



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

ABRAÃO MENDES DO RÊGO

Dois processos de *curve shortening* e o Teorema de Lyusternik-Fet

Maceió

2013

ABRAÃO MENDES DO RÊGO

Dois processos de *curve shortening* e o Teorema de Lyusternik-Fet

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 14 de dezembro de 2012 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

Maceió

2013

Catlogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

R343d Rêgo, Abraão Mendes do.
Dois processos de curve shortening e o teorema de Lyusternik-Fet / Abraão Mendes do Rêgo. – 2012.
63 f.

Orientador: Marcos Petrócio de Almeida Cavalcante
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Maceió, 2012.

Bibliografia: f. 29.

1. Birkhoff, Processo de. 2. Curve Shortening Flow. 3. Lyusternik-Fet, Teorema de. I. Título.

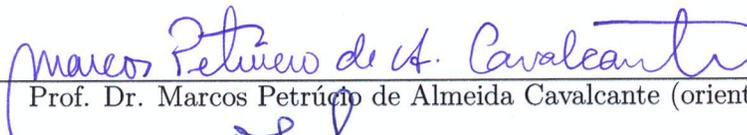
CDU: 514.76

Dois processos de *curve shortening* e o Teorema de Lyusternik-Fet

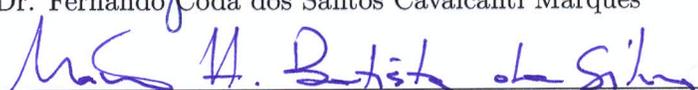
Abraão Mendes do Rêgo

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 14 de dezembro de 2012 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante (orientador)


Prof. Dr. Fernando Codá dos Santos Cavalcanti Marques


Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

À minha esposa, Janaína Rose.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus pela vida e pelo verdadeiro milagre que fez em mim:

*“Tirou-me de um lago horrível, de um charco de lodo; pôs os meus pés sobre uma rocha,
firmou os meus passos...”* Sl 40.2

À minha esposa Janaína Rose por todo amor, carinho e companheirismo. Um presente de Deus para mim. Não chegaria aqui sem a sua ajuda.

À minha família, em especial aos meus pais Natalício Farias e Palmira Mendes por tudo, ao meu irmão Natalício Júnior por todos os momentos juntos, e à minha sogra Rosa Elisa por todo apoio durante todos estes anos, minha segunda mãe.

Ao meu orientador Prof. Marcos Petrúcio pelo apoio, disponibilidade e muitas conversas sobre matemática, as quais foram de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos Professores Fernando Codá e Márcio Henrique por aceitarem participar da banca e pelas correções feitas ao texto.

Aos docentes do Instituto de Matemática da Ufal por tudo que têm feito pela Matemática no Estado de Alagoas e pelas belas aulas ministradas que tanto contribuíram na minha formação acadêmica e que me fizeram gostar ainda mais da “Rainha das Ciências”.

Aos meus amigos de turma por todos os momentos juntos - sejam estudando ou jogando boliche. Em especial ao Wagner Ranter por todos os momentos de descontração, ao Davi Lima pelas várias “resenhas” e belas soluções em matemática, ao Felipe Leandro pelas muitas conversas durante o almoço e dicas no cubo mágico, ao Allan George pelos “cafezinhos” juntos, e ao Rodrigo Santos pelas conversas sobre tudo: “Vida simples é massa!”

Aos funcionários do IM, em especial à Josenilda por sua cordialidade e disponibilidade em nos atender e à Dona Maria pelos eternos cafezinhos.

À CAPES pelo apoio financeiro durante estes dois anos.

RESUMO

Nesta dissertação apresentamos duas demonstrações para o Teorema de Lyusternik-Fet em superfícies compactas, que diz que *em toda superfície compacta existe uma geodésica fechada não-constante*. Em ambas utilizamos processos de *curve shortening* para encontrar uma curva não-constante com energia mínima dentre uma classe de curvas fechadas. Tal curva é na verdade uma geodésica. Na primeira demonstração utilizamos o Processo de Birkhoff e na segunda o *Curve Shortening Flow*.

Palavras-chave: Birkhoff, Processo de. *Curve Shortening Flow*. Lyusternik-Fet, Teorema de.

ABSTRACT

In this dissertation we present two proofs of Lyusternik-Fet's Theorem on compact surfaces. This theorem asserts that every compact surface admits a (non constant) closed geodesic. In both solutions we use a curve shortening approach to find a non constant curve with minimal energy into its homotopy class. The constructions allow us to show that this curve is a geodesic. In the first proof we use the Birkhoff approach, and in the second one we use the curvature flow.

Keywords: Birkhoff Process. Curve Shortening Flow. Lyusternik-Fet's Theorem.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|---|---|-------|
| 1 | $\mathcal{F}(f)(p) = f \circ A_p$ | p. 19 |
| 2 | A deformação $\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]}$ aplicada a c | p. 24 |
| 3 | A deformação \mathcal{D}_σ , com $x = 12$ e $j = 8$, aplicada a c | p. 24 |
| 4 | A deformação \mathcal{D} , com $x = 12$, aplicada a c | p. 24 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-------|
| 1 | INTRODUÇÃO | p. 10 |
| 2 | PRELIMINARES | p. 12 |
| 2.1 | Um pouco sobre geodésicas | p. 12 |
| 2.2 | Um pouco sobre homotopia de pares | p. 17 |
| 3 | DOIS PROCESSOS DE <i>CURVE SHORTENING</i> | p. 23 |
| 3.1 | O Processo de Birkhoff | p. 23 |
| 3.2 | <i>Curve Shortening Flow</i> | p. 28 |
| 4 | O TEOREMA DE LYUSTERNIK-FET | p. 33 |
| 4.1 | Primeira Demonstração | p. 33 |
| 4.2 | Segunda Demonstração | p. 34 |
| 5 | CONCLUSÃO | p. 36 |
| | BIBLIOGRAFIA | p. 37 |

1 INTRODUÇÃO

O problema de existência de geodésicas fechadas em variedades Riemannianas é objeto de investigação desde o começo da geometria diferencial global no século XIX.

O caso mais simples ocorre em superfícies compactas de curvatura negativa. Aqui o grupo fundamental é “muito grande” e, como mostrou Hadamard em 1898, toda curva fechada homotopicamente não-trivial pode ser deformada em uma curva fechada com comprimento mínimo em sua classe de homotopia livre. Esta curva mínima é, a menos de reparametrização, uma geodésica fechada.

A questão de existência de geodésicas fechadas em uma superfície compacta simplesmente conexa é bem mais difícil. Poincaré esboçou em 1905 uma demonstração de que em uma superfície compacta convexa analítica que não “difere muito” de uma esfera canônica, sempre existe uma geodésica fechada.

Em 1917, Birkhoff provou, usando o processo que leva o seu nome, que em qualquer superfície compacta simplesmente conexa existe pelo menos uma geodésica fechada.

Durante as três primeiras décadas do século XX, Birkhoff e Morse, de um lado, e Lyusternik e Schnirelmann, de outro, desenvolveram métodos poderosos para provar a existência de uma ou possivelmente várias geodésicas fechadas em variedades Riemannianas arbitrárias. Mesmo assim, foram obtidos poucos resultados sobre a existência de mais de uma geodésica fechada em variedades Riemannianas compactas e simplesmente conexas. Provavelmente o resultado mais notável é o teorema devido a Lyusternik e Schnirelmann de 1929, onde eles provaram que sobre toda superfície compacta simplesmente conexa existem pelo menos três geodésicas fechadas mergulhadas.

Em 1951, Lyusternik e Fet generalizaram o Teorema de Birkhoff para variedades Riemannianas compactas, onde eles provaram que sobre qualquer variedade Riemanniana compacta existe pelo menos uma geodésica fechada.

Nesta dissertação apresentaremos duas demonstrações para o Teorema de Lyusternik-

Fet em superfícies compactas (simplesmente conexas ou não).

Na primeira demonstração usaremos o Processo de Birkhoff, que consiste em construir uma deformação \mathcal{D} do espaço $P^k M$ das curvas diferenciáveis por partes com energia $\leq k$ na superfície compacta M , onde k é um número real positivo, com a propriedade de que $E(\mathcal{D}c) \leq E(c)$, onde $E(c)$ simboliza a energia da curva c . Além disso, vale a igualdade se, e somente se, c é uma geodésica fechada. Em seguida iteraremos o processo e, a partir de argumentos topológicos, garantiremos que $\{\mathcal{D}^n c\}$ converge para uma geodésica fechada.

Na segunda demonstração, substituiremos o Processo de Birkhoff pelo *Curve Shortening Flow* e repetiremos os principais argumentos apresentados na primeira demonstração. O *Curve Shortening Flow* consiste em fazer com que uma curva inicial $\gamma_0 : S^1 \rightarrow M$ evolua de acordo com a equação

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{DT}{\partial s} \text{ em } S^1 \times (0, \omega), \\ \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0(\cdot), \end{cases}$$

onde $\gamma : S^1 \times [0, \omega) \rightarrow M$ é uma família de curvas imersas fechadas suaves, $T = T(\cdot, t)$ é o campo de vetores unitário tangentes a $\gamma(\cdot, t)$ e $s = s(\cdot, t)$ é o comprimento de arco da curva $\gamma(\cdot, t)$. Veremos que sob certas condições a equação acima é global, ou seja, possui solução para todo tempo positivo e, além disso, $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(\cdot, t)$ é uma geodésica fechada.

Este trabalho foi baseado principalmente em [7] e [8].

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos os conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Um pouco sobre geodésicas

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana conexa e D/dt a derivada covariante associada a sua conexão de Levi-Civita. Uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$, onde I é um intervalo aberto da reta, é uma *geodésica*, se

$$\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt} = 0 \text{ em } I.$$

Se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica e $[a, b] \subset I$, por abuso de linguagem, também diremos que $\gamma|_{[a, b]}$ é uma geodésica.

Observação. Em todo o texto a palavra “diferenciável” significa C^∞ .

Seja $c : [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável por partes. O *comprimento* e a *energia* de c são definidos, respectivamente, por

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt \text{ e } E(c) = \frac{1}{2} \int_a^b \|c'(t)\|^2 dt,$$

onde $\|c'(t)\|^2 = g_{c(t)}(c'(t), c'(t))$. Dados $p, q \in M$, definimos a *distância* entre p e q por

$$d_g(p, q) = \inf_{c \in \Omega_{pq}} L(c),$$

onde Ω_{pq} é o conjunto das curvas diferenciáveis por partes que ligam p a q . Se $c \in \Omega_{pq}$ é tal que $d_g(p, q) = L(c)$, dizemos que c é *minimizante*. Sabemos que (M, d_g) é um espaço métrico e que a topologia induzida por d_g em M coincide com a topologia inicial de M , como podemos verificar em [1], pp. 161-162. Em geral, denotaremos d_g por d_M ou d . Ao longo do texto identificaremos (M, g) e (M, d_g) com a própria M .

A proposição seguinte nos diz que, a menos de reparametrização, toda curva minimizante é uma geodésica.

Proposição 2.1. *Seja $c : [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável por partes e parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco, i.e.,*

$$L(c|_{[a,t]}) = \frac{t-a}{b-a}L(c).$$

Se c é minimizante, então c é uma geodésica.

Demonstração. Ver p. 81 de [1]. □

A seguir temos um resultado que relaciona $L(c)$ com $E(c)$.

Proposição 2.2. *Seja $c : [a, b] \rightarrow M$ uma curva diferenciável por partes. Então*

$$L(c)^2 \leq 2(b-a)E(c)$$

e vale a igualdade se, e somente se, c está parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco.

Demonstração. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} L(c)^2 &= \left(\int_a^b \|c'(t)\| dt \right)^2 \\ &\leq \int_a^b \|c'(t)\|^2 dt \int_a^b 1^2 dt \\ &= 2(b-a)E(c) \end{aligned}$$

e vale a igualdade se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\|c'(t)\| = \lambda \cdot 1 = \lambda$ para quase todo ponto $t \in [a, b]$, o que equivale a dizer que c está parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco. □

Proposição 2.3. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma geodésica minimizante. Se $c : [a, b] \rightarrow M$ é uma curva diferenciável por partes que liga $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$, então $E(\gamma) \leq E(c)$. Além disso, vale a igualdade se, e somente se, c é uma geodésica minimizante.*

Demonstração. Visto que uma geodésica sempre está parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco, usando a Proposição 2.2, temos que

$$2(b-a)E(\gamma) = L(\gamma)^2 = d(c(a), c(b))^2 \leq L(c)^2 \leq 2(b-a)E(c). \quad (2.1)$$

Logo, $E(\gamma) \leq E(c)$. Além disso, se vale a igualdade $E(\gamma) = E(c)$, então valem todas as igualdades em (2.1) $\Rightarrow L(c)^2 = 2(b-a)E(c)$ e $L(c) = d(c(a), c(b))$. Portanto, usando as Proposições 2.1 e 2.2, temos que c é uma geodésica minimizante.

Reciprocamente, se c é uma geodésica minimizante, novamente pela Proposição 2.2, temos que $2(b-a)E(\gamma) = L(\gamma)^2 = d(c(a), c(b))^2 = L(c)^2 = 2(b-a)E(c)$. Portanto, $E(\gamma) = E(c)$. \square

A proposição acima nos diz que as geodésicas minimizantes (do comprimento) também minimizam energia.

Sabemos que dado $p \in M$ existe um $\eta(p) > 0$ tal que a bola $B_{\eta(p)}(p) \subset M$ é uma vizinhança totalmente normal e fortemente convexa de p . Com isso, para cada $q \in B_{\eta(p)}(p)$ existe uma única geodésica minimizante $\gamma_{pq} : [0, 1] \rightarrow M$ que liga p a q . Além disso, γ_{pq} é a única geodésica que liga p a q e está completamente contida em $B_{\eta(p)}(p)$. Outrossim, a aplicação $\exp_p : B_{\eta(p)}(0) \subset T_p M \rightarrow B_{\eta(p)}(p) \subset M$ é um difeomorfismo. Quando o domínio não for necessariamente o intervalo $[0, 1]$, denotaremos por $\gamma_{pq}|[a, b]$ a única geodésica minimizante ligando p a q definida em $[a, b]$. Se $p = q$, então γ_{pq} é constante.

Proposição 2.4. *Se M é uma variedade Riemanniana compacta, então existe um $\eta_M > 0$ tal que para todo $p \in M$ a bola $B_{\eta_M}(p) \subset M$ é uma vizinhança totalmente normal e fortemente convexa de p .*

Demonstração. Basta cobrirmos M com as bolas $B_{\eta(p)}(p)$ e em seguida tomarmos $\eta_M > 0$ como um número de Lebesgue desta cobertura. \square

De agora em diante, salvo menção contrária, M denotará uma variedade Riemanniana compacta. Por simplicidade, denotaremos η_M apenas por η .

Seja $C^0([a, b], M)$ o espaço de todas as curvas contínuas $c : [a, b] \rightarrow M$ munido com a topologia da convergência uniforme.

Proposição 2.5. *Sejam $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ seqüências em M com $d(p_n, q_n) \leq \eta/2$ para todo n . Se $p_n \rightarrow p$ e $q_n \rightarrow q$, então $\gamma_{p_n q_n} \rightarrow \gamma_{pq}$ em $C^0([0, 1], M)$. Além disso, $E(\gamma_{p_n q_n}) \rightarrow E(\gamma_{pq})$.*

Demonstração. Pelo Corolário 1.4.4 da página 23 de [2], temos que $\gamma_{p_n q_n} \rightarrow \gamma_{pq}$. Além disso, $2E(\gamma_{p_n q_n}) = L(\gamma_{p_n q_n})^2 = d(p_n, q_n)^2 \rightarrow d(p, q)^2 = L(\gamma_{pq})^2 = 2E(\gamma_{pq})$. \square

Logo abaixo temos uma observação importante que usaremos mais adiante.

Observação 2.6. Sejam $\alpha = \gamma_{pq}|[a, b]$ e $\alpha_n = \gamma_{p_n q_n}|[a_n, b_n]$ com $d(p_n, q_n) \leq \eta/2$, $\forall n$. Se $\alpha_n(a_n) = p_n \rightarrow p$, $\alpha_n(b_n) = q_n \rightarrow q$, $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$, é possível demonstrar que $\tilde{\alpha}_n \xrightarrow{u} \tilde{\alpha}$, onde $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow M$ é definida por

$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(a), & \text{se } t < a, \\ \alpha(t), & \text{se } a \leq t \leq b, \\ \alpha(b), & \text{se } b < t, \end{cases}$$

e $\tilde{\alpha}_n : \mathbb{R} \rightarrow M$ é definida de forma semelhante. Além disso, se $a < b$, então

$$E(\gamma_{p_n q_n}|[a_n, b_n]) = \frac{d(p_n, q_n)^2}{2(b_n - a_n)} \rightarrow \frac{d(p, q)^2}{2(b - a)} = E(\gamma_{pq}|[a, b]).$$

Usaremos a notação $\gamma_{p_n q_n}|[a_n, b_n] \rightarrow \gamma_{pq}|[a, b]$ para dizer que $\tilde{\alpha}_n \xrightarrow{u} \tilde{\alpha}$. Aqui, \xrightarrow{u} significa convergência uniforme.

Lema 2.7. *Seja $\{c_n\}$ uma sequência em $C^0([a, b], M)$. Temos que $c_n \rightarrow c$ em $C^0([a, b], M)$ se, e somente se, $\lim c_n(t_n) = c(\lim t_n)$ para toda sequência convergente $\{t_n\}$ em $[a, b]$.*

Demonstração. Suponha que $c_n \rightarrow c$ e seja $\{t_n\}$ uma sequência convergente em $[a, b]$ com limite igual a t_0 . Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} d_M(c_n(t_n), c(t_0)) &\leq d_M(c_n(t_n), c(t_n)) + d_M(c(t_n), c(t_0)) \\ &\leq d(c_n, c) + d_M(c(t_n), c(t_0)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim c_n(t_n) = c(t_0) = c(\lim t_n)$.

Suponha que $c_n \not\rightarrow c$. Neste caso, existe um $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $\{c_{n_k}\}$ tal que $d(c_{n_k}, c) \geq \varepsilon$ para todo k . Como estamos considerando em $C^0([a, b], M)$ a topologia da convergência uniforme, existe uma sequência $\{s_{n_k}\}$ em $[a, b]$ tal que $d_M(c_{n_k}(s_{n_k}), c(s_{n_k})) \geq \varepsilon$ para todo k . Visto que $\{s_{n_k}\}$ é limitada, existe uma subsequência $\{s_{n_{k'}}\}$ convergente. Seja $s_0 = \lim_{k'} s_{n_{k'}}$. Defina $\{t_n\}$ da seguinte maneira: $t_n = s_n$ se $n = n_{k'}$ e $t_n = s_0$ se $n \neq n_{k'}$. É claro que $t_n \rightarrow s_0$. Afirmamos que $c_n(t_n) \not\rightarrow c(\lim t_n) = c(s_0)$. Caso contrário, temos que $c_{n_{k'}}(s_{n_{k'}}) = c_{n_{k'}}(t_{n_{k'}}) \rightarrow c(s_0)$, o que implica $0 < \varepsilon \leq d_M(c_{n_{k'}}(s_{n_{k'}}), c(s_{n_{k'}})) \leq d_M(c_{n_{k'}}(s_{n_{k'}}), c(s_0)) + d_M(c(s_0), c(s_{n_{k'}})) \rightarrow 0$, que é um absurdo. \square

Proposição 2.8. *Seja $\{c_n : [a, b] \rightarrow M\}$ uma sequência de curvas diferenciáveis por partes. Escreva $p_n = c_n(a)$, $q_n = c_n(b)$ e assumamos que $d(p_n, q_n) \leq \eta/2$ para todo n . Se as sequências $\{d(p_n, q_n)^2\}$ e $\{2(b - a)E(c_n)\}$ convergem para o mesmo valor, então $\{c_n\}$ possui uma*

subsequência convergente em $C^0([a, b], M)$, cujo limite é uma geodésica minimizante $c : [a, b] \rightarrow M$. Além disso, $L(c) \leq \eta/2$.

Demonstração. Como M é compacta, existe uma subsequência de $\{c_n\}$ (que também denotaremos por $\{c_n\}$) tal que $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ são convergentes. Sejam $p = \lim p_n$ e $q = \lim q_n$. Como $d(p_n, q_n) \leq \eta/2$, e conseqüentemente $d(p, q) \leq \eta/2$, existem as geodésicas minimizantes $c := \gamma_{pq}|[a, b]$ e $\gamma_{p_n q_n}|[a, b]$. Afirmamos que c_n converge para c em $C^0([a, b], M)$. De fato, seja $\{t_n\}$ uma sequência convergente em $[a, b]$ com limite igual a t_0 . Queremos provar que $r_n := c_n(t_n) \rightarrow c(t_0)$. Sejam $\{r_{n_k}\}$ uma subsequência convergente de $\{r_n\}$ e $r = \lim_k r_{n_k}$. Considere as sequências $\{\alpha_k\}$ e $\{\beta_k\}$ definidas por

$$\alpha_k = \gamma_{p_{n_k} r_{n_k}}|[a, t_{n_k}] \text{ e } \beta_k = \gamma_{r_{n_k} q_{n_k}}|[t_{n_k}, b].$$

Pela Observação 2.6, temos que α_k e β_k convergem para

$$\alpha = \gamma_{pr}|[a, t_0] \text{ e } \beta = \gamma_{rq}|[t_0, b],$$

respectivamente. Analisemos os três possíveis casos: $t_0 \in (a, b)$, $t_0 = a$ e $t_0 = b$.

- Se $t_0 \in (a, b)$, mais uma vez pela Observação 2.6, temos que $E(\alpha) = \lim E(\alpha_k)$ e $E(\beta) = \lim E(\beta_k)$. Como $\alpha(t_0) = r = \beta(t_0)$, podemos considerar $\alpha \cup \beta : [a, b] \rightarrow M$, onde $(\alpha \cup \beta)|_{[a, t_0]} = \alpha$ e $(\alpha \cup \beta)|_{[t_0, b]} = \beta$. Portanto,

$$\begin{aligned} E(\alpha \cup \beta) &= E(\alpha) + E(\beta) \\ &= \lim E(\alpha_k) + \lim E(\beta_k) \\ &= \lim \left(E(\gamma_{p_{n_k} r_{n_k}}|[a, t_{n_k}]) + E(\gamma_{r_{n_k} q_{n_k}}|[t_{n_k}, b]) \right) \\ &\stackrel{\text{Prop. 2.3}}{\leq} \lim \left(E(c_{n_k}|[a, t_{n_k}]) + E(c_{n_k}|[t_{n_k}, b]) \right) \\ &= \lim E(c_{n_k}) \\ &\stackrel{\star}{=} \lim \frac{d(p_{n_k}, q_{n_k})^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{d(p, q)^2}{2(b-a)} \\ &\stackrel{\text{Prop. 2.3}}{=} E(\gamma_{pq}|[a, b]). \end{aligned}$$

Em \star usamos a hipótese de que $\lim(2(b-a)E(c_n)) = \lim d(p_n, q_n)^2$. Temos então que $\alpha \cup \beta$ é uma curva regular por partes ligando os pontos p e q cuja energia é menor ou igual a energia de $\gamma_{pq}|[a, b]$. Usando a Proposição 2.3, temos que $\alpha \cup \beta$ é uma geodésica minimizante. Portanto, pela unicidade de $\gamma_{pq}|[a, b]$, temos que

$\alpha \cup \beta = \gamma_{pq}|[a, b]$. Em particular, $r = (\alpha \cup \beta)(t_0) = \gamma_{pq}|[a, b](t_0) = c(t_0)$.

- Se $t_0 = a$, temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq d(p_{n_k}, r_{n_k})^2 &= L(\gamma_{p_{n_k} r_{n_k}}|[a, t_{n_k}])^2 \\ &\stackrel{\text{Prop. 2.2}}{=} 2(t_{n_k} - a)E(\gamma_{p_{n_k} r_{n_k}}|[a, t_{n_k}]) \\ &\stackrel{\text{Prop. 2.3}}{\leq} 2(t_{n_k} - a)E(c_{n_k}|[a, t_{n_k}]) \\ &\leq 2(t_{n_k} - a)E(c_{n_k}) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

visto que $\lim_k t_{n_k} = t_0 = a$ e que $\{E(c_{n_k})\}$ é convergente. Portanto,

$$d(p, r)^2 = \lim_k d(p_{n_k}, r_{n_k})^2 = 0 \Rightarrow r = p = c(a) = c(t_0).$$

- A demonstração do caso $t_0 = b$ é análoga à demonstração do caso $t_0 = a$.

Provamos com isso que $c(t_0)$ é o único ponto aderente da sequência $\{r_n = c_n(t_n)\}$ no espaço métrico compacto M . Portanto, $\lim c_n(t_n) = c(t_0)$. Usando o lema anterior, concluímos que $c_n \rightarrow c = \gamma_{pq}|[a, b]$ em $C^0([a, b], M)$. Além disso, $L(c) = d(p, q) \leq \eta/2$. \square

2.2 Um pouco sobre homotopia de pares

De agora em diante I denotará o intervalo $[0, 1]$, J o intervalo $[-1, 1]$ e S a variedade compacta $[0, 1]/\{0, 1\}$ com a topologia quociente. Denotaremos por ∂J o conjunto $\{-1, 1\}$.

Seja X um espaço métrico. Diremos que (X, A) é um *par* de espaços métricos quando A for um subespaço de X . Dados dois pares de espaços métricos (X, A) e (Y, B) , escreveremos $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ para simbolizar uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subset B$. Diremos que $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é contínua (resp. injetiva, isometria, etc.) se $f : X \rightarrow Y$ for contínua (resp. injetiva, isometria, etc.). Dadas $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, diremos que f é *p-homotópica* a g , e simbolizaremos por $f \simeq_p g$, se existir uma aplicação contínua $H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$, denominada *homotopia de pares*, tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Observe que \simeq_p é uma relação de equivalência. Por simplicidade, denotaremos o par $(X \times I, A \times I)$ por $(X, A) \times I$.

Observação. Quando $B = Y$ acima, a noção de funções *p-homotópicas* coincide com a noção de funções homotópicas, a qual admitiremos conhecida.

Considere $C^0(S, M)$ com a topologia da convergência uniforme. Observe que $C^0(S, M)$

pode ser visto como o subespaço de $C^0([0, 1], M)$ formado pelas curvas fechadas. Seja PM o subespaço de $C^0(S, M)$ formado pelas curvas diferenciáveis por partes. Dado $k \geq 0$, defina $P^k M = \{c \in PM; E(c) \leq k\}$. Observe que $P^0 M$ é o subconjunto de $C^0([0, 1], M)$ formado pelas curvas constante.

Proposição 2.9. *Se $k = \eta^2/2$, então $P^0 M$ é um retrato por deformação forte de $P^k M$ sobre PM , ou seja, existe uma aplicação contínua $\Phi : P^k M \times I \rightarrow PM$ tal que*

- (1) $\Phi_0(c) = c$ para toda $c \in P^k M$;
- (2) $\Phi_t(c) = c$ para toda $c \in P^0 M$ e todo $t \in I$;
- (3) $\Phi_1(c) \in P^0 M$ para toda $c \in P^k M$.

Acima, $\Phi_t(c)$ denota $\Phi(c, t)$.

Demonstração. Observe que $E(c) \leq k = \eta^2/2 \Rightarrow L(c)^2 \leq 2E(c) \leq \eta^2 \Rightarrow L(c) \leq \eta \Rightarrow \text{diam}(c) \leq L(c)/2 \leq \eta/2$. Portanto, $d(c(0), c(s)) \leq \eta/2$ para todo $s \in S$. Podemos então definir

$$\Phi(c, t)(s) = \gamma_{c(0)c(s)}(1-t) = \exp_{c(0)} \left((1-t) \exp_{c(0)}^{-1}(c(s)) \right),$$

para $s \in S$ e $t \in I$. Agora, basta usarmos o Lema 2.7 e a Proposição 2.5 para garantirmos a continuidade de Φ . Observa-se facilmente que Φ satisfaz as propriedades (1), (2) e (3) acima. \square

Corolário 2.9.1. *Seja $G : (J, \partial J) \rightarrow (PM, P^0 M)$ contínua. Se $E(G(p)) \leq \eta^2/2$ para todo $p \in J$, então G é p -homotópica a uma aplicação constante.*

Demonstração. Defina $H : (J, \partial J) \times I \rightarrow (PM, P^0 M)$ por $H(p, t) = \Phi(G(p), t)$, onde Φ é dada na proposição anterior. H é uma homotopia de pares. Observe que $H_1(p) = \Phi_1(G(p)) \in P^0 M$ para todo $p \in J$. Podemos então considerar

$$H_1 : (J, \partial J) \rightarrow (P^0 M, P^0 M).$$

Portanto, H_1 é p -homotópica (= homotópica) a uma aplicação constante, visto que J é contrátil. Portanto, $G = H_0 \simeq_p H_1 \simeq_p$ constante. \square

Corolário 2.9.2. *Se $k = \eta^2/2$ e $c \in P^k M$, então c é livremente homotópica a uma constante.*

Demonstração. Basta definir $H : S \times I \rightarrow M$ por $H(s, t) = \Phi(c, t)(s)$. \square

Seja $A : J \times S \rightarrow S^2$ definida por $A(p, t) = (\sqrt{1-p^2} \cos 2\pi t, \sqrt{1-p^2} \sin 2\pi t, p)$. Observe que A é a função que leva os paralelos do cilindro nos paralelos da esfera, veja Figura 1. Dada $f \in C^0(S^2, M)$, defina $\mathcal{F}(f) : (J, \partial J) \rightarrow (C^0(S, M), P^0 M)$ por $\mathcal{F}(f)(p) = f \circ A_p$ onde $A_p \in C^0(S, S^2)$ é dada por $A_p(t) = A(p, t)$.

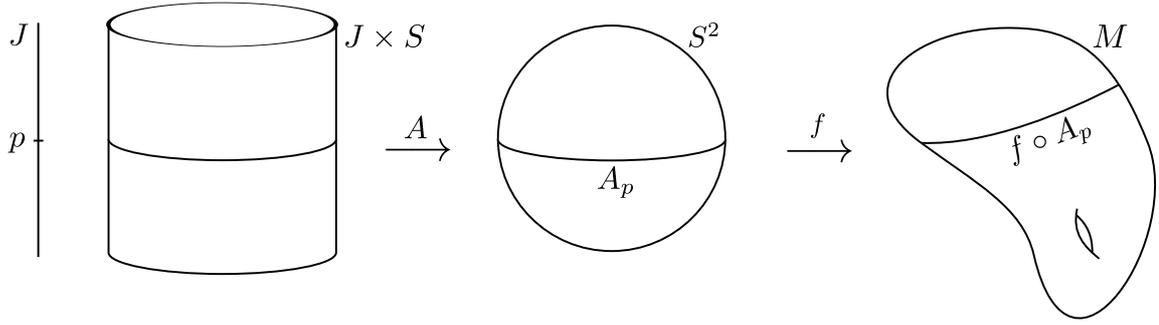


Figura 1: $\mathcal{F}(f)(p) = f \circ A_p$

Proposição 2.10. $\mathcal{F}(f) : (J, \partial J) \rightarrow (C^0(S, M), P^0 M)$ é contínua.

Demonstração. Como estamos considerando em $C^0(S, M)$ a topologia da convergência uniforme, devemos provar que se $\{p_n\}$ é uma sequência de pontos em J que converge para $p \in J$, então $\mathcal{F}(f)(p_n) = f \circ A_{p_n}$ converge uniformemente para $\mathcal{F}(f)(p) = f \circ A_p$. Uma vez que f é uniformemente contínua, visto que S^2 é compacta, basta provarmos que A_{p_n} converge uniformemente para A_p . De fato, definindo $s_n = \sqrt{1-p_n^2} - \sqrt{1-p^2}$, temos que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^3}(A(p_n, t), A(p, t)) &= \|A(p_n, t) - A(p, t)\| \\ &= \|(s_n \cos 2\pi t, s_n \sin 2\pi t, p_n - p)\| \\ &= (s_n^2 + (p_n - p)^2)^{1/2} \\ &=: a_n \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $d_{S^2}(p, q) = 2 \arcsen(d_{\mathbb{R}^3}(p, q)/2)$, temos que

$$\begin{aligned} d(A_{p_n}, A_p) &= \sup_{t \in S} (d_{S^2}(A(p_n, t), A(p, t))) \\ &= \sup_{t \in S} (2 \arcsen(a_n/2)) \\ &= 2 \arcsen(a_n/2) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

A proposição acima nos permite dizer que a aplicação

$$\mathcal{F} : C^0(S^2, M) \rightarrow C^0((J, \partial J), (C^0(S, M), P^0M))$$

está bem definida.

Agora, dada $g \in C^0((J, \partial J), (C^0(S, M), P^0M))$, defina $\mathcal{G}(g) : S^2 \rightarrow M$ por

$$\mathcal{G}(g)(x, y, z) = \begin{cases} g(z) \left(\frac{1}{2\pi} \arg \left(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}} \right) \right), & \text{se } z \notin \partial J, \\ g(z)(0), & \text{se } z \in \partial J, \end{cases}$$

onde \arg e a aplicação contínua $\arg : S^1 \rightarrow [0, 2\pi]/\{0, 2\pi\}$ que satisfaz $\cos(\arg(c, s)) = c$ e $\sin(\arg(c, s)) = s$.

Proposição 2.11. *A aplicação $\mathcal{G}(g) : S^2 \rightarrow M$ e contínua.*

Demonstração. Seja $(x_n, y_n, z_n) \in S^2 - \{\pm(0, 0, 1)\}$ tal que $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in S^2$.

Defina

$$t_n = \frac{1}{2\pi} \arg \left(\frac{x_n}{\sqrt{1-z_n^2}}, \frac{y_n}{\sqrt{1-z_n^2}} \right) \in S \text{ para todo } n \geq 1.$$

Se $z_0 \in \partial J$, temos que $g(z_0) \in P^0M$, portanto, $g(z_0)(t_n) = g(z_0)(0)$. Assim,

$$\begin{aligned} d_M(\mathcal{G}(g)(x_n, y_n, z_n), \mathcal{G}(g)(x_0, y_0, z_0)) &= d_M(g(z_n)(t_n), g(z_0)(0)) \\ &= d_M(g(z_n)(t_n), g(z_0)(t_n)) \\ &\leq \sup_{t \in S} d_M(g(z_n)(t), g(z_0)(t)) \\ &= d(g(z_n), g(z_0)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

visto que g e contínua e $z_n \rightarrow z_0$. Por outro lado, se $z_0 \notin \partial J$, temos que

$$t_n \rightarrow t_0 := \frac{1}{2\pi} \arg \left(\frac{x_0}{\sqrt{1-z_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{1-z_0^2}} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} d_M(\mathcal{G}(g)(x_n, y_n, z_n), \mathcal{G}(g)(x_0, y_0, z_0)) &= d_M(g(z_n)(t_n), g(z_0)(t_0)) \\ &\leq d_M(g(z_n)(t_n), g(z_0)(t_n)) \\ &\quad + d_M(g(z_0)(t_n), g(z_0)(t_0)) \\ &\leq d(g(z_n), g(z_0)) + d_M(g(z_0)(t_n), g(z_0)(t_0)) \\ &\rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

visto que g e $g(z_0)$ são contínuas. Isto prova que $\mathcal{G}(g)$ é contínua. \square

A proposição acima nos permite dizer que a aplicação

$$\mathcal{G} : C^0((J, \partial J), (C^0(S, M), P^0 M)) \rightarrow C^0(S^2, M)$$

está bem definida.

Usaremos o lema abaixo para demonstrar o último item da próxima proposição.

Lema 2.12. *Sejam X um espaço métrico compacto e Y um espaço métrico qualquer. Considere $C^0(X, Y)$ munido com a topologia da convergência uniforme. Então duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são homotópicas se, e somente se, f e g pertencem à mesma componente conexa por caminhos do espaço $C^0(X, Y)$. Além disso, a homotopia*

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

entre f e g e o caminho $\hat{H} : I \rightarrow C^0(X, Y)$ que liga f a g estão relacionados por

$$\hat{H}(t)(x) = H(x, t).$$

Demonstração. Ver [3]. \square

Proposição 2.13. *A respeito das aplicações \mathcal{F} e \mathcal{G} definidas acima, valem as seguintes propriedades:*

- (a) $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1}$.
- (b) \mathcal{F} e \mathcal{G} são isometrias.
- (c) $\mathcal{F}(C^\infty(S^2, M)) \subset C^0((J, \partial J), (C^\infty(S, M), P^0 M)) \subset C^0((J, \partial J), (PM, P^0 M))$.
- (d) $\mathcal{F}(\text{constante}) = \text{constante}$ e $\mathcal{G}(\text{constante}) = \text{constante}$.
- (e) Dadas $f, g \in C^0(S^2, M)$, temos $f \simeq g$ se, e somente se, $\mathcal{F}(f) \simeq_p \mathcal{F}(g)$.

Acima, $f \simeq g$ significa que f é homotópica a g .

Demonstração. Os itens (a), (c) e (d) seguem diretamente das definições de \mathcal{F} e \mathcal{G} .

- (b) Como $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1}$, para provarmos que \mathcal{F} e \mathcal{G} são isometrias, basta provarmos que \mathcal{F} é uma isometria. Neste caso, dadas $f, g \in C^0(S^2, M)$, temos que

$$\begin{aligned}
 d(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)) &= \sup_{p \in J} d(\mathcal{F}(f)(p), \mathcal{F}(g)(p)) \\
 &= \sup_{p \in J} \left(\sup_{t \in S} d_M(\mathcal{F}(f)(p)(t), \mathcal{F}(g)(p)(t)) \right) \\
 &= \sup_{(p,t) \in J \times S} d_M(f(A(p,t)), g(A(p,t))) \\
 &= \sup_{x \in A(J \times S) = S^2} d_M(f(x), g(x)) \\
 &= d(f, g).
 \end{aligned}$$

- (e) Observe que para cada homotopia $H : S^2 \times I \rightarrow M$, existe uma homotopia de pares $\tilde{H} : (J, \partial J) \times I \rightarrow (C^0(S, M), P^0 M)$ entre $\mathcal{F}(H_0)$ e $\mathcal{F}(H_1)$, dada por

$$\tilde{H}(p, t) = \mathcal{F}(\hat{H}(t))(p),$$

onde \hat{H} é dado pela lema anterior. Reciprocamente, para cada homotopia de pares $L : (J, \partial J) \times I \rightarrow (C^0(S, M), P^0 M)$, existe uma homotopia $\tilde{L} : S^2 \times I \rightarrow M$ entre $\mathcal{G}(L_0)$ e $\mathcal{G}(L_1)$, dada por

$$\tilde{L}(q, t) = \mathcal{G}(\hat{L}(t))(q).$$

Com isso, $f \simeq g \Rightarrow \mathcal{F}(f) \simeq_p \mathcal{F}(g) \Rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) \simeq \mathcal{G}(\mathcal{F}(g)) \stackrel{\text{Item(a)}}{\Rightarrow} f \simeq g$.

□

Corolário 2.13.1. *Dada $f \in C^0(S^2, M)$, temos que f é homotópica a uma constante se, e somente se, $\mathcal{F}(f)$ é p -homotópica a uma constante.*

Demonstração. Basta usar os itens (d) e (e) da proposição.

□

3 DOIS PROCESSOS DE *CURVE SHORTENING*

O objetivo deste capítulo é apresentar os dois processos de *curve shortening* que serão utilizados para demonstrar o Teorema de Lyusternik-Fet: o Processo de Birkhoff e o *Curve Shortening Flow*.

3.1 O Processo de Birkhoff

Lema 3.1. *Fixe $k > 0$ e escolha um inteiro par $x > 0$ com $4k/x \leq \eta^2/4$. Para toda $c \in P^k M$ e todos $t, t' \in [0, 1]$, com $0 \leq t' - t \leq 2/x$, temos $d(c(t), c(t')) \leq \eta/2$.*

Lembramos que M é uma variedade Riemanniana compacta e $\eta = \eta_M$.

Demonstração. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} d(c(t), c(t'))^2 &\leq \left(\int_t^{t'} \|c'(s)\| ds \right)^2 \\ &\leq \int_t^{t'} \|c'(s)\|^2 ds \int_t^{t'} 1^2 ds \\ &\leq 2E(c)(2/x) \\ &\leq 4k/x \\ &\leq \eta^2/4. \end{aligned}$$

□

Definição 3.2. Fixe $k > 0$ e escolha um inteiro par $x > 0$ como no lema anterior. Sejam $a, b \in [0, 1]$ com $0 \leq b - a \leq 2/x$ e $\sigma \in [a, b]$. Definimos a deformação $\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} : P^k M \rightarrow P^k M$ por

$$\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c = \begin{cases} \gamma_{c(a)c(\sigma)}|_{[a, \sigma]} & \text{em } [a, \sigma], \\ c|_{[a, \sigma]^c} & \text{em } [a, \sigma]^c. \end{cases}$$

Observe que $\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c$ está bem definida, visto que, pelo lema anterior, $d(c(a), c(\sigma)) \leq \eta/2$. Veja a ilustração a seguir.

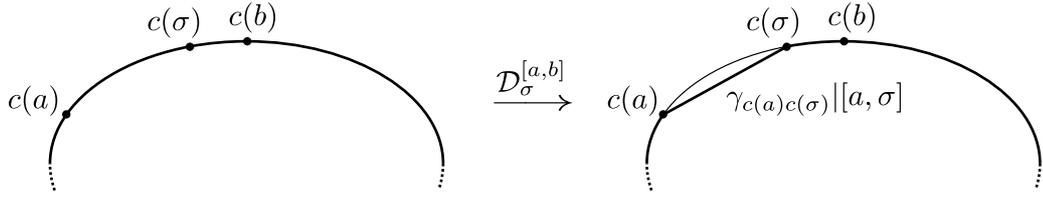


Figura 2: A deformação $\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]}$ aplicada a c

Seja j um inteiro par satisfazendo $0 \leq j \leq x-2$. Para $\sigma \in [j/x, (j+2)/x]$, definimos $\mathcal{D}_\sigma : P^k M \rightarrow P^k M$ por

$$\mathcal{D}_\sigma = \mathcal{D}_\sigma^{[j/x, (j+2)/x]} \circ \mathcal{D}_{j/x}^{[(j-2)/x, j/x]} \circ \dots \circ \mathcal{D}_{4/x}^{[2/x, 4/x]} \circ \mathcal{D}_{2/x}^{[0, 2/x]}.$$

Veja a ilustração abaixo.

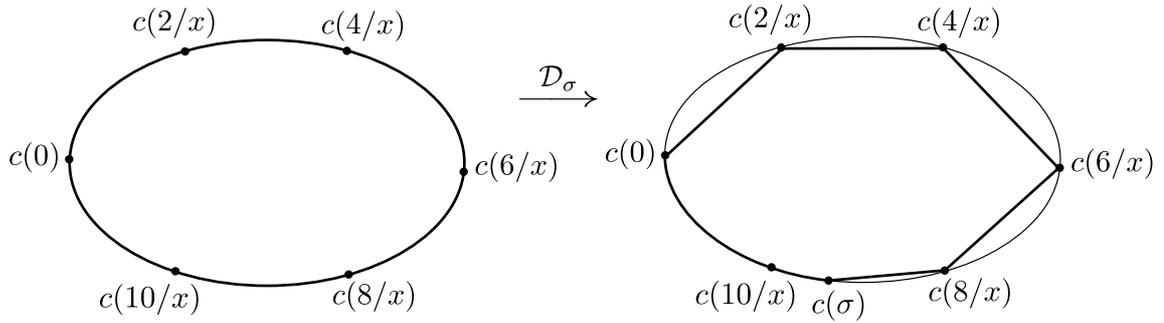


Figura 3: A deformação \mathcal{D}_σ , com $x = 12$ e $j = 8$, aplicada a c

Por fim, dado $\sigma \in (1, 2]$, definimos $\mathcal{D}_\sigma : P^k M \rightarrow P^k M$ por

$$\mathcal{D}_\sigma c = (\mathcal{D}_{\sigma-1}(\mathcal{D}_1 c \circ \theta)) \circ \theta^{-1},$$

onde $\theta : S \rightarrow S$ é dada por $\theta(t) = t + \frac{1}{x} \pmod{[0, 1]}$. Denotaremos \mathcal{D}_2 apenas por \mathcal{D} .

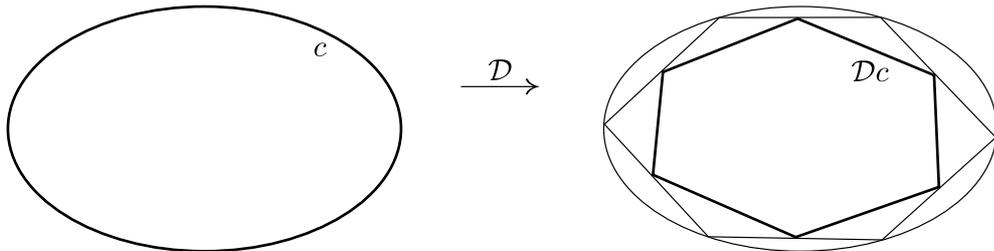


Figura 4: A deformação \mathcal{D} , com $x = 12$, aplicada a c

Proposição 3.3. $E(\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]}c) \leq E(c)$ e vale a igualdade se, e somente se, $c|_{[a,\sigma]}$ é uma geodésica minimizante. Além disso, $\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]}c = c$ se, e somente se, $c|_{[a,\sigma]}$ é uma geodésica minimizante.

Demonstração. Segue diretamente da definição de $\mathcal{D}_\sigma^{[a,b]}$, da Proposição 2.3 e da unicidade de $\gamma_{c(a)c(\sigma)}|_{[a,\sigma]}$. \square

Corolário 3.3.1. $E(\mathcal{D}_1c) \leq E(c)$ e vale a igualdade se, e somente se, $c|_{[j/x,(j+2)/x]}$ é geodésica minimizante para todo j par satisfazendo $0 \leq j \leq x-2$. Além disso, $\mathcal{D}_1c = c$ se, e somente se, para todo j par satisfazendo $0 \leq j \leq x-2$ temos que $c|_{[j/x,(j+2)/x]}$ é geodésica minimizante.

Lema 3.4. Se $c \in P^kM$ é uma geodésica, então dados $t, t' \in [0, 1]$ com $0 \leq t' - t \leq 2/x$, temos que $c|_{[t,t']} = \gamma_{c(t)c(t')}|_{[t,t']}$.

Demonstração. Segue diretamente do Lema 3.1 que $d(c(t), c(s)) \leq \eta/2$ para todo $s \in [t, t']$. Portanto, $c([t, t']) \subset B_\eta(c(t))$. Assim, pela unicidade da geodésica ligando $c(t)$ a $c(t')$ que está inteiramente contida em $B_\eta(c(t))$, temos que $c|_{[t,t']} = \gamma_{c(t)c(t')}|_{[t,t']}$. \square

Lembremos que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2$.

Proposição 3.5. Seja $c \in P^kM$. Então $E(\mathcal{D}c) \leq E(c)$ e vale a igualdade se, e somente se, c é uma geodésica. Além disso, $\mathcal{D}c = c$ se, e somente se, c é uma geodésica.

Demonstração. Segue diretamente da definição de energia que

$$E(\alpha \circ \theta) = E(\alpha) = E(\alpha \circ \theta^{-1})$$

para toda $\alpha \in PM$. Portanto, pelo Corolário 3.3.1, temos que

$$\begin{aligned} E(\mathcal{D}c) &= E\left((\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1c \circ \theta)) \circ \theta^{-1}\right) \\ &= E(\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1c \circ \theta)) \\ &\leq E(\mathcal{D}_1c \circ \theta) \\ &= E(\mathcal{D}_1c) \\ &\leq E(c). \end{aligned}$$

Portanto, $E(\mathcal{D}c) \leq E(c)$. Além disso, se vale $E(\mathcal{D}c) = E(c)$, então valem todas as igualdades acima. Portanto, pelo Corolário 3.3.1, como $E(\mathcal{D}_1c) = E(c)$, temos que $c|_{[j/x,(j+2)/x]}$ é uma geodésica minimizante para todo j par satisfazendo $0 \leq j \leq x-2$. Por outro

lado, considere $\beta = \mathcal{D}_1 c \circ \theta = c \circ \theta$. Segue mais uma vez do Corolário 3.3.1, visto que $E(\mathcal{D}_1 \beta) = E(\beta)$, que $\beta|_{[j/x, (j+2)/x]} = c \circ \theta|_{[j/x, (j+2)/x]}$ é uma geodésica minimizante para todo j par satisfazendo $0 \leq j \leq x-2$. Isso prova que c é uma geodésica.

Reciprocamente, se c é uma geodésica, então segue do Lema 3.4 e do Corolário 3.3.1 que $\mathcal{D}_1 c = c$. Assim, $\mathcal{D}_1 c \circ \theta = c \circ \theta$ também é uma geodésica. Portanto, pelo mesmo argumento, $\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1 c \circ \theta) = \mathcal{D}_1 c \circ \theta$. Assim, $\mathcal{D}c = (\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1 c \circ \theta)) \circ \theta^{-1} = (\mathcal{D}_1 c \circ \theta) \circ \theta^{-1} = (c \circ \theta) \circ \theta^{-1} = c$ (isto demonstra a parte “se” da segunda parte da proposição). Portanto, $E(\mathcal{D}c) = E(c)$. \square

Proposição 3.6. *A aplicação $\mathcal{D}^{[a,b]} : P^k M \times [a, b] \rightarrow P^k M$ definida por $\mathcal{D}^{[a,b]}(c, \sigma) = \mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c$ é contínua.*

Demonstração. Seja $(c_n, \sigma_n) \in P^k M \times [a, b]$ convergente para $(c, \sigma) \in P^k M \times [a, b]$. Queremos provar que $\mathcal{D}^{[a,b]}(c_n, \sigma_n) = \mathcal{D}_{\sigma_n}^{[a,b]} c_n$ converge para $\mathcal{D}^{[a,b]}(c, \sigma) = \mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c$ em $P^k M$. Usaremos o Lema 2.7. Seja $t_n \in [0, 1]$ convergente para $t_0 \in [0, 1]$.

- Defina $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N}; 0 \leq t_n < a\}$. Se $\#\mathbb{N}_1 = \infty$, então $0 \leq t_0 \leq a$ e

$$\begin{aligned} \lim_{n \in \mathbb{N}_1} \mathcal{D}_{\sigma_n}^{[a,b]} c_n(t_n) &= \lim_{n \in \mathbb{N}_1} c_n(t_n) \\ &\stackrel{\text{Lema 2.7}}{=} c(t_0) \\ &= \mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c(t_0). \end{aligned}$$

- Defina $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N}; a \leq t_n \leq \sigma_n\}$. Se $\#\mathbb{N}_2 = \infty$, então $a \leq t_0 \leq \sigma$ e

$$\begin{aligned} \lim_{n \in \mathbb{N}_2} \mathcal{D}_{\sigma_n}^{[a,b]} c_n(t_n) &= \lim_{n \in \mathbb{N}_2} \gamma_{c_n(a)c_n(\sigma_n)}|[a, \sigma_n](t_n) \\ &\stackrel{\text{Obs. 2.6} + \text{Lema 2.7}}{=} \gamma_{c(a)c(\sigma)}|[a, \sigma](t_0) \\ &= \mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c(t_0). \end{aligned}$$

- Defina $\mathbb{N}_3 = \{n \in \mathbb{N}; t_n > \sigma_n\}$. Se $\#\mathbb{N}_3 = \infty$, então $t_0 \geq \sigma$ e

$$\begin{aligned} \lim_{n \in \mathbb{N}_3} \mathcal{D}_{\sigma_n}^{[a,b]} c_n(t_n) &= \lim_{n \in \mathbb{N}_3} c_n(t_n) \\ &\stackrel{\text{Lema 2.7}}{=} c(t_0) \\ &= \mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c(t_0). \end{aligned}$$

Como $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \mathbb{N}_3$, temos que $\lim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{\sigma_n}^{[a,b]} c_n(t_n) = \mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c(t_0)$. Portanto, mais uma vez pelo Lema 2.7, temos que $\mathcal{D}_{\sigma_n}^{[a,b]} c_n \rightarrow \mathcal{D}_\sigma^{[a,b]} c$, como queríamos demonstrar. \square

Corolário 3.6.1. A aplicação $\mathcal{L} : P^k M \times [0, 2] \rightarrow P^k M$ definida por $\mathcal{L}(c, \sigma) = \mathcal{D}_\sigma(c)$ é contínua.

O corolário acima nos diz que c e $\mathcal{D}c$ são livremente homotópicas.

Lema 3.7. Sejam $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^s\}, \{b_n^1\}, \dots, \{b_n^s\}$ seqüências limitadas de números reais, satisfazendo $a_n^i \leq b_n^i$ para todo $(i, n) \in \{1, \dots, s\} \times \mathbb{N}$. Se $\sum_{i=1}^s a_n^i = \sum_{i=1}^s b_n^i$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então existem subsequências convergentes $\{a_{n_k}^i\}$ e $\{b_{n_k}^i\}$ tais que $\lim_k a_{n_k}^i = \lim_k b_{n_k}^i$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$.

Demonstração. Como todas as $2s$ seqüências $\{a_n^i\}$ e $\{b_n^i\}$ são limitadas, existem subsequências convergentes $\{a_{n_k}^i\}$ e $\{b_{n_k}^i\}$, para todo i . Sejam $a^i = \lim_k a_{n_k}^i$ e $b^i = \lim_k b_{n_k}^i$. Assim, $a_{n_k}^i \leq b_{n_k}^i$ e $\sum_{i=1}^s a_{n_k}^i = \sum_{i=1}^s b_{n_k}^i \Rightarrow a^i \leq b^i$ e $\sum_{i=1}^s a^i = \sum_{i=1}^s b^i \Rightarrow a^i = b^i, \forall i = 1, \dots, s$. \square

Proposição 3.8. Seja $\{c_n\}$ uma seqüência em $P^k M$ tal que $\{E(c_n)\}$ e $\{E(\mathcal{D}c_n)\}$ convergem para o mesmo limite $k_0 > 0$. Então $\{c_n\}$ possui uma subsequência convergente em $P^k M$ cujo limite c_0 é uma geodésica fechada não-constante. Além disso, $E(c_0) = k_0$.

Demonstração. Observe que $E(\mathcal{D}c_n) \leq E(\mathcal{D}_1 c_n) \leq E(c_n)$ e $\lim E(\mathcal{D}c_n) = \lim E(c_n) = k_0 \Rightarrow \lim E(\mathcal{D}_1 c_n) = k_0$. Por outro lado, $E(\mathcal{D}_1 c_n|_{[j/x, (j+2)/x]}) \leq E(c_n|_{[j/x, (j+2)/x]})$ e

$$\begin{aligned} \lim_n \sum_j E(\mathcal{D}_1 c_n|_{[j/x, (j+2)/x]}) &= \lim_n E(\mathcal{D}_1 c_n) \\ &= \lim_n E(c_n) \\ &= \lim_n \sum_j E(c_n|_{[j/x, (j+2)/x]}). \end{aligned}$$

Portanto, o lema anterior nos diz que, passando a uma subsequência se necessário, temos $\lim_n E(\mathcal{D}_1 c_n|_{[j/x, (j+2)/x]}) = \lim_n E(c_n|_{[j/x, (j+2)/x]})$, para todo j par satisfazendo $0 \leq j \leq x-2$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_n d(c_n(j/x), c_n((j+2)/x))^2 &\stackrel{*}{=} \lim_n L(\mathcal{D}_1 c_n|_{[j/x, (j+2)/x]})^2 \\ &\stackrel{\text{Prop. 2.3}}{=} \lim_n 2(2/x) E(\mathcal{D}_1 c_n|_{[j/x, (j+2)/x]}) \\ &= \lim_n 2(2/x) E(c_n|_{[j/x, (j+2)/x]}), \text{ para todo } j. \end{aligned}$$

Observação: em $*$ usamos o fato de que $\mathcal{D}_1 c_n|_{[j/x, (j+2)/x]}$ é a geodésica minimizante que liga $c_n(j/x)$ a $c_n((j+2)/x)$ e está definida em $[j/x, (j+2)/x]$. Portanto, pela Proposição 2.8, passando a subsequências se necessário, temos que $c_n|_{[j/x, (j+2)/x]}$ converge para uma geodésica minimizante $c_0|_{[j/x, (j+2)/x]}$ e vale $E(c_0|_{[j/x, (j+2)/x]}) = \lim_n E(c_n|_{[j/x, (j+2)/x]})$, para

todo j . Assim, $c_n \rightarrow c_0$. Observe que

$$E(c_0) = \sum_j E(c_0|_{[j/x, (j+2)/x]}) = \sum_j \lim_n E(c_n|_{[j/x, (j+2)/x]}) = \lim_n E(c_n) = k_0 > 0.$$

Além disso, como $c_0|_{[j/x, (j+2)/x]}$ é geodésica minimizante para cada j par satisfazendo $0 \leq j \leq x-2$, temos, pelo Corolário 3.3.1, que $\mathcal{D}_1 c_0 = c_0$. Agora, repetindo o mesmo processo acima com $\mathcal{D}_1 c_n \circ \theta$ no lugar de c_n , temos que $\mathcal{D}_1 c_n \circ \theta$ (ou uma subsequência de) converge para uma curva \tilde{c}_0 tal que $\mathcal{D}_1 \tilde{c}_0 = \tilde{c}_0$. Como \mathcal{D}_1 é contínua e $c_n \rightarrow c_0$, temos $\tilde{c}_0 = \lim(\mathcal{D}_1 c_n \circ \theta) = \mathcal{D}_1 c_0 \circ \theta = c_0 \circ \theta$. Logo, $\mathcal{D}_1(c_0 \circ \theta) = c_0 \circ \theta$. Desta forma, $\mathcal{D}c_0 = (\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_1 c_0 \circ \theta)) \circ \theta^{-1} = (\mathcal{D}_1(c_0 \circ \theta)) \circ \theta^{-1} = (c_0 \circ \theta) \circ \theta^{-1} = c_0$. Portanto, pela Proposição 3.5, c_0 é uma geodésica fechada não-constante, visto que $E(c_0) = k_0 > 0$. \square

Dado $k > 0$, seja $\mathcal{C}_k = \{c \in C^\infty(S, M); c \text{ é uma geodésica e } E(c) = k\} \subset P^k M$.

Lema 3.9. *Sejam $k_0 > 0$ e \mathcal{U} uma vizinhança aberta de \mathcal{C}_{k_0} em $C^0(S, M)$. Se $\mathcal{C}_{k_0} = \emptyset$ escolha $\mathcal{U} = \emptyset$. Seja $k > k_0$ e considere a deformação $\mathcal{D} : P^k M \rightarrow P^k M$. Então existe um $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{U}) > 0$, que satisfaz $0 < k_0 - \varepsilon < k_0 + \varepsilon \leq k$, tal que*

$$\mathcal{D}(P^{k_0+\varepsilon} M) \subset \mathcal{U} \cup P^{k_0-\varepsilon} M.$$

Demonstração. Podemos supor que $\mathcal{U} \subset P^k M$. Caso contrário basta substituir \mathcal{U} por $\mathcal{U} \cap P^k M$. Como $\mathcal{D}(\mathcal{C}_{k_0}) = \mathcal{C}_{k_0} \subset \mathcal{U}$ e \mathcal{D} é uma aplicação contínua, existe um aberto \mathcal{U}' com $\mathcal{C}_{k_0} \subset \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{D}(\mathcal{U}') \subset \mathcal{U}$. Afirmamos que existe um $\varepsilon > 0$, que satisfaz $0 < k_0 - \varepsilon < k_0 + \varepsilon \leq k$, tal que $\mathcal{D}(P^{k_0+\varepsilon} M) \subset \mathcal{U} \cup P^{k_0-\varepsilon} M$. Caso contrário, para todo $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ suficientemente pequeno, existe um $c_n \in P^{k_0+\varepsilon_n} M$ tal que $\mathcal{D}c_n \notin \mathcal{U} \cup P^{k_0-\varepsilon_n} M$. Em particular, $c_n \notin \mathcal{U}'$ e

$$k_0 - \frac{1}{n} < E(\mathcal{D}c_n) \leq E(c_n) \leq k_0 + \frac{1}{n}.$$

Assim,

$$\lim E(\mathcal{D}c_n) = \lim E(c_n) = k_0 > 0.$$

Portanto, pela Proposição 3.8, existe uma subsequência de $\{c_n\}$ que converge para uma geodésica fechada c_0 com $E(c_0) = k_0$. Logo, $c_0 \in \mathcal{C}_{k_0} \subset \mathcal{U}'$. Por outro lado, $c_n \notin \mathcal{U}' \Rightarrow c_0 \notin \mathcal{U}'$ visto que \mathcal{U}' é aberto, o que é um absurdo. \square

3.2 Curve Shortening Flow

Nesta seção M denotará uma variedade Riemanniana conexa com $\dim M \geq 2$.

Definição 3.10. Dizemos que uma família suave de curvas imersas fechadas suaves $\gamma = \gamma(u, t) : S^1 \times [0, \omega) \rightarrow M$ é um *Curve Shortening Flow* (CSF), se satisfaz

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{DT}{\partial s} \quad (3.1)$$

em $S^1 \times (0, \omega)$, onde T é o campo de vetores tangentes unitários $\gamma_u / \|\gamma_u\|$ e $s = s(\cdot, t)$ é o comprimento de arco da curva $\gamma(\cdot, t)$. Lembremos que, pela definição de comprimento de arco,

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \|\gamma_u\| =: v.$$

Portanto,

$$\frac{D}{\partial s} = \frac{1}{v} \cdot \frac{D}{\partial u}. \quad (3.2)$$

Seja $\alpha_t(\cdot) = \gamma(\cdot, t)$. Olhemos para $\alpha_t(S^1)$ como uma subvariedade 1-dimensional de M (sempre podemos fazer isto localmente, uma vez que $\gamma(\cdot, t)$ é uma imersão). Com a métrica induzida de M , o vetor curvatura média de $\alpha_t(S^1)$ em M é dado por

$$H = (\nabla_T T)^\perp.$$

Como $\langle T, T \rangle = 1$, temos que $\langle \nabla_T T, T \rangle = 0$. Isto implica que $\nabla_T T \perp T$. Portanto,

$$H = \nabla_T T = \frac{DT}{\partial s}.$$

Assim, um CSF é um *fluxo pela curvatura média* de co-dimensão alta na variedade M .

Sabemos que em um curto intervalo de tempo, existe, é única e suave a solução para o fluxo pela curvatura média que tem por condição inicial uma subvariedade imersa compacta, como podemos ver na seção 2 de [4]. Portanto, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.11. *Dada uma curva imersa fechada suave $\gamma_0 : S^1 \rightarrow M$, existe um tempo positivo $\omega > 0$ para o qual existe, é única e suave a solução para o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{DT}{\partial s} \text{ em } S^1 \times (0, \omega), \\ \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0(\cdot). \end{cases}$$

De agora em diante $\omega_0 \in (0, \infty]$ denotará o tempo máximo de solução para o problema de Cauchy acima.

Sejam $k(\cdot, t) = \left\| \frac{DT}{\partial s}(\cdot, t) \right\|$ a *curvatura não-negativa*, $L(t)$ o comprimento e $E(t)$ a ener-

gia da curva $\gamma(\cdot, t)$.

Proposição 3.12. *Se $\gamma : S^1 \times [0, \omega_0)$ é um CSF, então*

$$L'(t) = - \int_0^{L(t)} k^2 ds \leq 0 \text{ e } E'(t) = - \int_0^{L(t)} vk^2 ds \leq 0,$$

para todo $t \in (0, \omega_0)$.

Demonstração. Em primeiro lugar, observe que

$$\langle T, T \rangle = 1 \Rightarrow \left\langle \frac{DT}{\partial s}, T \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{D^2T}{\partial u \partial s}, T \right\rangle + \left\langle \frac{DT}{\partial s}, \frac{DT}{\partial u} \right\rangle = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D^2T}{\partial u \partial s}, T \right\rangle &= - \left\langle \frac{DT}{\partial s}, \frac{DT}{\partial u} \right\rangle \\ &\stackrel{(3.2)}{=} -v \left\langle \frac{DT}{\partial s}, \frac{DT}{\partial s} \right\rangle \\ &= -vk^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2vv_t &= \frac{\partial}{\partial t}(v^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right\rangle \\ &\stackrel{*}{=} 2v \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \gamma}{\partial t}, T \right\rangle \\ &\stackrel{(3.1)}{=} 2v \left\langle \frac{D^2T}{\partial u \partial s}, T \right\rangle \\ &= -2v^2k^2, \end{aligned}$$

onde em * usamos que $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \gamma}{\partial u}$, isto pelo Lema de Simetria, e que $\gamma_u = vT$. O que implica

$$v_t = -vk^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 L'(t) &= \frac{d}{dt} \int_{S^1} v du \\
 &= \int_{S^1} v_t du \\
 &= - \int_{S^1} v k^2 du \\
 &= - \int_0^{L(t)} k^2 ds.
 \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
 E'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{S^1} v^2 du \right) \\
 &= \int_{S^1} v v_t du \\
 &= - \int_{S^1} v^2 k^2 du \\
 &= - \int_0^{L(t)} v k^2 ds.
 \end{aligned}$$

□

A proposição anterior nos diz que o comprimento e a energia de um CSF não crescem quando ele evolui com o tempo, visto que suas derivadas são não-positivas. Isto nos permite indagar: “caso o limite $\gamma(\cdot, \omega_0) = \lim_{t \rightarrow \omega_0} \gamma(\cdot, t)$ exista (em algum sentido adequado), será $\gamma(\cdot, \omega_0)$ uma geodésica?”, tendo em vista que $\gamma(\cdot, \omega_0)$ terá comprimento e energia mínimos. Uma resposta para esta pergunta foi dada em 1986 por M. E. Gage e R. S. Hamilton, como podemos ver em [4], onde eles demonstraram o seguinte teorema:

Teorema 3.13 (Gage-Hamilton, 1986). *Seja $\gamma_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave, convexa, mergulhada em \mathbb{R}^2 . Então, sob ação do CSF, ela se contrai a um ponto em tempo finito. Além disso, ela permanece convexa e torna-se circular, no seguinte sentido:*

- (a) *a razão entre o raio do círculo inscrito e o raio do círculo circunscrito converge a 1;*
- (b) *a razão entre a curvatura máxima e a curvatura mínima converge a 1;*
- (c) *as derivadas de ordens altas da curvatura convergem a 0 uniformemente.*

Uma resposta muito mais geral que esta foi dada por M. A. Grayson em 1989, como podemos ver em [5], onde ele demonstrou o seguinte teorema:

Teorema 3.14 (Grayson, 1989). *Seja M uma superfície que é convexa no infinito. Para qualquer curva suave, fechada, mergulhada em M , ao longo do CSF, ou ela se contrai a um ponto em tempo finito ou sua curvatura converge a zero na topologia C^∞ quando $t \rightarrow \infty$.*

Para nós *superfície* significa uma variedade Riemanniana conexa bi-dimensional. Uma superfície é *convexa no infinito* quando o fecho convexo de qualquer conjunto compacto é compacto. Em particular, toda superfície compacta é convexa no infinito.

Em 2007, L. Ma e D. Chen obtiveram um resultado sobre o comportamento do CSF que parte de uma rampa em uma variedade produto.

Considere a variedade produto $(M \times S^1, g + d\sigma^2)$. Seja $\gamma_0 : S^1 \rightarrow M \times S^1$ uma curva imersa suave. Denote por π_{S^1} a projeção canônica de $M \times S^1$ em S^1 . Dizemos que γ_0 é uma *rampa*, se existe um campo U de vetores unitários tangentes a S^1 tal que

$$\langle (\pi_{S^1})_*(T_0), U \rangle_{S^1} > 0$$

ao longo de γ_0 , onde T_0 é o campo de vetores unitários tangentes a γ_0 .

Teorema 3.15 (Ma-Chen, 2007). *Seja M uma variedade Riemanniana compacta.*

- (1) *Se $\gamma : S^1 \times [0, \infty) \rightarrow M$ é um CSF tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) > 0$, então para todo $n > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \left(\left\| \frac{D^n T}{\partial s^n} \right\| \right) = 0$. Além disso, a curva limite $\gamma(\cdot, \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(\cdot, t)$ existe e é uma geodésica fechada em M .*
- (2) *Se $\gamma : S^1 \times [0, \omega_0) \rightarrow M \times S^1$ é um CSF tal que $\gamma(\cdot, 0)$ é uma rampa, então γ é um fluxo global que converge a uma geodésica fechada em $M \times S^1$ na topologia C^∞ .*

Dizemos que um CSF é um *fluxo global* quando $\omega_0 = \infty$.

A demonstração deste resultado encontra-se em [6].

4 O TEOREMA DE LYUSTERNIK-FET

Teorema 4.1 (Lyusternik-Fet). *Em toda superfície compacta existe uma geodésica fechada não-constante.*

4.1 Primeira Demonstração

Seja M uma superfície compacta. Se M não é simplesmente conexa, tome $c_1 : S \rightarrow M$ diferenciável e não-livrementemente homotópica a uma constante. Fixe $k > k_1 := E(c_1) > 0$ e considere $\mathcal{D} : P^k M \rightarrow P^k M$. Defina $c_n = \mathcal{D}c_{n-1} \in P^k M$ e $k_n = E(c_n)$ para cada $n \geq 2$. Pela Proposição 3.5, temos que

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq 0.$$

Seja $k_0 = \lim k_n \geq 0$. Afirmamos que $k_0 > 0$. Caso contrário, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $k_m \leq \eta^2/2 \Rightarrow$ pelo Corolário 2.9.2, c_m é livremente homotópica a uma constante. Como c_1 é livremente homotópica a cada uma das c_n , em particular a c_m , temos que c_1 é livremente homotópica a uma constante, o que é um absurdo.

Afirmamos que $\mathcal{C}_{k_0} \neq \emptyset$. Caso contrário, pelo Lema 3.9, existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{D}(P^{k_0+\varepsilon} M) \subset P^{k_0-\varepsilon} M.$$

Como $\lim k_n = k_0 < k_0 + \varepsilon$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $E(c_m) = k_m < k_0 + \varepsilon$, o que implica $c_{m+1} = \mathcal{D}c_m \in \mathcal{D}(P^{k_0+\varepsilon} M) \subset P^{k_0-\varepsilon} M$, ou seja, $k_0 \leq k_{m+1} = E(c_{m+1}) \leq k_0 - \varepsilon$, que é um absurdo. Isso prova que existe uma geodésica fechada em M com energia igual a $k_0 > 0$, portanto não-constante.

Se M é simplesmente conexa, então $\pi_2(M)$ é não-trivial. Neste caso, tome $f : S^2 \rightarrow M$ diferenciável e não-homotópica a uma aplicação constante. Considere a aplicação

$$\mathcal{F}(f) : (J, \partial J) \rightarrow (C^0(S, M), P^0 M).$$

Como f é diferenciável, pelo item (c) da Proposição 2.13, temos que $\mathcal{F}(f)(J) \subset PM$. Portanto, podemos considerar

$$F := \mathcal{F}(f) : (J, \partial J) \rightarrow (PM, P^0M).$$

Defina

$$\kappa_0 = \inf_{G \simeq_p F} \left\{ \sup_{p \in J} E(G(p)) \right\} \geq 0,$$

onde o ínfimo está sendo tomando sobre todas as aplicações contínuas

$$G : (J, \partial J) \rightarrow (PM, P^0M)$$

p -homotópicas a F . Afirmamos que $\kappa_0 > 0$. Caso contrário, pela própria definição de κ_0 , existe uma aplicação contínua $G : (J, \partial J) \rightarrow (PM, P^0M)$ p -homotópica a F com $\sup_{p \in J} E(G(p)) \leq \eta^2/2$. Portanto, pelo Corolário 2.9.1, temos que G é p -homotópica a uma constante, e por sua vez $F = \mathcal{F}(f)$ também \Rightarrow pela Corolário 2.13.1, f é homotópica a uma constante, o que é um absurdo.

Afirmamos que $\mathcal{C}_{\kappa_0} \neq \emptyset$. Suponha por absurdo que não, ou seja, suponha que $\mathcal{C}_{\kappa_0} = \emptyset$. Fixe $\kappa > \kappa_0$ e considere a deformação $\mathcal{D} : P^\kappa M \rightarrow P^\kappa M$. Então, pelo Lema 3.9, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{D}(P^{\kappa_0+\epsilon}M) \subset P^{\kappa_0-\epsilon}M$. Mais uma vez pela definição de κ_0 , existe uma aplicação $G : (J, \partial J) \rightarrow (PM, P^0M)$ p -homotópica a F tal que $\sup_{p \in J} E(G(p)) < \kappa_0 + \epsilon$. Portanto, $\mathcal{D}(G(p)) \in \mathcal{D}(P^{\kappa_0+\epsilon}M) \subset P^{\kappa_0-\epsilon}M, \forall p \in J \Rightarrow \sup_{p \in J} E(\mathcal{D}(G(p))) \leq \kappa_0 - \epsilon$. Defina $\Theta : (J, \partial J) \times I \rightarrow (P^\kappa M, P^0M)$ por $\Theta(p, t) = \mathcal{L}(G(p), 2t) = \mathcal{D}_{2t}(G(p))$. Segue do Corolário 3.6.1 que Θ é contínua. Assim, $F \simeq_p G = \Theta_0 \simeq_p \Theta_1$. Desta forma, $\kappa_0 \leq \sup_{p \in J} E(\Theta_1(p)) = \sup_{p \in J} E(\mathcal{D}(G(p))) \leq \kappa_0 - \epsilon$, o que é um absurdo. Isso mostra que existe uma geodésica fechada em M com energia igual a $\kappa_0 > 0$, portanto não-constante.

4.2 Segunda Demonstração

Seja M uma superfície compacta. Se $\pi_1(M) \neq 0$, tome $\gamma_0 : S^1 \rightarrow M$ suave, imersa em M e não-livremente homotópica a uma constante. Defina $\tilde{\gamma}_0 : S^1 \rightarrow M \times S^1$ por $\tilde{\gamma}_0(u) = (\gamma_0(u), u)$. Observe que $\tilde{\gamma}_0$ é uma rampa. Assim, pelo item (2) do Teorema 3.15, temos que $\tilde{\gamma}_0$ é livremente homotópica a uma geodésica fechada em $M \times S^1$, que denotamos por $\tilde{\gamma}_\infty$, a saber, o limite do CSF que tem $\tilde{\gamma}_0$ como condição inicial. Seja $\gamma_\infty = \pi_M \circ \tilde{\gamma}_\infty$, onde $\pi_M : M \times S^1 \rightarrow M$ é a projeção canônica. Então, por construção, γ_∞ é uma geodésica fechada em M livremente homotópica a γ_0 , portanto não-constante.

Se $\pi_1(M) = 0$, então $\pi_2(M) \neq 0$. Neste caso, tome $f : S^2 \rightarrow M$ diferenciável e não-

homotópica a uma constante. Considere a aplicação

$$\mathcal{F}(f) : (J, \partial J) \rightarrow (C^0(S, M), P^0M).$$

Como f é diferenciável, temos que $\mathcal{F}(f)(J) \subset C^\infty(S, M)$. Portanto, podemos considerar

$$F := \mathcal{F}(f) : (J, \partial J) \rightarrow (C^\infty(S, M), P^0M).$$

Identificando S^1 com S , para cada $p \in J$, definimos a rampa $\gamma_p(\cdot, 0) : S^1 \rightarrow M \times S^1$ por $\gamma_p(u, 0) = (F(p)(u), u)$. Então, pelo item (2) do Teorema 3.15, sob ação do CSF, temos para cada $p \in J$ uma geodésica fechada em $M \times S^1$, digamos $\gamma_p(\cdot, \infty)$, que é o limite do CSF que tem $\gamma_p(\cdot, 0)$ como condição inicial. Assim, $\pi_M \circ \gamma_p(\cdot, \infty)$ é uma família de geodésicas fechadas em M .

Afirmamos que existe $p_0 \in J$ tal que $E(\pi_M \circ \gamma_{p_0}(\cdot, \infty)) > 0$. Caso contrário,

$$E(\pi_M \circ \gamma_p(\cdot, \infty)) = 0$$

para todo $p \in J$. Logo, como J é compacto, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\sup_{p \in J} E(\pi_M \circ \gamma_p(\cdot, t_0)) \leq \frac{\eta^2}{2}. \quad (4.1)$$

Defina $H : (J, \partial J) \times [0, t_0] \rightarrow (PM, P^0M)$ por $H(p, t)(u) = \pi_M \circ \gamma_p(u, t)$. H é uma homotopia de pares. Assim, $\mathcal{F}(f) = F = H_0 \simeq_p H_{t_0} \stackrel{\text{Cor.2.9.1+(4.1)}}{\simeq_p} \text{constante}$. Portanto, pelo Corolário 2.9.2, temos que f é homotópica a uma constante, o que é um absurdo. Assim, $\pi_M \circ \gamma_{p_0}(\cdot, \infty)$ é uma geodésica fechada em M com energia > 0 , portanto não-constante.

5 CONCLUSÃO

As mesmas técnicas que utilizamos para demonstrar o Teorema de Lyusternik-Fet em superfícies compactas podem ser utilizadas para demonstrá-lo em variedades Riemannianas compactas:

Em toda variedade Riemanniana compacta existe uma geodésica fechada não-constante.

Além disso, fazendo uso do Teorema de Grayson (Teorema 3.14) ao invés do Teorema de Ma-Chen (Teorema 3.15), pode-se demonstrar uma versão um pouco mais geral do Teorema de Lyusternik-Fet em superfícies compactas:

Em toda superfície compacta existe uma geodésica fechada mergulhada.

No caso em que a superfície compacta é uma 2-esfera, é possível demonstrar um pouco mais:

Uma 2-esfera com uma métrica Riemanniana suave tem pelo menos três geodésicas fechadas mergulhadas.

Este último resultado é conhecida como o Teorema das Três Geodésicas ou o Teorema de Lyusternik-Schnirelmann. O próprio Grayson apresentou uma demonstração para este resultado utilizando o seu teorema, como podemos ver em [5].

BIBLIOGRAFIA

- [1] do CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. 4^a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides).
- [2] JOST, J. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. 2nd. ed. Berlin: Springer, 1998. (Universitext).
- [3] DUGUNDJI, J. *Topology*. Boston: Allyn and Bacon, 1966. (Advanced Mathematics).
- [4] GAGE, M. E.; HAMILTON, R. S. The heat equation shrinking convex plane curves. *Journal of Differential Geometry*, v. 23, n. 1, p. 69–96, 1986.
- [5] GRAYSON, M. A. Shortening Embedded Curves. *Annals of Mathematics*, v. 129, n. 1, p. 71–111, 1989.
- [6] MA, L.; CHEN, D. Curve shortening in a Riemannian manifold. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, v. 186, n. 4, p. 663–684, 2007.
- [7] KLINGENBERG, W. *Lectures on Closed Geodesics*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag, 1978. (A Series of Comprehensive Studies in Mathematics).
- [8] SALVIANO, A. C. *Existência de geodésicas fechadas*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Março 2003.