in D(A).$$

Portanto, $R(\lambda)$ é a inversa de $\lambda I - A$ e existe para todo $\lambda > 0$, ou seja, $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$. Segue de ?? que, para todo $x \neq 0$, temos

$$\frac{\|R(\lambda)x\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{\lambda} \implies \|R(\lambda)\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \frac{\|R(\lambda)x\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

□

Para mostrar que as condições (i) e (ii) são de fato suficientes para que A seja o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações precisamos de mais alguns lemas.

Lema 3.3. *Seja A um operador satisfazendo (i) e (ii) do Teorema ?? e seja $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \quad \text{para cada } x \in X.$$

Demonstração. Suponha que $x \in D(A)$. Então

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| &= \|(\lambda R(\lambda : A) - I)x\| \\ &= \|AR(\lambda : A)x\| \\ &= \|R(\lambda : A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda} \|Ax\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \quad \forall x \in D(A).$$

Como $D(A)$ é denso em X e $\|\lambda R(\lambda : A)\| \leq 1$ então, para cada $x \in X$, existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ e

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| &= \|\lambda R(\lambda : A)x - \lambda R(\lambda : A)x_n\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\| \\ &\quad + \|x_n - x\| \\ &\leq \|\lambda R(\lambda : A)\| \|x - x_n\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leq \|x - x_n\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $x \in X$, temos que $\lambda R(\lambda : A)x \rightarrow x$, quando $\lambda \rightarrow \infty$.

□

A *aproximação de Yosida* de um operador A é definido por

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I.$$

Observe que desta última igualdade temos que, se $[0, \infty) \subset \rho(A)$, então $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, pois neste caso sabemos que $R(\lambda : A) \in \mathcal{L}(X)$.

Lema 3.4. *Seja A um operador satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema ???. Se A_λ é a aproximação Yosida de A , então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax, \quad \text{para cada } x \in D(A).$$

Demonstração. Com efeito, para todo $x \in D(A)$, tem-se que $Ax \in X$. Logo do lema ??, temos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = Ax.$$

□

Lema 3.5. *Considere A um operador satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema ???. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ} . Além disso, para cada $x \in X$, $\lambda, \mu > 0$, temos*

$$\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \| \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \|.$$

Demonstração. Como já observamos que $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, segue do Teorema ??? que A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo e^{tA_λ} de operadores lineares limitados. Além disso,

$$\begin{aligned} \| e^{tA_\lambda} \| &= \| e^{-t\lambda I} e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)} \| \\ &= e^{-t\lambda} \| e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)} \| \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda \| \lambda R(\lambda:A) \|} \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda} = 1. \end{aligned}$$

Portanto e^{tA_λ} é um semigrupo de contrações. Agora, como para qualquer $\lambda, \mu > 0$, (e $t > 0$) os operadores e^{tA_λ} , e^{tA_μ} , A_λ e A_μ comutam, temos que

$$\begin{aligned} \| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x \right) ds \right\| \\ &= \int_0^1 \| t (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}) \cdot (A_\lambda x - A_\mu x) \| ds \\ &\leq t \int_0^1 \| A_\lambda x - A_\mu x \| ds \\ &= t \| A_\lambda x - A_\mu x \|. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.6. (Hille-Yosida).

Um operador linear A (não limitado) é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $T(t)$, $t \geq 0$ se, e somente se, valem:

- (i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;
(ii) O conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, contém \mathbb{R}^+ e para cada $\lambda > 0$, temos

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (3.13)$$

Demonstração. Se A é o gerador de um C_0 -semigrupo de contrações $T(t)$, segue do Teorema ?? que valem (i) e (ii). Reciprocamente, consideremos um operador linear A satisfazendo (i) e (ii) e sejam $\lambda, \mu > 0$ e $t \in [0, t_0]$, para $t_0 \geq 0$ fixado. Do Lema ??, segue que para $x \in D(A)$ vale

$$\begin{aligned} \|e^{tA\lambda}x - e^{tA\mu}x\| &\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leq t_0 \|A_\lambda x - Ax\| + t_0 \|A_\mu x - Ax\|. \end{aligned}$$

Do Lema ??, segue que

$$\|e^{tA\lambda}x - e^{tA\mu}x\| \rightarrow 0, \text{ quando } \lambda, \mu \rightarrow \infty.$$

Portanto, para $x \in D(A)$, $e^{tA\lambda}x$ converge quando $\lambda \rightarrow \infty$ e a convergência é uniforme em intervalos limitados. Assim, para todo $x \in D(A)$ e $t \in [0, t_0]$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|e^{tA\lambda}x - e^{tA\mu}x\| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para todo } \lambda, \mu \geq N_1. \quad (3.14)$$

Agora consideremos $x \in X$. Como $D(A)$ é denso em X , existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$, onde, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para todo } n \geq N_2. \quad (3.15)$$

Assim, para $x \in X$ e $t \in [0, t_0]$, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar N suficientemente grande, de forma que

$$\begin{aligned} \|e^{tA\lambda}x - e^{tA\mu}x\| &\leq \|e^{tA\lambda}x - e^{tA\lambda}x_N\| + \|e^{tA\lambda}x_N - e^{tA\mu}x_N\| + \|e^{tA\mu}x_N - e^{tA\mu}x\| \\ &\leq \|e^{tA\lambda}\| \|x - x_N\| + \|e^{tA\lambda}x_N - e^{tA\mu}x_N\| + \|e^{tA\mu}\| \|x - x_N\| \\ &\leq 2 \|x_N - x\| + \|e^{tA\lambda}x_N - e^{tA\mu}x_N\| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $e^{tA\lambda}x$ é uma sequência de Cauchy. Logo $e^{tA\lambda}x$ converge quando $\lambda \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$ e $t \in [0, t_0]$, isto é, $e^{tA\lambda}x$ converge uniformemente em intervalos limitados. Assim, mostraremos que, para todo $t \geq 0$ e $x \in X$, se definimos $T(t)x := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA\lambda}x$, então $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Primeiramente, observe que $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, pois como $\|e^{tA\lambda}\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$, temos que

$$\|T(t)x\| = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|e^{tA\lambda}x\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|e^{tA\lambda}\| \|x\| \leq \|x\|, \text{ para todo } x \in X.$$

Agora, mostremos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações. Com efeito, pela definição de $T(t)$ e por $\{e^{tA\lambda}\}_{t \geq 0}$ ser um semigrupo uniformemente contínuo de contrações, valem

(i) $T(0) = I$, pois para todo $x \in X$, temos

$$T(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} x = x.$$

(ii) Para todo $t, s \geq 0$, temos $T(t)T(s) = T(t+s)$, pois para todo $x \in X$ vê-se que

$$\begin{aligned} T(t)T(s)x &= T(t)\left(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{sA\lambda}x\right) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA\lambda}e^{sA\lambda}x \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{(t+s)A\lambda}x = T(t+s)x. \end{aligned}$$

(iii) Por fim, temos $\|T(t)\| \leq 1$, pois para todo $x \in X$, já vimos que $\|T(t)x\| \leq \|x\|$ e, daí,

$$\|T(t)\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|T(t)x\|}{\|x\|} \leq 1$$

Portanto, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações. Também sabemos que $t \mapsto T(t)x$, definida para $t \geq 0$, é contínua, pois é limite uniforme das funções contínuas $t \mapsto e^{tA\lambda}x$, logo $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = T(0)x = x$, ou seja, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Para concluir a demonstração, basta mostrar que A é o gerador infinitesimal de $T(t)$. Se $x \in D(A)$, temos

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{tA\lambda}x - x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{d}{ds}(e^{sA\lambda}x)ds \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA\lambda}A_\lambda x ds = \int_0^t \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{sA\lambda}A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)Ax ds. \end{aligned}$$

Na terceira igualdade utilizamos a letra (c) do Teorema ?? e a quarta e quinta igualdades valem porque $e^{sA\lambda}A_\lambda x \rightarrow T(s)Ax$, quando $\lambda \rightarrow \infty$, onde a convergência é uniforme em intervalos limitados. Sejam B o gerador infinitesimal de $T(t)$ e $x \in D(A)$. Para $t > 0$, segue do item (a) do Teorema ?? que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax ds = T(0)Ax = Ax.$$

Portanto $x \in D(B)$ e $Bx = Ax$. Como tomamos x arbitrariamente em $D(A)$, temos que $D(A) \subset D(B)$ e $B|_{D(A)} = A$, ou seja, o operador B é uma extensão do operador A . Assim

$$(I - B)D(A) = (I - A)D(A). \quad (3.16)$$

Do Teorema ?? temos que $1 \in \rho(B)$, pois B é o gerador de um C_0 -semigrupo de contrações e por hipótese temos $1 \in \rho(A)$. Desta forma $(I - A)^{-1}$ e $(I - B)^{-1}$ são densamente definidos, ou seja, $\overline{(I - A)D(A)} = X = \overline{(I - B)D(B)}$. Como $I - A$ e $I - B$ são operadores fechados, segue que

$$(I - B)D(B) = X = (I - A)D(A). \quad (3.17)$$

De (??) e (??), segue que $D(A) = D(B)$ e, portanto, $A = B$.

□

3.4 Semigrupos Analíticos

Nessa seção, generalizamos a ideia de C_0 -semigrupos. Iniciaremos com algumas propriedades acerca de funções definidas em subconjuntos do corpo complexo \mathbb{C} tomando valores num espaço de Banach X . Em seguida, definiremos a noção de semigrupos holomorfos.

Definição 3.4. *Sejam X um espaço de Banach e Ω um subconjunto aberto de \mathbb{C} . Uma função $f : \Omega \rightarrow X$ é dita **holomorfa** em Ω se, para cada $z_0 \in \Omega$, o limite*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe. Neste caso, denotamos este limite por $f'(z_0)$ que é chamada a derivada de f em z_0 .

Se f é holomorfa é de fácil demonstração que f é contínua e fracamente holomorfa (ou seja, $x^* \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa, para todo $x^* \in X^*$). O próximo teorema nos diz que vale a recíproca. Para demonstrá-lo usaremos o lema dado a seguir, cuja a demonstração pode ser encontrada em [?], página 89.

Lema 3.6. *Seja X um espaço de Banach. A sequência $\{x_n\} \subset X$ é de Cauchy se, e somente se, $\{x^*(x_n)\}$ é uniformemente de Cauchy para $x^* \in X^*$ com $\|x^*\| \leq 1$.*

Teorema 3.7. *Sejam X um espaço de Banach, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : \Omega \rightarrow X$. Se f é fracamente holomorfa, então f é holomorfa.*

Demonstração. Sejam $f : \Omega \rightarrow X$ fracamente holomorfa, $z_0 \in \Omega$ e $\Gamma = \partial\mathbb{D}(z_0, r)$ uma esfera em Ω , onde $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset \Omega$. Se $x^* \in X^*$, então $x^* \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa e

$$\begin{aligned} & x^* \left(\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right) - (x^* \circ f)'(z_0) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{z - (z_0 + h)} - \frac{1}{z - z_0} \right) - \frac{1}{(z - z_0)^2} \right] x^*(f(z)) dz. \end{aligned}$$

Como $x^* \circ f$ é contínua em Γ e Γ é um conjunto compacto, então $|(x^* \circ f)(z)| \leq C_{x^*}$, para todo $z \in \Gamma$. Se olharmos $f(z)$ como sendo uma família de aplicações $f(z) : X^* \rightarrow \mathbb{C}$, temos que $f(z)$ é pontualmente limitada para cada $x^* \in X^*$. Então, pelo Teorema da Limitação Uniforme, temos que $\sup_{z \in \Gamma} \|f(z)\| \leq C < \infty$. Logo

$$\begin{aligned} & \left| x^* \left(\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right) - (x^* \circ f)'(z_0) \right| \\ & \leq (2\pi)^{-1} \|x^*\| \left(\sup_{z \in \Gamma} \|f(z)\| \right) \int_{\Gamma} \left| \frac{1}{(z - (z_0 + h))(z - z_0)} - \frac{1}{(z - z_0)^2} \right| dz. \end{aligned}$$

A estimativa mostra que $x^*[(f(z_0 + h) - f(z_0))/h]$ é uniformemente de Cauchy para $\|x^*\| \leq 1$.

Do lema anterior concluímos que $[f(z_0 + h) - f(z_0)]/h$ converge em X , logo $f(\cdot)$ é fortemente holomorfa.

□

Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ uma curva finita e parcialmente suave, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e Γ o traço da curva γ . Consideremos $\Gamma \subset \Omega$ e $f : \Omega \rightarrow X$ uma função contínua ao longo de Γ . A integral de linha de f ao longo da curva γ é definida por

$$\int_a^b (f \circ \gamma)(s) \gamma'(s) ds,$$

e denotada por

$$\int_{\Gamma} f(z) dz.$$

Teorema 3.8. *Sejam X e Y espaços de Banach em \mathbb{C} , $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e γ uma curva como na definição acima. Se $f : \Omega \rightarrow X$ é uma função contínua ao longo de Γ , então*

$$T\left(\int_{\Gamma} f(z) dz\right) = \int_{\Gamma} T(f(z)) dz. \quad (3.18)$$

Demonstração. Sabemos do Teorema ?? que se $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow X$ é Bochner integrável, então $T(f \circ \gamma) : [a, b] \rightarrow Y$ é Bochner integrável e vale

$$T\left(\int_a^b (f \circ \gamma)(s) ds\right) = \int_a^b T((f \circ \gamma)(s)) ds.$$

□

O Teorema de Hahn-Banach junto com o Teorema ?? nos permite, sem muito esforço adicional, estender uma parte significativa da teoria de funções de variáveis complexas para funções com valores vetoriais. Um exemplo importante é a fórmula de Cauchy

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz,$$

onde f é holomorfa em Ω , $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$ e $w \in B(z_0, r)$. Com efeito, para todo $x^* \in X^*$, temos que $x^*(f)$ é holomorfa, logo

$$x^*(f(w)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{x^*(f(z))}{z-w} dz = x^*\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz\right).$$

Lema 3.7. *Sejam Y um subespaço fechado de um espaço de Banach X e $Y^0 := \{y^* \in X^*; \langle y^*, y \rangle = 0, \forall y \in Y\}$. Se $y \in X$ satisfaz $\langle y^*, y \rangle = 0$, para todo $y^* \in Y^0$, então $y \in Y$.*

Demonstração. Caso contrário, pelo Teorema de Hahn-Banach, existiria $\bar{y} \in X - Y$, tal que $\langle y^*, \bar{y} \rangle = 0$, para todo $y^* \in Y^0$. Assim, existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(\bar{y}) = \text{dist}(\bar{y}, Y) \neq 0$ e $x^* = 0$, para todo $y \in Y$. (Ver lema 4.6-7 de [?]).

□

Teorema 3.9. *Sejam Y um subespaço fechado de um espaço de Banach X e $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e conexo. Se $f : \Omega \rightarrow X$ é holomorfa e existe uma sequência convergente $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ tal que $\lim z_n \in \Omega$ e $f(z_n) \in Y$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(z) \in Y$, para todo $z \in \Omega$.*

Demonstração. Se $x^* \in Y^0$, então $(x^* \circ f)(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x^* \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa e $\lim z_n$ também é um zero de $x^* \circ f$, segue do Teorema 6.20 de [?] que $(x^* \circ f)(z) = 0$, para todo $z \in \Omega$. Portanto $f(z) \in X$ com $\langle x^*, f(z) \rangle = 0$, para todo $x^* \in Y^0$ e todo $z \in \Omega$. Assim, o resultado segue do lema anterior.

□

Agora, generalizemos a ideia de semigrupo abordada na seção 3.2.

Definição 3.5. *Uma aplicação $T : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ fortemente contínua é dita **semigrupo** se satisfaz:*

- (a) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s > 0$;
- (b) Existe $c > 0$, tal que $\|T(t)\| \leq c$, para todo $t \in (0, 1]$;
- (c) Se $T(t)x = 0$, para todo $t \geq 0$, então $x = 0$.

O próximo teorema, cuja a demonstração pode ser encontrada em [?], será utilizado para garantir a existência de um operador A que é o gerador de um **semigrupo**, no sentido da definição ??.

Teorema 3.10. *Seja $S : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ uma função fortemente contínua satisfazendo*

$$\left\| \int_0^t S(s) ds \right\| \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0,$$

para $M, \omega \geq 0$. Se $k \in \mathbb{N}$ e $R(\lambda) := \lambda^k \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$, para $\lambda > \omega$, então são equivalentes:

- i) Existe um operador A tal que $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ e $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ para $\lambda > \omega$;
- ii) Para $s, t \geq 0$, valem

$$S(t)S(s) = \frac{1}{(k-1)!} \left(\int_t^{t+s} (s+t-r)^{k-1} S(r) dr - \int_0^s (s+t-r)^{k-1} S(r) dr \right)$$

e

$$S(t)x = 0, \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow x = 0.$$

Pela Definição ?? é fácil ver que $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$, para todo $t > 0$. Dessa forma, faz sentido definir

$$S(t) := \int_0^t T(s) ds.$$

Escolhendo $k = 1$ no Teorema ?? observamos que $S(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ satisfaz a condição (ii) deste teorema. Com efeito, para $s, t > 0$, temos

$$\begin{aligned}
S(s)S(t) &= \int_0^s T(r)dr \int_0^t T(\omega)d\omega \\
&= \int_0^s \int_0^t T(r)T(\omega)d\omega dr \\
&= \int_0^s \int_0^t T(r+\omega)d\omega dr \\
&= \int_0^s \int_r^{t+r} T(\omega)d\omega dr \\
&= \int_0^s \left(\int_0^{t+r} T(\omega)d\omega - \int_0^r T(\omega)d\omega \right) dr \\
&= \int_0^s S(r+t)dr - \int_0^s S(r)dr \\
&= \int_t^{t+s} S(r)dr - \int_0^s S(r)dr.
\end{aligned}$$

Portanto, existe um operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ tal que $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ e, para $\lambda > \omega$, vale que

$$\begin{aligned}
R(\lambda, A) &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt.
\end{aligned}$$

Tal operador A é chamado gerador do semigrupo T . Do Corolário 3.3.11 de [?], podemos observar que um semigrupo é um C_0 -semigrupo se, e somente se, seu gerador for densamente definido.

Nos próximos resultados, consideraremos $\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} - \{0\}; |\arg z| < \theta\}$ o setor no plano complexo de ângulo $\theta \in (0, \pi]$.

Definição 3.6. *Considere $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Um semigrupo T em X é chamado **holoformo de ângulo** θ se T admite uma extensão holomorfa definida em Σ_θ a qual é limitada em $\Sigma_{\theta'} \cap \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, para todo $\theta' \in (0, \theta)$.*

No que segue ao restante desta seção, quando não houver confusão, a extensão de T em Σ_θ também será denotada por T .

Lema 3.8. *Sejam $0 < \theta \leq \pi$ e $f : \Sigma_\theta \rightarrow X$ uma função holomorfa tal que*

$$\sup_{z \in \Sigma_{\theta'}} \|f(z)\| < \infty,$$

para todo $\theta' \in (0, \theta)$. Seja $x \in X$.

a) Se $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = x$, então $\lim_{|z| \rightarrow \infty, z \in \Sigma_{\theta'}} f(z) = x$, para todo $\theta' \in (0, \theta)$;

b) Se $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = x$, então $\lim_{|z| \rightarrow 0, z \in \Sigma_{\theta'}} f(z) = x$, para todo $\theta' \in (0, \theta)$.

Demonstração.

a) Seja $f_k(z) = f(kz)$. Segue do Teorema de Vitali, (ver [?], Teorema A.5, pág. 467), que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z) = x$, uniformemente nos subconjuntos compactos de Σ_α . Se $0 < \beta < \alpha$ e $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_k(z) - x\| \leq \varepsilon$, para todo $z \in \Sigma_\beta$, $1 \leq |z| \leq 2$ e $k \geq k_0$. Para $z \in \Sigma_\beta$ e $|z| \geq k_0$, escolha $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq |z| \leq k+1$, então

$$\|f(z) - x\| = \left\| f_k\left(\frac{z}{k}\right) - x \right\| \leq \varepsilon.$$

b) Utilizar o item (a) para a função $z \mapsto f(z^{-1})$.

Proposição 3.1. *Sejam $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ e T um semigrupo em X com gerador A . Se T é holomorfa de ângulo θ , então valem:*

(a) $T(z + z') = T(z)T(z')$, para todo $z, z' \in \Sigma_\theta$;

(b) Para todo $\theta' \in (0, \theta)$, existem $M \geq 0$ e $\omega \geq 0$ tais que $\|T(z)\| \leq Me^{\omega \operatorname{Re} z}$, para todo $z \in \Sigma_{\theta'}$;

(c) Seja $\alpha \in (-\theta, \theta)$. Denote por T_α o semigrupo dado por $T_\alpha(t) := T(e^{i\alpha}t)$, para $t \geq 0$. Então $e^{i\alpha}A$ é o gerador de T_α ;

(d) Se T é um C_0 -semigrupo e $z \in \Sigma_{\theta'}$, então

$$\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x,$$

para todo $x \in X$ e para todo $\theta' \in (0, \theta)$.

Demonstração.

(a) Para $z' \in (0, \infty)$ fixado, considere as funções holomorfas $S(z) = T(z + z')$ e $R(z) = T(z)T(z')$ definidas em Σ_θ tomando valores no espaço de Banach $\mathcal{L}(X)$. Considere $Y := \{0\} \subset \mathcal{L}(X)$, $\Omega := \Sigma_\theta$ e defina $f := R - S$. Considere $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma_\theta$ uma sequência dada por $z_n := 1 + \frac{1}{n}$. Assim, $\lim z_n \in \Sigma_\theta$ e, como S e T coincidem em $(0, \infty)$, temos que $f(z_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $f(z_n) \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, pelo teorema ??, concluímos que $f(z) = 0$ para todo $z \in \Sigma_\theta$ e, portanto,

$$T(z + z') = T(z)T(z'), \quad \forall z \in \Sigma_\theta \text{ e } z' \in (0, \infty).$$

Analogamente, fixando $z \in \Sigma_\theta$, as funções $z' \mapsto T(z + z')$ e $z' \mapsto T(z)T(z')$ coincidem para todo $z' \in (0, \infty)$. Utilizando o Teorema ??, o resultado segue.

- (b) Seja $\theta' \in (0, \theta)$. Como a extensão $T : \Sigma_\theta \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é limitada em $\Sigma_{\theta'} \cap \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, podemos definir

$$M := \sup_{z \in \Sigma_{\theta'}, |z| \leq 1} \|T(z)\| \quad e \quad \omega' := \max\{\log M, 0\}.$$

Seja $z = te^{i\beta} \in \Sigma_{\theta'}$, onde $t = |z|$ e $|\beta| < \theta'$. Escreva $t = n + s$, onde n é o maior natural menor do que ou igual a t e $s \in [0, 1)$. Defina $T_\beta(t) := T(te^{i\beta})$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \|T(z)\| &= \|T_\beta(t)\| \\ &= \|T_\beta(n + s)\| \\ &\leq \|T_\beta(1)\|^n \|T_\beta(s)\| \\ &\leq M.M^n \\ &\leq Me^{n\omega'} \\ &\leq Me^{|z|\omega'}. \end{aligned}$$

Como $|z| \leq \frac{\operatorname{Re} z}{\cos \theta'}$ para todo $z \in \Sigma_{\theta'}$, tomando $\omega := \frac{\omega'}{\cos \theta'}$, obtemos

$$\|T(z)\| \leq Me^{\omega \operatorname{Re} z}.$$

- (c) Seja $\alpha \in (-\theta, \theta)$. Denote por $T_\alpha(t) := T(te^{i\alpha})$, onde $t \geq 0$. Primeiramente, verifiquemos que, de fato, T_α é um semigrupo. Com efeito, valem:

- (i) Para todo $s, t > 0$, segue do item (a) deste Teorema que $T_\alpha(t + s) = T_\alpha(t)T_\alpha(s)$.
(ii) Como para todo $t \geq 0$, temos que $T_\alpha(t)x = 0$, então $T_{-\alpha}(t)T_\alpha(t)x = 0$. Mas

$$\begin{aligned} T_{-\alpha}(t)T_\alpha(t)x &= T(te^{-i\alpha})T(te^{i\alpha})x \\ &= T(t(e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}))x \\ &= T(t(2 \cos \alpha))x \\ &= T(s)x, \end{aligned}$$

onde $s := t(2 \cos \alpha) \geq 0$, pois $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $t \geq 0$. Como T restrito a $(0, \infty)$ é um semigrupo, segue que $x = 0$.

(iii) Se $t \in (0, 1]$, temos que $T_\alpha(t) = T(te^{i\alpha})$. Seja $z_t := te^{i\alpha}$, com $t = |z_t| \in (0, 1]$ e $\alpha \in (-\theta, \theta)$. Então $z_t \in \Sigma_{\theta'} \cap \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, para algum $\theta' \in (0, \theta)$. Logo, existe $C > 0$ tal que

$$\|T_\alpha(z)\| = \|T(te^{i\alpha})\| = \|T(z_t)\| \leq C, \quad \forall t.$$

Assim, concluímos que T_α é um semigrupo. Agora basta mostrar que seu gerador é $e^{i\alpha}A$, onde A é o gerador de T .

De fato, para $R > 0$, consideremos as curvas $\Gamma_R^1 = \{\gamma_1(t) = t; 0 \leq t \leq R\}$, $\Gamma_R^2 = \{\gamma_2(t) = Re^{it}; 0 \leq t \leq \alpha\}$ e $\Gamma_R^3 = \{\gamma_3(t) = te^{i\alpha}; 0 \leq t \leq R\}$. Defina $\Gamma_R = \Gamma_R^1 \cup \Gamma_R^2 \cup -\Gamma_R^3$ (o sinal de menos na última integral, significa que a curva coincide com Γ_R^3 mas tem direção oposta) e seja $\lambda > 0$. Pelo Teorema ??, temos que $f(z) := \exp(-\lambda e^{-i\alpha}z)T(z)$ é holomorfa em Σ_θ e $\Gamma_R - \{0\} \subset \Sigma_\theta$ é uma curva fechada e suave por partes. Logo do Teorema de Cauchy para funções com valores vetoriais, temos que

$$\int_{\Gamma_R} f(z)xdz = 0, \quad \forall x \in X.$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} f(z)xdz &= \int_{\Gamma_R^1} f(z)xdz + \int_{\Gamma_R^2} f(z)xdz - \int_{\Gamma_R^3} f(z)xdz \\ &= \int_0^R f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt + \int_0^\alpha f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt - \int_0^R f(\gamma_3(t))\gamma_3'(t)dt \\ &= \int_0^R \exp(-\lambda e^{-i\alpha}t)T(t)xdt + \int_0^\alpha f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt \\ &\quad - e^{i\alpha} \int_0^R e^{-\lambda t}T_\alpha(t)xdt. \end{aligned}$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$, obtemos

$$e^{i\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda t}T_\alpha(t)dt = \int_0^\infty \exp(-\lambda e^{-i\alpha}t)T(t)dt. \quad (3.19)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\alpha f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt \right\| &= \left\| \int_0^\alpha \exp[-i\lambda R(\cos(t-\alpha) + isen(t-\alpha))] \right. \\ &\quad \left. T(Re^{it})Rie^{it}xdt \right\| \\ &\leq \int_0^\alpha | \exp[-\lambda R(\cos(t-\alpha) + isen(t-\alpha))] | \\ &\quad Me^{\omega R \cos t} R \|x\| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^\alpha e^{-\lambda R \cos(t-\alpha)} R M e^{R\omega \cos t} \|x\| dt \\
&\leq \|x\| M \int_0^\alpha R e^{R(\omega \cos t - \lambda \cos(t-\alpha))} dt \\
&\leq \|x\| M \int_0^\alpha R e^{R(\cos t)(\omega - \lambda \cos \alpha)} dt.
\end{aligned}$$

A última desigualdade segue da identidade $-\cos t \cos \alpha = -\cos(t - \alpha) + \sin t \cdot \sin \alpha$. Daí, escolhendo $\lambda > \frac{\omega}{\cos \alpha}$, temos

$$\left\| \int_0^\alpha f(\gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt \right\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } R \rightarrow 0.$$

Seja A_α o gerador de T_α . Assim, utilizando (??), temos que, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha} R(\lambda, A_\alpha)x &= e^{i\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\alpha(t)x dt \\
&= \int_0^\infty \exp(-\lambda e^{-i\alpha} t) T(t)x dt \\
&= R(\lambda e^{-i\alpha}, A)x.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha}(\lambda I - A_\alpha)^{-1} &= (\lambda e^{-i\alpha} I - A)^{-1} \\
\Rightarrow e^{i\alpha} A_\alpha^{-1} &= A^{-1} \\
\Rightarrow A_\alpha &= e^{i\alpha} A.
\end{aligned}$$

(d) Sejam $x \in X$ e $\theta' \in (0, \theta)$. Considere a função holomorfa $f : \Sigma_{\theta'} \rightarrow X$ dada por

$$f(z) = e^{-\omega z} T(z)x.$$

Do item (b) deste teorema segue que existem $M \geq 0$ e $\omega \geq 0$ tais que

$$\begin{aligned}
\|f(z)\| &\leq |e^{-\omega z}| \|T(z)\| \|x\| \\
&= e^{-\omega \operatorname{Re} z} \|T(z)\| \|x\| \\
&\leq M \|x\|, \quad \forall z \in \Sigma_{\theta'}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{z \in \Sigma_{\theta'}} \|f(z)\| < \infty, \quad \forall \theta' \in (0, \theta).$$

Como T é um C_0 -semigrupo, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-\omega t} T(t)x = x.$$

Logo, utilizando o Lema ??, concluímos que

$$\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Sigma_{\theta'}} e^{-\omega z} T(z)x = \lim_{z \rightarrow 0, z \in \Sigma_{\theta'}} f(z) = x.$$

□

Note que, na Proposição ??, T_α é um C_0 -semigrupo para cada $\alpha \in (-\theta, \theta)$ quando T é um C_0 -semigrupo, isto é, se $D(A)$ é denso. Em seguida, definiremos semigrupos holomorfos limitados.

Definição 3.7. *Seja $\theta \in (0, \frac{\theta}{2}]$. Um semigrupo T é dito **semigrupo holomorfo limitado de ângulo θ** se T admite uma extensão holomorfa limitada em $\Sigma_{\theta'}$ para cada $\theta' \in (0, \theta)$.*

É necessária uma certa prudência sobre esta terminologia. De fato, se T é um semigrupo limitado que é holomorfo, então ele não é necessariamente um semigrupo holomorfo limitado, pois é apenas limitado em \mathbb{R}_+ e, assim, pode não ser limitado num setor. Um exemplo em que ocorre isto é com o espaço $X = \mathbb{C}$ e com a função $T(t) = e^{it}$, $t \geq 0$. A proposição a seguir segue diretamente do Teorema ??.

Proposição 3.2. *Um operador A é gerador de um semigrupo holomorfo T se, e somente se, existe $\omega \geq 0$ tal que $A - \omega I$ é gerador de um semigrupo holomorfo limitado S .*

3.5 O Semigrupo Gaussiano

Da teoria de Fourier, sabemos que

$$-\Delta f = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{M} \mathcal{F} f, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (3.20)$$

Aqui, $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é transformada de Fourier e \mathcal{M} é o operador multiplicação definido em

$$D(\mathcal{M}) = \{g \in L^2(\mathbb{R}^n, d\xi); |\xi|^2 g \in L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)\}$$

por

$$(\mathcal{M}g)(\xi) = |\xi|^2 g(\xi).$$

Pela identidade de Parseval, temos que

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2}, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Para maiores detalhes acerca destes conceitos veja [?], capítulo IX.

Observamos que a igualdade (??) acima é uma característica dos operadores autoadjuntos, como pode ser visto no Teorema abaixo.

Teorema 3.11. *Seja A um operador auto-adjunto num espaço de Hilbert separável \mathcal{H} com domínio $D(A)$. Existem um espaço de medida (M, μ) , onde μ é uma medida finita, um operador unitário $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2(M, d\mu)$ e uma função com valores reais f definida em M a qual é finita em quase toda parte, tais que*

1. $\psi \in D(A)$ se, e somente se, $f(\cdot)(U\psi)(\cdot) \in L^2(M, d\mu)$.
2. Se $\varphi \in U(D(A))$, então $(UAU^{-1}\varphi)(m) = f(m)\varphi(m)$.

Demonstração. Ver [?], pág.261. □

O operador \mathcal{M} é um operador densamente definido e fechado.

Com efeito, considere $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina a função ψ_n por $\psi_n(x) = \psi(x)$, se $|g(x)| \leq n$ e $\psi_n(x) = 0$ caso contrário. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n \in D(\mathcal{M})$. Além disso, $\psi_n \rightarrow \psi$ na norma $L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$, pois $|\psi_n| \leq |\psi|$ q.t.p. e $|g\psi_n| \leq n|\psi|$. Conclui-se que $\psi_n \in L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Também, temos que $\psi_n \rightarrow \psi$ em q.t.p. e, utilizando o teorema da convergência dominada, vemos que $\psi_n \rightarrow \psi$ em $L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Portanto, \mathcal{M} é um operador densamente definido. Agora mostremos que \mathcal{M} é um operador linear fechado. Para isso, suponha que $\{\psi_n\}$ é uma sequência em $L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$, tal que $\psi_n \rightarrow \psi$ e $\mathcal{M}\psi_n \rightarrow \phi$ ambas as convergências em $L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Tomando subsequências, se necessário, podemos supor que $\psi_n \rightarrow \psi$ em q.t.p. e $g(\psi_n) \rightarrow \phi$ em q.t.p.. Logo, $g(\psi_n) \rightarrow g(\psi)$ em q.t.p. e portanto $g(\psi) = \phi$ em q.t.p. Assim, concluímos que $\psi \in D(\mathcal{M})$ e $\mathcal{M}\psi = \phi$. Como é fácil verificar que $D(\mathcal{M})$ é um espaço vetorial e que \mathcal{M} é linear neste domínio, concluímos que \mathcal{M} é um operador densamente definido e fechado. Também é possível mostrar que \mathcal{M} é um operador não limitado.

Dando continuidade ao estudo do Laplaciano, considere $\{f_n\}$ uma sequência em $D(\Delta)$, tal que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{e} \quad \Delta f_n \rightarrow g \quad \text{em } L^2.$$

Assim, $\mathcal{F}f_n \rightarrow \mathcal{F}f$ em L^2 , já que \mathcal{F} é unitário. Além disso, como $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{F}f_n \rightarrow g$, segue que $\mathcal{M}\mathcal{F}f_n \rightarrow \mathcal{F}g$. Logo $\mathcal{F}f \in D(\Delta)$ e $\mathcal{M}\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$. Daí, pelo Teorema ??, temos que $f \in D(\Delta)$ e $\Delta f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{F}f = g$. Com isso, concluímos que Δ é operador fechado.

A seguir, daremos um exemplo de semigrupo holomorfo.

Exemplo 3.1. *(Semigrupo Gaussiano) Sejam $t > 0$, $f \in X := L^2(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$(G(t)f)(x) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} dy$$

define um C_0 -semigrupo holomorfo limitado de ângulo $\frac{\pi}{2}$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Seu gerador é o Laplaciano Δ_X em X com domínio maximal, ou seja,

$$D(\Delta_X) = \{f \in X; \Delta f \in X\}$$

$$\Delta_X f = \Delta f,$$

onde X é identificado como um subespaço de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ e $\Delta f = \sum_{j=1}^n D_j^2 f$.

Com efeito, seja $k_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$k_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Então $G(t)f = k_t * f \in X$. Note que $\mathcal{F}k_t = h_t$, onde $h_t(x) := e^{-t\|x\|^2}$ e $h_{t+s} = h_t h_s$. Como \mathcal{F} é um isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, tal que $\mathcal{F}(\psi * f) = \mathcal{F}\psi \cdot \mathcal{F}f$, para todo $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, então $\mathcal{F}(G(t)f) = h_t \cdot \mathcal{F}f$. Assim,

$$\mathcal{F}(G(t+s)f) = h_{t+s} \cdot \mathcal{F}f = h_t \cdot h_s \mathcal{F}f = \mathcal{F}(G(t)G(s)f).$$

Logo $G(t+s) = G(t)G(s)$, para $t, s > 0$. Como $\{k_t; t > 0\}$ é uma aproximação da identidade, segue do Lema 1.3.3 de [?] que $\|G(t)f - f\| = \|k_t * f - f\| \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$, para todo $f \in X$. Portanto G é um C_0 -semigrupo.

Agora observe que k_z também é definida para $\operatorname{Re} z > 0$ e a função $z \mapsto k_z : \mathbb{C}_+ \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$ é um holomorfismo satisfazendo $\sup_{z \in \Sigma_\theta} \|k_z\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$, para cada $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. De fato,

$$\begin{aligned} \|k_z\|_{L^1} &= \left| \frac{1}{(4\pi z)} \right|^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{\|x\|^2}{4z}} \right| dx \\ &= \frac{1}{(4\pi|z|)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x\|^2 |z| \cos \theta}{4|z|^2}} dx \\ &= \frac{1}{(4\pi|z|)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x(\cos \theta)^{\frac{1}{2}}\|^2}{4|z|}} dx \\ &= \frac{1}{(\cos \theta)^{\frac{n}{2}}}. \end{aligned}$$

Assim, $G(z) := k_z * f$ define uma extensão de G para \mathbb{C}_+ com valores em $\mathcal{L}(X)$ e $\sup_{z \in \Sigma_\theta} \|G(z)\| < \infty$, para cada $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Desta forma, basta mostrar que o gerador de G é o Operador Laplaciano. Primeiramente, observe que, se $f \in X$ com $\Delta f \in X$ e $m(x) = -|x|^2$, então

$$\mathcal{F}(\Delta(G(t)f)) = m\mathcal{F}(G(t)f) = mh_t\mathcal{F}f = h_t m\mathcal{F}f = h_t\mathcal{F}(\Delta f) = \mathcal{F}(G(t)\Delta f).$$

Portanto $\Delta(G(t)f) = G(t)(\Delta f)$.

Agora observe que se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e G_1 é um semigrupo gaussiano em $L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\int_0^t G_1(s)\Delta\psi ds\right)(x) &= \int_0^t \mathcal{F}(G_1(s)\Delta\psi)(x) ds \\ &= \int_0^t e^{-s|x|^2} (-|x|^2)(\mathcal{F}\psi)(x) ds \\ &= (e^{-t|x|^2} - 1)(\mathcal{F}\psi)(x) \\ &= (\mathcal{F}(G_1(t)\psi - \psi))(x). \end{aligned}$$

Segue da unicidade da transformada de Fourier que

$$\int_0^t G_1(s)\Delta\psi ds = G_1(t)\psi - \psi.$$

Agora, seja $f \in X$, $t > 0$. Mostremos que

$$\Delta \int_0^t G(s)f ds = G(t)f - f.$$

Se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \psi, \Delta \int_0^t G(s)f ds \right\rangle &= \left\langle \Delta\psi, \int_0^t G(s)f ds \right\rangle \\ &= \int_0^t \langle \Delta\psi, G(s)f \rangle ds \\ &= \int_0^t \langle G_1(s)\Delta\psi, f \rangle ds \\ &= \left\langle \int_0^t G_1(s)\Delta\psi ds, f \right\rangle \\ &= \langle G_1(t)\psi - \psi, f \rangle \\ &= \langle \psi, G(t)f - f \rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Delta \left(\frac{1}{t} \int_0^t G(s)f ds \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(t)f - f}{t} = B(f),$$

onde B é o gerador de $G(t)$ e $f \in D(B)$. Mas, do Teorema ??, item (a), temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t G(s)f ds = f.$$

Usando o fato de Δ ser um operador fechado, concluímos que

$$D(B) \subset D(\Delta) \quad \text{e} \quad Bf = \Delta f, \quad \forall f \in D(B). \quad (3.21)$$

Para finalizar, façamos duas observações:

Observação 3.1. *Suponha que exista $u \in C([0, \tau], X)$ tal que*

$$\int_0^t u(s)ds \in D(A) \quad \text{e} \quad \Delta \left(\int_0^t u(s)ds \right) = u(t) - x.$$

Defina $v(t) = \int_0^t (u(s) - G(s)x)ds$. Por hipótese e pelo item (b) do Teorema ??, temos que $v(t) \in D(\Delta)$. Assim, se

$$S(t)y = \int_0^t G(s)yds,$$

então $\Delta S(t)y = G(t)y - y$, para todo $y \in X$. Por fim, se definimos $w(s) = S(t-s)v(s)$, $0 \leq s \leq t$, temos que

$$\begin{aligned} w'(s) &= -G(t-s)v(s) + S(t-s)v'(s) \\ &= -G(t-s)v(s) + S(t-s)Av(s) \\ &= -G(t-s)v(s) + AS(t-s)v(s) \\ &= -v(s). \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 = w(s) = \int_0^t w'(s)ds = - \int_0^t v(s)ds,$$

e $v(s) = 0$, para todo $s \in [0, \tau]$. E desta última conclusão, chegamos que

$$u(t) = G(t)x.$$

Observação 3.2. Sabemos pelo Teorema ??, que existem $\omega \geq 0$ e $M \leq 1$, tais que

$$\|G(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Então para $\lambda > \omega$, temos

$$(\lambda - \Delta)(\lambda - B)^{-1}f = f. \quad (3.22)$$

Na identidade anterior foi utilizada a identidade (??) e o fato de $\mathbb{R}_+ \subset \rho(B)$ que segue do Teorema ??.

Vamos mostrar que $(\lambda - \Delta)$ é um operador injetivo. Se $(\lambda - \Delta)f = 0$, então $u(t) := e^{\lambda t}f$ satisfaz

$$\int_0^t u(s)ds \in D(\Delta) \quad e \quad \Delta \left(\int_0^t u(s)ds \in D(\Delta) \right) = u(t) - f.$$

Segue da observação ?? que $u(t) = G(t)f$. Mas,

$$e^{\lambda t}\|f\| = \|e^{\lambda t}f\| = \|u(t)\| = \|G(t)f\| \leq Me^{\omega t}\|f\|.$$

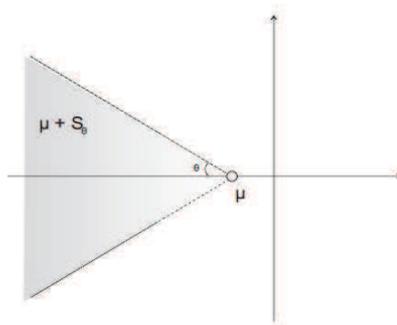
Isso só é possível se $f = 0$.

Da observação ?? e (??), temos que $\Delta = B$.

4 SOLUÇÕES S -ASSINTOTICAMENTE ω -PERIÓDICAS DE EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO FRACIONÁRIA

4.1 Operador Solução

Consideremos o setor $\mu + S_\theta = \{\mu + \lambda; \lambda \in \mathbb{C}, |\arg(-\lambda)| < \theta\}$, como podemos ver abaixo:



Deste modo, dizemos que um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ fechado, com $\overline{D(A)} = X$ é um **operador setorial do tipo μ** se existem $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $M > 0$, tais que seu resolvente existe fora do setor $\mu + S_\theta$ e além disso

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \mu|}, \quad \lambda \notin \mu + S_\theta.$$

Definição 4.1.1. *Sejam X um espaço de Banach, $k \in C(\mathbb{R}_+)$ e $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Dizemos que um operador linear fechado $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, com $\overline{D(A)} = X$ é o **gerador de uma família (a, k) -regularizada**, $\{S(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $S(t)$ é fortemente contínua, para todo $t \geq 0$. Além disso $S(0) = k(0)I$, onde I é o operador identidade.

(ii) $S(t)x \in D(A)$, para todo $t \geq 0$ e $x \in D(A)$. Além disso, vale

$$A(S(t)x) = S(t)(Ax).$$

(iii) Vale a equação resolvente (a, k) -regularizada

$$S(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)AS(s)x ds,$$

para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$.

Definição 4.1.2. Um operador linear fechado A , com domínio $D(A) \subset X$, é dito o **gerador de um operador solução** se existem $\mu > 0$ e uma função $S_\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ fortemente contínua tais que:

(i) $\{\lambda^\alpha; \operatorname{Re}\lambda > \mu\} \subset \rho(A)$;

(ii) $\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t)x dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > \mu \quad x \in X.$

Neste caso, S_α é o **operador solução** gerado por A .

Proposição 4.1. Se A é o gerador de uma família (a, k) -regularizada e exponencialmente limitada $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, onde $a(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ e $k(t) \equiv 1$, com $1 < \alpha < 2$, então A é o gerador de um operador solução S_α , com $S_\alpha = S$.

Demonstração. Como a família $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é exponencialmente limitada, então existem constantes M e $\omega > 0$, tais que

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ e $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \right\| &\leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda t} \|S(t)\| \|x\| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda t} M e^{\omega t} \|x\| dt \\ &\leq M \|x\| \int_0^\infty e^{t(\omega - \operatorname{Re}\lambda)} dt < \infty. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos definir o operador $H(\lambda) : X \rightarrow X$ pondo

$$H(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt,$$

Por hipótese, para $x \in D(A)$, temos que

$$\begin{aligned} S(t)x &= x + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} AS(s)x ds \\ &= x + J^\alpha AS(t)x. \end{aligned}$$

Usando as propriedades de integração fracionária e aplicando a transformada de Laplace, temos

$$\begin{aligned} H(\lambda)x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} (x + J^\alpha AS(t)x) dt \\ &= x \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt + \mathcal{L}(J^\alpha AS(t)x) \\ &= \frac{x}{\lambda} + \mathcal{L}(J^\alpha AS(t)x) \\ &= \frac{x}{\lambda} + \frac{\mathcal{L}(AS(t)x)}{\lambda^\alpha}. \end{aligned}$$

Deste modo, temos que $\mathcal{L}(AS(t)x) = \lambda^\alpha(H(\lambda)x - x)$. Portanto $Ae^{-\lambda t}S(t)x$ é integrável. Segue da Proposição ?? que $H(\lambda)x \in D(A)$ e que

$$A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x dt\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)x dt.$$

Daí, obtemos que

$$H(\lambda)x = \frac{x}{\lambda} + \frac{AH(\lambda)x}{\lambda^\alpha}.$$

Portanto,

$$\lambda^{1-\alpha}(\lambda^\alpha - A)H(\lambda)x = x, \quad \forall x \in D(A).$$

Como $\overline{D(A)} = X$, temos que $H(\lambda)$ é a inversa a direita de $\lambda^{1-\alpha}(\lambda^\alpha - A)$. Além disso, por (ii) da definição de família (a, k)-regularizada, temos que $H(\lambda)$ é a inversa de $\lambda^{1-\alpha}(\lambda^\alpha - A)$. Assim,

$$(\lambda^{1-\alpha}(\lambda^\alpha - A))^{-1} = H(\lambda) \implies (\lambda^\alpha - A)^{-1} = \lambda^{1-\alpha}H(\lambda).$$

Logo $\lambda^\alpha \in \rho(A)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, ou seja,

$$\{\lambda^\alpha; \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A).$$

E

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x dt.$$

Portanto, $S(t)$ é um operador solução gerado por A .

□

Sendo assim, uma forma de garantir que A seja gerador de uma operador solução $S_\alpha(t)$ é determinar que A é o gerador de uma família $(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 1)$ -regularizada. Condições para que isso ocorra podem ser encontradas em [??]. No entanto, tais possibilidades ainda não foram estudadas.

De qualquer forma, faremos uma outra abordagem: Usaremos, sem detalhes, os resultados obtidos na referência [??]. Tais são apresentados a seguir:

Lema 4.1. *Se A é um operador setorial do tipo μ , com $0 < \theta < \pi(1 - \frac{\alpha}{2})$, então A é o gerador de um operador solução dado por*

$$S_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1} d\lambda,$$

onde γ é um caminho suave no exterior do setor $\mu + S_\theta$

A seguir apresentamos um esboço da demonstração deste Lema.

Demonstração. A convergência absoluta de $S_\alpha(t)$ é dada pelo Teorema ?? a seguir. Observe agora que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \eta^{\alpha-1} (\eta^\alpha - A)^{-1} \int_0^\infty e^{-(\lambda-\eta)t} dt d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\eta^{\alpha-1} (\eta^\alpha - A)^{-1}}{\eta - \lambda} d\eta \\ &= \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1}, \end{aligned}$$

onde acima estamos usando o teorema de Fubini e a Fórmula de Cauchy.

A condição $\{\lambda^\alpha; \operatorname{Re}\lambda > \mu\} \subset \rho(A)$ pode ser encontrada na prova do Teorema 1 de [??]

Teorema 4.1. *Se A é um operador setorial tipo $\mu < 0$, para algum $M > 0$ e $0 \leq \theta < \pi(1 - \frac{\alpha}{2})$, então existe $C > 0$, tal que*

$$\|S_\alpha(t)\| \leq \frac{CM}{1 + |\mu|t^\alpha}, \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

Observe que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + |\mu|t^\alpha} dt = \frac{|\mu|^{-\frac{1}{\alpha}} \pi}{\alpha \operatorname{sen}(\frac{\pi}{\alpha})}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Assim, de fato $S_\alpha(t)$ é integrável.

4.2 Soluções brandas S-assintoticamente ω -periódica

Nesta seção consideremos a existência e unicidade de soluções brandas S-assintoticamente ω -periódicas para o problema

$$v'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Av(s) ds + f(t, v(t)) \quad t \geq 0, \quad (4.2)$$

$$v(0) = u_0 \in X, \quad (4.3)$$

onde $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear densamente definido do tipo setorial definido num espaço de Banach complexo X e $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ é uma função contínua satisfazendo uma condição tipo Lipschitz.

Podemos observar que a integral tipo convolução em (??) é a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha - 1$, denotada por $J^{\alpha-1}Av(t)$. Seja A é gerador de um operador solução integrável $S_\alpha(t)$. Aplicando o operador J^1 em (??), obtemos

$$v(t) = J^\alpha Av(t) + J^1 f(t, v(t)) + v_0.$$

Aplicando a transformada de Laplace e considerando suas propriedades citadas na seção 1.3, temos que

$$\mathcal{L}(v)(\lambda) = \frac{v_0}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}(f)(\lambda) + \frac{1}{\lambda^\alpha} \mathcal{L}(Av)(\lambda).$$

Uma vez que $\lambda^\alpha \in \rho(A)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{Re}\lambda > \mu$, temos que

$$\begin{aligned} (\lambda^\alpha - A)\mathcal{L}(v)(\lambda) &= \lambda^{\alpha-1}v_0 + \lambda^{\alpha-1}\mathcal{L}(f)(\lambda) \\ \Rightarrow \mathcal{L}(v)(\lambda) &= \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}v_0 + \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}\mathcal{L}(f)(\lambda). \end{aligned}$$

Da Definição ??, sabemos que

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t) dt = \mathcal{L}(S_\alpha)(\lambda).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(v)(\lambda) &= \mathcal{L}(S_\alpha)(\lambda)v_0 + \mathcal{L}(S_\alpha)(\lambda) \cdot \mathcal{L}(f)(\lambda) \\ &= \mathcal{L}(S_\alpha)(\lambda)v_0 + \mathcal{L}(S_\alpha * f)(\lambda).\end{aligned}$$

Da unicidade da transformada de Laplace, obtemos

$$v(t) = S_\alpha(t)v_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds.$$

Motivados por isso, definimos solução branda para o problema (??)-(??).

Definição 4.2.1. *Suponha que A é o gerador de um operador solução integrável $S_\alpha(t)$. Uma função $u \in C_b([0, \infty), X)$ é dita uma **solução branda S -assintoticamente ω -periódica** do problema (??)-(??) se $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ for uma função S -assintoticamente ω -periódica e satisfaz*

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.4)$$

Teorema 4.2. *Sejam A um operador setorial do tipo $\mu < 0$, com $0 < \theta < \pi(1 - \frac{\alpha}{2})$, $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua tal que $f(\cdot, 0)$ é integrável em $[0, \infty)$ e $L : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e integrável tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t) \|x - y\|, \quad \text{para todo } x, y \in X, t \geq 0.$$

Então o problema (??)-(??) tem uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica. Além disso, vale

$$\|u\|_\infty \leq \bar{C}(\|u_0\| + \|f(\cdot, 0)\|_1) \exp(\bar{C} \|L\|_1),$$

onde \bar{C} é uma constante suave e positiva.

Demonstração. Seja S_α o operador do lema (??), defina o operador Γ_α no espaço $SAP_\omega(X)$ por

$$(\Gamma_\alpha)u(t) := S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds = S_\alpha(t)u_0 + v_\alpha(t). \quad (4.5)$$

Mostremos que Γ_α é um operador com valores em $SAP_\omega(X)$. Seja $x \in X$. Como $S_\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é fortemente contínua, temos que $S_\alpha(\cdot)x$ é contínua. Além disso,

$$\|S_\alpha(t)x\| \leq \frac{CM}{1 + |\mu| t^\alpha} \|x\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Portanto, $S_\alpha(\cdot)x \in C_b([0, \infty), X)$. Para $\omega > 0$, temos que

$$\|S_\alpha(t+\omega)x + S_\alpha(t)x\| \leq \left(\frac{CM}{1 + |\mu| (t+\omega)^\alpha} + \frac{CM}{1 + |\mu| t^\alpha} \right) \|x\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Assim, $S_\alpha(\cdot)x \in SAP_\omega(X)$, para todo $x \in X$. Com isso, o problema se reduz em mostrar que $v_\alpha \in SAP_\omega(X)$. Para isto, primeiramente, note que existe $C_{\alpha, x} > 0$ tal que

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|S_\alpha(t)x\| \leq C_{\alpha, x}, \quad x \in X.$$

Daí segue pelo Princípio da Limitação Uniforme que existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que $\sup_{t \in [0, \infty)} \|S_\alpha(t)\| \leq C_\alpha$. Sejam $u \in SAP_\omega(X)$ e $s \geq 0$, da desigualdade

$$\begin{aligned} \|f(s, u(s))\| &\leq \|f(s, u(s)) - f(s, 0)\| + \|f(s, 0)\| \\ &\leq L(s)\|u(s)\| + \|f(s, 0)\|, \end{aligned}$$

segue que a função $s \mapsto f(s, u(s))$ é integrável em $[0, \infty)$. Seja $\varepsilon > 0$, fixemos $a > 0$ tal que

$$\int_a^\infty \|f(s, u(s))\| < \frac{\varepsilon}{3C_\alpha}.$$

Também sabemos que, como a função $s \mapsto f(s, u(s))$ é contínua, o conjunto $K_a := \{f(s, u(s)); s \in [0, a]\}$ é compacto em X . Assim, para $\omega > 0$ e $s \in [0, a]$ existe $T_{\varepsilon, K_a} > 0$, tal que

$$\|S_\alpha(t + \omega)f(s, u(s)) - S_\alpha(t)f(s, u(s))\| < \frac{\varepsilon}{3a},$$

para todo $t \geq T$ e $s \in [0, a]$. Para $t > a$, podemos fazer a seguinte decomposição

$$\begin{aligned} v_\alpha(t + \omega) - v_\alpha(t) &= \int_0^{t+\omega} S_\alpha(t + \omega - s)f(s, u(s))ds - \int_0^t S_\alpha(t - s)f(s, u(s))ds \\ &= \int_0^a (S_\alpha(t + \omega - s) - S_\alpha(t - s))f(s, u(s))ds \\ &\quad + \int_a^{t+\omega} S_\alpha(t + \omega - s)f(s, u(s))ds - \int_a^t S_\alpha(t - s)f(s, u(s))ds. \end{aligned}$$

Tomando $t \geq T + a$, obtemos

$$\begin{aligned} \|v_\alpha(t + \omega) - v_\alpha(t)\| &\leq \int_0^a \|S_\alpha(t + \omega - s)f(s, u(s)) - S_\alpha(t - s)f(s, u(s))\|ds \\ &\quad + C_\alpha \int_a^{t+\omega} \|f(s, u(s))\|ds + C_\alpha \int_a^t \|f(s, u(s))\|ds \\ &\leq \int_0^a \frac{\varepsilon}{3a}ds + 2C_\alpha \int_a^\infty \|f(s, u(s))\|ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2C_\alpha \frac{\varepsilon}{3C_\alpha} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $\lim_{t \rightarrow \infty} (v_\alpha(t + \omega) - v_\alpha(t)) = 0$. Mais ainda, da desigualdade

$$\begin{aligned} \|v_\alpha(t)\| &\leq \int_0^t \|S_\alpha(t - s)\| \|f(s, u(s))\|ds \\ &\leq C_\alpha \int_0^\infty \|f(s, u(s))\|ds < \infty, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

temos que v_α é limitada. Agora, mostremos a continuidade de v_α e concluimos que $v_\alpha \in SAP_\omega(X)$.

Para $t \geq 0$ e $h > 0$, vale

$$\begin{aligned}
v_\alpha(t+h) - v_\alpha(t) &= \int_0^{t+h} S_\alpha(t+h-s)f(s, u(s))ds - \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds \\
&= \int_0^h S_\alpha(t+h-s)f(s, u(s))ds + \int_h^{t+h} S_\alpha(t+h-s)f(s, u(s))ds \\
&\quad - \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds \\
&= \int_0^t S_\alpha(t-s)[f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s))]ds \\
&\quad + \int_0^h S_\alpha(t+h-s)f(s, u(s))ds.
\end{aligned}$$

Para $\varepsilon > 0$, existe $\delta_t > 0$ tal que para todo $0 < h < \delta_t$,

$$\begin{aligned}
\|f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s))\| &< \frac{\varepsilon}{2(C_\alpha t + 1)}, \quad s \in [0, t+1], \\
\int_0^h \|f(s, u(s))\|ds &< \frac{\varepsilon}{2C_\alpha}.
\end{aligned}$$

Assim, para todo $0 < h < \delta_t$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|v_\alpha(t+h) - v_\alpha(t)\| &\leq C_\alpha \int_0^t \|f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s))\|ds \\
&\quad + C_\alpha \int_0^h \|f(s, u(s))\|ds \\
&\leq C_\alpha t \frac{\varepsilon}{2(C_\alpha t + 1)} + C_\alpha \frac{\varepsilon}{2C_\alpha} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que implica que v_α é contínua à direita.

Do que foi visto até aqui, concluímos que $\Gamma_\alpha : SAP_\omega(X) \rightarrow SAP_\omega(X)$. Agora, sejam $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$, a desigualdade

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_\alpha u_1(t) - \Gamma_\alpha u_2(t)\| &\leq \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| \|f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))\|ds \\
&\leq C_\alpha \int_0^t L(s) \|u_1(s) - u_2(s)\|ds \\
&\leq C_\alpha \int_0^\infty L(s)ds \|u_1 - u_2\|_\infty,
\end{aligned}$$

mostra que Γ_α é contínua. Defina o operador linear $B_\alpha : C_b([0, \infty), \mathbb{R}) \rightarrow C_b([0, \infty), \mathbb{R})$ por

$$(B_\alpha g)(t) = C_\alpha \int_0^t L(s)g(s)ds, \quad \text{para } t \geq 0.$$

B_α é contínua e além disso, B_α é completamente contínua. Para mostrar que B_α é completamente contínua, observe que dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $a > 0$, tal que

$$C_\alpha \int_a^\infty L(s)ds < \varepsilon.$$

Para cada $g \in C_b([0, \infty))$, defina as seguintes funções

$$(\Gamma_1 g)(t) = \begin{cases} C_\alpha \int_0^t L(s)g(s)ds, & 0 \leq t \leq a \\ C_\alpha \int_0^a L(s)g(s)ds, & t \geq a. \end{cases}$$

e

$$(\Gamma_2 g)(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a \\ C_\alpha \int_0^a L(s)g(s)ds, & t \geq a. \end{cases}$$

Seja $R = \{\Gamma_1 g; \|g\|_\infty \leq 1\}$. Se $s, t \geq a$, temos $|\Gamma_1 g(s) - \Gamma_1 g(t)| = 0$. Se $0 \leq s, t \leq a$, para qualquer $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Logo, para $|s - t| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} |(\Gamma_1 g)(s) - (\Gamma_1 g)(t)| &= \left| C_\alpha \int_0^s L(u)g(u)du - C_\alpha \int_0^t L(u)g(u)du \right| \\ &\leq C_\alpha \left| \int_0^s L(u)g(u)du - \int_0^t L(u)g(u)du \right| \\ &\leq C_\alpha \int_s^t |L(u)g(u)| du \\ &\leq C_\alpha \sup_{u \leq a} |L(u)g(u)| |s - t| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Analogamente, se $s \leq a$ e $t > a$, para $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$, assim para $|s - t| < \delta$, temos $|a - s| < \delta$, logo

$$\begin{aligned} |(\Gamma_1 g)(s) - (\Gamma_1 g)(t)| &= \left| C_\alpha \int_0^s L(u)g(u)du - C_\alpha \int_0^a L(u)g(u)du \right| \\ &\leq C_\alpha \int_s^a |L(u)g(u)| du < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto a família $R_\varepsilon = \{\Gamma_1(g); \|g\|_\infty \leq 1\}$ é equicontínua. Também podemos observar que R_ε é uniformemente limitada, pois se $0 \leq t \leq a$, temos

$$|(\Gamma_1 g)(t)| \leq C_\alpha \int_0^t \|L(u)\| \|g(u)\| du < \infty,$$

do mesmo modo, para $t \geq a$, temos

$$|(\Gamma_1 g)(t)| \leq C_\alpha \int_0^a \|L(u)\| \|g(u)\| du < \infty.$$

Do Teorema de Arzela-Ascoli concluímos que R_ε é relativamente compacto. No entanto, observe que

$$B_\alpha g(t) = \Gamma_1 g(t) + \Gamma_2 g(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto

$$B_\alpha := \{B_\alpha g; \|g\| \leq 1\} \subset R_\varepsilon + \{\beta; \beta \in C_b([0, \infty)), \|\beta\|_\infty \leq \varepsilon\} = R_\varepsilon + D_\varepsilon$$

Pela Proposição ??, $\psi_{C_b([0, \infty))}(R_\varepsilon) = 0$, pois $\overline{R_\varepsilon}$ é compacto. Logo

$$\begin{aligned} \psi_{C_b([0, \infty))}(B) &\leq \psi_{C_b([0, \infty))}(R_\varepsilon) + \psi_{C_b([0, \infty))}(D_\varepsilon) \\ &= \psi_{C_b([0, \infty))}(D_\varepsilon) < \varepsilon. \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\psi_{C_b([0, \infty))}(B_\alpha) = 0$. Assim, B_α é um operador completamente contínuo. Segue da Teoria espectral para Operadores Compactos que $0 \in \sigma(B_\alpha)$ e que $\sigma(B_\alpha) - \{0\} = \sigma_p(B_\alpha) - \{0\}$, onde $\sigma(B_\alpha)$ e $\sigma_p(B_\alpha)$ são o espectro de B_α e o espectro pontual de B_α , respectivamente. Observe que se $\lambda \neq 0$ é autovalor de B_α , associado ao autovetor g , por definição temos que

$$|g(t)| = \frac{|(B_\alpha g)(t)|}{|\lambda|} \leq \frac{C_\alpha}{|\lambda|} \int_0^t |L(s)| |g(s)| ds, \quad t \geq 0.$$

Pela Desigualdade de Gronwall, segue que $|g(t)| = 0$, para todo $t \geq 0$, ou seja, $g = 0$. Logo, $\lambda \neq 0$ não pode ser autovalor de B_α . Assim, $\sigma(B_\alpha) = \{0\}$ e o raio espectral de B_α , $r(B_\alpha) = \sup_{\lambda \in \sigma(B_\alpha)} |\lambda| = 0 < 1$. Considere $C_b([0, \infty), \mathbb{R})$ com a relação de ordem pontual e defina uma aplicação m , como no Exemplo ??, a saber, $m : C_b([0, \infty), X) \rightarrow C_b([0, \infty), \mathbb{R})$ onde

$$(mu)(t) = \sup_{s \in [0, t]} \|u(s)\|, \quad t \geq 0.$$

Dados $t \geq 0$, $\theta \in [0, t]$ e $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$, temos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_\alpha u_1(\theta) - \Gamma_\alpha u_2(\theta)\| &\leq C_\alpha \int_0^\theta |L(s)| \|u_1 - u_2\| ds \\ &\leq C_\alpha \int_0^\theta |L(s)| \sup_{\tilde{\theta}} \|u_1(\tilde{\theta}) - u_2(\tilde{\theta})\| ds \\ &\leq C_\alpha \int_0^\theta |L(s)| \sup_{\tilde{\theta}} \|u_1(\tilde{\theta}) - u_2(\tilde{\theta})\| ds \\ &= B_\alpha m(u_1 - u_2)(t). \end{aligned}$$

Com isso,

$$m(\Gamma_\alpha u_1 - \Gamma_\alpha u_2)(t) = \sup_{\theta \in [0, t]} \|\Gamma_\alpha u_1(\theta) - \Gamma_\alpha u_2(\theta)\| \leq B_\alpha m(u_1 - u_2)(t), \quad t \geq 0,$$

o que mostra que $m(\Gamma_\alpha u_1 - \Gamma_\alpha u_2) \leq B_\alpha m(u_1 - u_2)$. Daí, segue que Γ_α , B_α e m verificam as condições do Teorema ??, portanto Γ_α tem um único fixo $u \in SAP_\omega(X)$. Ainda temos

que

$$\begin{aligned}
(1 + |\mu|t^\alpha)\|u(t)\| &= (1 + |\mu|t^\alpha)\left\|S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds\right\| \\
&\leq (1 + |\mu|t^\alpha)\frac{CM}{1 + |\mu|t^\alpha}\|u_0\| + (1 + |\mu|t^\alpha)\int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| \|f(s, u(s))\| ds \\
&\leq CM\|u_0\| + CM\int_0^t \frac{(1 + |\mu|t^\alpha)}{(1 + |\mu|(t-s)^\alpha)} \|f(s, u(s))\| ds \\
&\leq CM\|u_0\| + CM\int_0^t \frac{(1 + |\mu|t^\alpha)}{(1 + |\mu|(t-s)^\alpha)} L(s)\|u(s)\| ds \\
&\quad + CM\int_0^t \frac{(1 + |\mu|t^\alpha)}{(1 + |\mu|(t-s)^\alpha)} \|f(s, 0)\| ds.
\end{aligned}$$

Mas, para $s \leq t$, temos

$$\frac{(1 + |\mu|t^\alpha)}{(1 + |\mu|(t-s)^\alpha)} \leq 2^\alpha(1 + |\mu|s^\alpha).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(1 + |\mu|t^\alpha)\|u(t)\| &\leq CM\|u_0\| + 2^\alpha CM\int_0^t (1 + |\mu|s^\alpha)L(s)\|u(s)\| ds \\
&\quad + 2^\alpha CM\int_0^t (1 + |\mu|s^\alpha)\|f(s, 0)\| ds \\
&\leq CM\|u_0\| + 2^\alpha CM(1 + |\mu|t^\alpha)\|f(\cdot, 0)\|_1 \\
&\quad + 2^\alpha CM\int_0^t (1 + |\mu|s^\alpha)L(s)\|u(s)\| ds.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Gronwall, concluímos

$$\|u(t)\|_\infty \leq \bar{C}(\|u_0\| + \|f(\cdot, 0)\|_1) \exp(\bar{C}\|L\|_1)$$

onde $\bar{C} = 2^\alpha CM$.

□

Teorema 4.3. *Sejam A um operador setorial tipo $\mu < 0$ e $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ uma função uniformemente S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in X, t \geq 0. \quad (4.6)$$

Se $CM|\mu|^{-\frac{1}{2}}\pi L < \alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})$, onde C e M são constantes dadas por (??), então o problema (??) e (??) tem uma solução branda S -assintoticamente ω -periódica.

Demonstração. Como no Teorema (??), defina a aplicação Γ_α no espaço $SAP_\omega(X)$ por

$$(\Gamma_\alpha u)(t) := S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds = S_\alpha(t)u_0 + v_\alpha(t).$$

Mostraremos que Γ_α está bem definida e em seguida mostraremos que $\Gamma(\alpha)$ é uma contração. De fato, seja $u \in SAP_\omega(X)$. Sabemos que $S_\alpha(t)u_0 \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, logo $S_\alpha(\cdot)u_0 \in SAP_\omega(X)$. Além disso, $v_\alpha \in C_b([0, \infty), X)$, pois $f(\cdot, u(\cdot))$ é limitada e temos

$$\|v_\alpha\|_\infty \leq \frac{CM |\mu|^{-\frac{1}{\alpha}} \pi \|f(\cdot, u(\cdot))\|_\infty}{\alpha \operatorname{sen}(\frac{\pi}{\alpha})}.$$

Do Teorema ??, segue que para todo $\varepsilon > 0$, existe $L_\varepsilon > 0$ tal que $\|f(t + \omega, u(t + \omega)) - f(t, u(t))\| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq L_\varepsilon$. Portanto, para todo $t \geq L_\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned} \|v_\alpha(t + \omega) - v_\alpha(t)\| &\leq \int_0^\omega \|S_\alpha(t + \omega - s)f(s, u(s))\| ds \\ &+ \int_0^{L_\varepsilon} \left\| S_\alpha(t - s)[f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s))] \right\| ds \\ &+ \int_{L_\varepsilon}^t \left\| S_\alpha(t - s)[f(s + \omega, u(s + \omega)) - f(s, u(s))] \right\| ds \\ &\leq CM \|f(\cdot, u(\cdot))\|_\infty \left(\int_t^\infty \frac{1}{1 + |\mu|^\alpha} ds + 2 \int_{t-L_\varepsilon}^\infty \frac{1}{1 + |\mu|^\alpha} ds \right) \\ &+ \frac{CM |\mu|^{-\frac{1}{\alpha}} \pi \varepsilon}{\alpha \operatorname{sen}(\frac{\pi}{\alpha})}. \end{aligned}$$

Logo $v_\alpha(t + \omega) - v_\alpha(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$ e portanto $\Gamma_\alpha u \in SAP_\omega(X)$. Por outro lado, para $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$, pois

$$\|(\Gamma_\alpha u_1)(t) - (\Gamma_\alpha u_2)(t)\| \leq \frac{CM |\mu|^{-\frac{1}{\alpha}} \pi L}{\alpha \operatorname{sen}(\frac{\pi}{\alpha})} \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

Portanto, Γ_α é uma contração. □

Corolário 4.1. *Seja $f : [0, \infty) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função S -assintoticamente ω -periódica em conjuntos limitados que satisfaz a condições de Lipschitz (??). Se $L < \frac{\alpha \operatorname{sen} \frac{\pi}{\alpha}}{\rho \pi}$, então o problema (??) e (??) tem uma solução branda S -assintoticamente ω -periódica.*

Teorema 4.4. *Seja $f(\cdot, 0)$ limitada e $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t, x) - f(t + n\omega, x)) = 0$ uniformemente em $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, para todo $K \subset X$ limitado. Suponha que $CM \cdot |\mu|^{-\frac{1}{\alpha}} \pi L < \alpha \operatorname{sen}(\frac{\pi}{\alpha})$ e vale ??, então o problema (??) e (??) admite uma única solução branda S -assintoticamente ω -periódica.*

Demonstração. Seja $\mathcal{S}(X)$ das funções $u \in C_b([0, \infty), X)$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - u(t + n\omega)) = 0,$$

uniformemente em $n \in \mathbb{N}$. Observe que se $u_k \rightarrow u_0$, com $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(X)$, ou seja, para todo k , temos $u_k \in C_b([0, \infty), X)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} (u_k(t) - u_k(t + n\omega)) = 0$, então

$$\begin{aligned} \|u_0 - u_0(t + n\omega)\| &\leq \|u_0(t) - u_k(t)\| + \|u_k(t) - u_k(t + n\omega)\| \\ &\quad + \|u_k(t + n\omega) - u_0(t + nk)\|. \end{aligned}$$

Logo $\lim_{t \rightarrow \infty} (u_0 - u_0(t + n\omega)) = 0$, uniformemente em $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\mathcal{S}(X)$ é um subespaço fechado de $C_b([0, \infty), X)$. Assim, se $u \in \mathcal{S}(X)$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + n\omega, u(t + n\omega)) - f(t, u(t))) = 0,$$

uniformemente em $n \in \mathbb{N}$. Defina $\Gamma_\alpha : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$ como em (??). Como

$$\|v_\alpha\|_\infty \leq \frac{CM |\mu|^{-\frac{1}{\alpha}} \pi (L\|u\|_\infty + \|f(\cdot, 0)\|_\infty)}{\alpha \operatorname{sen}(\frac{\pi}{\alpha})}.$$

E

$$\begin{aligned} \|v_\alpha(t + n\omega) - v_\alpha(t)\| &\leq CM (L\|u\|_\infty + \|f(\cdot, 0)\|_\infty) \left(\int_t^\infty \frac{1}{1 + |\mu| s^\alpha} ds \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{t-L_\varepsilon}^\infty \frac{1}{1 + |\mu| s^\alpha} ds \right) + \frac{CM |\mu|^{-\frac{1}{\alpha}} \pi \varepsilon}{\alpha \operatorname{sen}(\frac{\pi}{\alpha})} \end{aligned}$$

Portanto, $\Gamma_\alpha \in \mathcal{S}(X)$. Assim, analogamente a demonstração do Teorema (??), concluímos que Γ_α tem um único ponto fixo em $\mathcal{S}(X)$, logo o resultado segue do Teorema (??). □

Para concluir este trabalho, analisemos a existência e unicidade de solução branda S -assintoticamente ω -periódica para a seguinte equação fracionária

$$D_t^\alpha u(t, x) = D_x^2 u(t, x) - \mu u(t, x) + D_t^{\alpha-1} a(t) f(u(t, \infty)), \quad t \geq 0, x \in [0, \pi], \quad (4.7)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) \quad t \geq 0, \quad (4.8)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad x \in [0, \pi], \quad (4.9)$$

onde $u_0 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ e $a, f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções apropriadas.

Consideremos o problema (??) e (??) com $X = L^2[0, \pi]$ e A definido em $D(A) \subset X$ por $Au = u'' - \nu u$, $\nu > 0$, com

$$D(A) = \{u \in L^2[0, \pi]; u'' \in L^2[0, \pi], u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Sabemos que $\Delta u = u''$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico limitado de ângulo $\frac{\pi}{2}$ em $L^2[0, \pi]$, a saber, o semigrupo gaussiano, estudado no Exemplo ???. Do Teorema 3.7.11 de [?], temos que $\Sigma_\pi \subset \rho(\Delta)$ e

$$\sup_{\lambda \in \Sigma_{\pi-\varepsilon}} \|\lambda(\lambda I - \Delta)^{-1}\| < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Seja $S_{\frac{\pi}{2}} := \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(-\lambda)| < \frac{\pi}{2}\}$, então

$$\mathbb{C} - S_{\frac{\pi}{2}} = \Sigma_{\frac{\pi}{2}} \subset \Sigma_{\pi} \subset \rho(\Delta).$$

Deste modo, se $\lambda \in \mathbb{C} - S_{\frac{\pi}{2}}$, então $\lambda + \nu \in \rho(\Delta)$. Logo, $(\lambda - A)^{-1} = ((\lambda + \nu)I - \Delta)^{-1}$ existe, para todo λ no exterior do setor $S_{\frac{\pi}{2}}$. Além disso, temos que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| = \|((\lambda + \nu)I - \Delta)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda + \nu|}.$$

Portanto, A é setorial tipo $-\nu < 0$. Assim, assumamos que $a(\cdot)$ é uma função S-assintoticamente ω -periódica e que existe uma constante $L > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|, \quad \forall x, y \in [0, \infty).$$

Se $\|a\|_{\infty} < \frac{\alpha \operatorname{sen}(\frac{\pi}{\alpha})}{CM|\nu|^{-\frac{1}{\alpha}}\pi L}$, então pelo teorema (??), existe uma única solução branda S-assintoticamente ω -periódica de (??) e (??). Se além disso, $\lim_{t \rightarrow \infty} (a(t + n\omega) - a(t)) = 0$, uniformemente em $n \in \mathbb{N}$, então a solução é assintoticamente ω -periódica.

REFERÊNCIAS

- [1] ARENDT, W. et al. **Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems**. 2.ed. Berlin: Springer Basel AG, 2011.
- [2] ENGEL, K.; NAGEL, R. **One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations**. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [3] CUESTA, E. Asymptotic behaviour of the solutions of fractional integro-differential equations and some time discretizations. **Discrete Continuous Dynamical Systems**. p. 277-285, Jan. 2007.
- [4] BRANDANI, E. **Medidas de Não Compacidade e Teoria de Interpolação**. 1992. 64f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, São Paulo, 1992.
- [5] FOLLAND, G. **Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications**. 2.ed. Canada: John Wiley e Sons, 1999.
- [6] HENRÍQUEZ, H.; PIERRI, M.; TÀBOAS, P. On S-asymptotically ω -periodic functions on Banach spaces and applications. **J. Math. Anal. Appl.** n.343, p. 1119-1130, 2008.
- [7] REED, M.; SIMOM, B. **Methods of Modern Mathematical Physics, Functional Analysis** London: Academic Press, INC, 1980.
- [8] HENRÍQUEZ, H. Approximation of abstract functional differential equations with unbounded delay. **Indian J. Pure Appl. Math.** n. 27, p. 357-386, 1997.
- [9] KREYSZIG, E. **Introductory Funcional Analysis with Applications**. Canada: John Wiley e Sons, 1989.
- [10] DIETHELM, K. **The Analysis of Fractional Differential Equations**. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
- [11] VIEIRA, E. Funções Holomorfas de uma variável. In: I COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO NORDESTE, 1., 2011, Sergipe. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [12] IÓRIO, R.; IÓRIO, V. **Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução**. Rio de Janeiro: Coleção Projeto Euclides, 1988.
- [13] LIZAMA, C. Regularized solutions for abstract Volterra equations. **J. Math. Anal. Appl.** n. 243, p. 278-292, 2000.
- [14] CUEVAS, C.; SOUZA, J.C. S-asymptotically ω -periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations. **Applied Mathematics Letters**. n. 22, p. 865-870, 2009.

- [15] PIERRI, M. **Funções S-assintoticamente periódicas em espaços de Banach e aplicações à equações diferenciais funcionais.** Tese (doutorado) - ICMC-USP, 2009.
- [16] ZAIDMAN, S. **Almost-Periodic Functions in Abstract Space.** Boston: Res. Notes in Math. 126. , 1985.