



Universidade Federal de Alagoas

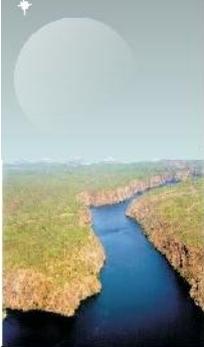
Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Superfícies de Curvatura Média Constante  
Imersas em um Slab

Diogo Albuquerque Gonçalves

Maceió, Brasil  
Fevereiro de 2011



Rio São Francisco



Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-graduação em Matemática  
Dissertação de Mestrado

# Superfícies de Curvatura Média Constante Imersas em um Slab

Diogo Albuquerque Gonçalves

Maceió, Brasil  
Fevereiro de 2011

DIOGO ALBUQUERQUE GONÇALVES

Superfícies de Curvatura Média Constante  
Imersas em um Slab

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 23 de Fevereiro de 2011 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva.

Maceió  
2011

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale**

G635s    Gonçalves, Diogo Albuquerque.  
          Superfícies de curvatura média constante imersas em um slab / Diogo  
          Albuquerque Gonçalves. – 2011.  
          73 f.

          Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.  
          Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.  
          Instituto de Matemática. Maceió, 2011.

          Bibliografia: f. 70-71.  
          Índice: f. 72-73.

          1. Geometria diferencial. 2. Curvatura média. 3. Espaço hiperbólico. 4. Espa-  
          ços warped. 5. Imersão própria (Matemática). I. Título.

CDU: 514.764.27

# Superfícies de Curvatura Média Constante Imersas em um Slab

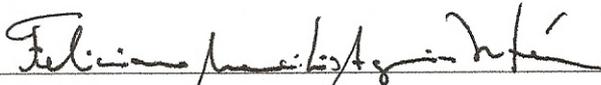
Diogo Albuquerque Gonçalves

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 23 de Fevereiro de 2011 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

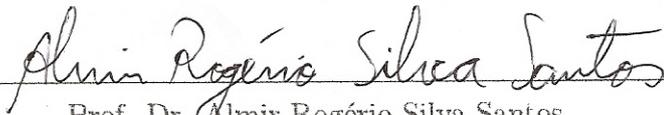
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva (Orientador)



Prof. Dr. Feliciano Márcilio Aguiar Vitória



Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

“As misericórdias do SENHOR são a causa de não sermos consumidos, porque as suas misericórdias não têm fim.” (Lm 3.22)

Aos meus pais.

# Agradecimentos

Primeiramente ao SENHOR dos Exércitos, pois Ele é o meu Deus, meu refúgio e fortaleza.

Aos meus pais pelo belo exemplo de dedicação e perseverança.

Ao professor Márcio Henrique Batista da Silva pela excelente orientação, inefável competência e brilhantismo ao falar sobre matemática.

Aos professores Feliciano Vitório Aguiar e Almir Rogério Silva Santos pelas inúmeras e valiosas sugestões.

Aos bons professores e demais servidores que são parte do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Aos colegas do mestrado pelos bons momentos. Agradeço, em especial, aos amigos Joaby Jucá, Márcio Silva e Fabio Honorato (vulgo “Arapiraca”).

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo importante apoio financeiro.

# Resumo

Nesta dissertação estudaremos as superfícies completas propriamente imersas contidas em um slab do produto warped  $\mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$ , onde  $\mathbb{P}^2$  é uma superfície Riemanniana completa com curvatura Gaussiana não negativa. Sob certas restrições sobre a curvatura média da superfície, mostraremos que tal imersão ou não existe ou deve ser uma folha da folheação trivial totalmente umbílica  $t \in \mathbb{R} \mapsto \{t\} \times \mathbb{P}^2$ .

**Palavras-chave:** curvatura média, espaço hiperbólico, espaços warped, imersão própria.

# Abstract

We study complete properly immersed surfaces contained in a slab of a warped product  $\mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{P}^2$ , where  $\mathbb{P}^2$  is complete with nonnegative Gaussian curvature. Under certain restrictions on the mean curvature of the surface we show that such an immersion does not exist or must be a leaf of the trivial totally umbilical foliation  $t \in \mathbb{R} \mapsto \{t\} \times \mathbb{P}^2$ .

**Keywords:** mean curvature, hyperbolic space, warped spaces, proper immersion.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1	Variedades diferenciáveis . . . . .	13
1.2	Campos de vetores e métricas Riemannianas . . . . .	15
1.3	Curvaturas . . . . .	21
1.4	Algumas funções importantes . . . . .	24
1.5	Imersões e segunda forma fundamental . . . . .	28
1.5.1	Hipersuperfícies . . . . .	31
1.6	Aplicação exponencial . . . . .	32
1.7	O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$ . . . . .	34
1.7.1	O modelo do semi-espaço superior . . . . .	35
1.7.2	Superfícies umbílicas em $\mathbb{H}^n$ . . . . .	36
1.8	Teorema de comparação do Laplaciano . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Espaços Warped</b>	<b>39</b>
2.1	Motivação . . . . .	39
2.2	O espaço produto $M^3 = \mathbb{R} \times_{\rho} \mathbb{P}^2$ . . . . .	42
2.3	Folheação de $M^3$ . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Resultados Principais</b>	<b>51</b>
3.1	Considerações iniciais . . . . .	52
3.2	Resultados auxiliares . . . . .	53
3.3	Teoremas principais . . . . .	63
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>70</b>

# Introdução

Para provar que toda hipersuperfície compacta com curvatura média constante mergulhada no espaço euclidiano é uma esfera redonda, Alexandrov [1] introduziu o que hoje é conhecido como método de reflexão de Alexandrov. Ele observou que o método também funciona no espaço hiperbólico padrão, gerando um resultado semelhante:

*Toda hipersuperfície compacta com curvatura média constante mergulhada no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  é uma esfera redonda.*

Para ver este resultado no contexto desta dissertação, é conveniente observar que é totalmente equivalente a assumir *compacidade* ou *complete* adicionada à propriedade de que *não há qualquer ponto na fronteira assintótica de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .*

Uma vez que no espaço hiperbólico existem outras hipersuperfícies totalmente umbílicas, nomeadamente, horoesferas e hiperesferas, houve necessidade de caracterizar essas também. Isto foi feito por do Carmo e Lawson [4], utilizando o método de Alexandrov. Em particular, eles mostraram que:

*Toda hipersuperfície completa com curvatura média constante mergulhada no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  com um único ponto na fronteira assintótica é uma horoesfera.*

Além disso, eles também observaram que este resultado não é mais verdadeiro se substituirmos *mergulhada* por *imersa*.

O principal objetivo deste trabalho é apresentar a demonstração de Luis J. Alías e Marcos Dajczer para o seguinte teorema:

**Teorema 1.** *Em um slab de  $\mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$  com fronteira  $\mathbb{P}_{t_1} \cup \mathbb{P}_{t_2}$  não há superfície  $\Sigma^2$  completa propriamente imersa com curvatura média satisfazendo*

$$\sup_{\Sigma} \|\vec{H}\| < \min_{[t_1, t_2]} \mathcal{H}(t).$$

No Teorema acima, as folhas da folheação  $\mathbb{P}_t = \{t\} \times \mathbb{P}^2$  são hipersuperfícies totalmente umbílicas com curvatura média constante

$$\mathcal{H}(t) = (\log \varrho)'(t) = (\varrho'/\varrho)(t).$$

O resultado acima foi publicado no periódico *Commentarii Mathematici Helvetici* no ano de 2006 (ver [2]).

No primeiro capítulo desta dissertação, trataremos de conceitos e resultados básicos sobre geometria Riemanniana. Além disso, definiremos o espaço hiperbólico e teceremos um breve comentário sobre as superfícies umbílicas em  $\mathbb{H}^n$ . Finalizaremos o capítulo enunciando o Teorema de Comparação do Laplaciano, que tem um importante papel na demonstração do Teorema 1.

No segundo capítulo introduziremos o espaço produto warped  $\mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$  e mostraremos que o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  é isométrico ao espaço produto warped  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2$ . Encerraremos o capítulo provando que as folhas da folheação  $\{t\} \times \mathbb{P}^2$  são hipersuperfícies totalmente umbílicas com curvatura média constante  $\mathcal{H}(t) = (\varrho'/\varrho)(t)$ .

Finalmente, no terceiro capítulo, apresentaremos a demonstração do Teorema 1. Antes, porém, provaremos vários lemas que serão bastante úteis para nos auxiliar e tornar breve a demonstração do principal teorema. Concluiremos o capítulo exibindo a demonstração de Luis J. Alías e Marcos Dajczer (ver [2]) para o teorema seguinte:

**Teorema 2.** *Se  $f : \Sigma^2 \rightarrow M^3 = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{P}^2$  é uma superfície completa propriamente imersa com curvatura média constante  $\|\vec{H}\| \leq 1$  contida em um slab, então  $f(\Sigma)$  é a folha  $\mathbb{P}_t$ .*

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos sobre geometria Riemanniana que serão utilizados no decorrer desta dissertação. A referência principal para este capítulo é [5].

### 1.1 Variedades diferenciáveis

A noção de variedade diferenciável é necessária para estender os métodos do Cálculo Diferencial a espaços mais gerais que o  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.1.1.** *Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  é um conjunto  $M$  munido de uma família de aplicações injetivas  $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ , definidas em abertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$ , satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (i)  $\bigcup_\alpha \mathbf{x}(U_\alpha) = M$ ;
- (ii) *Para todo par de índices  $\alpha, \beta$ , com  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$  e  $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$  são diferenciáveis;*
- (iii) *A família  $\{(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)\}$  é maximal relativamente às condições (i) e (ii).*

A família  $\{(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)\}$  é denominada *atlas*. Cada  $(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)$  é chamado *parametrização* ou *sistema de coordenadas*. Ao conjunto  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  chamaremos *vizinhança coordenada* de  $p$ . Uma família  $\{(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)\}$  satisfazendo (i) e (ii) é nomeada uma *estrutura diferenciável*. Indicaremos por  $M^n$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ .

Uma estrutura diferenciável em um conjunto  $M$  induz de maneira natural uma topologia em  $M$ . Diremos que uma variedade diferenciável  $M$  é *compacta* quando  $M$  é um espaço topológico compacto.

**Definição 1.1.2.** *Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis de dimensão  $m$  e  $n$ . Dizemos que uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é diferenciável em  $p \in M$  se dada uma parametrização  $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N$  em  $f(p)$ , existe uma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$  em  $p$  tal que  $f(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$  e a aplicação*

$$\mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

*é diferenciável em  $\mathbf{x}^{-1}(p)$ . A aplicação  $f$  é diferenciável em um aberto de  $M$  se for diferenciável em todos os pontos deste aberto.*

Decorre do item (ii) da Definição 1.1.1 que a definição anterior independe da escolha das parametrizações. A aplicação (1.1) é chamada *expressão* de  $f$  nas parametrizações  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

**Definição 1.1.3.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  é denominada curva (diferenciável) em  $M$ . Sejam  $p = \alpha(0)$  e  $\mathcal{D}(M)$  o conjunto das funções diferenciáveis de  $M$  em  $\mathbb{R}$ . O vetor tangente à curva  $\alpha$  em  $t = 0$  é a aplicação*

$$\begin{aligned} \alpha'(0) : \mathcal{D}(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

O conjunto de todos os vetores tangentes a  $M$  em  $p$  é um espaço vetorial denominado *espaço tangente* a  $M$  em  $p$ , o qual indicaremos por  $T_p M$ .

**Exemplo 1.1.1.** O conjunto  $TM = \{(p, v); p \in M \text{ e } v \in T_p M\}$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $2m$ , denominada fibrado tangente. (Ver [5], página 13.)

Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é dita uma *imersão* se  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  for injetiva para todo  $p \in M$ . Se, além disso,  $f$  for um homeomorfismo sobre  $\varphi(M) \subset N$ , então dizemos que  $f$  é um *mergulho*.

**Definição 1.1.4** (Variedade orientável). Dizemos que uma variedade diferenciável  $M$  é orientável quando admite uma estrutura diferenciável  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  tal que

(i) para todo  $\alpha, \beta$  com  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , a matriz da diferencial da mudança de coordenadas  $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$  tem determinante positivo.

Caso contrário, diz-se que  $M$  é não orientável. Se  $M$  é orientável, a escolha de uma parametrização satisfazendo (i) é chamada de orientação de  $M$  e, neste caso, dizemos que  $M$  está orientada.

Se  $M$  é orientável e conexa, existem exatamente duas orientações distintas em  $M$ .

## 1.2 Campos de vetores e métricas Riemannianas

**Definição 1.2.1.** Um campo de vetores  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que a cada ponto  $p \in M$  associa um vetor em  $T_p M$ . Em termos de aplicações,  $X$  é uma aplicação de  $M$  no fibrado tangente  $TM$ . Se a aplicação  $X : M \rightarrow TM$  é diferenciável diz-se que o campo é diferenciável.

Às vezes é conveniente pensar em um campo de vetores como uma

aplicação  $X : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{F}$ , do conjunto  $\mathcal{D}$  das funções diferenciáveis em  $M$  no conjunto  $\mathcal{F}$  das funções em  $M$ , definida da seguinte maneira

$$Xf = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial u_i}.$$

Neste contexto, diremos que  $X$  é diferenciável se, e somente se,  $Xf \in \mathcal{D}(M)$  para todo  $f \in \mathcal{D}(M)$ . Denotaremos por  $\mathcal{X}(M)$  o conjunto de todos os campos diferenciáveis de vetores.

Se  $X$  e  $Y$  são campos de vetores diferenciáveis em  $M$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, podemos considerar as funções  $X(Yf)$  e  $Y(Xf)$ . Tais operações, na maioria das vezes, não conduzem a campos de vetores. No entanto, a aplicação

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longmapsto \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\rightarrow [X, Y] = XY - YX, \end{aligned}$$

define um campo de vetores chamado *colchete* de  $X$  e  $Y$ .

A operação colchete possui as seguintes propriedades.

**Proposição 1.2.1.** *Se  $X, Y$  e  $Z$  são campos de vetores em  $M$ ,  $a, b$  são números reais e  $f, g$  são funções diferenciáveis, então:*

- (a)  $[X, Y] = -[Y, X]$  (*anticomutatividade*);
- (b)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  (*linearidade*);
- (c)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (*identidade de Jacobi*);
- (d)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .

*Demonstração.* Ver [5], página 25.

■

Uma *métrica Riemanniana* (ou *estrutura Riemanniana*) em uma variedade diferenciável  $M^n$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um produto interno

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

que varia diferencialmente no seguinte sentido: se  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$  e  $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ , então

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$$

é uma função diferenciável em  $U$  para cada  $i, j = 1, \dots, n$ . As funções  $g_{ij} = g_{ji}$  são denominadas *expressões da métrica Riemanniana* no sistema de coordenadas  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ .

**Definição 1.2.2.** *Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana é denominada variedade Riemanniana.*

**Exemplo 1.2.1.** *Considere o conjunto  $M = \mathbb{R}^n$  com  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  identificado com  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . A métrica é dada por  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ .  $\mathbb{R}^n$  é chamado espaço euclidiano de dimensão  $n$  e a geometria Riemanniana deste espaço é a geometria métrica euclidiana.*

**Exemplo 1.2.2** (Variedade produto). *Sejam  $M$  e  $\overline{M}$  variedades diferenciáveis, onde  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  e  $\{(V_\beta, \mathbf{y}_\beta)\}$  são, respectivamente, suas estruturas diferenciáveis. O produto cartesiano*

$$M \times \overline{M} = \{(p, \overline{p}); p \in M, \overline{p} \in \overline{M}\}$$

*é uma variedade diferenciável, denominada variedade produto de  $M$  e  $\overline{M}$ . As aplicações*

$$\mathbf{z}_{\alpha\beta}(p, \overline{p}) = (\mathbf{x}_\alpha(p), \mathbf{y}_\beta(\overline{p})), \quad (p, \overline{p}) \in U_\alpha \times V_\beta$$

*são parametrizações de  $M \times \overline{M}$ , i.e.,  $\{(U_\alpha \times V_\beta, \mathbf{z}_{\alpha\beta})\}$  é uma estrutura diferenciável em  $M \times \overline{M}$ . Em relação a essa estrutura diferenciável, as projeções  $\pi : M \times \overline{M} \rightarrow M$  e  $\overline{\pi} : M \times \overline{M} \rightarrow \overline{M}$  são aplicações diferenciáveis. Além*

disso, se  $M$  e  $\overline{M}$  possuem estruturas Riemannianas  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ , respectivamente, então podemos introduzir uma métrica Riemanniana em  $M \times \overline{M}$  por

$$\langle u, v \rangle_{(p, \overline{p})} = \langle d\pi_{(p, \overline{p})}(u), d\pi_{(p, \overline{p})}(v) \rangle_1 + \langle d\overline{\pi}_{(p, \overline{p})}(u), d\overline{\pi}_{(p, \overline{p})}(v) \rangle_2,$$

onde  $(p, \overline{p}) \in M \times \overline{M}$  e  $u, v \in T_{(p, \overline{p})}(M \times \overline{M})$ . Portanto a variedade produto é uma variedade Riemanniana.

**Definição 1.2.3.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades Riemannianas. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  é uma isometria se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \text{ para todo } p \in M, u, v \in T_p M.$$

**Observação 1.2.1.** *A definição acima nos diz que duas variedades isométricas são indistinguíveis do ponto de vista métrico.*

**Definição 1.2.4.** *Seja  $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$  uma imersão. Se  $N$  possui uma estrutura Riemanniana,  $f$  induz uma estrutura Riemanniana em  $M$  por*

$$\langle u, v \rangle_p := \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \text{ para todo } p \in M, u, v \in T_p M.$$

A métrica de  $M$  é chamada então a métrica induzida por  $f$ , e  $f$  é denominada imersão isométrica.

Introduziremos agora a noção de conexão Riemanniana. A conexão é uma generalização da derivada covariante de superfícies.

**Definição 1.2.5.** *Uma conexão Riemanniana, ou conexão de Levi-Civita, em uma variedade Riemanniana  $M$  é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(i) \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z;$$

- (ii)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ;
- (iii)  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$ ;
- (iv)  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  (simetria);
- (v)  $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$  (compatibilidade da métrica),

onde  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  e  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ .

A existência e a unicidade da conexão Riemanniana são garantidas pelo teorema de Levi-Civita. (Ver [5], página 47)

Escolhendo um sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  em torno de  $p$  e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_j y_j X_j,$$

onde  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , teremos

$$\nabla_X Y = \sum_k \left( \sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_j) \right) X_k.$$

Os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$ , definidos por  $\nabla_X Y = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ , são denominados *símbolos de Christoffel* da conexão.

Podemos expressar os símbolos de Christoffel, em termos dos coeficientes da métrica Riemanniana, da seguinte forma

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km},$$

onde  $(g^{km})$  é a matriz inversa de  $(g_{km})$ .

A proposição a seguir estabelece a relação entre conexão e derivada covariante.

**Proposição 1.2.2.** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $\nabla$  sua conexão. Então existe uma única correspondência que associa a cada campo de vetores  $V$  ao longo de uma curva  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  um outro campo de vetores  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $\alpha$ , denominado derivada covariante de  $V$  ao longo de  $\alpha$ , tal que*

- (a)  $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ ;
- (b)  $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ , onde  $f$  é uma função diferenciável em  $I$ ;
- (c) Se  $V$  é induzido por um campo de vetores  $Y \in \mathcal{X}(M)$ , isto é,  $V(t) = Y(\alpha(t))$ , então  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{d\alpha/dt}Y$ .

Em termos dos símbolos de Christoffel, a derivada covariante possui a seguinte expressão

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right\} X_k.$$

**Definição 1.2.6.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Um campo vetorial  $V$  ao longo de uma curva  $\alpha : I \rightarrow M$  é chamado paralelo quando  $\frac{DV}{dt} = 0$ , para todo  $t \in I$*

**Proposição 1.2.3.** *Sejam  $\alpha : I \rightarrow M$  diferenciável e  $V_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$ . Então existe um único campo de vetores paralelo  $V$ , ao longo de  $\alpha$ , tal que  $V(t_0) = V_0$ . Neste caso,  $V(t)$  é chamado o transporte paralelo de  $V(t_0)$  ao longo de  $\alpha$ .*

*Demonstração.* Ver [5], página 44. ■

**Definição 1.2.7.** *Um conjunto  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é dito um referencial para  $M$  se, para cada  $p \in M$ , o conjunto  $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$  for uma base de  $T_pM$ . Isto implica que todo campo de vetores  $X \in \mathcal{X}(M)$  pode ser escrito da forma*

$$X = \sum_{i=1}^n x_i E_i,$$

onde as funções  $x_i$  são diferenciáveis. Diz-se que um referencial é ortonormal quando  $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$  for uma base ortonormal de  $T_p M$  para cada  $p \in M$ . Um referencial é dito geodésico em  $p \in M$  se, para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , tem-se  $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ .

A existência do referencial geodésico em  $p$  numa vizinhança normal  $U$  é garantida tomando  $E(q)$ ,  $\forall q \in U$ , como o transporte paralelo de  $E(p)$  ao longo da geodésica que liga  $p$  à  $q$ .

## 1.3 Curvaturas

Nesta seção, recordaremos os conceitos básicos de curvatura em uma variedade Riemanniana. A curvatura, intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana.

**Definição 1.3.1.** *O tensor curvatura ou, simplesmente, a curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$ , é uma lei que associa a cada par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ .

**Exemplo 1.3.1.** *Se  $M = \mathbb{R}^n$ , então é fácil verificar que  $R(X, Y)Z = 0$ , para todo  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ .*

A seguir, enunciaremos algumas das propriedades da curvatura.

**Proposição 1.3.1.** *A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  goza das seguintes propriedades:*

(i)  *$R$  é bilinear em  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ , isto é,*

$$\begin{aligned} R(fX + gY, Z) &= fR(X, Z) + gR(Y, Z) \\ R(X, fZ + gW) &= fR(X, Z) + gR(X, W), \end{aligned}$$

com  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ ,  $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ ;

- (ii) Para cada  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , o operador curvatura  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  é linear, ou seja,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W \\ R(X, Y)(fZ) &= fR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

com  $f \in \mathcal{D}(M)$  e  $Z, W \in \mathcal{X}(M)$ ;

- (iii) (Primeira identidade de Bianchi) Para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  vale

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

*Demonstração.* Ver [5], página 79. ■

Escolhendo um sistema de coordenadas  $(\mathbf{x}, U)$  em torno do ponto  $p \in M$ , onde  $\frac{\partial}{\partial x_i} =: X_i$ , escrevamos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l.$$

Assim,  $R_{ijk}^l$  são as componentes da curvatura  $R$  em  $(\mathbf{x}, U)$  e exprimindo  $R_{ijk}^l$  em termos dos coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  da conexão Riemanniana, obtemos

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s.$$

Além disso, é conveniente fazer a seguinte identificação

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = \sum_l R_{ijk}^l g_{ls} = R_{ijks}.$$

O operador curvatura está intimamente relacionado com o conceito de curvatura seccional (ou Riemanniana), que passamos a definir.

**Proposição 1.3.2.** *Seja  $\sigma$  um espaço bidimensional do espaço tangente  $T_pM$  e  $x, y \in \sigma$  dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}},$$

*não depende da escolha dos vetores  $x, y \in \sigma$ .*

*Demonstração.* Ver [5], página 82. ■

**Definição 1.3.2.** *Sejam  $p \in M$  e  $\sigma \subset T_pM$  um subespaço bidimensional. O número real  $K(p, \sigma) =: K(x, y)$ , onde  $\{x, y\}$  é uma base qualquer de  $\sigma$ , é chamado de curvatura seccional de  $\sigma$  em  $p$ .*

O próximo resultado garante que, numa variedade de curvatura seccional constante, o tensor curvatura pode ser escrito de uma forma mais simples.

**Proposição 1.3.3.** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana,  $p$  um ponto de  $M$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $n = \dim M$  uma base ortonormal de  $T_pM$ . Escreva  $R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle$ ,  $i, j, k, l = 1, \dots, n$ . Então  $K(p, \sigma) = K_0$  para todo  $\sigma \subset T_pM$  se, e somente se,  $R_{ijij} = K_0$  e  $R_{ijkl} = 0$  se  $i \neq k$  e  $j \neq l$ .*

*Demonstração.* Ver [5], página 84. ■

**Exemplo 1.3.2** (A curvatura de  $S^n$ ). *A curvatura seccional da esfera unitária  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é constante igual a 1. (Ver [5], página 112)*

Sejam  $p \in M$  e  $x$  um vetor unitário de  $T_pM$ . Definimos a *curvatura de Ricci* no ponto  $p$  na direção de  $x$  por

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \text{tr}(y \mapsto R(x, y)x).$$

Se  $\{e_1, \dots, e_{n-1}, x\}$  é uma base ortonormal de  $T_p M$ , então

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, e_i)x, e_i \rangle = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} K(x, e_i).$$

Observe que se  $M$  tem dimensão 2, então  $\text{Ric}_p$  é a curvatura Gaussiana de  $M$  em  $p$ .

**Exemplo 1.3.3.** Se  $M$  é conexa e tem curvatura seccional constante igual a  $K$ , então

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} K(x, e_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} K = K.$$

## 1.4 Algumas funções importantes

O objetivo desta seção é definir alguns operadores que serão usados com frequência no decorrer da presente dissertação.

**Definição 1.4.1** (Gradiente). *Dada uma função  $f \in \mathcal{D}(M)$ , definimos o gradiente de  $f$  como sendo o único campo vetorial  $\nabla f \in \mathcal{X}(M)$  que satisfaz a equação*

$$\langle \nabla f, X \rangle = Xf, \quad \text{para todo } X \in \mathcal{X}(M).$$

**Definição 1.4.2** (Divergência). *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $X \in \mathcal{X}(M)$  um campo de vetores. A divergência de  $X$  é o traço do operador  $Y \mapsto \nabla_Y X$ .*

Sejam  $X$  um campo diferenciável de vetores em  $M$  e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial geodésico em  $p$ . Escrevendo  $X = \sum_{k=1}^n x_k E_k$  temos que

$$\text{div } X = \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_j \rangle \langle E_i, E_j \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{E_i} \sum_{k=1}^n x_k E_k, E_j \rangle \langle E_i, E_j \rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n \langle E_i(x_k) E_k, E_j \rangle \langle E_i, E_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n E_i(x_i), \text{ em } p \in M.
\end{aligned}$$

**Definição 1.4.3** (Hessiana). *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $f$  uma função diferenciável. A Hessiana de  $f$  é o tensor simétrico*

$$\begin{aligned}
\text{Hess } f &: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M) \\
(X, Y) &\longmapsto \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle.
\end{aligned}$$

**Definição 1.4.4** (Laplaciano). *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. O Laplaciano de  $f$  em  $M$  é a função*

$$\begin{aligned}
\Delta f &: M \rightarrow \mathbb{R} \\
p &\longmapsto \text{div}(\nabla f).
\end{aligned}$$

Observe que  $\nabla f \in \mathcal{D}(M)$ . Se  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  é um referencial ortonormal, então

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \text{tr}(X \mapsto \nabla_X \nabla f) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\xi_i} \nabla f, \xi_i \rangle = \text{tr}(\text{Hess } f).$$

Tomando, em  $p \in M$ , o referencial geodésico  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é possível expressar o Laplaciano de  $f$  por

$$\begin{aligned}
\Delta f(p) &= \text{div}(\nabla f)(p) \\
&= \text{div} \left( \sum_{i=1}^n f_i E_i \right) (p) \\
&= \sum_{i=1}^n f_{ii}(p).
\end{aligned}$$

**Lema 1.4.1.** *Sejam  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ . Então*

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

*Demonstração.* Fixe  $p \in M$  e escolha, em  $p \in M$ , um referencial geodésico  $\{E_1, \dots, E_n\}$  em uma vizinhança de  $p$ . Então,

$$\begin{aligned} \Delta(fg)(p) &= \sum_{k=1}^n E_k E_k (fg)(p) \\ &= \sum_{k=1}^n E_k (g E_k f + f E_k g)(p) \\ &= \sum_{k=1}^n g E_k E_k f(p) + \sum_{k=1}^n E_k g E_k f(p) + \sum_{k=1}^n E_k g E_k f(p) + \sum_{k=1}^n f E_k E_k g(p) \\ &= f\Delta g(p) + g\Delta f(p) + 2 \sum_{k=1}^n E_k g E_k f(p) \\ &= f\Delta g(p) + g\Delta f(p) + 2 \sum_{k=1}^n g_k E_k f_k E_k(p) \\ &= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle(p). \end{aligned}$$

■

Em particular,

$$\Delta f^2 = 2f\Delta f + 2|\nabla f|^2,$$

onde  $|\nabla f|^2$  é o quadrado da norma do campo  $\nabla f$ .

Concluiremos esta seção escrevendo parte do que foi tratado acima em um sistema de coordenadas locais. Indicaremos, como de costume,  $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$ .

Seja  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , então podemos escrever

$$Xf = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f.$$

Seja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a métrica Riemanniana, definimos

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle, \quad G = (g_{ij}), \quad G^{-1} = (g^{ij}), \quad g = \det G,$$

onde  $i, j = 1, \dots, n$ . Então

$$Xf = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f = \sum_{i,j,k=1}^n x_i g_{ik} g^{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \left\langle X, \sum_{k,j=1}^n \left( g^{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} f \right) \right\rangle.$$

Segue-se da definição de gradiente que

$$\nabla f = \sum_{j,k=1}^n \left( g^{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} f \right). \quad (1.2)$$

Se  $Y = \sum_{j=1}^n y_j X_j$  é um campo de vetores, então, conforme foi visto na seção 1.2, temos que

$$\nabla_Y X = \sum_{j,k=1}^n y_j \left\{ X_j(x_k) + \sum_{i=1}^n x_i \Gamma_{ij}^k \right\} X_k.$$

Agora, pela definição 1.4.1, temos que

$$\operatorname{div} X = \sum_{j=1}^n \left\{ X_j(x_j) + \sum_{i=1}^n x_i \Gamma_{ij}^j \right\}. \quad (1.3)$$

Por outro lado, foi visto na seção 1.2 que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right\}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n x_i \Gamma_{ij}^j &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j,l=1}^n x_i g^{jl} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj} + \sum_{i,j,l=1}^n x_i g^{jl} \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \sum_{i,j,l=1}^n x_i g^{jl} \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j,l=1}^n g^{jl} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \operatorname{tr} \left( G^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} G \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\log g). \tag{1.4}
\end{aligned}$$

Substituindo (1.4) em (1.3), encontramos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (x_j) + \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\log g) \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^n \left\{ \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_j) + \frac{1}{2} \sqrt{g} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\log g) \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (x_j \sqrt{g}). \tag{1.5}
\end{aligned}$$

Usando a definição de Laplaciano e combinando as equações (1.2) e (1.5), vemos que

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j} f \right), \tag{1.6}$$

é a expressão do Laplaciano em coordenadas locais.

## 1.5 Imersões e segunda forma fundamental

Sejam  $M$  e  $\overline{M}$  variedades Riemannianas e  $f : M \rightarrow \overline{M}$  uma imersão. Sejam  $\overline{\nabla}$  a conexão Riemanniana de  $\overline{M}$ ,  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  e  $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathcal{X}(\overline{M})$  extensões locais de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Seja  $U \subset M$  um aberto tal que

$f|_U$  é um mergulho.

Para cada  $p \in M$ , é possível decompor  $T_p\overline{M}$  na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde  $(T_pM)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_pM$  em  $T_p\overline{M}$ . Assim, se  $v \in T_p\overline{M}$ , podemos escrever

$$v = v^T + v^N,$$

onde  $v^T \in T_pM$  é a componente tangencial de  $v$  e  $v^N \in (T_pM)^\perp$  é a componente normal de  $v$ .

Para definir a segunda forma fundamental da imersão  $f : M \rightarrow \overline{M}$  é conveniente introduzir previamente a seguinte definição.

Se  $X, Y$  são campos locais em  $M$ ,

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em  $\overline{M}$  normal a  $M$ .

**Observação 1.5.1.**  $B(X, Y)$  não depende das extensões  $\overline{X}, \overline{Y}$ .

No que se segue, denotaremos por  $\mathcal{X}(U)^\perp$  o conjunto dos campos diferenciáveis de vetores normais a  $U \approx f(U)$ .

**Proposição 1.5.1.** Se  $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ , a aplicação  $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$  dada por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X \overline{Y})^\perp,$$

é bilinear e simétrica.

*Demonstração.* Ver [5], página 108.

■

Seja  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . A aplicação  $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle; \quad x, y \in T_p M,$$

é, pela proposição anterior, uma forma bilinear simétrica.

**Definição 1.5.1.** A segunda forma fundamental  $II_\eta$  da imersão  $f$  segundo o vetor normal  $\eta$  é a forma quadrática associada a forma bilinear  $H_\eta$ , isto é,

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x).$$

Como  $H_\eta$  é uma forma bilinear simétrica, a ela está associada uma única transformação linear auto-adjunta  $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  que satisfaz

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

O operador  $S_\eta$  é denominado *operador* (ou *1-tensor*) *de Weingarten* de  $f$  segundo  $\eta$ . A proposição a seguir expressa o operador de Weingarten em termos da conexão de  $\overline{M}$ .

**Proposição 1.5.2.** *Sejam  $p \in M$ ,  $x \in T_p M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . Seja  $N$  uma extensão local de  $\eta$  normal a  $M$ . Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^\top.$$

*Demonstração.* Ver [5], página 110. ■

Relacionaremos agora a curvatura de  $M$  com a curvatura de  $\overline{M}$ . Se  $x, y \in T_p M \subset T_p \overline{M}$ , são linearmente independentes, indicaremos por  $K(x, y)$  e  $\overline{K}(x, y)$  as curvaturas seccionais de  $M$  e  $\overline{M}$ , respectivamente, no plano gerado por  $x$  e  $y$ .

**Teorema 1.5.1 (Gauss).** *Sejam  $p \in M$  e  $x, y$  vetores ortonormais em  $T_p M$ .*

Então

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

*Demonstração.* Ver [5], página 111. ■

Uma imersão  $f : M \rightarrow \overline{M}$  é *geodésica* em  $p \in M$  quando para todo  $\eta \in (T_p M)^\perp$  a segunda forma fundamental  $H_\eta$  é identicamente nula em  $p$ . A imersão  $f$  é *totalmente geodésica* se é geodésica para todo  $p \in M$ .

Diz-se que uma imersão  $f : M \rightarrow \overline{M}$  é *mínima* quando para todo  $p \in M$  e todo  $\eta \in (T_p M)^\perp$  tem-se que o traço de  $S_\eta$  é nulo.

**Definição 1.5.2.** Escolhendo o referencial ortonormal  $\xi_1, \dots, \xi_k$  de vetores em  $(T_p M)^\perp$ , o vetor curvatura média de  $f$  em  $p$  é definido por

$$H = \frac{1}{n} \sum_k (\text{tr } S_{\xi_k}) \xi_k.$$

**Observação 1.5.2.** Verifica-se sem dificuldade que  $f$  é mínima se, e somente se,  $H(p) = 0$  para todo  $p \in M$ .

### 1.5.1 Hipersuperfícies

Seja  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma imersão isométrica. Neste caso, diz-se que  $f(M) \subset \overline{M}$  é uma *hipersuperfície*. Às vezes é utilizado o termo hipersuperfície para designar a imersão isométrica  $f$ . Se  $M$  e  $\overline{M}$  são orientáveis e estão orientadas, então o vetor unitário  $\eta$  normal a  $M$  fica unicamente determinado ao exigirmos que sendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base na orientação de  $M$ ,  $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$  seja uma base na orientação de  $\overline{M}$ . Assim, escrevendo  $II$ ,  $H$ ,  $S$  para indicar  $II_\eta$ ,  $H_\eta$ ,  $S_\eta$ , definimos a *curvatura média* da imersão como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} H & : M \longrightarrow \mathbb{R} \\ p & \longmapsto \text{tr } II. \end{aligned}$$

Tratando-se de uma hipersuperfície  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ , a fórmula de Gauss admite uma expressão mais simples. De fato, seja  $\eta \in (T_p M)^\perp$  unitário e  $p \in M$ . Como  $S : T_p M \rightarrow T_p M$  é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_p M$  com valores próprios reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , i.e.,  $S(e_i) = \lambda_i e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Considere uma base ortonormal de  $T_p M$  para a qual  $S$  é diagonal, ou seja,  $S(e_i) = \lambda_i e_i$ , onde  $\lambda_i$  é autovalor próprio de  $S$  para  $i = 1, \dots, n$ . Logo,  $B(e_i, e_i) = \lambda_i \eta$  e  $B(e_i, e_j) = 0$ , se  $i \neq j$ . Possibilitando-nos escrever a equação de Gauss da seguinte forma

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

No caso em que  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , o produto  $\lambda_i \lambda_j$  é conhecido como *curvatura Gaussiana* da superfície  $M^2$ . Neste caso, em uma superfície, a curvatura Gaussiana coincide com a curvatura seccional.

## 1.6 Aplicação exponencial

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. Uma curva  $\alpha$  em  $M$  é uma *geodésica* em  $t \in I$  se  $\nabla_{\alpha'(t)} \alpha'(t) = 0$ . Neste caso, se  $v(t) = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}$  é a velocidade de  $\alpha$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v^2(t)) &= \frac{d}{dt} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{D}{dt} \alpha'(t), \alpha'(t) \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Concluimos que se  $\alpha$  é geodésica, então o vetor velocidade de  $\alpha$  possui norma constante.

**Exemplo 1.6.1.** *Toda reta  $r$  contida em uma superfície  $S$  é uma geodésica de  $S$ , pois  $\gamma''(s) = 0$  para todo  $s \in I$ , onde  $\gamma : I \rightarrow S$  é uma parametrização pelo comprimento de arco.*

Definiremos a seguir a curvatura geodésica de uma curva regular numa superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  cujo sinal depende da orientação da curva e da superfície, e caracterizaremos as geodésicas como sendo as curvas que possuem curvatura geodésica nula em todos os seus pontos.

**Definição 1.6.1.** *Seja  $w$  um campo diferenciável de vetores unitários ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  sobre uma superfície orientada  $S$ . Como  $\|w(t)\| = 1$  para todo  $t \in I$ , temos que  $\langle w'(t), w(t) \rangle = 0$  para todo  $t \in I$ . Portanto,  $\frac{Dw}{dt}(t)$  é paralelo ao vetor  $\bar{N}(t) \wedge w(t)$ , isto é, existe  $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ , tal que*

$$\frac{Dw}{dt}(t) = \lambda(t)(\bar{N}(t) \wedge w(t)),$$

onde  $\bar{N}(t) = N \circ \alpha(t)$ . O número real  $\lambda(t)$  denotado por  $\left[ \frac{Dw}{dt}(t) \right]$ , é chamado valor algébrico da derivada covariante de  $w$  em  $t$ .

**Observação 1.6.1.** *Note que  $\lambda(t) = \left[ \frac{Dw}{dt}(t) \right](t) = \left\langle \frac{dw}{dt}(t), \bar{N}(t) \wedge w(t) \right\rangle$ , pois  $\frac{Dw}{dt}(t)$  é a componente tangente de  $\frac{dw}{dt}(t)$  e  $\bar{N}(t) \wedge w(t)$  é um vetor tangente a  $S$  em  $\alpha(t)$ . Além disso, vale observar que o valor algébrico  $\left[ \frac{Dw}{dt} \right]$  depende da orientação de  $S$  e de  $\alpha$ .*

**Definição 1.6.2.** *Seja  $C$  uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada  $S$ , e seja  $\alpha : I \rightarrow C$  uma parametrização de  $C$ , numa vizinhança de  $p \in C$ , pelo comprimento de arco positivamente orientada. O valor algébrico  $\left[ \frac{D\alpha'}{ds}(s) \right] = k_g(s)$  da derivada covariante de  $\alpha'$  em  $s$  é chamada curvatura geodésica de  $\alpha$  em  $p$ , onde  $\alpha(s) = p$ .*

**Observação 1.6.2.** *As geodésicas são as curvas em  $S$  que têm curvatura geodésica nula em todos os seus pontos.*

O próximo resultado é consequência do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias.

**Proposição 1.6.1.** *Dados  $p \in M$  e  $v \in T_pM$ , existe uma única geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ .*

Denotaremos por  $\gamma_v$  a única geodésica de  $M$  que passa por  $p \in M$  com velocidade  $v \in T_pM$ .

**Exemplo 1.6.2.** *Os grandes círculos são as únicas geodésicas da esfera  $S^n$ . Os grandes círculos de  $S^n$  são obtidos intersectando-a com um plano bidimensional que passa pelo centro da esfera. A demonstração desta afirmação pode ser consultada em [5], página 57.*

**Definição 1.6.3.** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$ . A aplicação exponencial  $\exp_p : T_pM \rightarrow M$  é a aplicação diferenciável*

$$\exp_p(v) = \gamma(1, p, v) = \gamma\left(|v|, p, \frac{v}{|v|}\right),$$

onde  $\gamma(t) = \gamma(t, p, v)$  é a única geodésica satisfazendo  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$ .

Geometricamente,  $\exp_p$  é o ponto de  $M$  obtido percorrendo a partir de  $p$  sobre a geodésica que passa por  $p$  com velocidade igual a  $\frac{v}{|v|}$ , um comprimento igual a  $|v|$ .

**Exemplo 1.6.3.** *Na esfera  $S^2$ ,  $\exp_p(v)$  está definida para todo  $v \in T_pS^2$ , uma vez que toda geodésica  $\gamma$  da esfera está definida em toda a reta. Se  $v \in T_pS^2$ , com  $|v| = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, (2n+1)\pi$ , então  $\exp_p v$  é o ponto antípoda  $-p$  de  $p$ . Para  $v \in T_pS^2$ , com  $|v| = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, (2n)\pi$ ,  $\exp_p(v)$  é o próprio  $p$ .*

## 1.7 O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$

Os espaços de curvatura seccional constante destacam-se por serem as variedades Riemannianas mais simples. Uma importante propriedade dos espaços de curvatura constante é que eles possuem uma grande quantidade de isometrias locais.

Na seção (1.3) vimos dois exemplos de variedades Riemannianas de curvatura seccional  $K$  constante, a saber, o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  com  $K \equiv 0$

e a esfera unitária  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  com  $K \equiv 1$ . Nesta seção introduziremos uma variedade Riemanniana, o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  de dimensão  $n$ , que possui curvatura seccional  $K \equiv -1$ . Para maiores detalhes sobre o assunto, sugerimos a referência [6].

O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , a esfera  $S^n$  e o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  constituem essencialmente as únicas variedades Riemannianas completas e simplesmente conexas, com curvatura seccional constante. Uma demonstração para esta afirmação pode ser encontrada no capítulo VIII de [5].

### 1.7.1 O modelo do semi-espaço superior

Apresentaremos a seguir um exemplo de um espaço de curvatura constante  $-1$ .

Considere o semi-espaço do  $\mathbb{R}^n$  dado por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

e introduza em  $\mathbb{H}^n$  a seguinte métrica

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}. \quad (1.7)$$

**Observação 1.7.1.** *Observe que  $\mathbb{H}^n$  é simplesmente conexo.*

**Proposição 1.7.1.** *O espaço  $\mathbb{H}^n$  munido da métrica (1.7) é uma variedade completa cuja curvatura seccional é constante igual a  $-1$ .  $\mathbb{H}^n$  é chamado o espaço hiperbólico de dimensão  $n$*

*Demonstração.* Ver [5], página 134. ■

As geodésicas neste modelo são as semi-retas e os semicírculos que intersectam o plano  $\{x_n = 0\}$  ortogonalmente. Uma demonstração para a afirmação anterior pode ser encontrada em [5], página 136.

### 1.7.2 Superfícies umbílicas em $\mathbb{H}^n$

Descreveremos a seguir as superfícies umbílicas no espaço hiperbólico, a saber: as esferas, horoesferas e as hiperesferas (ou superfícies equidistantes).

As *esferas hiperbólicas* são as esferas euclidianas que estão totalmente contidas em  $\mathbb{H}^n$ . Um esfera em  $\mathbb{H}^n$  possui curvatura média constante maior do que 1.

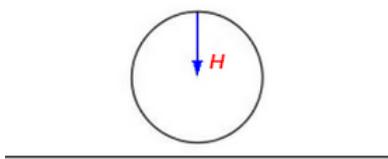


Figura 1.1: Esfera

Uma *horoesfera* pode ser descrita como uma esfera euclidiana em  $\mathbb{R}_+^n$  tangente a  $\partial\mathbb{H}^n$  ou como o hiperplano euclidiano horizontal em  $\mathbb{H}^n$ . A curvatura média de uma horoesfera é constante igual a 1.

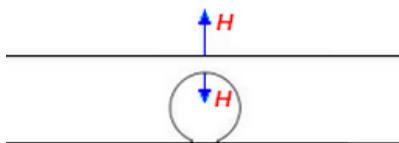


Figura 1.2: Horoesferas

As *hiperesferas* podem ser caracterizadas pelo fato de serem um conjunto de pontos equidistantes de um dado hiperplano. Os hiperplanos são exemplos triviais de hiperesferas. Uma hiperesfera possui curvatura média constante  $K \in [0, 1)$ .



Figura 1.3: Hiperplanos

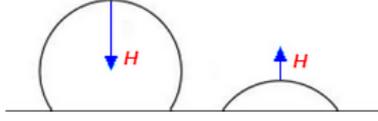


Figura 1.4: Esferas equidistantes

## 1.8 Teorema de comparação do Laplaciano

Nesta seção discutiremos resultados fundamentais para a demonstração do principal teorema do último capítulo. Inicialmente demonstraremos um resultado sobre a Hessiana da função distância e, em seguida, enunciaremos o teorema de comparação do Laplaciano.

**Proposição 1.8.1.** *Seja  $r : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $r(x) = d(x, p)$ , onde  $d$  é a função distância. Então  $\nabla^2 r \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0$ . Além disso, se  $X \perp \frac{\partial}{\partial r}$ , vale  $\nabla^2 r \left( \frac{\partial}{\partial r}, X \right) = 0$ , onde  $\frac{\partial}{\partial r}$  é o vetor velocidade.*

*Demonstração.* Aqui usaremos o fato que, para cada  $w$  fixado em  $T_p M$ , as curvas  $r \rightarrow \exp_p(rw)$  são geodésicas com o vetor velocidade  $\frac{\partial}{\partial r}$ . Combinando esse fato com a definição de Hessiana para a função distância  $r$ , temos

$$\begin{aligned} \nabla^2 r \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} r - \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} r \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, aplicando o lema de Gauss (ver [5], página 59), temos que

$$\nabla r = \frac{\partial}{\partial r}.$$

Portanto, se  $X \perp \frac{\partial}{\partial r}$ , obtemos

$$\begin{aligned}\nabla^2 r \left( \frac{\partial}{\partial r}, X \right) &= X \frac{\partial}{\partial r} r - \left( \nabla_X \frac{\partial}{\partial r} \right) r \\ &= - \left\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle,\end{aligned}$$

pois  $X \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) r = X(1) = 0$ .

Pela compatibilidade da métrica, encontramos que

$$\nabla^2 r \left( \frac{\partial}{\partial r}, X \right) = -\frac{1}{2} X \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle.$$

Finalmente, como as geodésicas radiais são parametrizadas por comprimento de arco,

$$\nabla^2 r \left( \frac{\partial}{\partial r}, X \right) = -\frac{1}{2} X(1) = 0.$$

■

**Teorema 1.8.1** (Teorema de comparação do Laplaciano). *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana completa. Suponhamos que a curvatura de Ricci de  $M$  satisfaz  $\text{Ric}(M) \geq (n-1)kg$ . Seja  $r$  a distância geodésica ao ponto  $p \in M$ . Suponhamos ainda que a função  $r$  é diferenciável no ponto  $x$ . Então*

$$\Delta r(x) \leq \Delta r_k(\bar{x}),$$

onde  $r_k(\bar{x}) = r(x) = r_0$  e  $r_0 < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$  se  $k > 0$ . Se a igualdade é satisfeita, então a curvatura seccional de qualquer plano que contenha o vetor radial, ao longo de geodésicas ligando  $p$  e  $x$ , é constante e igual a  $k$ .

*Demonstração.* Ver [9], página 287.

■

# Capítulo 2

## Espaços Warped

Neste capítulo introduziremos o espaço produto warped  $\mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$  e mostraremos que o produto warped  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2$  é isométrico ao espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ . Encerraremos o capítulo demonstrando que as folhas da folheação  $\{t\} \times \mathbb{P}^2$  são hipersuperfícies totalmente umbílicas com curvatura média constante  $\mathcal{H}(t) = (\varrho'/\varrho)(t)$ .

### 2.1 Motivação

O *produto warped*  $W = I \times_{\varrho} M$  de um intervalo de reta  $I$  por uma variedade Riemanniana  $M$  é o produto topológico  $I \times M$  munido com a métrica do produto warped:

$$ds^2 = \pi_I^* dt^2 + (\varrho \circ \pi_I)^2 \pi_M^* g_M,$$

onde  $\varrho : I \rightarrow (0, \infty)$  é uma função suave positiva e  $\pi_I, \pi_M$  são as projeções ortogonais de  $I \times M$  sobre seus fatores correspondentes.

O estudo desta classe de variedades Riemannianas foi motivado a partir de um artigo de S. Montiel [10] no qual são classificadas as variedades Riemannianas que são isométricas (localmente ou globalmente) a um produto

warped deste tipo.

Nesta classe de variedades Riemannianas incluem-se as variedades de curvatura constante.

**Proposição 2.1.1.** *O espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  com a métrica  $g_{ij}(x, y, z) = \frac{\delta_{ij}}{z^2}$  é isométrico ao espaço warped  $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2$ .*

*Demonstração.* Considere o espaço  $W^3 = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2$  e introduza em  $W^3$  a métrica Riemanniana  $ds^2 = dt^2 + e^{2t}(du^2 + dv^2)$ . Seja  $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$ . Defina a aplicação

$$\begin{aligned} f : W^3 &\longrightarrow \mathbb{H}^3 \\ (t, u, v) &\longmapsto (x, y, z) = (u, v, e^{-t}). \end{aligned}$$

Temos que  $f$  é diferenciável, pois suas funções coordenadas são diferenciáveis e, como  $z > 0$ , temos que

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{H}^3 &\longrightarrow W^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (t, u, v) = (-\ln(z), x, y) \end{aligned}$$

é diferenciável. Assim,  $f$  é um difeomorfismo e podemos introduzir um produto interno em  $\mathbb{H}^3$  fazendo

$$\langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle_{f(p)} = \langle w_1, w_2 \rangle_p,$$

o que torna  $f$  uma isometria.

Sabemos que

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = a_{11} \frac{\partial}{\partial x} + a_{21} \frac{\partial}{\partial y} + a_{31} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) = a_{12} \frac{\partial}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial}{\partial y} + a_{32} \frac{\partial}{\partial z}$$

e

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) = a_{13} \frac{\partial}{\partial x} + a_{23} \frac{\partial}{\partial y} + a_{33} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Por outro lado,

$$(df_p) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dt} & \frac{df_1}{du} & \frac{df_1}{dv} \\ \frac{df_2}{dt} & \frac{df_2}{du} & \frac{df_2}{dv} \\ \frac{df_3}{dt} & \frac{df_3}{du} & \frac{df_3}{dv} \end{pmatrix},$$

e, portanto,

$$(df_p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^{-t} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Então

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = (-e^{-t}) \frac{\partial}{\partial z} \quad \therefore \quad \frac{\partial}{\partial z} = -e^t df_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial x}$$

e

$$df_p \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Logo

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle_{f(p)} = \left\langle df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right), df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle_{f(p)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_p = e^{2t} = \frac{1}{z^2},$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle_{f(p)} = \left\langle df_p \left( \frac{\partial}{\partial v} \right), df_p \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle_{f(p)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_p = e^{2t} = \frac{1}{z^2},$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle_{f(p)} = \left\langle -e^t df_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \right), -e^t df_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\rangle_{f(p)} = e^{2t} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_p = e^{2t} = \frac{1}{z^2},$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle_{f(p)} = \left\langle df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right), df_p \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle_{f(p)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_p = 0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle,$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle_{f(p)} = \left\langle df_p \left( \frac{\partial}{\partial u} \right), -e^t df_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\rangle_{f(p)} = -e^t \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_p = 0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle,$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle_{f(p)} = \left\langle df_p \left( \frac{\partial}{\partial v} \right), -e^t df_p \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\rangle_{f(p)} = -e^t \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_p = 0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle.$$

Portanto o espaço  $\mathbb{H}^3$  com a métrica  $g_{ij}(x, y, z) = \frac{\delta_{ij}}{z^2}$  é isométrico à variedade  $W^3$ .

■

## 2.2 O espaço produto $M^3 = \mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$

Sejam  $\mathbb{P}^2$  uma superfície Riemanniana completa e  $M^3 = \mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$  a variedade produto  $\mathbb{R} \times \mathbb{P}^2$  dotada com a seguinte métrica Riemanniana warped

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dt^2 + \varrho^2(t) \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}^2}$$

onde  $\varrho : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  é suave.

Em  $M^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{P}^2$  a métrica se expressa matricialmente por

$$\bar{G} = (\bar{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho^2 g_{11} & \varrho^2 g_{12} \\ 0 & \varrho^2 g_{21} & \varrho^2 g_{22} \end{pmatrix},$$

onde

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

é métrica em  $\mathbb{P}^2$ .

Escreveremos

$$\bar{G}^{-1} = (\bar{g}^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho^{-2}g^{11} & \varrho^{-2}g^{12} \\ 0 & \varrho^{-2}g^{21} & \varrho^{-2}g^{22} \end{pmatrix}$$

e

$$G^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

para indicar as matrizes inversas de  $\bar{G}$  e  $G$ , respectivamente.

Denotaremos por  $\bar{\Gamma}_{ij}^k$  e  $\hat{\Gamma}_{ij}^k$ , respectivamente, os símbolos de Christoffel das conexões  $\bar{\nabla}$  e  $\hat{\nabla}$ , onde  $\bar{\nabla}$  é uma representação para a conexão de Levi-Civita em  $M^3$  e  $\hat{\nabla}$  representa a conexão de Levi-Civita em  $\mathbb{P}^2$ . Com o intuito de não sobrecarregar a notação, quando for conveniente faremos a seguinte identificação  $(x_1, x_2, x_3) \sim (t, u, v)$ .

Para calcular os símbolos de Christoffel vale lembrar que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} g^{mk},$$

donde concluímos que

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{11}^1 &= 0, \\ \bar{\Gamma}_{22}^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} \bar{g}_{22} \right) \bar{g}^{22} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial u} \bar{g}_{23} - \frac{\partial}{\partial v} \bar{g}_{22} \right) \bar{g}^{32} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} g_{11} \right) g^{11} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial u} g_{12} - \frac{\partial}{\partial v} g_{11} \right) g^{21} \\ &= \hat{\Gamma}_{11}^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{33}^3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial v} \bar{g}_{33} \right) \bar{g}^{33} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial v} \bar{g}_{23} - \frac{\partial}{\partial u} \bar{g}_{33} \right) \bar{g}^{23} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial v} g_{22} \right) g^{22} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial v} g_{12} - \frac{\partial}{\partial v} g_{22} \right) g^{12} \\
&= \hat{\Gamma}_{22}^2,
\end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}_{11}^2 = \bar{\Gamma}_{11}^3 = 0,$$

$$\bar{\Gamma}_{22}^1 = -\varrho \varrho' g_{11},$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{22}^3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} \bar{g}_{22} \right) \bar{g}^{23} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial u} \bar{g}_{23} - \frac{\partial}{\partial v} \bar{g}_{22} \right) \bar{g}^{33} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} g_{11} \right) g^{12} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial u} g_{12} - \frac{\partial}{\partial v} g_{11} \right) g^{22} \\
&= \hat{\Gamma}_{11}^2,
\end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}_{33}^1 = -\varrho \varrho' g_{22},$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{33}^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial v} \bar{g}_{33} \right) \bar{g}^{32} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial v} \bar{g}_{32} - \frac{\partial}{\partial u} \bar{g}_{33} \right) \bar{g}^{22} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial v} g_{22} \right) g^{21} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial v} g_{21} - \frac{\partial}{\partial u} g_{22} \right) g^{11} \\
&= \hat{\Gamma}_{22}^1,
\end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}_{12}^1 = \bar{\Gamma}_{21}^1 = \bar{\Gamma}_{13}^1 = \bar{\Gamma}_{31}^1 = 0,$$

$$\bar{\Gamma}_{21}^2 = \bar{\Gamma}_{12}^2 = \frac{\varrho'}{\varrho},$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{23}^2 = \bar{\Gamma}_{32}^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial v} \bar{g}_{22} \right) \bar{g}^{22} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} \bar{g}_{33} \right) \bar{g}^{32} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial v} g_{11} \right) g^{11} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial u} g_{22} \right) g^{21} \\
&= \hat{\Gamma}_{12}^1 = \hat{\Gamma}_{21}^1,
\end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}_{31}^3 = \bar{\Gamma}_{13}^3 = \frac{\varrho'}{\varrho},$$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{32}^3 &= \bar{\Gamma}_{23}^3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial v} \bar{g}_{22} \right) \bar{g}^{23} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} \bar{g}_{33} \right) \bar{g}^{33} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial v} g_{11} \right) g^{12} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial u} g_{22} \right) g^{22} \\ &= \hat{\Gamma}_{21}^2 = \hat{\Gamma}_{12}^2,\end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}_{12}^3 = \bar{\Gamma}_{21}^3 = 0,$$

$$\bar{\Gamma}_{13}^2 = \bar{\Gamma}_{31}^2 = 0,$$

e

$$\bar{\Gamma}_{23}^1 = \bar{\Gamma}_{32}^1 = -\varrho \varrho' g_{12}.$$

Para o cálculo das curvaturas seccionais do espaço  $\mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$ , observemos que

$$\bar{R}_{1212} = \sum_{l=1}^3 \bar{R}_{121}^l \bar{g}_{l2} = \bar{R}_{121}^2 \varrho^2 g_{11} + \bar{R}_{121}^3 \varrho^2 g_{21},$$

$$\bar{R}_{1313} = \sum_{l=1}^3 \bar{R}_{131}^l \bar{g}_{l3} = \bar{R}_{131}^2 \varrho^2 g_{12} + \bar{R}_{131}^3 \varrho^2 g_{22}$$

e

$$\bar{R}_{2323} = \sum_{l=1}^3 \bar{R}_{232}^l \bar{g}_{l3} = \bar{R}_{232}^2 \varrho^2 g_{12} + \bar{R}_{232}^3 \varrho^2 g_{22}.$$

A curvatura seccional segundo o plano gerado por  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$  é (observe que  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$  são ortogonais)

$$\bar{K}_{12} = \frac{\bar{R}_{1212}}{\bar{g}_{11} \bar{g}_{22}} = \frac{\bar{R}_{121}^2 \varrho^2 g_{11} + \bar{R}_{121}^3 \varrho^2 g_{21}}{\varrho^2 g_{11}} = \bar{R}_{121}^2 + \frac{\bar{R}_{121}^3 g_{21}}{g_{11}}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{121}^2 &= \sum_{l=1}^3 \bar{\Gamma}_{11}^l \bar{\Gamma}_{2l}^2 - \sum_{l=1}^3 \bar{\Gamma}_{21}^l \bar{\Gamma}_{1l}^2 + \frac{\partial}{\partial u} \bar{\Gamma}_{11}^2 - \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Gamma}_{21}^2 \\
&= -\bar{\Gamma}_{21}^2 \bar{\Gamma}_{12}^2 - \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Gamma}_{21}^2 \\
&= -\frac{\varrho''}{\varrho}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{121}^3 &= \sum_{l=1}^3 \bar{\Gamma}_{11}^l \bar{\Gamma}_{2l}^3 - \sum_{l=1}^3 \bar{\Gamma}_{21}^l \bar{\Gamma}_{1l}^3 + \frac{\partial}{\partial u} \bar{\Gamma}_{11}^3 - \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Gamma}_{21}^3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\bar{K}_{12} = \bar{R}_{121}^2 = -\frac{\varrho''}{\varrho}.$$

No plano gerado por  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}$  temos a seguinte curvatura seccional (lembrando que  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$  são ortogonais)

$$\bar{K}_{13} = \frac{\bar{R}_{1313}}{\bar{g}_{11}\bar{g}_{33}} = \frac{\bar{R}_{131}^2 \varrho^2 g_{12} + \bar{R}_{131}^3 \varrho^2 g_{22}}{\varrho^2 g_{22}} = \frac{\bar{R}_{131}^2 g_{12}}{g_{22}} + \bar{R}_{131}^3.$$

Porém

$$\bar{R}_{131}^2 = \sum_{l=1}^3 \bar{\Gamma}_{11}^l \bar{\Gamma}_{3l}^2 - \sum_{l=1}^3 \bar{\Gamma}_{31}^l \bar{\Gamma}_{1l}^2 + \frac{\partial}{\partial v} \bar{\Gamma}_{11}^2 - \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Gamma}_{31}^2 = 0$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{131}^3 &= \sum_{l=1}^3 \bar{\Gamma}_{11}^l \bar{\Gamma}_{3l}^3 - \sum_{l=1}^3 \bar{\Gamma}_{31}^l \bar{\Gamma}_{1l}^3 + \frac{\partial}{\partial v} \bar{\Gamma}_{11}^3 - \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Gamma}_{31}^3 \\
&= -\bar{\Gamma}_{31}^3 \bar{\Gamma}_{13}^3 - \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Gamma}_{31}^3 \\
&= -\frac{\varrho''}{\varrho}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\bar{K}_{13} = \bar{R}_{131}^3 = -\frac{\varrho''}{\varrho}.$$

A curvatura seccional segundo o plano gerado por  $\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$  é dada por

$$\bar{K}_{23} = \frac{\bar{R}_{2323}}{\bar{g}_{22}\bar{g}_{33} - (\bar{g}_{23})^2} = \frac{\bar{R}_{232}^2 \varrho^2 g_{12} + \bar{R}_{232}^3 \varrho^2 g_{22}}{\varrho^2 g_{11} \varrho^2 g_{22} - \varrho^4 (g_{12})^2} = \frac{\bar{R}_{232}^2 g_{12} + \bar{R}_{232}^3 g_{22}}{\varrho^2 [g_{11} g_{22} - (g_{12})^2]}.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{232}^2 &= \sum_{l=1}^3 \bar{\Gamma}_{22}^l \bar{\Gamma}_{3l}^2 - \sum_{l=1}^3 \bar{\Gamma}_{32}^l \bar{\Gamma}_{2l}^2 + \frac{\partial}{\partial v} \bar{\Gamma}_{22}^2 - \frac{\partial}{\partial u} \bar{\Gamma}_{32}^2 \\
&= \bar{\Gamma}_{22}^1 \bar{\Gamma}_{31}^2 + \bar{\Gamma}_{22}^2 \bar{\Gamma}_{32}^2 + \bar{\Gamma}_{22}^3 \bar{\Gamma}_{33}^2 - \bar{\Gamma}_{32}^1 \bar{\Gamma}_{21}^2 - \bar{\Gamma}_{32}^2 \bar{\Gamma}_{22}^2 \\
&\quad - \bar{\Gamma}_{32}^3 \bar{\Gamma}_{23}^2 + \frac{\partial}{\partial v} \bar{\Gamma}_{22}^2 - \frac{\partial}{\partial u} \bar{\Gamma}_{32}^2 \\
&= R_{121}^1 + (\varrho')^2 g_{21}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{232}^3 &= \sum_{l=1}^3 \bar{\Gamma}_{22}^l \bar{\Gamma}_{3l}^3 - \sum_{l=1}^3 \bar{\Gamma}_{32}^l \bar{\Gamma}_{2l}^3 + \frac{\partial}{\partial v} \bar{\Gamma}_{22}^3 - \frac{\partial}{\partial u} \bar{\Gamma}_{32}^3 \\
&= \bar{\Gamma}_{22}^1 \bar{\Gamma}_{31}^3 + \bar{\Gamma}_{22}^2 \bar{\Gamma}_{32}^3 + \bar{\Gamma}_{22}^3 \bar{\Gamma}_{33}^3 - \bar{\Gamma}_{32}^1 \bar{\Gamma}_{21}^3 - \bar{\Gamma}_{32}^2 \bar{\Gamma}_{22}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \bar{\Gamma}_{32}^3 \bar{\Gamma}_{23}^3 + \frac{\partial}{\partial v} \bar{\Gamma}_{22}^3 - \frac{\partial}{\partial u} \bar{\Gamma}_{32}^3 \\
& = R_{121}^2 - (\varrho')^2 g_{11}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{23} & = \frac{R_{121}^1 g_{12} + (\varrho')^2 (g_{12})^2 + R_{121}^2 g_{22} - (\varrho')^2 g_{11} g_{22}}{\varrho^2 [g_{11} g_{22} - (g_{12})^2]} \\
& = \frac{R_{121}^1 g_{12} + R_{121}^2 g_{22}}{\varrho^2 [g_{11} g_{22} - (g_{12})^2]} - \frac{(\varrho')^2 [g_{11} g_{22} - (g_{12})^2]}{\varrho^2 [g_{11} g_{22} - (g_{12})^2]} \\
& = \frac{K_{\mathbb{P}}}{\varrho^2} - \left( \frac{\varrho'}{\varrho} \right)^2,
\end{aligned}$$

onde  $K_{\mathbb{P}}$  é a curvatura de  $\mathbb{P}^2$ .

Em suma, as curvaturas seccionais de  $M^3 = \mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$  são

$$\bar{K}_{ij} = \begin{cases} \bar{K}_{12} = \bar{K}_{13} = -\frac{\varrho''}{\varrho} \\ \bar{K}_{23} = \frac{K_{\mathbb{P}}}{\varrho^2} - \left( \frac{\varrho'}{\varrho} \right)^2. \end{cases}$$

Segue que o produto warped  $\mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$  possui curvatura constante  $\kappa$  se, e somente se,  $\mathbb{P}^2$  tem curvatura constante  $c$  e  $\varrho$  satisfaz as seguintes equações diferenciais:  $\varrho'' = -\kappa \varrho$  e  $(\varrho')^2 + c\varrho^2 = \kappa$ .

**Exemplo 2.2.1.** *Considere o espaço  $W^3 = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2$ , i.e.,  $W^3$  é a variedade produto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  dotada com a seguinte métrica*

$$\langle , \rangle = dt^2 + e^{2t} \langle , \rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

*As curvaturas seccionais de  $W^3$  são dadas por*

$$\bar{K}_{ij} = \begin{cases} \bar{K}_{12} = \bar{K}_{13} = -\frac{e^t}{e^t} = -1 \\ \bar{K}_{23} = \frac{K_{\mathbb{R}}}{e^{2t}} - \left(\frac{e^t}{e^t}\right)^2 = -1. \end{cases}$$

Fazendo uso da Proposição 1.3.3, concluímos que a curvatura seccional de  $W^3 = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2$  é constante e igual a  $-1$ .

## 2.3 Folheação de $M^3$

A família de superfícies  $\mathbb{P}_t = \{t\} \times \mathbb{P}^2$  forma uma folheação de  $M^3$  por folhas totalmente umbílicas com curvatura média constante

$$\mathcal{H}(t) = (\log \varrho)'(t) = (\varrho'/\varrho)(t).$$

Com efeito, é conhecido que

$$\nabla_{X_j} X_i = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$$

e, portanto,

$$\bar{\nabla}_{X_u} \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \bar{\Gamma}_{12}^k X_k = \bar{\Gamma}_{12}^1 \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\Gamma}_{12}^2 X_u + \bar{\Gamma}_{12}^3 X_v = \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right) X_u$$

e

$$\bar{\nabla}_{X_v} \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \bar{\Gamma}_{13}^k X_k = \bar{\Gamma}_{13}^1 \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\Gamma}_{13}^2 X_u + \bar{\Gamma}_{13}^3 X_v = \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right) X_v .$$

Donde

$$A(X_u) = -\frac{\varrho'}{\varrho} X_u$$

e

$$A(X_v) = -\frac{\varrho'}{\varrho} X_v ,$$

utilizamos acima os valores dos simbolos de Christoffel obtidos na seção anterior.

Por sua vez, os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$h_{ij} = \begin{cases} h_{11} = \langle A(X_u), X_u \rangle = -\frac{\varrho'}{\varrho} \langle X_u, X_u \rangle = -\frac{\varrho'}{\varrho} g_{11} \\ h_{12} = \langle A(X_u), X_v \rangle = -\frac{\varrho'}{\varrho} \langle X_u, X_v \rangle = -\frac{\varrho'}{\varrho} g_{12} \\ h_{21} = \langle A(X_v), X_u \rangle = -\frac{\varrho'}{\varrho} \langle X_v, X_u \rangle = -\frac{\varrho'}{\varrho} g_{21} \\ h_{22} = \langle A(X_v), X_v \rangle = -\frac{\varrho'}{\varrho} \langle X_v, X_v \rangle = -\frac{\varrho'}{\varrho} g_{22} \end{cases}$$

e, portanto, a matriz da segunda forma fundamental é dada por

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{\varrho'}{\varrho} g_{11} & -\frac{\varrho'}{\varrho} g_{12} \\ -\frac{\varrho'}{\varrho} g_{21} & -\frac{\varrho'}{\varrho} g_{22} \end{pmatrix} = -\frac{\varrho'}{\varrho} g_{ij} .$$

Logo as folhas da folheação  $\mathbb{P}_t$  são totalmente umbílicas.

A Matriz de Weingarten é

$$\mathcal{W} = -h_{ij} g^{ij} = - \begin{pmatrix} -\frac{\varrho'}{\varrho} g_{11} & -\frac{\varrho'}{\varrho} g_{12} \\ -\frac{\varrho'}{\varrho} g_{21} & -\frac{\varrho'}{\varrho} g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varrho'}{\varrho} & 0 \\ 0 & \frac{\varrho'}{\varrho} \end{pmatrix} .$$

Logo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathcal{W}) = \frac{\varrho'}{\varrho}$$

e

$$K_g = \det(\mathcal{W}) = \left( \frac{\varrho'}{\varrho} \right)^2$$

são as curvaturas média e Gaussiana, respectivamente.

# Capítulo 3

## Resultados Principais

Iniciaremos este capítulo introduzindo conceitos que serão diretamente aplicados na demonstração dos teoremas descritos na última seção do presente capítulo.

O objetivo principal deste capítulo é apresentar a demonstração do seguinte teorema:

*Em um slab de  $\mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$  com fronteira  $\mathbb{P}_{t_1} \cup \mathbb{P}_{t_2}$  não há superfície  $\Sigma^2$  completa propriamente imersa com curvatura média satisfazendo*

$$\sup_{\Sigma} \|\vec{H}\| < \min_{[t_1, t_2]} \mathcal{H}(t).$$

O teorema acima foi demonstrado por J. Alías e M. Dajczer em [2].

No Teorema acima, as folhas da folheação  $\mathbb{P}_t = \{t\} \times \mathbb{P}^2$  são hipersuperfícies totalmente umbílicas com curvatura média constante

$$\mathcal{H}(t) = (\log \varrho)'(t) = (\varrho'/\varrho)(t).$$

No contexto do teorema anterior, há dois casos a considerar para os quais  $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0$  é constante. Se  $\varrho = 1$ , então  $\mathcal{H}_0 = 0$  e o espaço ambiente

é exatamente o produto Riemanniano  $M^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{P}^2$ . No caso  $\varrho = e^t$ , temos  $\mathcal{H}_0 = 1$  e  $M^3 = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{P}^2$ . Neste último,  $M^3$  pertence à classe de variedades chamada em [11] de *espaço pseudo-hiperbólico*.

Finalizaremos abordando mais um resultado devido a J. Alías e M. Dajczer (ver Teorema 4 de [2]).

### 3.1 Considerações iniciais

Ao longo deste capítulo,  $M^3 = \mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$  denota a variedade produto completa dotada da seguinte métrica Riemanniana warped

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \pi_{\mathbb{R}}^*(dt^2) + \varrho^2(\pi_{\mathbb{R}})\pi_{\mathbb{P}}^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}}) \quad (3.1)$$

onde  $\varrho : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  é uma função warping,  $\pi_{\mathbb{R}}$  e  $\pi_{\mathbb{P}}$  são as projeções canônicas de  $\mathbb{R} \times \mathbb{P}^2$  em cada fator, e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}}$  é uma métrica Riemanniana em  $\mathbb{P}^2$ .

Admitiremos ainda que  $\mathbb{P}^2$  é completa, possui curvatura Gaussiana não negativa, e a curvatura geodésica dos círculos geodésicos (partindo de um ponto fixado  $p_0$ ) de raio  $\hat{r} \geq r_0 > 0$  satisfaz  $k_g \geq -c/\hat{r}$  para alguma constante positiva  $c$ .

Seja  $\Sigma^2$  uma superfície Riemanniana. A *função altura*  $h \in C^\infty(\Sigma)$  ao longo da imersão isométrica  $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$  é definida por

$$h = \pi_{\mathbb{R}} \circ f.$$

**Definição 3.1.1.** *Diz-se que uma superfície está em um slab quando sua função altura está limitada de ambos os lados.*

## 3.2 Resultados auxiliares

Fixada uma orientação para  $\mathbb{R}$ , considere  $T \in T\mathbb{R}$  denotando um campo vetorial regular unitário e, simultaneamente, seu levantamento para um campo vetorial em  $TM$ . Portanto, o gradiente de  $\pi_{\mathbb{R}} \in \mathcal{C}^\infty(M)$  é  $\bar{\nabla}\pi_{\mathbb{R}} = \partial/\partial t = T$ , e o gradiente de  $h \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  é

$$\nabla h = (\bar{\nabla}\pi_{\mathbb{R}})^\top = T - \langle T, N \rangle N, \quad (3.2)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é referente a métrica Riemanniana em  $\Sigma^2$ ,  $(\cdot)^\top$  denota a componente tangencial do campo vetorial ao longo da imersão, e  $N$  é um campo vetorial (local) regular normal e unitário.

**Proposição 3.2.1.** *Se  $Z \in TM$  é um levantamento do campo vetorial  $Z \in T\mathbb{P}$ , e  $\bar{\nabla}$  a conexão de Levi-Civita em  $M^3$ . Então  $\bar{\nabla}_T T = 0$  e*

$$\bar{\nabla}_Z T = \bar{\nabla}_T Z = T(\log \varrho)Z = \frac{\varrho'}{\varrho}Z = \mathcal{H}Z, \quad (3.3)$$

onde  $\mathcal{H} = (\log \varrho)' = \varrho'/\varrho$ .

*Demonstração.* De fato, conhecemos a seguinte relação

$$\bar{\nabla}_{X_j} X_i = \sum_k \bar{\Gamma}_{ij}^k X_k.$$

Daí,

$$\bar{\nabla}_T T = \sum_{k=1}^3 \bar{\Gamma}_{11}^k X_k = \bar{\Gamma}_{11}^1 \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\Gamma}_{11}^2 X_u + \bar{\Gamma}_{11}^3 X_v = 0,$$

pois, conforme cálculos feitos na seção 2.2, os símbolos  $\bar{\Gamma}_{11}^1 = \bar{\Gamma}_{11}^2 = \bar{\Gamma}_{11}^3 = 0$ . Temos ainda

$$\bar{\nabla}_{X_u} T = \sum_{k=1}^3 \bar{\Gamma}_{12}^k X_k = \bar{\Gamma}_{12}^1 \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\Gamma}_{12}^2 X_u + \bar{\Gamma}_{12}^3 X_v = \left( \frac{\varrho'}{\varrho} \right) X_u,$$

$$\bar{\nabla}_{X_v} T = \sum_{k=1}^3 \bar{\Gamma}_{13}^k X_k = \bar{\Gamma}_{13}^1 \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\Gamma}_{13}^2 X_u + \bar{\Gamma}_{13}^3 X_v = \left( \frac{\varrho'}{\varrho} \right) X_v,$$

$$\bar{\nabla}_T X_u = \sum_{k=1}^3 \bar{\Gamma}_{21}^k X_k = \bar{\Gamma}_{21}^1 \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\Gamma}_{21}^2 X_u + \bar{\Gamma}_{21}^3 X_v = \left( \frac{\varrho'}{\varrho} \right) X_u$$

e

$$\bar{\nabla}_T X_v = \sum_{k=1}^3 \bar{\Gamma}_{31}^k X_k = \bar{\Gamma}_{31}^1 \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\Gamma}_{31}^2 X_u + \bar{\Gamma}_{31}^3 X_v = \left( \frac{\varrho'}{\varrho} \right) X_v,$$

vale lembrar, mais uma vez, que os símbolos de Christoffel foram calculados na seção 2.2.

Assim, se  $Z = aX_u + bX_v \in TM$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_T Z &= \bar{\nabla}_T(aX_u + bX_v) = \bar{\nabla}_T(aX_u) + \bar{\nabla}_T(bX_v) \\ &= (a\bar{\nabla}_T(X_u) + T(a)X_u) + (b\bar{\nabla}_T(X_v) + T(b)X_v) \\ &= a\bar{\nabla}_T X_u + b\bar{\nabla}_T X_v = a \left( \frac{\varrho'}{\varrho} X_u \right) + b \left( \frac{\varrho'}{\varrho} X_v \right) \\ &= \frac{\varrho'}{\varrho} (aX_u + bX_v) = \frac{\varrho'}{\varrho} Z = T(\log \varrho)Z = \mathcal{H}Z \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Z T &= \bar{\nabla}_{aX_u + bX_v} T = a\bar{\nabla}_{X_u} T + b\bar{\nabla}_{X_v} T \\ &= a \left( \frac{\varrho'}{\varrho} X_u \right) + b \left( \frac{\varrho'}{\varrho} X_v \right) \\ &= \frac{\varrho'}{\varrho} (aX_u + bX_v) = \frac{\varrho'}{\varrho} Z \\ &= T(\log \varrho)Z = \mathcal{H}Z, \end{aligned}$$

onde a igualdade  $\mathcal{H} = \log \varrho = \varrho'/\varrho$  encontra-se demonstrada na seção 2.3. ■

Por simplicidade, usaremos a mesma notação para um campo vetorial em  $\mathbb{P}^2$  e seu levantamento para  $M^3$ , bem como para as funções em  $\mathbb{R}$  (i.e.,  $\varrho$  e

$\varrho'$ ) e seus levantamentos para  $M^3$  (i.e.,  $\varrho \circ \pi_{\mathbb{R}}$  e  $\varrho' \circ \pi_{\mathbb{R}}$ ). Mais tarde usaremos que

$$\bar{\nabla}_Z W = \hat{\nabla}_Z W - \mathcal{H}\langle Z, W \rangle T, \quad (3.4)$$

onde  $Z, W \in TM$  são levantamentos de campos em  $T\mathbb{P}$ , e  $\hat{\nabla}$  é a conexão de Levi-Civita em  $\mathbb{P}^2$ .

Com a finalidade de demonstrar a afirmação anterior, considere, em  $p$ , o referencial geodésico  $\{E_1, E_2, E_3 = T\}$  e escreva  $\bar{\nabla}_Z W = aE_1 + bE_2 + cE_3$ ,  $E_1, E_2 \in T\mathbb{P}$ . Observe que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_Z W, E_1 \rangle_M &= Z\langle W, E_1 \rangle_M - \langle W, \bar{\nabla}_Z E_1 \rangle_M = Z(\varrho^2 \langle W, E_1 \rangle_{\mathbb{P}}) \\ &= Z(\varrho^2) \langle W, E_1 \rangle_{\mathbb{P}} + \varrho^2 Z \langle W, E_1 \rangle_{\mathbb{P}} \\ &= 2\varrho Z(\varrho) \langle W, E_1 \rangle_{\mathbb{P}} + \varrho^2 \langle \hat{\nabla}_Z W, E_1 \rangle_{\mathbb{P}} \\ &= \frac{2}{\varrho} Z(\varrho) \langle W, E_1 \rangle_M + \langle \hat{\nabla}_Z W, E_1 \rangle_M \end{aligned}$$

e, de forma análoga é possível obter

$$\langle \bar{\nabla}_Z W, E_2 \rangle_M = \frac{2}{\varrho} Z(\varrho) \langle W, E_2 \rangle_M + \langle \hat{\nabla}_Z W, E_2 \rangle_M.$$

Além disso,

$$\langle \bar{\nabla}_Z W, E_3 \rangle_M = \langle \bar{\nabla}_Z W, T \rangle_M = Z\langle W, T \rangle_M - \langle W, \bar{\nabla}_Z T \rangle_M = -\langle W, \mathcal{H}Z \rangle_M.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Z W &= \sum_{i=1}^2 \left( 2 \frac{Z(\varrho)}{\varrho} \langle W, E_i \rangle_M + \langle \hat{\nabla}_Z W, E_i \rangle_M \right) E_i + (-\langle W, \mathcal{H}Z \rangle_M) E_3 \\ &= 2 \frac{Z(\varrho)}{\varrho} W + \hat{\nabla}_Z W - \mathcal{H}\langle W, Z \rangle T = \hat{\nabla}_Z W - \mathcal{H}\langle W, Z \rangle T. \end{aligned}$$

Note que (3.3) é tensorial em  $Z$  e, portanto, se mantém para cada  $Z \in TM$  satisfazendo  $\langle Z, T \rangle = 0$ . Para todo campo vetorial  $V \in TM$ , temos que

$$\bar{\nabla}_V T = \bar{\nabla}_{V - \langle V, T \rangle T} T = \mathcal{H}(V - \langle V, T \rangle T). \quad (3.5)$$

Em particular, observe que  $Y = \varrho T \in TM$  determina um campo vetorial conforme não nulo em  $\mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$  uma vez que

$$\bar{\nabla}_V Y = Y(\log \varrho)V = \varrho T(\log \varrho)V = \varrho \left( \frac{\varrho'}{\varrho} \right) V = \varrho' V$$

para cada  $V \in TM$ .

De (3.2) e (3.5), obtemos

$$\bar{\nabla}_X T = \mathcal{H}(h)(X - \langle X, \nabla h \rangle T) \quad \text{para cada } X \in T\Sigma.$$

Com efeito, note que, devido à equação (3.2),  $T = \nabla h + \langle T, N \rangle N$ . Se  $X \in T\Sigma$ , então

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X T &= \bar{\nabla}_{X - \langle X, T \rangle T} T \\ &= \bar{\nabla}_{X - \langle X, \nabla h + \langle T, N \rangle N \rangle T} T \\ &= \bar{\nabla}_{X - \langle X, \nabla h \rangle T} T \\ &= \mathcal{H}(h)(X - \langle X, \nabla h \rangle T). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \nabla_X(\nabla h) &= (\bar{\nabla}_X(T - \langle T, N \rangle N))^\top = (\bar{\nabla}_X T - \langle T, N \rangle \nabla_X N)^\top \\ &= \mathcal{H}(h)(X - \langle X, \nabla h \rangle (T - \langle T, N \rangle N)) - \langle T, N \rangle (-AX) \\ &= \mathcal{H}(h)(X - \langle X, \nabla h \rangle \nabla h) + \langle N, T \rangle AX \quad \text{para cada } X \in T\Sigma, \end{aligned}$$

onde  $\nabla$  é a conexão de Levi-Civita em  $\Sigma^2$  e  $A = A_N$  denota a segunda forma fundamental de  $f$ .

**Proposição 3.2.2.** *Seja  $\vec{H}$  o campo vetorial curvatura média de  $f$ , então o Laplaciano de  $h$  é dado por*

$$\Delta h = \mathcal{H}(h)(2 - \|\nabla h\|^2) + 2\langle \vec{H}, T \rangle. \quad (3.6)$$

*Demonstração.* De fato, se  $\{E_i\}_{i=1,2}$  uma base ortonormal para  $\Sigma^2$  temos que

$$\Delta h = \operatorname{div}(\nabla h) = \sum_{i=1}^2 \langle E_i, \nabla_{E_i} \nabla h \rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Delta h &= \sum_{i=1}^2 \langle E_i, \mathcal{H}(h)(E_i - \langle E_i, \nabla h \rangle \nabla h) + \langle N, T \rangle A E_i \rangle \\ &= \mathcal{H}(h) \sum_{i=1}^2 \langle E_i, E_i \rangle - \mathcal{H}(h) \sum_{i=1}^2 \langle E_i, \nabla h \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle \\ &\quad + \langle N, T \rangle \sum_{i=1}^2 \langle E_i, A E_i \rangle \\ &= 2\mathcal{H}(h) - \mathcal{H}(h) \|\nabla h\|^2 + \langle N, T \rangle 2\mathcal{H} \\ &= 2\mathcal{H}(h) - \mathcal{H}(h) \|\nabla h\|^2 + \langle \vec{H}, T \rangle. \end{aligned}$$

■

Em seguida, observe que cada função  $\hat{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{P})$  define uma função  $\bar{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(M)$  do seguinte modo

$$\bar{\psi}(t, x) = \hat{\psi}(x).$$

Por sua vez, podemos associar a  $\hat{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{P})$  uma função  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  definida por  $\psi = \bar{\psi} \circ f$ .

**Proposição 3.2.3.** *Nas condições acima, provaremos que  $\bar{\nabla} \bar{\psi} = \varrho^{-2} \hat{\nabla} \hat{\psi}$ .*

*Demonstração.* Com efeito, de (1.2) obtemos

$$\hat{\nabla} \hat{\psi} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \left[ (g_{22}\hat{\psi}_u - g_{12}\hat{\psi}_v)X_u + (-g_{12}\hat{\psi}_u + g_{12}\hat{\psi}_v)X_v \right] \quad (3.7)$$

e

$$\bar{\nabla} \bar{\psi} = \varrho^{-2} \frac{1}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \left[ (g_{22}\hat{\psi}_u - g_{12}\hat{\psi}_v)X_u + (-g_{12}\hat{\psi}_u + g_{12}\hat{\psi}_v)X_v \right].$$

Combinando a equação anterior com (3.7), encontramos

$$\bar{\nabla}\bar{\psi} = \varrho^{-2}\hat{\nabla}\hat{\psi}.$$

■

**Lema 3.2.1.** *Ao longo de  $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$  temos que*

$$\bar{\Delta}\bar{\psi} = \Delta\psi - 2(\langle \vec{H}, N \rangle + \mathcal{H}(h)\langle N, T \rangle)\langle N^*, \hat{\nabla}\hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}} + \hat{\nabla}^2\hat{\psi}(N^*, N^*), \quad (3.8)$$

onde  $N$  é um campo vetorial (local) regular normal unitário e  $N^* = \pi_{\mathbb{P}^*}(N) = N - \langle N, T \rangle T$ .

*Demonstração.* Como  $\bar{\nabla}\bar{\psi} = \nabla\psi + (\bar{\nabla}\bar{\psi})^{\perp}$ , onde  $(\ )^{\perp}$  denota a componente normal do campo vetorial ao longo de  $f$ , então as Hessianas de  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  estão relacionadas por

$$\begin{aligned} \langle -A_{(\bar{\nabla}\bar{\psi})^{\perp}}X, X \rangle &= \langle \nabla_X(\bar{\nabla}\bar{\psi})^{\perp}, X \rangle = \langle \nabla_X(\bar{\nabla}\bar{\psi} - \nabla\psi), X \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}\bar{\psi}, X \rangle - \langle \nabla_X\nabla\psi, X \rangle \\ &= \bar{\nabla}^2\bar{\psi}(X, X) - \nabla^2\psi(X, X), \end{aligned}$$

i.e,

$$\bar{\nabla}^2\bar{\psi}(X, X) = \nabla^2\psi(X, X) - \langle A_{(\bar{\nabla}\bar{\psi})^{\perp}}X, X \rangle$$

onde  $X \in T\Sigma$ . Portanto, se  $\{E_i\}_{i=1,2}$  é uma base ortonormal, então, ao longo da imersão, temos que

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}\bar{\psi} &= \sum_{i=1}^2 \bar{\nabla}^2\bar{\psi}(E_i, E_i) + \bar{\nabla}^2\bar{\psi}(N, N) \\ &= \nabla^2\psi(E_1, E_1) + \nabla^2\psi(E_2, E_2) - \langle A_{(\bar{\nabla}\bar{\psi})^{\perp}}E_1, E_1 \rangle \\ &\quad - \langle A_{(\bar{\nabla}\bar{\psi})^{\perp}}E_2, E_2 \rangle + \bar{\nabla}^2\bar{\psi}(N, N) \\ &= \Delta\psi - 2\langle \vec{H}, \bar{\nabla}\bar{\psi} \rangle + \bar{\nabla}^2\bar{\psi}(N, N). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pela Proposição 3.2.3,  $\bar{\nabla}\bar{\psi} = \varrho^{-2}\hat{\nabla}\hat{\psi}$ . Além disso, de (3.4) obtemos que

$$\bar{\nabla}_{N^*}\hat{\nabla}\hat{\psi} = \hat{\nabla}_{N^*}\hat{\nabla}\hat{\psi} - \mathcal{H}(h)\langle N^*, \hat{\nabla}\hat{\psi} \rangle T$$

e de (3.3) que  $\bar{\nabla}_T\hat{\nabla}\hat{\psi} = \mathcal{H}\hat{\nabla}\hat{\psi}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_N\bar{\nabla}\bar{\psi} &= \bar{\nabla}_N(\varrho^{-2}\hat{\nabla}\hat{\psi}) = N(\varrho^{-2})\hat{\nabla}\hat{\psi} + \varrho^{-2}\bar{\nabla}_N\hat{\nabla}\hat{\psi} \\ &= (N^* + \langle N, T \rangle T)(\varrho^{-2})\hat{\nabla}\hat{\psi} + \varrho^{-2}\bar{\nabla}_N\hat{\nabla}\hat{\psi} \\ &= [N^*(\varrho^{-2}) + \langle N, T \rangle T(\varrho^{-2})]\hat{\nabla}\hat{\psi} + \varrho^{-2}\bar{\nabla}_N\hat{\nabla}\hat{\psi} \\ &= \langle N, T \rangle T(\varrho^{-2})\hat{\nabla}\hat{\psi} + \varrho^{-2}\bar{\nabla}_N\hat{\nabla}\hat{\psi} \\ &= \langle N, T \rangle T(\varrho^{-2})\hat{\nabla}\hat{\psi} + \varrho^{-2}\bar{\nabla}_{N^* + \langle N, T \rangle T}\hat{\nabla}\hat{\psi} \\ &= \langle N, T \rangle T(\varrho^{-2})\hat{\nabla}\hat{\psi} + \varrho^{-2}\bar{\nabla}_{N^*}\hat{\nabla}\hat{\psi} + \varrho^{-2}\langle N, T \rangle \bar{\nabla}_T\hat{\nabla}\hat{\psi} \\ &= \langle N, T \rangle T(\varrho^{-2})\hat{\nabla}\hat{\psi} + \varrho^{-2}(\hat{\nabla}_{N^*}\hat{\nabla}\hat{\psi} - \mathcal{H}\langle N^*, \hat{\nabla}\hat{\psi} \rangle T) \\ &+ \varrho^{-2}\langle N, T \rangle \bar{\nabla}_T\hat{\nabla}\hat{\psi} \\ &= -2\varrho^{-3}\langle N, T \rangle T(\varrho)\hat{\nabla}\hat{\psi} + \varrho^{-2}\hat{\nabla}_{N^*}\hat{\nabla}\hat{\psi} - \varrho^{-2}\mathcal{H}\langle N^*, \hat{\nabla}\hat{\psi} \rangle T \\ &+ \varrho^{-2}\langle N, T \rangle \bar{\nabla}_T\hat{\nabla}\hat{\psi} \\ &= -2\varrho^{-2}(\varrho'/\varrho)\langle N, T \rangle \hat{\nabla}\hat{\psi} + \varrho^{-2}\hat{\nabla}_{N^*}\hat{\nabla}\hat{\psi} - \mathcal{H}\langle N^*, \hat{\nabla}\hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}}T \\ &+ \varrho^{-2}\langle N, T \rangle \bar{\nabla}_T\hat{\nabla}\hat{\psi} \\ &= -2\varrho^{-2}\mathcal{H}\langle N, T \rangle \hat{\nabla}\hat{\psi} + \varrho^{-2}\hat{\nabla}_{N^*}\hat{\nabla}\hat{\psi} - \mathcal{H}\langle N^*, \hat{\nabla}\hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}}T \\ &+ \varrho^{-2}\mathcal{H}\langle N, T \rangle \hat{\nabla}\hat{\psi} \\ &= \varrho^{-2}\hat{\nabla}_{N^*}\hat{\nabla}\hat{\psi} - \varrho^{-2}\mathcal{H}\langle N, T \rangle \hat{\nabla}\hat{\psi} - \mathcal{H}\langle N^*, \hat{\nabla}\hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}}T \\ &= \varrho^{-2} \left( \hat{\nabla}_{N^*}\hat{\nabla}\hat{\psi} - \mathcal{H}\langle N, T \rangle \hat{\nabla}\hat{\psi} \right) - \mathcal{H}\langle N^*, \hat{\nabla}\hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}}T, \end{aligned}$$

onde  $\varrho = \varrho(h)$  e  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(h)$ , e portanto, tomando o produto interno por  $N$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_N\bar{\nabla}\bar{\psi}, N \rangle &= \varrho^{-2}\langle \hat{\nabla}_{N^*}\hat{\nabla}\hat{\psi} - \mathcal{H}\langle N, T \rangle \hat{\nabla}\hat{\psi}, N \rangle - \mathcal{H}\langle N^*, \hat{\nabla}\hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}}\langle T, N \rangle \\ &= \varrho^{-2}\langle \hat{\nabla}_{N^*}\hat{\nabla}\hat{\psi} - \mathcal{H}\langle N, T \rangle \hat{\nabla}\hat{\psi}, N^* + \langle N, T \rangle T \rangle \\ &- \mathcal{H}\langle N, T \rangle \langle N^*, \hat{\nabla}\hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}} \\ &= \langle \hat{\nabla}_{N^*}\hat{\nabla}\hat{\psi}, N^* \rangle_{\mathbb{P}} - \mathcal{H}\langle N, T \rangle \langle \hat{\nabla}\hat{\psi}, N^* \rangle_{\mathbb{P}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \mathcal{H}\langle N, T \rangle \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}} \\
& = \langle \hat{\nabla}_{N^*} \hat{\nabla} \hat{\psi}, N^* \rangle_{\mathbb{P}} - 2\mathcal{H}\langle N, T \rangle \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\psi}(N, N) = \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}(N^*, N^*) - 2\mathcal{H}\langle N, T \rangle \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}}. \quad (3.10)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{H}, \bar{\nabla} \bar{\psi} \rangle & = \langle HN, \varrho^{-2} \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle \\
& = H \varrho^{-2} \langle N^* + \langle N, T \rangle T, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle \\
& = H \varrho^{-2} \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle,
\end{aligned}$$

mas

$$\langle \vec{H}, N \rangle = \langle HN, N \rangle = H.$$

obtemos, portanto, a seguinte equação

$$\langle \vec{H}, \bar{\nabla} \bar{\psi} \rangle = \langle \vec{H}, N \rangle \varrho^{-2} \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle = \langle \vec{H}, N \rangle \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}}. \quad (3.11)$$

Logo, segue de (3.8) e (3.11) que

$$\bar{\Delta} \bar{\psi} = \Delta \psi - 2 \langle \vec{H}, N \rangle \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}} + \bar{\nabla}^2 \bar{\psi}(N, N).$$

Agora, aplicando (3.10) à equação anterior temos

$$\bar{\Delta} \bar{\psi} = \Delta \psi - 2 \langle \vec{H}, N \rangle \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}} + \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}(N^*, N^*) - 2\mathcal{H}\langle N, T \rangle \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}},$$

i.e,

$$\bar{\Delta} \bar{\psi} = \Delta \psi - 2(\langle \vec{H}, N \rangle + \mathcal{H}\langle N, T \rangle) \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}} + \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}(N^*, N^*).$$

■

**Definição 3.2.1.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma*

aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é subharmônica se

$$\Delta f \geq 0,$$

onde  $\Delta f$  é o operador Laplaciano de  $f$ . Se  $-f$  é subharmônica, então diz-se que  $f$  é superharmônica.

**Definição 3.2.2.** Diz-se que uma variedade Riemanniana  $M$  é parabólica quando não admite uma função subharmônica não constante limitada superiormente.

**Lema 3.2.2.** Seja  $(M, g)$  uma variedade compacta. Então, toda aplicação  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  subharmônica em  $M$  é constante.

*Demonstração.* Sejam  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação diferenciável e  $(M, g)$  uma variedade diferenciável compacta. Então, pelo teorema de divergência temos que

$$\int_M \Delta f d\mu_g = 0.$$

Mas, por hipótese,  $\Delta f \geq 0$ , pois  $f$  é subharmônica. Então, concluímos que  $\Delta f = 0$ .

Por outro lado,

$$\Delta f^2 = 2f\Delta f + 2|\nabla f|^2.$$

Logo

$$\Delta f^2 = |\nabla f|^2 \geq 0.$$

Segue que  $f^2$  é subharmônica. Aplicando o teorema de divergência, obtemos que

$$\int_M \Delta f^2 d\mu_g = \int_M 2|\nabla f|^2 d\mu_g = 0.$$

Temos pela equação anterior que  $\nabla f = 0$  e, portanto,  $f$  é constante. ■

**Lema 3.2.3.** (*Khas'minskii*) Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. Se existir uma função  $g \in C^\infty(M)$  superharmônica fora de um conjunto compacto  $K$  tal que  $g(x) \rightarrow +\infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ , então  $M$  é parabólica.

*Demonstração.* Ver [8], página 168. ■

**Lema 3.2.4.** *Seja  $\hat{\psi} = \log \hat{r}$ , onde  $\hat{r}(q) = d_{\mathbb{P}}(p_0, q)$ . Então*

$$\hat{\Delta} \hat{r} - \hat{r}^{-1} \leq 0.$$

*Demonstração.* Na demonstração deste resultado faremos uso do teorema de comparação do Laplaciano, que nos servirá para comparar o Laplaciano da função distância em  $\mathbb{P}^2$  com o Laplaciano da função distância em  $\mathbb{R}^2$ .

Escrevendo  $r_0 = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} r_0 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{(x_1^2 + x_2^2)} \\ &= \frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} r_0 = \frac{x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}.$$

Assim, o Laplaciano de  $r_0$  é dado por

$$\begin{aligned} \Delta r_0 &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ &= \frac{1}{r_0}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por outro lado, em  $\mathbb{P}^2$  temos que a curvatura seccional é não negativa e, portanto,  $\text{Ric}(\mathbb{P}^2) \geq 0$ . Aplicando o teorema de comparação do Laplaciano e usando (3.12), obtemos que

$$\hat{\Delta}\hat{r} \leq \Delta r_0 = \frac{1}{r_0} = \frac{1}{\hat{r}}.$$

■

### 3.3 Teoremas principais

**Teorema 3.3.1.** *Em um slab de  $\mathbb{R} \times_{\varrho} \mathbb{P}^2$  com fronteira  $\mathbb{P}_{t_1} \cup \mathbb{P}_{t_2}$  não há superfície  $\Sigma^2$  completa propriamente imersa com curvatura média satisfazendo*

$$\sup_{\Sigma} \|\vec{H}\| < \min_{[t_1, t_2]} \mathcal{H}(t). \quad (3.13)$$

*Demonstração.* Com o intuito de demonstrar este teorema, inicialmente provaremos a seguinte afirmação: a superfície Riemanniana  $\Sigma^2$  é parabólica.

Supondo que  $\Sigma^2$  é compacta, então decorre imediatamente do Lema 3.2.2 que  $\Sigma^2$  é parabólica.

Para provar esta afirmação quando  $\Sigma^2$  é não compacta, o lema 3.2.3 nos diz que é suficiente mostrar que existe uma função  $g \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$  que é superharmônica fora de um conjunto compacto e tal que  $g(q) \rightarrow +\infty$  enquanto  $q \rightarrow \infty$ . Aqui  $q \rightarrow \infty$  significa que  $q$  está deixando qualquer subconjunto compacto de  $\Sigma^2$ .

Tomando  $\hat{\psi} = \log \hat{r}$ , onde  $\hat{r}(q) = d_{\mathbb{P}}(p_0, q)$ . Pelo Lema 3.2.4,  $\hat{\psi}$  é superharmônica visto que

$$\hat{\Delta}\hat{\psi} = \hat{r}^{-1}(\hat{\Delta}\hat{r} - \hat{r}^{-1}) \leq 0.$$

De  $\bar{\Delta}\bar{\psi} = \varrho^{-2}\hat{\Delta}\hat{\psi}$  temos que  $\bar{\psi}$  é, também, superharmônica, ou seja,  $\bar{\Delta}\bar{\psi} \leq 0$ .

Então, de (3.8) e possível concluir que

$$\Delta\psi \leq 2(\langle \vec{H}, N \rangle + \mathcal{H}(h)\langle N, T \rangle)\langle N^*, \hat{\nabla}\hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}} - \hat{\nabla}^2\hat{\psi}(N^*, N^*). \quad (3.14)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \|N^*\|_{\mathbb{P}} &= \langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{P}}^{1/2} \\ &= (\varrho^{-2}(h)\langle N^*, N^* \rangle)^{1/2} \\ &= \varrho^{-1}(h)\langle N - \langle N, T \rangle T, N - \langle N, T \rangle T \rangle^{1/2} \\ &= \varrho^{-1}(h)(\langle N, N \rangle - 2\langle N, T \rangle^2 + \langle N, T \rangle^2 \langle T, T \rangle)^{1/2} \\ &= \varrho^{-1}(h)(\langle T, T \rangle - 2\langle N, T \rangle^2 + \langle N, T \rangle^2 \langle N, N \rangle)^{1/2} \\ &= \varrho^{-1}(h)\langle T - \langle N, T \rangle N, T - \langle N, T \rangle N \rangle^{1/2} \\ &= \varrho^{-1}(h)\langle \nabla h, \nabla h \rangle^{1/2} \\ &= \varrho^{-1}(h)\|\nabla h\|, \end{aligned}$$

onde

$$\|\nabla h\|^2 = \langle T, T \rangle - 2\langle N, T \rangle^2 + \langle N, T \rangle^2 \langle N, N \rangle = 1 - \langle T, N \rangle^2 \leq 1.$$

Por hipótese

$$-\infty < \underline{h} := \inf_{\Sigma} h \leq h \leq \bar{h} := \sup_{\Sigma} h < +\infty,$$

de modo que  $\inf_{\Sigma} \varrho(h) = \min_{t \in [\underline{h}, \bar{h}]} \varrho(t) > 0$  e

$$\|N^*\|_{\mathbb{P}} = \frac{\|\nabla h\|}{\varrho(h)} \leq \frac{\|\nabla h\|}{\inf_{\Sigma} \varrho(h)} \leq \frac{1}{\inf_{\Sigma} \varrho(h)}. \quad (3.15)$$

Se  $v, w \in T_q\mathbb{P}$  e  $\hat{r} \geq r_0 > 0$ , então

$$\hat{\nabla}^2\hat{\psi}(v, w) = \langle \hat{\nabla}_v(\hat{\nabla}\hat{\psi}), w \rangle_{\mathbb{P}}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \hat{\nabla}_v(\hat{\nabla}(\log \hat{r})), w \rangle_{\mathbb{P}} \\
&= \langle \hat{\nabla}_v(\hat{r}^{-1}\hat{\nabla}\hat{r}), w \rangle_{\mathbb{P}} \\
&= \langle \hat{r}^{-1}\hat{\nabla}_v(\hat{\nabla}\hat{r}) + v(\hat{r}^{-1})\hat{\nabla}\hat{r}, w \rangle_{\mathbb{P}} \\
&= \hat{r}^{-1}\langle \hat{\nabla}_v(\hat{\nabla}\hat{r}), w \rangle_{\mathbb{P}} - \hat{r}^{-2}\langle \hat{\nabla}\hat{r}, v \rangle_{\mathbb{P}}\langle \hat{\nabla}\hat{r}, w \rangle_{\mathbb{P}} \\
&= \hat{r}^{-1}\hat{\nabla}^2\hat{r}(v, w) - \hat{r}^{-2}\langle \hat{\nabla}\hat{r}, v \rangle_{\mathbb{P}}\langle \hat{\nabla}\hat{r}, w \rangle_{\mathbb{P}}.
\end{aligned}$$

Quando  $v = w = \hat{\nabla}\hat{r}$ , encontramos

$$\hat{\nabla}^2\hat{\psi}(v, v) = \hat{r}^{-1}\hat{\nabla}^2\hat{r}(v, v) - \hat{r}^{-2}\langle \hat{\nabla}\hat{r}, \hat{\nabla}\hat{r} \rangle_{\mathbb{P}}^2 = -\hat{r}^{-2}.$$

Quando  $v = \tau \perp \hat{\nabla}\hat{r}$  de comprimento unitário, tem-se

$$\hat{\nabla}^2\hat{\psi}(\hat{\nabla}\hat{r}, \tau) = \hat{r}^{-1}\hat{\nabla}^2\hat{r}(\hat{\nabla}\hat{r}, \tau) - \hat{r}^{-2}\langle \hat{\nabla}\hat{r}, \hat{\nabla}\hat{r} \rangle_{\mathbb{P}}\langle \hat{\nabla}\hat{r}, \tau \rangle_{\mathbb{P}} = 0$$

e

$$\hat{\nabla}^2\hat{\psi}(\tau, \tau) = \hat{r}^{-1}\hat{\nabla}^2\hat{r}(\tau, \tau) - \hat{r}^{-2}\langle \hat{\nabla}\hat{r}, \tau \rangle_{\mathbb{P}}^2 = \hat{r}^{-1}k_g(q).$$

Assim, para qualquer  $v \in T_q\mathbb{P}$  obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}^2\hat{\psi}(v, v) &= -\hat{r}^{-2}\langle v, \hat{\nabla}\hat{r} \rangle_{\mathbb{P}}^2 + \hat{r}^{-1}k_g(q)\langle v, \tau \rangle_{\mathbb{P}}^2 \\
&\geq -\hat{r}^{-2}\langle v, \hat{\nabla}\hat{r} \rangle_{\mathbb{P}}^2 - c\hat{r}^{-2}\langle v, \tau \rangle_{\mathbb{P}}^2 \\
&\geq -\hat{r}^{-2}\|v\|_{\mathbb{P}}^2\|\hat{\nabla}\hat{r}\|_{\mathbb{P}}^2 - c\hat{r}^{-2}\|v\|_{\mathbb{P}}^2\|\tau\|_{\mathbb{P}}^2 \\
&\geq -C\hat{r}^{-2}\|v\|_{\mathbb{P}}^2
\end{aligned}$$

onde  $C = \max\{1, c\}$ . Em particular, de (3.15) concluimos que

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}^2\hat{\psi}(N^*, N^*) &\geq -Cr^{-2}\|N^*\|_{\mathbb{P}}^2 \\
&\geq \frac{-C\|\nabla h\|^2}{r^2(\inf_{\Sigma} \varrho(h))^2} \\
&\geq \frac{-C}{r^2(\inf_{\Sigma} \varrho(h))^2}, \tag{3.16}
\end{aligned}$$

quando  $r = \hat{r} \circ f$  é maior do que  $r_0$ . Por outro lado, de (3.13) vemos que

$$\begin{aligned}
(\langle \vec{H}, N \rangle + \mathcal{H}\langle N, T \rangle)\langle N^*, \hat{\nabla}\hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}} &= (\|\vec{H}\| + \mathcal{H}(h))\|N^*\|_{\mathbb{P}}\|\hat{\nabla}\hat{\psi}\|_{\mathbb{P}} \\
&= (\|\vec{H}\| + \mathcal{H}(h))\|N^*\|_{\mathbb{P}} \frac{1}{r} \|\hat{\nabla}\hat{r}\|_{\mathbb{P}} \\
&\leq \frac{\sup_{\Sigma} \|\vec{H}\| + \mathcal{H}(h)}{r \inf_{\Sigma} \varrho(h)} \\
&\leq \frac{\inf_{\Sigma} \mathcal{H}(h) + \sup_{\Sigma} \mathcal{H}(h)}{r \inf_{\Sigma} \varrho(h)}, \quad (3.17)
\end{aligned}$$

aqui  $\inf_{\Sigma} \mathcal{H}(h) = \min_{t \in [\underline{h}, \bar{h}]} \mathcal{H}(t) > 0$  e  $\sup_{\Sigma} \mathcal{H}(h) = \max_{t \in [\underline{h}, \bar{h}]} \mathcal{H}(t) < +\infty$ .

Em resumo, concluímos de (3.14) juntamente com (3.16) e (3.17) que

$$\begin{aligned}
\Delta\psi &\leq 2(\langle \vec{H}, N \rangle + \mathcal{H}(h)\langle N, T \rangle)\langle N^*, \hat{\nabla}\hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}} - \hat{\nabla}^2\hat{\psi}(N^*, N^*) \\
&\leq 2 \left( \frac{\inf_{\Sigma} \mathcal{H}(h) + \sup_{\Sigma} \mathcal{H}(h)}{r \inf_{\Sigma} \varrho(h)} \right) + \frac{C}{r^2(\inf_{\Sigma} \varrho(h))^2} \\
&\leq a \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \quad (3.18)
\end{aligned}$$

para certa constante positiva  $a$ , quando  $r$  é maior que  $r_0$ .

Seja  $g \in \mathcal{C}^{\infty}(\Sigma)$  definida por

$$g = \psi - \sigma(h) = \log r - \sigma(h),$$

onde  $r = \hat{r} \circ f$  e  $\sigma(t) = \int^t \varrho(u)du$  satisfaz  $\sigma'(t) = \varrho(t)$ . Temos que os subconjuntos  $K_j = f^{-1}([\underline{h}, \bar{h}] \times \bar{B}(p_0, j))$  são compactos, pois  $f$  é própria. Por isso, como  $\Sigma^2$  é não compacta, então  $r$  satisfaz  $r(q) \rightarrow +\infty$  conforme  $q \rightarrow \infty$ .

Por outro lado, de (3.6) temos que

$$\Delta\sigma(h) = 2\varrho(h)(\mathcal{H}(h) + \langle \vec{H}, T \rangle). \quad (3.19)$$

De (3.13), encontramos

$$\mathcal{H}(h) + \langle \vec{H}, T \rangle \geq \inf_{\Sigma} \mathcal{H}(h) - \sup_{\Sigma} \|\vec{H}\| > 0.$$

Consequentemente,

$$\Delta\sigma(h) \geq 2 \inf_{\Sigma} \varrho(h) \left( \inf_{\Sigma} \mathcal{H}(h) - \sup_{\Sigma} \|\vec{H}\| \right) > 0.$$

Além disso, obtemos de (3.18) que

$$\begin{aligned} \Delta g &= \Delta\psi - \Delta\sigma(h) \\ &\leq a \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - 2 \inf_{\Sigma} \varrho(h) (\inf_{\Sigma} \mathcal{H}(h) - \sup_{\Sigma} \|\vec{H}\|) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

se  $r \geq r_1$  para certo  $r_1 \geq r_0$ . Logo,  $\Sigma^2$  é parabólica.

Uma vez que  $\Sigma^2$  é parabólica, é suficiente observar que  $\Delta\sigma(h) > 0$  e que  $\sigma(h) \leq \sup_{\Sigma} \sigma(h) = \sigma(\bar{h})$ . Isto implica que  $\sigma(h)$  deve ser constante e, portanto,  $\Delta\sigma(h) = 0$ , o que não é possível. Concluimos assim a demonstração do Teorema 3.3.1. ■

**Teorema 3.3.2.** *Se  $f : \Sigma^2 \rightarrow M^3 = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{P}^2$  é uma superfície completa propriamente imersa com curvatura média constante  $\|\vec{H}\| \leq 1$  contida em um slab, então  $f(\Sigma)$  é a folha  $\mathbb{P}_t$ .*

*Demonstração.* Em virtude do Teorema 3.3.1, é suficiente estudar o caso em que  $\|\vec{H}\| = 1$ . Procedendo como na demonstração anterior, primeiro provaremos que  $\Sigma^2$  é parabólica. Isto é claro se  $\Sigma^2$  é compacta. Suponha então que  $\Sigma^2$  é não compacta, tem-se, neste caso, que  $\mathcal{H}(t) = 1$  e, portanto, (3.14) reduz-se em

$$\Delta\psi \leq 2(1 + \langle N, T \rangle) \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}} - \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}(N^*, N^*) \quad (3.20)$$

onde  $N = \vec{H}$  é um campo global de vetores normais e unitários ao longo da

imersão. Assim,  $1 + \langle N, T \rangle \geq 0$  e utilizando (3.15) vem que

$$\begin{aligned}
(1 + \langle N, T \rangle) \langle N^*, \hat{\nabla} \hat{\psi} \rangle_{\mathbb{P}} &\leq (1 + \langle N, T \rangle) \|N^*\|_{\mathbb{P}} \|\hat{\nabla} \hat{\psi}\|_{\mathbb{P}} \\
&\leq (1 + \langle N, T \rangle) \|N^*\|_{\mathbb{P}} \|r^{-1} \hat{\nabla} \hat{r}\|_{\mathbb{P}} \\
&\leq (1 + \langle N, T \rangle) \frac{\|\nabla h\|}{\inf_{\Sigma} \varrho(h)} \frac{1}{r} \|\hat{\nabla} \hat{r}\|_{\mathbb{P}} \\
&\leq (1 + \langle N, T \rangle) \frac{\|\nabla h\|}{r \inf_{\Sigma} \varrho(h)}.
\end{aligned}$$

Usando isso em (3.20) concluimos que

$$\Delta \psi \leq 2(1 + \langle N, T \rangle) \frac{\|\nabla h\|}{r \inf_{\Sigma} \varrho(h)} - \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}(N^*, N^*).$$

O resultado obtido em (3.16) nos permite escrever a equação anterior como se segue

$$\begin{aligned}
\Delta \psi &\leq 2(1 + \langle N, T \rangle) \frac{\|\nabla h\|}{r \inf_{\Sigma} \varrho(h)} + \frac{C \|\nabla h\|^2}{r^2 (\inf_{\Sigma} \varrho(h))} \\
&= (1 + \langle N, T \rangle) \left( \frac{2 \|\nabla h\|}{r \inf_{\Sigma} \varrho(h)} + \frac{C(1 - \langle N, T \rangle)}{r^2 (\inf_{\Sigma} \varrho(h))^2} \right) \\
&\leq a(1 + \langle N, T \rangle) \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \tag{3.21}
\end{aligned}$$

para certa constante positiva  $a$ , quando  $r$  é maior que  $r_0$ . Por outro lado, neste caso  $\sigma(h) = \int^h e^u du = e^h$  e (3.19) torna-se

$$\Delta e^h = 2(1 + \langle N, T \rangle) e^h \geq 2(1 + \langle N, T \rangle) e^h \geq 0. \tag{3.22}$$

Consequentemente, obtemos de (3.21) que

$$\begin{aligned}
\Delta g &= \Delta \psi - \Delta \sigma(h) \\
&= \Delta \psi - \Delta e^h \\
&\leq (1 + \langle N, T \rangle) \left( \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} - 2e^h \right) \leq 0
\end{aligned}$$

se  $r > r_1$  para certo  $r_1 \geq r_0$ . Assim, raciocinando como na prova do teorema 3.3.1 vemos que  $\Sigma^2$  é parabólica.

Para concluir a prova, temos de (3.22) que  $\Delta e^h \geq 0$ . Como  $e^h \leq e^{\bar{h}}$  obtemos da parabolicidade de  $\Sigma^2$  que  $e^h$  e, portanto,  $h$  devem ser constantes.

■

## Referências Bibliográficas

- [1] ALEXANDROV, A. D. *A characterization property of spheres*, Ann. Mat. Pura Appl. **58** (1962), 303-315.
- [2] ALÍAS, L. J. & DAJCZER, M. *Uniqueness of constant mean curvature surfaces properly immersed in a slab*, Comment. Math. Helvetici **81** (2006), 653-663.
- [3] ALÍAS, L. J. & DAJCZER, M. *Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces*, Proc. Edin. Math. Soc. **50** (2007), 511-526.
- [4] DO CARMO, M. P. & LAWSON, B. *The Alexandrov-Bernstein theorems in hyperbolic space*, Duke Math. J. **50** (1983), 995-1003.
- [5] DO CARMO, M. P. *Riemannian geometry*, Boston: Birkhäuser, 1992.
- [6] FREIRE, R. *Hypersurfaces with Constant Mean Curvature and Bounded Scalar Curvature in Euclidean and Hyperbolic Space*. Rio de Janeiro: IMPA, 2000. Tese (Doutorado).
- [7] GOMES, J. *Sobre hipersuperfícies com curvatura média constante no espaço hiperbólico*. Rio de Janeiro: IMPA, 1984. Tese (Doutorado).
- [8] GRIGOR'YAN, A. *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36** (1999), 135-249.
- [9] LI, A.; SIMON, U.; ZHAO, G. *Global affine differential geometry of hypersurfaces*, Berlin, New York: De Gruyter, 1993.
- [10] MONTIEL, S. *Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 711-748.

- [11] TASHIRO, Y. *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*,  
Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 251-275.

# Índice Remissivo

- Aplicação exponencial, 34
- Atlas, 14
- Campo
  - de vetores, 15
  - diferenciável, 15
  - paralelo, 20
- Colchete, 16
- Conexão
  - Riemanniana, 18
- Curvatura
  - de  $S^n$ , 23
  - de Ricci, 23
  - Gaussiana, 32
  - geodésica, 33
  - média, 31
  - seccional, 23
  - tensor, 21
- Derivada
  - covariante, 20
- Divergência, 24
- Esfera hiperbólicas, 36
- Espaço
  - hiperbólico, 35
  - pseudo-hiperbólico, 52
  - tangente, 14
- Estrutura diferenciável, 14
- Fibrado tangente, 15
- Função
  - subharmônica, 61
  - superharmônica, 61
- Geodésica, 32
- Gradiente, 24
- Hessiana, 25
- Hiperesferas, 36
- Hipersuperfície, 31
- Horo esfera, 36
- Identidade
  - de Bianchi, 22
  - de Jacobi, 16
- Imersão, 15
  - geodésica, 31
  - isométrica, 18
  - mínima, 31
- Isometria, 18
- Laplaciano, 25
- Métrica
  - induzida, 18
  - Riemanniana, 17

Mergulho, 15

Operador de Weingarten, 30

Orientação, 15

Parametrização, 14

Produto warped, 39

Referencial, 20

- geodésico, 21
- ortonormal, 21

Símbolos de Christoffel, 19

Segunda forma fundamental, 30

Slab, 52

Superfície parabólica, 61

Teorema

- de comparação do Laplaciano, 37
- de Gauss, 30

Transporte paralelo, 20

Variedade

- compacta, 14
- diferenciável, 13
- orientável, 15
- produto, 17
- Riemanniana, 17

Vetor

- curvatura média, 31
- tangente, 14

Vizinhança coordenada, 14