



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Hipersuperfícies em \mathbb{R}^{p+q+2} de Curvatura Escalar Nula Invariantes por $O(p+1) \times O(q+1)$

Rodrigo Fernandes de Moura Melo

Maceió, Brasil
18 de Dezembro de 2009

RODRIGO FERNANDES DE MOURA MELO

Hipersuperfícies em \mathbb{R}^{p+q+2} de Curvatura Escalar
Nula Invariantes por $O(p+1) \times O(q+1)$

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 18 de Dezembro de 2009 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Enrique Echaiz Espinoza.

Maceió
2009

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

M528h Melo, Rodrigo Fernandes de Moura.
 Hipersuperfícies em \mathbb{R}^{p+q+2} de curvatura escalar nula invariantes por $O(p+1) \times O(q+1)$ / Rodrigo Fernandes de Moura Melo, 2009.
 68 f. : il.

 Orientador: Fernando Enrique Echaiz Espinoza.
 Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
 Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

 Bibliografia: f. 63.
 Apêndices: f. 64-66.
 Índices: f. 67-68.

 1. Cone. 2. Curvatura escalar. 3. Curva geratriz. 4. Lie, Álgebra de. 5. Hipersuperfícies. I. Título.

CDU: 512.81

RODRIGO FERNANDES DE MOURA MELO

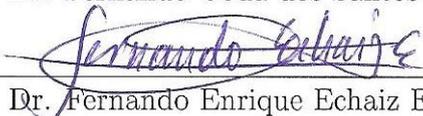
Hipersuperfícies em \mathbb{R}^{p+q+2} de Curvatura Escalar
Nula Invariantes por $O(p+1) \times O(q+1)$

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 18 de Dezembro de 2009 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

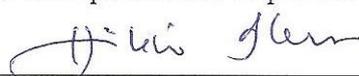
Banca examinadora:



Prof. Dr. Fernando Codá dos Santos Cavalcanti Marques (IMPA)



Prof. Dr. Fernando Enrique Echaiz Espinoza (UFAL/Orientador)



Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva (UFAL)

À minha mãe
Rute Fernandes

Agradecimentos

Ao meu orientador, professor Echaiz, uma pessoa que conquistou minha admiração ao compartilhar comigo ricas experiências de sua vida acadêmica de uma maneira gentil e solidária, como se fala a um amigo.

Ao professor José Carlos Almeida que, com seu jeito carismático, sempre cativa seus alunos e os deixa à vontade para tirar dúvidas durante as aulas ou puxar uma conversa fora delas.

Ao professor Krerley Oliveira que, através do seu estilo rígido e sério nas aulas, me motivou a estudar com entusiasmo e a adquirir uma postura mais profissional na maneira de lidar com os professores que encontrarei no futuro.

Ao professor Marcos Petrucio; a maneira clara e objetiva com que ele ministra suas aulas e exposições é um exemplo que buscarei seguir quando um dia me tornar professor.

Ao professor Enoch Apaza, por sua dedicação durante as aulas e pelo tempo e boa vontade que sempre teve em tirar minhas dúvidas.

Ao professor Hilário Alencar, pelos três anos em que foi meu orientador durante a graduação e cujos conselhos dados a mim durante aquele período foram importantes para que eu chegasse onde estou hoje.

Ao professor Adán Corcho, que sempre carrega consigo uma enorme paixão pela matemática e em suas aulas transforma esta paixão em entusiasmo que aumenta no decorrer de cada aula, junto com seu sotaque.

Ao colega Arlyson Alves, primeiro orientando do professor Echaiz, por ter me dado valiosos conselhos sobre o processo de elaboração da dissertação e por ter oferecido diversos livros para me auxiliar.

Aos meus colegas Isadora Maria de Jesus, Ana Maria Menezes e Gregório Manoel da Silva; quem já teve a oportunidade de conversar com algum deles sabe que, além de pessoas divertidas, são exemplos de estudantes competentes.

Aos meus colegas Isnaldo Isaac Barbosa e Kennerson Nascimento que sempre estavam dispostos a pensar comigo logo que uma dúvida se apresentava.

Agradeço aos demais colegas do mestrado que mantiveram o clima de harmonia e amizade ao longo desses dois anos: Adalgisa Mota, Alexsandro Néó, Fábio Henrique de Carvalho e Robério Batista.

À minha amiga Adina Rocha dos Santos que, com seu jeito tímido, vem trilhando de maneira louvável, sua carreira acadêmica.

À minha amiga Natália Rocha Pinheiro que com sua energia e seu sotaque multinordestino contagia todos ao seu redor.

À minha amiga Viviane de Oliveira Santos por ter me dado um exemplo de com-

petência e garra ao superar todos os obstáculos que se fizeram presentes em vários momentos nestes dois anos de sua vida.

À minha amada, Anamália Ferreira da Silva, que ao longo destes dois anos me deu várias provas de amor estando sempre ao meu lado, mesmo nas vezes em que me fiz ausente em nossa relação.

Aos meus pais Rute Fernandes de Moura Melo e Severino de Souza Melo, por todo o apoio nestes dois anos; assim como nos outros vinte e três de minha vida.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas pelo suporte financeiro ao longo de todo o Mestrado.

Resumo

Esta dissertação está baseada no artigo de Jocelino Sato e Vicente de Souza Neto intitulado *Complete and Stable $O(p+1) \times O(q+1)$ -Invariant Hypersurfaces with Zero Scalar Curvature in Euclidean Space \mathbb{R}^{p+q+2}* , publicado na revista *Annals of Global Analysis and Geometry*, volume 29, em 2006. O principal resultado desta dissertação é o *Teorema de Classificação*, que afirma o seguinte:

Uma hipersuperfície M^{p+q+1} que é invariante pela ação do grupo $O(p+1) \times O(q+1)$, $p, q > 1$, com curvatura escalar identicamente nula deve pertencer a uma das seguintes classes:

- (1) Cones com uma singularidade na origem de \mathbb{R}^{p+q+2} ;*
- (2) Hipersuperfícies possuindo uma órbita de singularidades e assintotando ambos os cones C_α e C_β ;*
- (3) Hipersuperfícies regulares que assintotam o cone C_α ;*
- (4) Hipersuperfícies regulares que assintotam o cone C_β ;*
- (5) Hipersuperfícies regulares que assintotam ambos os cones C_α e C_β .*

A demonstração do teorema requer um estudo de uma equação diferencial ordinária envolvendo as coordenadas das curvas, no plano, que geram estas hipersuperfícies. Esta equação diferencial, por sua vez, está associada a um campo de vetores $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ no plano. O estudo do retrato de fase deste campo é fundamental. Através dele, foi possível traduzir o comportamento das trajetórias de X em informações com respeito às curvas geratrizes e desta maneira obter o teorema.

Palavras Chave: Cone; Curvatura escalar; Curva geratriz; Grupo de Lie; Hipersuperfície.

Abstract

This dissertation has as base Jocelino Sato and Vicente de Souza Neto's paper called *Complete and Stable $O(p + 1) \times O(q + 1)$ -Invariant Hypersurfaces with Zero Scalar Curvature in Euclidean Space \mathbb{R}^{p+q+2}* , published on the *Annals of Global Analysis and Geometry* - 29 in 2006. The main result of this dissertation is the *Classification Theorem*, which states:

The $O(p + 1) \times O(q + 1)$ -Invariant Hypersurfaces in \mathbb{R}^{p+q+2} , $p, q > 1$, with zero scalar curvature belong to one of the following classes:

- (1) Cones with a singularity at the origin of \mathbb{R}^{p+q+2} ;*
- (2) Hypersurfaces having one orbit of singularity and asymptoting both of the cones C_α and C_β ;*
- (3) Regular hypersurfaces asymptoting the cone C_α ;*
- (4) Regular hypersurfaces asymptoting the cone C_β ;*
- (5) Regular hypersurfaces asymptoting both of the cones C_α and C_β .*

It was reached by the studies of the ordinary differential equation on \mathbb{R}^2 , involving the coordinate curves that generate these hypersurfaces. Such differential equation, in its turn, is associated with a vector field $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on the plan. The study of the orbits space in this field is essential; after all, because of it, it was possible to translate the X orbits' behavior into information concerning the profile curves and, finally, reach the theorem.

Key Words: Cone; Hypersurface; Lie group; Profile curve; Scalar curvature.

Sumário

1	Resultados Preliminares	8
1.1	Varieties diferenciáveis e campos de vetores	8
1.2	Métricas Riemannianas	11
1.3	Curvatura	13
1.4	Curvatura de Ricci e curvatura escalar	14
1.5	Operadores diferenciais sobre variedades Riemannianas	15
1.5.1	Gradiente	15
1.5.2	Divergência	16
1.5.3	O operador de Laplace	17
1.5.4	Hessiano	18
1.6	A segunda forma fundamental	19
1.7	Grupos de Lie	21
1.7.1	Subgrupos de Lie	22
1.7.2	Grupos de Lie locais	23
1.7.3	Transformação local de grupos	23
1.8	Órbitas	24
1.9	Equações Diferenciais Ordinárias	25
1.9.1	Fluxo e singularidade	27
1.9.2	Retrato de fase	33
1.9.3	Fluxo tubular	34
1.9.4	Conjuntos invariantes	36
2	Resultados Principais	39
2.1	Hipersuperfícies de curvatura escalar nula invariantes por $O(p+1) \times O(q+1)$	39
2.2	Análise do campo vetorial associado	41
2.3	Classificação das hipersuperfícies invariantes	55
	Referências Bibliográficas	63
A	Coordenadas polares em \mathbb{R}^n	64

Introdução

Em 2000, o matemático Oscar Palmas publicou o artigo de nome $O(2) \times O(2)$ -invariant hypersurfaces with zero scalar curvature pela revista *Archiv der Mathematik* - 74. Neste artigo o autor estudou o comportamento das curvas geratrizes para classificar as hipersuperfícies em \mathbb{R}^4 com curvatura escalar nula que são invariantes pela ação do grupo das isometrias $O(2) \times O(2)$. Dois anos mais tarde, Jocelino Sato obteve uma generalização deste resultado em seu artigo *Stability of $O(p+1) \times O(p+1)$ -Invariant Hypersurfaces with Zero Scalar Curvature in Euclidean Space* publicado na revista *Annals of Global Analysis and Geometry* - 22.

O presente trabalho é baseado em um artigo mais recente de Jocelino Sato e Vicente Francisco de Souza Neto publicado na revista *Annals of Global Analysis and Geometry* - 29 em 2006, intitulado *Complete and Stable $O(p+1) \times O(q+1)$ -Invariant Hypersurfaces with Zero Scalar Curvature in Euclidean Space \mathbb{R}^{p+q+2}* . Neste artigo, Jocelino e Vicente generalizaram o *teorema de classificação* dos artigos de Palmas e do próprio Sato com o seguinte teorema:

Teorema de Classificação. *Uma hipersuperfície M^{p+q+1} , invariante pela ação do grupo $O(p+1) \times O(q+1)$, $p, q > 1$, com curvatura escalar identicamente nula pertence a uma das seguintes classes:*

- (1) *Cones com uma singularidade na origem de \mathbb{R}^{p+q+2} ;*
- (2) *Hipersuperfícies possuindo uma órbita de singularidades e assintotando ambos os cones C_α e C_β ;*
- (3) *Hipersuperfícies regulares que assintotam o cone C_α ;*
- (4) *Hipersuperfícies regulares que assintotam o cone C_β ;*
- (5) *Hipersuperfícies regulares que assintotam ambos os cones C_α e C_β .*

Nossa dissertação tem por objetivo demonstrar este teorema, o que de fato foi feito ao final do capítulo 2. Aliás, foi na construção deste capítulo onde utilizamos de maneira indispensável o artigo de Sato e Vicente.

Reservamos o capítulo 1 aos assuntos básicos, necessários ao entendimento dos conceitos abordados no capítulo 2. Obviamente, para falarmos de conceitos como hipersuperfícies e curvatura escalar é necessária uma introdução a variedades diferenciáveis, por

isso fizemos uma breve introdução à geometria Riemanniana nas sete primeiras seções do capítulo 1; essencialmente, utilizamos [3] para a construção destas seções.

Também é clara, a partir do próprio tema de nossa dissertação, a necessidade de conhecermos os grupos de Lie e a ação destes grupos em variedades; fizemos uma introdução destes assuntos nas seções 1.7 e 1.8.

Veremos no capítulo 2 que toda hipersuperfície invariante por $O(p+1) \times O(q+1)$ está associada a uma curva geratriz $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Quando impomos a uma tal hipersuperfície a condição de que ela também tenha curvatura escalar nula, recaímos numa equação diferencial ordinária envolvendo as funções coordenadas de sua curva geratriz. Logo, fica clara a necessidade do estudo das equações diferenciais ordinárias, feito na seção 1.9.

Na verdade, a seção 1.9 se revela a mais importante do capítulo 1 pois boa parte do capítulo 2 é dedicada ao estudo do comportamento do campo associado à equação diferencial mencionada acima. Contudo, não nos aprofundamos muito nas teorias apresentadas nesta seção, assim como no restante do capítulo 1; o propósito principal deste capítulo é fornecer o conhecimento necessário e avançarmos para o capítulo 2, onde fizemos um estudo mais profundo dos assuntos abordados nele.

Incluimos ainda um apêndice onde obtemos a expressão geral para as coordenadas polares em \mathbb{R}^n .

É importante ressaltar que os três artigos citados aqui não são os únicos trabalhos nesta área, uma série de outros artigos estão relacionados a estes. Hilário Alencar, por exemplo, fez o estudo das curvas geratrizes para classificar as hipersuperfícies mínimas invariantes por $SO(m) \times SO(m)$ em [1]. Além deste, Takashi Okayasu classificou em [7] as hipersuperfícies de curvatura escalar negativa e invariantes por $O(2) \times O(2)$. Outros trabalhos podem ser encontrados na bibliografia de [8].

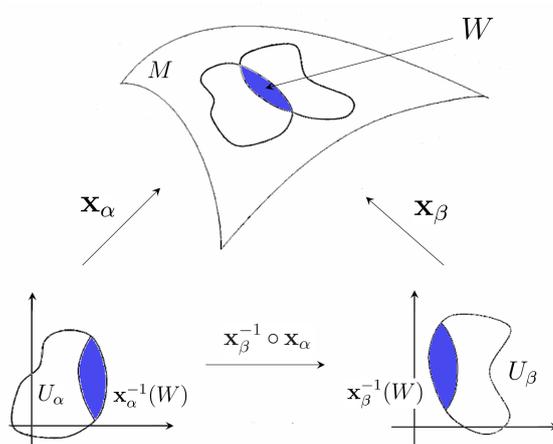
Capítulo 1

Resultados Preliminares

1.1 Variedades diferenciáveis e campos de vetores

Definição 1.1.1 Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações injetivas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, de abertos U_α de \mathbb{R}^n , tais que:

- (i) $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$;
- (ii) Para todo par de índices α, β , tais que $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ são abertos de \mathbb{R}^n e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha : \mathbf{x}_\alpha^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são diferenciáveis;
- (iii) A família $\{(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ é maximal com esta propriedade.



Ao par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$, com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$, denominamos *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) de M em p ; neste caso, $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *vizinhança coordenada* em p . Uma família $\{(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ satisfazendo (i) e (ii) recebe o nome de *estrutura diferenciável* em M .

Observemos que uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz de uma maneira natural uma topologia em M . De fato, basta definir que $A \subset M$ é *aberto* de M

se $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de \mathbb{R}^n para todo α . A topologia assim definida torna todos os $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ abertos e as aplicações \mathbf{x}_α homeomorfismos. Além disto, a topologia induzida desta maneira é metrizável como pode ser visto em [3].

Definição 1.1.2 *Sejam M^m e N^n duas variedades diferenciáveis de dimensão m e n . Uma aplicação $\varphi : M \rightarrow N$ é diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ em p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ e a aplicação*

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$. Dizemos que φ é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

A aplicação $\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}$ é chamada a *expressão* de φ nas parametrizações \mathbf{x} e \mathbf{y} . Dizemos que φ é um *difeomorfismo* se a expressão de φ em alguma parametrização for um difeomorfismo.

Definição 1.1.3 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M . Sejam $\alpha(0) = p \in M$ e $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis de M em \mathbb{R} . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função*

$$\begin{aligned} \alpha'(0) : \mathcal{D}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$.

O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p é chamado de *espaço tangente a M em p* e será denotado por $T_p M$. O conjunto $TM = \{(p, v); p \in M \text{ e } v \in T_p M\}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2m$, denominada *fibrado tangente*.

Definição 1.1.4 *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ for injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, φ for um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N , dizemos que φ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \rightarrow N$ é um mergulho, dizemos que M é uma subvariedade de N .*

Observe que se $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$; a diferença $n - m$ é chamada a *codimensão da imersão φ* .

Definição 1.1.5 *Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}_\alpha$ tal que, para todo par α, β com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ tem determinante positivo. Caso contrário, M é dita não-orientável.*

Se M é orientável, a escolha de uma parametrização satisfazendo a definição acima é chamada de *orientação* de M e, neste caso, dizemos que M está *orientada*.

Definição 1.1.6 Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_p M$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM . O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.

Se considerarmos uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, podemos escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

onde cada $a_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_p$ é a base de $T_p M$ associada à parametrização \mathbf{x} . Demonstra-se que X é diferenciável se, e somente se, as funções a_i são diferenciáveis para alguma (e portanto, para qualquer) parametrização.

Às vezes é conveniente pensar em um campo diferenciável de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$, definida por

$$Xf = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

A interpretação de X como um operador em $\mathcal{D}(M)$ permite-nos considerar os iterados de X . Por exemplo, se X e Y são campos diferenciáveis em M e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. De modo geral, tais operações não conduzem a campos vetoriais por envolverem derivadas de ordem superior à primeira. Entretanto, se denotarmos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos (diferenciáveis) de vetores em M , podemos verificar que a aplicação

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] = XY - YX, \end{aligned}$$

define um campo de vetores chamado *colchete* de X e Y . A aplicação colchete possui as propriedades seguintes, cujas demonstrações encontram-se em [3].

Proposição 1.1.1 Se X, Y e Z são campos de vetores em M , a, b são números reais e f, g são funções diferenciáveis, então:

- (a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anti-comutatividade*);
- (b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (*linearidade*);
- (c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*);
- (d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.

1.2 Métricas Riemannianas

Definição 1.2.1 Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente T_pM , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(e_i)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M , a função $\langle X, Y \rangle$ é diferenciável em V .

Definição 1.2.2 Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado uma isometria se

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$$

para todos $p \in M, u, v \in T_pM$.

Definição 1.2.3 Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma isometria local em p se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo que satisfaz ao produto interno da definição anterior.

A definição acima introduz uma relação de equivalência entre duas variedades Riemannianas. Duas variedades isométricas são indistinguíveis do ponto de vista métrico, isto é, medidas provenientes do produto interno tais como ângulo, área, volume, comprimento e curvatura, são preservadas através da isometria $f : M \rightarrow N$.

Exemplo 1.2.1 (Variedades Imersas) Seja $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ uma imersão. Se N possui uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, $u, v \in T_pM$. A métrica de M é chamada então a *métrica induzida* por f , e f é dita uma *imersão isométrica*.

Definição 1.2.4 Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Dizemos que V é diferenciável se para toda função diferenciável f em M , a função $t \mapsto V(t)f$ é uma função diferenciável em I .

O campo vetorial $dc \left(\frac{d}{dt} \right)$, identificado por $\frac{dc}{dt}$, é chamado *campo velocidade* (ou tangente) de c .

A restrição de uma curva c a um intervalo fechado $[a, b] \subset I$ chama-se um *segmento*. Se M é uma variedade Riemanniana, definimos o *comprimento* de um segmento por

$$\ell_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt.$$

Definição 1.2.5 Uma conexão Riemanniana ∇ em uma variedade diferenciável M , é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
- (ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
- (iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$;
- (iv) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (simetria);
- (v) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$.

Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 1.2.1 Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a cada campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que:

- (a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;
- (b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde f é uma função diferenciável em I ;
- (c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Um campo de vetores V é dito *paralelo* quando $\frac{DV}{dt} = 0$.

Um conjunto $\{E_1, \dots, E_n\}$ é dito um *referencial* para M se, para cada $p \in M$, o conjunto $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ for uma base de $T_p M$. Isto implica que todo campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser escrito da forma

$$X = \sum_{i=1}^n x_i E_i,$$

onde as funções x_i são diferenciáveis. Um referencial é dito *ortonormal* se $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ for uma base ortonormal de $T_p M$ para cada $p \in M$. Dizemos que um referencial é *geodésico* em $p \in M$ se $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

1.3 Curvatura

Definição 1.3.1 A curvatura R de uma variedade Riemanniana M , é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Proposição 1.3.1 A curvatura R de uma variedade Riemanniana M goza das seguintes propriedades:

(i) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$\begin{aligned} R(fX + gY, Z) &= fR(X, Z) + gR(Y, Z), \\ R(X, fZ + gW) &= fR(X, Z) + gR(X, W), \end{aligned}$$

com $f, g \in \mathcal{D}(M)$, $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$;

(ii) Para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear, ou seja,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W, \\ R(X, Y)(fZ) &= fR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

com $f \in \mathcal{D}(M)$ e $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$;

(iii) (Primeira Identidade de Bianchi) Para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vale

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Corolário 1.3.1 Valem as seguintes propriedades:

(a) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle = 0$;

(b) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(Y, X)Z, T \rangle$;

(c) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(X, Y)T, Z \rangle$;

(d) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(Z, T)X, Y \rangle$.

Proposição 1.3.2 Seja σ um espaço bidimensional do espaço tangente $T_p M$ e $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 1.3.2 Dados um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real $K(x, y) = K(p, \sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado curvatura seccional de σ em p .

Proposição 1.3.3 Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M . Defina uma aplicação trilinear $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \rightarrow T_pM$ por

$$\langle R'(X, Y)W, Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente se, $R = K_0 R'$, onde R é a curvatura de M .

1.4 Curvatura de Ricci e curvatura escalar

Definição 1.4.1 Seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM . Tomemos uma base ortonormal $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x e consideremos as seguintes médias:

$$(i) \text{ Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$(ii) K(p) = \frac{1}{n} \sum_j \text{Ric}_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

A média dada por (i) é chamada curvatura de Ricci e a expressão dada por (ii) é a curvatura escalar ou curvatura média.

A proposição seguinte garante que a definição acima faz sentido.

Proposição 1.4.1 $\text{Ric}_p(x)$ e $K(p)$ não dependem da escolha da base ortonormal.

Demonstração. Seja $Q : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ a forma bilinear dada por

$$Q(x, y) = \text{traço da aplicação } z \mapsto R(x, z)y.$$

Escolhendo $x \in T_pM$ unitário, uma base ortonormal $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = x\}$ para T_pM e utilizando o item (d) do corolário 1.3.1, temos

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \sum_i \langle R(x, z_i)y, z_i \rangle \\ &= \sum_i \langle R(y, z_i)x, z_i \rangle \\ &= Q(y, x), \end{aligned}$$

isto é, Q é simétrica, donde $(n-1)\text{Ric}_p(x) = Q(x, x)$ não depende da base ortonormal.

Por outro lado, à forma bilinear Q em T_pM corresponde uma aplicação linear auto-adjunta K , dada por

$$\langle K(x), y \rangle = Q(x, y).$$

Tomando uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_n\}$, temos

$$\begin{aligned} \text{Traço de } K &= \sum_j \langle K(z_j), z_j \rangle = \sum_j Q(z_j, z_j) \\ &= (n-1) \sum_j Ric_p(z_j) = n(n-1)K(p). \end{aligned}$$

Isso mostra que $K(p)$ também não depende da base ortonormal. \square

Definição 1.4.2 A forma bilinear $\frac{1}{n-1}Q$ é chamada o tensor de Ricci.

1.5 Operadores diferenciais sobre variedades Riemannianas

Nesta seção definimos quatro operadores importantes sobre variedades diferenciáveis: o gradiente, a divergência, o operador de Laplace e o hessiano. Além das definições, apresentamos as demonstrações das propriedades que serão úteis no trabalho.

1.5.1 Gradiente

Definição 1.5.1 Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. O gradiente de f , denotado por $\text{grad } f$, é o campo vetorial em M que satisfaz a seguinte condição:

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = X(f) = df(X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Não é difícil ver que um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ que satisfaça a condição acima coincide com o $\text{grad } f$, isto é, o campo gradiente é único. Também segue da definição que

(i) $\text{grad } (f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(M)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } (f + g), X \rangle &= X(f + g) \\ &= X(f) + X(g) \\ &= \langle \text{grad } f, X \rangle + \langle \text{grad } g, X \rangle \\ &= \langle \text{grad } f + \text{grad } g, X \rangle. \end{aligned}$$

(ii) $\text{grad } (fg) = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(M)$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } (fg), X \rangle &= X(fg) \\ &= f X(g) + g X(f) \\ &= f \langle \text{grad } g, X \rangle + g \langle \text{grad } f, X \rangle \\ &= \langle f \text{ grad } g, X \rangle + \langle g \text{ grad } f, X \rangle \\ &= \langle f \text{ grad } g + g \text{ grad } f, X \rangle. \end{aligned}$$

Proposição 1.5.1 *Se $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local em M , então*

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i.$$

Demonstração. Escrevendo $\text{grad } f = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i$, temos que

$$E_j(f) = \langle \text{grad } f, E_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i, E_j \right\rangle = \alpha_j.$$

Logo,

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i.$$

□

1.5.2 Divergência

Definição 1.5.2 *Seja M uma variedade Riemanniana munida da conexão ∇ . A divergência de $X \in \mathfrak{X}(M)$ é a aplicação dada por*

$$\begin{aligned} \text{div} : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ X &\longmapsto (\text{div } X)_{(p)} := \text{traço}(Y \longmapsto \nabla_Y X), \end{aligned}$$

onde $Y \in T_p M$.

Sejam $X, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathcal{D}(M)$. Decorre da definição que

(i) $\text{div}(X + Z) = \text{div}(X) + \text{div}(Z)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \text{div}(X + Z) &= \text{traço}(Y \longmapsto \nabla_Y(X + Z)) \\ &= \text{traço}(Y \longmapsto \nabla_Y X + \nabla_Y Z) \\ &= \text{traço}(Y \longmapsto \nabla_Y X) + \text{traço}(Y \longmapsto \nabla_Y Z) \\ &= \text{div}(X) + \text{div}(Z). \end{aligned}$$

(ii) $\text{div}(fX) = f \text{div}(X) + \langle \text{grad } f, X \rangle$. De fato,

$$\begin{aligned} \text{div}(fX) &= \text{traço}(Y \longmapsto \nabla_Y(fX)) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle E_i, \nabla_{E_i}(fX) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle E_i, f \nabla_{E_i} X + E_i(f) X \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \langle E_i, f \nabla_{E_i} X \rangle + \sum_{i=1}^n \langle E_i, E_i(f) X \rangle \\
&= f \sum_{i=1}^n \langle E_i, \nabla_{E_i} X \rangle + \sum_{i=1}^n \langle E_i(f) E_i, X \rangle \\
&= f[\text{traço}(Y \mapsto \nabla_Y X)] + \left\langle \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i, X \right\rangle \\
&= f \operatorname{div}(X) + \langle \operatorname{grad} f, X \rangle.
\end{aligned}$$

Proposição 1.5.2 *Se $X = \sum_{i=1}^n X_i E_i$, onde $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local em M , então*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n (E_i(X_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle).$$

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} (\sum_{j=1}^n X_j E_j), E_i \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle E_i(X_j) E_j, E_i \rangle + \sum_{i,j=1}^n X_j \langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle.
\end{aligned}$$

Segue da ortonormalidade de $\{E_1, \dots, E_n\}$ e do item (v) da definição de conexão Riemanniana que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n E_i(X_i) - \sum_{i,j=1}^n X_j \langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n E_i(X_i) - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} E_i, \sum_{j=1}^n X_j E_j \rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n (E_i(X_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle).$$

□

1.5.3 O operador de Laplace

Definição 1.5.3 *Seja M uma variedade Riemanniana munida da conexão ∇ . O operador de Laplace é definido por*

$$\begin{aligned}
\Delta : \mathcal{D}(M) &\longrightarrow \mathcal{D}(M) \\
f &\longmapsto \Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f).
\end{aligned}$$

Decorre das propriedades do gradiente e da divergência que:

(i) $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\Delta(f + g) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f + g)) \\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g) \\ &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \operatorname{div}(\operatorname{grad} g) \\ &= \Delta f + \Delta g.\end{aligned}$$

(ii) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle$, para quaisquer $f, g \in \mathcal{D}(M)$. De fato,

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(fg)) \\ &= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f) \\ &= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) + \operatorname{div}(g \operatorname{grad} f) \\ &= f \operatorname{div}(\operatorname{grad} g) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle + g \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f \rangle \\ &= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle.\end{aligned}$$

Proposição 1.5.3 *Se $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local em M , então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n (E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i} E_i)(f)).$$

Demonstração. Segue das proposições 1.5.1 e 1.5.2 que

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{i=1}^n (E_i(E_i(f)) - \langle \nabla_{E_i} E_i, \operatorname{grad} f \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n (E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i} E_i)(f)).\end{aligned}$$

□

1.5.4 Hessiano

Definição 1.5.4 *Sejam M uma variedade Riemanniana munida da conexão ∇ e $f \in \mathcal{D}(M)$. Definimos o hessiano de f em $p \in M$ como o operador linear*

$$\begin{aligned}(\operatorname{Hess} f)_p : T_p M &\longrightarrow T_p M \\ X &\longmapsto (\operatorname{Hess} f)_p X = \nabla_X \operatorname{grad} f.\end{aligned}$$

Segue da definição anterior que

$$\begin{aligned}\langle (\text{Hess } f)X, Y \rangle &= \langle \nabla_X \text{grad } f, \rangle Y \\ &= X \langle \text{grad } f, \rangle Y - \langle \text{grad } f, \rangle \nabla_X Y \\ &= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f).\end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que $\langle X, (\text{Hess } f)Y \rangle = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f)$. Subtraindo esta equação da anterior segue que

$$\begin{aligned}\langle (\text{Hess } f)X, Y \rangle - \langle X, (\text{Hess } f)Y \rangle &= (XY - YX)f - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)f \\ &= [X, Y]f - [X, Y]f \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $(\text{Hess } f)_p$ é um operador auto-adjunto e, portanto, determina uma forma bilinear simétrica em $T_p M$ dada por

$$(\text{Hess } f)_p(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad } f_p, Y \rangle.$$

1.6 A segunda forma fundamental

Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Sabemos que para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade. Para simplificar a notação identificaremos $U \subset M$ com sua imagem $f(U) \subset \overline{M}$ e cada vetor $v \in T_q M$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)} \overline{M}$. Usaremos estas identificações para estender um campo local de vetores definido em $U \subset M$ a um campo local de vetores definido em $f(U) \subset \overline{M}$.

Fixado $p \in M$, o produto interno em $T_p \overline{M}$ decompõe $T_p \overline{M}$ na soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$. Desse modo, para cada $v \in T_p \overline{M}$, $p \in M$, temos que

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_p M, \quad v^N \in (T_p M)^\perp.$$

Os vetores v^T e v^N são denominados as componentes *tangencial* e *normal* de v , respectivamente.

Sejam ∇ uma conexão Riemanniana de M e $\overline{\nabla}$ uma conexão Riemanniana de \overline{M} . Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos a aplicação

$$\begin{aligned}B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow (\mathfrak{X}(M))^\perp \\ (X, Y) &\longmapsto B(X, Y) = \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y,\end{aligned}$$

onde \overline{X} e \overline{Y} são extensões locais de X e Y a \overline{M} . Podemos verificar que a aplicação acima é bem definida, isto é, não depende das extensões. Além disso temos a seguinte proposição:

Proposição 1.6.1 *A aplicação $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow (\mathfrak{X}(M))^\perp$ definida acima é bilinear e simétrica.*

Demonstração. Segue das propriedades de linearidade de uma conexão que B é linear em X e aditiva em Y . Resta mostrar que $B(X, fY) = fB(X, Y)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Indicando por \bar{f} a extensão de f a \bar{U} , temos

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{f}\bar{Y}) - \nabla_X(fY) \\ &= \bar{f}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - f\nabla_X(Y) + \bar{X}(\bar{f})\bar{Y} - X(f)Y. \end{aligned}$$

Como $f = \bar{f}$ em M temos que $\bar{X}(\bar{f}) = \bar{X}(f) = X(f)$. Portanto, as duas últimas parcelas se anulam. Logo, $B(X, fY) = fB(X, Y)$, isto é, B é bilinear.

Para mostrarmos que B é simétrica, utilizamos a simetria da conexão Riemanniana, obtendo

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y \\ &= \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} - \nabla_Y X + [\bar{X}, \bar{Y}] - [X, Y]. \end{aligned}$$

Visto que $[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$ em M , concluímos que $B(X, Y) = B(Y, X)$. □

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

é uma forma bilinear simétrica de acordo com a proposição anterior.

Definição 1.6.1 A forma quadrática II_η definida em $T_p M$ por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor η .

Dada a aplicação bilinear H_η sabemos que existe uma única aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ dada por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

A proposição seguinte nos oferece uma expressão de S_η em termos da derivada covariante.

Proposição 1.6.2 Sejam $p \in M$, $x \in T_p M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Seja N uma extensão local de η , normal a M . Então

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração. Sejam $y \in T_p M$ e X, Y extensões locais de x, y , respectivamente, e tangentes a M . Então $\langle N, Y \rangle = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(X, Y)(p), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle = -\langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle(p) = \langle -\bar{\nabla}_x N, y \rangle \end{aligned}$$

para todo $y \in T_p M$. □

Exemplo 1.6.1 Consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, isto é, $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$; $f(M) \subset \overline{M}$ é então denominada uma *hipersuperfície*.

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{E_1, \dots, E_n\}$ de $T_p M$ com valores próprios reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tais que $S_\eta(E_i) = \lambda_i E_i$, $i = 1, \dots, n$. Se M e \overline{M} são orientáveis e estão ambas orientadas, o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que, sendo $\{E_1, \dots, E_n\}$ uma base na orientação de M , $\{E_1, \dots, E_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de \overline{M} . Neste caso, os E_i são denominados *direções principais* e os $\lambda_i = k_i$ são as *curvaturas principais* de f . Agora, sabemos que o determinante e o traço de um operador são independentes das bases dos espaços envolvidos. Diante deste fato, chamamos os números

$$\det(S_\eta) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} \text{tr}(S_\eta) = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

de *curvatura de Gauss-Kronecker* e *curvatura média*, respectivamente.

O teorema a seguir relaciona a curvatura de M com a curvatura de \overline{M} e suas respectivas segundas formas fundamentais.

Teorema 1.6.1 (Gauss) *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais em $T_p M$. Então*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

1.7 Grupos de Lie

Esta seção e a próxima são dedicadas ao estudo dos grupos de Lie e às ações destes grupos em variedades diferenciáveis. Usaremos este estudo geral de modo específico no capítulo 2 onde estudamos a ação do grupo $O(p+1) \times O(q+1)$ na variedade \mathbb{R}^{p+q+2} .

Definição 1.7.1 *Um grupo de Lie é um grupo G que possui uma estrutura diferenciável e tal que as aplicações*

$$\begin{aligned} m : G \times G &\longrightarrow G & e & \quad i : G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g \cdot h & & \quad g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

são diferenciáveis.

Exemplo 1.7.1 Sejam $G = \mathbb{R}^n$ com a estrutura diferenciável dada pela aplicação identidade e $m(x, y) = x + y$ a operação de grupo. O inverso do vetor x é o vetor $-x$. Ambas as operações da definição são claramente diferenciáveis. Então \mathbb{R}^n é um exemplo de um grupo de Lie.

Exemplo 1.7.2 Seja $G = SO(2)$ o grupo das rotações no plano. Em outras palavras

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : 0 \leq \theta < 2\pi \right\},$$

onde θ denota o ângulo de rotação. É possível mostrar que G , com a multiplicação de matrizes como operação do grupo, é um grupo de Lie. Além disso, G pode ser identificado com o círculo unitário

$$S^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Exemplo 1.7.3 O conjunto $GL(n)$, de todas as matrizes $A \in M_{n \times n}$ inversíveis, é um grupo com respeito a operação de multiplicação de matrizes. Além disso, sabemos que $GL(n)$ admite uma estrutura diferenciável cujas parametrizações $\mathbf{x}_\alpha : U \in \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow GL(n)$ são dadas pelas entradas a_{ij} de A . Além disso, verifica-se que as operações de grupo são diferenciáveis em $GL(n)$. Logo, $GL(n)$ é um grupo de Lie.

Definição 1.7.2 Um homomorfismo entre grupos de Lie é uma aplicação diferenciável $\phi : G \rightarrow H$ tal que

$$\phi(g \cdot \tilde{g}) = \phi(g) \cdot \phi(\tilde{g}), \quad g, \tilde{g} \in G.$$

Se G e H são grupos de Lie de dimensões r e s , respectivamente, então o produto cartesiano $G \times H$ é um grupo de Lie com a operação de grupo dada por

$$(g, h) \cdot (\tilde{g}, \tilde{h}) = (g \cdot \tilde{g}, h \cdot \tilde{h}), \quad g, \tilde{g} \in G, \quad h, \tilde{h} \in H,$$

a qual é uma aplicação diferenciável na variedade produto. Assim, por exemplo, o r -Toro $T^r = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ é um grupo de Lie pois é o produto cartesiano finito (r vezes) do grupo de Lie $S^1 \simeq SO(2)$. A operação de grupo em T^2 , por exemplo, é dada em termos das coordenadas angulares (θ, ρ) pela adição módulo 2π :

$$(\theta, \rho) \cdot (\theta', \rho') = (\theta, \rho) \text{ mod } 2\pi.$$

1.7.1 Subgrupos de Lie

Definição 1.7.3 Um subgrupo de Lie H de um grupo de Lie G é dado por uma subvariedade $\phi : \tilde{H} \rightarrow G$, onde \tilde{H} é um grupo de Lie, $H = \phi(\tilde{H})$ e ϕ é um homomorfismo.

Exemplo 1.7.4 Se ω é qualquer número real, a subvariedade

$$H_\omega = \{(t, \omega t) \text{ mod } 2\pi; t \in \mathbb{R}\} \subset T^2$$

é um subgrupo de Lie de dimensão 1 do bi-Toro T^2 . Demonstra-se que se ω é racional, H_ω é isomorfo ao grupo $SO(2)$. Por outro lado, se ω é irracional, H_ω é isomorfo ao grupo de Lie \mathbb{R} e é denso em T^2 . A demonstração desses fatos encontra-se em [6].

Exemplo 1.7.5 O conjunto $O(n) = \{X \in GL(n); X^t X = I\}$, com a operação de multiplicação de matrizes, é um subgrupo de Lie de $GL(n)$. De fato, os itens abaixo são satisfeitos:

- (i) $I^t = I \Rightarrow I^t I = I I = I \Rightarrow I \in O(n)$;
- (ii) $A \in O(n) \Rightarrow A^t A = I \Rightarrow A^{-1} = A^t \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$;

(iii) $A, B \in O(n) \Rightarrow (AB)^t(AB) = (B^t A^t)(AB) = I \Rightarrow AB \in O(n)$.

Logo, $O(n)$ é um grupo. Além disto, $O(n)$ admite a mesma estrutura diferenciável de $GL(n)$ e a aplicação identidade $i : O(n) \rightarrow GL(n)$ fornece um homomorfismo entre $O(n)$ e $GL(n)$. Portanto, $O(n)$ é um subgrupo de Lie de $GL(n)$ denominado *grupo das isometrias*.

1.7.2 Grupos de Lie locais

Definição 1.7.4 Um grupo de Lie local consiste em abertos $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^n$ que contêm a origem 0 e aplicações diferenciáveis $m : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i : V_0 \rightarrow V$ que satisfazem as seguintes condições:

(a) (*Associatividade*) Se $x, y, z \in V$ e $m(x, y), m(y, z) \in V$, então

$$m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z);$$

(b) (*Elemento Neutro*) Para todo $x \in V$ temos que

$$m(x, 0) = m(0, x) = x;$$

(c) (*Inverso*) Para cada $x \in V_0$ temos que

$$m(x, i(x)) = m(i(x), x) = 0.$$

Exemplo 1.7.6 Seja $V = \{x \in \mathbb{R}; |x| < 1\} \subset \mathbb{R}$ com a multiplicação de grupo dada por

$$m(x, y) = \frac{2xy - x - y}{xy - 1}, \quad x, y \in V.$$

Através de um cálculo direto verifica-se que as condições (a) e (b) da definição acima são satisfeitas. A função inversa é $i(x) = x/(2x - 1)$, definida para $x \in V_0 = \{x; |x| < \frac{1}{2}\}$. Logo, m define um grupo de Lie local de dimensão 1.

1.7.3 Transformação local de grupos

Definição 1.7.5 Seja M uma variedade diferenciável. Um grupo local de transformações agindo em M é dado por um grupo de Lie (local) G , um conjunto aberto \mathcal{U} , com

$$\{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M$$

e uma aplicação diferenciável $\psi : \mathcal{U} \rightarrow M$ com as seguintes propriedades:

(a) Se $(h, x), \psi(g, \psi(h, x)), (g \cdot h, x) \in \mathcal{U}$, então

$$\psi(g, \psi(h, x)) = \psi(g \cdot h, x);$$

(b) Para todo $x \in M$,

$$\psi(e, x) = x;$$

(c) Se $(g, x) \in \mathcal{U}$, então $(g^{-1}, \psi(g, x)) \in \mathcal{U}$ e

$$\psi(g^{-1}, \psi(g, x)) = x.$$

Quando estiver clara a operação no grupo, denotaremos $\psi(g, x)$ simplesmente por $g \cdot x$.

Verifica-se que para cada $x \in M$, os elementos g do grupo G tais que $g \cdot x$ está definido formam um grupo de Lie local

$$G_x = \{g \in G : (g, x) \in \mathcal{U}\}.$$

Definição 1.7.6 Um grupo de transformações agindo em M é conexo se

- (a) G é um grupo de Lie conexo e M é uma variedade conexa;
- (b) $\mathcal{U} \subset G \times M$ é aberto e conexo;
- (c) Para cada $x \in M$, o grupo de Lie local G_x é conexo.

1.8 Órbitas

Definição 1.8.1 Dado um grupo de transformações $\psi : \mathcal{U} \subset G \times M \rightarrow M$, um conjunto $\mathcal{O} \subset M$ é chamado de órbita se satisfaz as seguintes condições:

- (a) Se $x \in \mathcal{O}$, $g \in G$ e $g \cdot x$ está definido, então $g \cdot x \in \mathcal{O}$;
- (b) Se $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ e $\tilde{\mathcal{O}}$ satisfaz (a) então $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ ou $\tilde{\mathcal{O}} = \emptyset$.

O conjunto de todas as órbitas de ψ é chamado o espaço de órbitas de ψ .

No caso em que $\psi : G \times M \rightarrow M$ é uma transformação global, a órbita \mathcal{O}_x que passa pelo ponto x é definida por

$$\mathcal{O}_x = \{g \cdot x; g \in G\}.$$

Definição 1.8.2 Seja G um grupo local de transformações agindo em M .

- (a) O grupo G age semi-regularmente se todas as órbitas \mathcal{O} têm a mesma dimensão como subvariedades de M .
- (b) O grupo G age regularmente se a ação é semi-regular e para cada ponto $x \in M$ existem vizinhanças U de x tais que cada órbita intersecta U em um conjunto conexo por caminho.

Exemplo 1.8.1 Tome $G = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R}^n$ e fixe $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. A aplicação $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\Psi(\xi, x) = x + \xi a, \quad x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}$$

é uma ação global de grupo. As órbitas são retas paralelas ao vetor a . A ação é regular e suas órbitas são uni-dimensionais.

Exemplo 1.8.2 Sejam $M = \mathbb{R}^n$, $G = \mathbb{R}^+$ com a multiplicação como ação de grupo e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ números reais não todos nulos. Seja $\Psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicação dada por

$$\Psi(\lambda, x) = (\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_n} x_n).$$

As órbitas da aplicação Ψ são todas subvariedades de dimensão 1 exceto pela órbita singular dada pela origem.

Exemplo 1.8.3 Sejam $G = O(p+1) \times O(q+1)$, $\mathbb{R}^{p+q+2} = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1}$, $p, q > 1$ e $\eta : G \times \mathbb{R}^{p+q+2} \rightarrow \mathbb{R}^{p+q+2}$ a ação do grupo de isometrias de G em \mathbb{R}^{p+q+2} , dada por

$$\eta(A, B, z, w) = (Az, Bw).$$

Neste exemplo vamos estudar o espaço de órbitas da ação η . Sabemos que os operadores ortogonais preservam normas, isto é,

$$A \in O(p+1), z \in \mathbb{R}^{p+1} \implies |Az| = |z|.$$

Logo, fixado $z_0 \in \mathbb{R}^{p+1}$, a órbita \mathcal{O}_{z_0} da ação $(A, z) \mapsto Az$ está contida na esfera $S^p(|z_0|) \subset \mathbb{R}^{p+1}$ centrada na origem e de raio $|z_0|$.

Por outro lado, dado $v \in \mathbb{R}^{p+1}$ com $|v| = |z_0|$, sabemos da álgebra linear que é possível obter bases ortonormais V_0 e V de \mathbb{R}^{p+1} contendo $z_0|z_0|^{-1}$ e $v|v|^{-1}$, respectivamente, e um operador A tal que $Az_0 = v$. Um teorema clássico da álgebra linear garante que A é ortogonal. Portanto, a órbita \mathcal{O}_{z_0} é a esfera $S^p(|z_0|)$. Diante deste fato, observe que o que distingue a órbita \mathcal{O}_{z_0} das demais é apenas o raio $|z_0|$ da esfera $S^p(|z_0|)$. Logo, podemos identificar o espaço de órbitas da ação $(A, z) \mapsto Az$ com o intervalo $[0, +\infty)$. Deste modo, o espaço de órbitas da ação η pode ser identificado com o conjunto

$$\pi(\mathbb{R}^{p+q+2}) = \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\},$$

onde $\pi : \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definido por $\pi(z, w) = (|z|, |w|)$.

Definição 1.8.3 Dado $\eta : G \times \mathbb{R}^{p+q+2} \rightarrow \mathbb{R}^{p+q+2}$ como acima, a distância métrica orbital da ação η é a distância canônica em \mathbb{R}^2 restrita aos pontos de Ω .

1.9 Equações Diferenciais Ordinárias

Sejam U um aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que

$$x' = f(t, x)$$

é a equação diferencial ordinária (ou EDO) em \mathbb{R}^n definida por f . Se existir um caminho diferenciável $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que

$$(t, x(t)) \in U \quad \text{e} \quad x'(t) = f(t, x(t))$$

para cada $t \in I$, dizemos que $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma *solução* desta EDO. Algumas vezes x é chamado de *curva integral* da equação.

Fixemos um ponto $(t_0, x_0) \in U$. Se uma solução $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $x' = f(t, x)$ é tal que $t_0 \in I$ e $x(t_0) = x_0$, dizemos que esta solução satisfaz a *condição inicial* $x(t_0) = x_0$ ou o *problema de valor inicial*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

O teorema a seguir, cuja demonstração encontra-se em [4], garante que sob certas condições sempre existe uma única solução para um problema de valor inicial. Em seu enunciado, $\frac{\partial f}{\partial x}$ é a diferencial de f restrita ao subespaço \mathbb{R}^n de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 1.9.1 *Se $f(t, x)$ e a derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ são aplicações contínuas de (t, x) no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ então, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do problema de valor inicial $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ centrado em t_0 , para certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.*

Tomando coordenadas na base canônica de \mathbb{R}^n e escrevendo $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ e $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$ vemos que a equação diferencial *vetorial* $x' = f(t, x)$ em \mathbb{R}^n pode ser interpretada como um *sistema de equações diferenciais escalares*

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x'_2(t) = f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{cases}$$

Uma condição inicial para este sistema é dada por $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$. Uma solução desse sistema consiste em n funções reais deriváveis $x_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para cada $t \in I$,

$$x'_j(t) = f_j(t, x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

enquanto que a n -upla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ constitui uma solução da equação $x' = f(t, x)$ em \mathbb{R}^n . Vemos deste modo que a existência e unicidade de soluções de sistemas de equações diferenciais escalares em \mathbb{R} equivale, formalmente, à existência e unicidade de soluções de equações vetoriais em \mathbb{R}^n .

Definição 1.9.1 *Dizemos que uma equação diferencial $x' = f(t, x)$ é autônoma se $f(t, x)$ não depende de t .*

Nesse caso escrevemos $f(t, x) = f(x)$, consideramos a equação diferencial

$$x' = f(x)$$

e interpretamos a aplicação $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ como um *campo de vetores* definido no aberto $E \subset \mathbb{R}^n$. Em particular, quando $f = A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador linear tal que $f(x) = Ax$, chamamos f de *campo linear*.

Questões relativas à existência e unicidade de soluções de sistemas que não são autônomos podem ser sempre reduzidas às mesmas questões para sistemas autônomos, como segue.

Proposição 1.9.1 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$. Escreva $X = (t, x) \in U$ e defina o campo $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por*

$$F(X) = F(t, x) = (1, f(t, x)).$$

Então, a equação diferencial vetorial $x' = f(t, x)$ em \mathbb{R}^n é equivalente à equação diferencial vetorial autônoma $X' = F(X)$ em \mathbb{R}^{n+1} .

Demonstração. Seja $X(u) = (t(u), x(u))$ uma solução de

$$X' = F(X), \quad X(u_0) = X_0 = (t_0, x_0).$$

Deste modo, $t(u_0) = t_0$ e $t'(u) = 1$. Segue-se que $t(u) = u$ e, portanto, $x(u)$ satisfaz $x'(u) = f(u, x(u))$, $x(u_0) = x_0$. Logo, a componente $x(u)$ de $X(u)$ é uma solução de $x' = f(t, x)$. Reciprocamente, se $x(t)$ é tal que $x'(t) = f(t, x(t))$ então necessariamente $X(t) = (t, x(t))$ é solução da equação diferencial vetorial autônoma $X' = F(X)$. \square

1.9.1 Fluxo e singularidade

Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 no aberto $E \subset \mathbb{R}^n$. Uma solução $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ da equação diferencial

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

é uma *solução regular* se $x'(t) = f(x(t)) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, para cada $t \in I$. O teorema 1.9.1 garante que (1.1) possui uma única solução.

Observe que se um caminho derivável $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução de (1.1) então $x'(t) = f(x(t))$ é de classe C^1 . Logo, x é de classe C^2 .

Definição 1.9.2 *Dizemos que I é um intervalo máximo da solução (1.1) por x_0 se, dada qualquer solução $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $x(0) = x_0$, temos $J \subset I$. A solução definida no intervalo máximo é a solução máxima da equação diferencial $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, ou a trajetória do campo f por x_0 .*

Quando necessário, escreveremos $I(x_0)$ para denotar o intervalo máximo por x_0 .

Observação 1.9.1 É possível mostrar que o intervalo máximo sempre contém 0 e é aberto. Uma demonstração deste fato encontra-se em [4].

Definição 1.9.3 Para cada par (t, x) tal que $t \in I(x)$ para algum $x \in E$, definimos $\phi(t, x) = x(t)$, onde $x : I(x) \rightarrow E$ é a trajetória de f por x (estamos utilizando a mesma notação x para um ponto de E e para um caminho em E) e assim obtemos uma aplicação

$$\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

denominada *fluxo do campo de vetores f em E* . O domínio Ω do fluxo é o subconjunto de $\mathbb{R} \times E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de todos os $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tais que $x \in E$, $t \in I(x)$.

Derivando o fluxo parcialmente em relação a variável temporal t , observamos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = x'(t) = f(x(t)) = f(\phi(t, x)).$$

Desse modo, o fluxo $\phi(t, x)$ de um campo nos dá uma informação global do comportamento de todas as trajetórias do campo.

Proposição 1.9.2 Se $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o fluxo de um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , então

$$\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$$

para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ e $x \in E$ tais que $s, s + t \in I(x)$.

Demonstração. Considere o caminho

$$\begin{aligned} \tilde{x} : I(x) &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto \phi(t + s, x). \end{aligned}$$

Derivando \tilde{x} em relação a t temos

$$\tilde{x}'(t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t + s, x) = x'(t + s) = f(x(t + s)) = f(\phi(t + s, x)) = f(\tilde{x}(t)).$$

Além disto, $\tilde{x}(0) = \phi(s, x)$. Logo, \tilde{x} é solução da equação $x' = f(x)$, $x(0) = \phi(s, x)$. Ora, como o caminho $t \mapsto \phi(t, \phi(s, x))$ é a *única* solução máxima desta equação, ambas coincidem, isto é,

$$\phi(t + s, x) = \tilde{x}(t) = \phi(t, \phi(s, x)).$$

□

Definição 1.9.4 Dizemos que x_0 é uma singularidade ou um ponto singular do campo f se $f(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

A solução de $x' = f(x)$ por um ponto singular é sempre a trivial; a trajetória do campo por um ponto singular é denominada *trajetória singular*. Pontos que não são singulares são denominados *regulares* e as trajetórias por pontos regulares são denominadas *trajetórias regulares*.

Exemplo 1.9.1 Para as equações diferenciais *lineares* $x' = Ax$, a origem $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ é sempre um ponto singular pois sempre vale $A0 = 0$.

Algumas vezes dizemos que uma singularidade do campo f é um *ponto de equilíbrio* de f já que $x(t) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Um ponto singular também pode ser caracterizado como um ponto tal que $\phi(t, x_0) = x_0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, de modo que também dizemos que um ponto de equilíbrio do campo é um *ponto fixo* do campo f .

Os pontos de equilíbrio ainda se dividem em diversos casos. Vamos apresentar agora as definições de alguns deles.

Definição 1.9.5 *Seja x_0 um ponto de equilíbrio para o campo f . Dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio estável para f se, para qualquer vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 , existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que $W \subset E \cap U$ e*

$$\phi_t(x) \in U, \quad \text{para quaisquer } x \in W \text{ e } t > 0.$$

Exemplo 1.9.2 O ponto $x_0 = (0, 0)$ é o (único) ponto de equilíbrio estável do campo

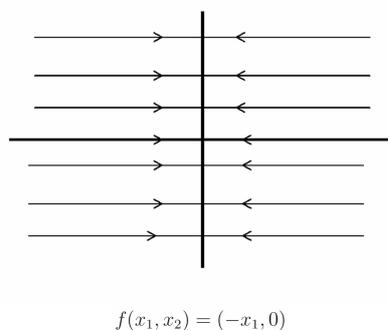
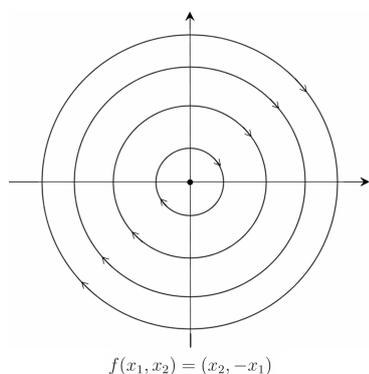
$$f(x_1, x_2) = (x_2, -x_1).$$

Todas as trajetórias desse sistema percorrem círculos em torno da origem.

Exemplo 1.9.3 Qualquer ponto $x = (0, x_2)$, sobre o eixo vertical, é um ponto de equilíbrio estável do campo

$$f(x_1, x_2) = (-x_1, 0).$$

As trajetórias desse sistema estão sobre semi-retas paralelas ao eixo Ox_1 e tendem para o eixo Ox_2 .



Dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio *instável* se x_0 não é um ponto de equilíbrio estável; x_0 é um ponto de equilíbrio *isolado* se existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 tal que x_0 é a única singularidade de f em $E \cap W$.

Observe que uma singularidade estável pode não ser isolada como podemos ver nos dois exemplos anteriores.

Definição 1.9.6 *Seja x_0 um ponto de equilíbrio para um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para f se, para qualquer vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 com $W \subset E \cap U$, tal que os seguintes itens são satisfeitos:*

(i) $\phi_t(x) \in U$, para quaisquer $x \in W$ e $t > 0$;

(ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x_0$, para qualquer $x \in W$.

Dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio *indiferente* se x_0 é um ponto de equilíbrio estável que não é assintoticamente estável.

É possível mostrar que todo ponto de equilíbrio assintoticamente estável é sempre um ponto de equilíbrio isolado. Mais óbvio que isto é o fato de todo ponto de equilíbrio assintoticamente estável ser estável; porém a recíproca não é verdadeira como podemos ver no exemplo 1.9.3. Também é possível mostrar que a estabilidade assintótica é invariante por conjugações (veja definição 1.9.10 abaixo).

Para o caso particular em que $f = A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo linear no plano, com $\det A \neq 0$, existe uma classificação da origem (único ponto singular do campo) baseada no estudo dos autovalores λ_1 e λ_2 de A . Vamos apresentar abaixo, de forma breve, esta classificação; para maiores detalhes, sugerimos consultar [9].

Caso a. λ_1 e λ_2 são reais e distintos.

Sejam v_1, v_2 os autovetores associados aos autovalores λ_1, λ_2 e E_1, E_2 os subespaços invariantes gerados por eles. A trajetória de A por $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é

$$\phi(t, x) = x_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + x_2 e^{\lambda_2 t} v_2.$$

Caso a₁. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Neste caso, a origem é denominada *nó estável*. Todas as trajetórias tendem à origem quando $t \rightarrow +\infty$ e toda trajetória tende a ∞ quando $t \rightarrow -\infty$. Se $x_1 \neq 0$, a reta tangente à trajetória tende à reta E_1 quando $t \rightarrow +\infty$. Com efeito, uma vez que $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$,

$$\frac{x_2 e^{\lambda_2 t}}{x_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{x_2}{x_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

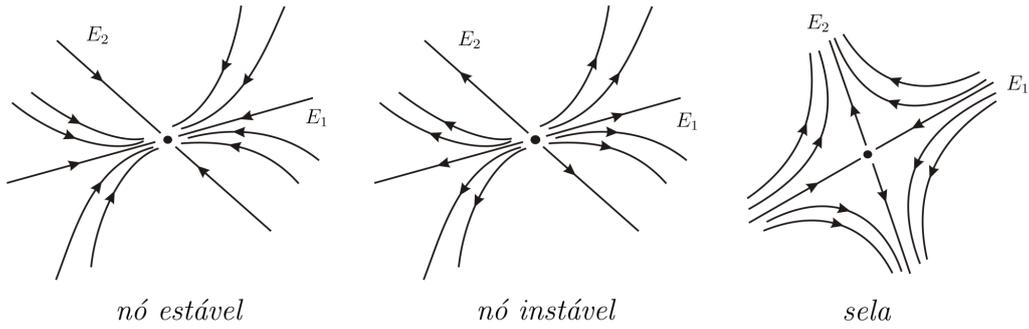
Se $x_1 = 0$, as soluções são semi-retas sobre E_2 .

Caso a₂. $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.

A discussão sobre as trajetórias é semelhante ao caso a_1 . Neste caso, a origem é chamada *nó instável*.

Caso a₃. $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$.

As trajetórias que passam por pontos de E_1 ($x_2 = 0$) tendem à origem quando $t \rightarrow +\infty$ e as trajetórias que passam por pontos de E_2 ($x_1 = 0$) permanecem em E_2 e tendem à 0 quando $t \rightarrow -\infty$. Caso $x_1, x_2 \neq 0$, quando $t \rightarrow +\infty$ a componente segundo E_1 tende à 0 e a componente segundo E_2 tende à ∞ . De modo semelhante, a componente de E_1 tende a ∞ e a de E_2 tende à 0 quando $t \rightarrow -\infty$. A origem é denominada *ponto de sela*.



Caso b. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ são complexos conjugados.

A trajetória de A passando pelo ponto $x = (x_1, x_2)$ é

$$\phi(t, x) = x_1\phi_1(t) + x_2\phi_2(t),$$

onde $\phi_1(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t v_1 - \text{sen } \beta t v_2)$ e $\phi_2(t) = e^{\alpha t}(\text{sen } \beta t v_1 + \cos \beta t v_2)$.

Caso b₁. $\alpha = 0$.

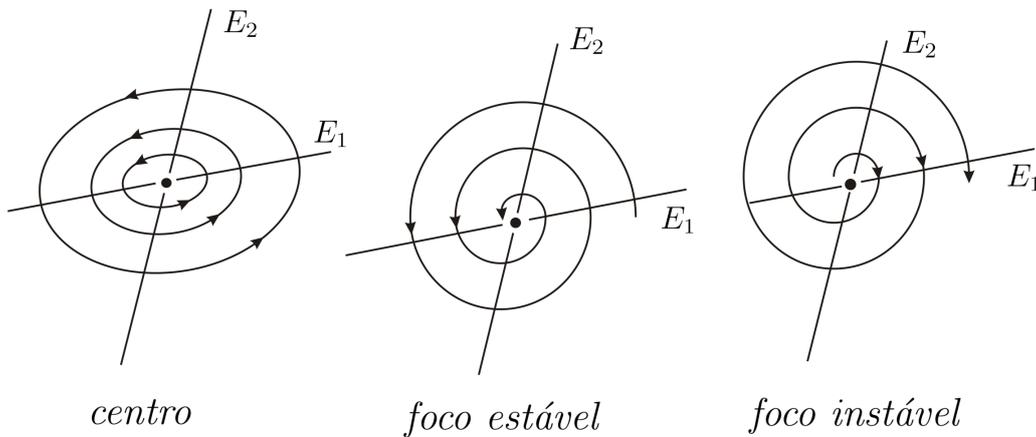
Todas as trajetórias são elipses salvo a que contem o ponto 0. A origem é chamada de *centro*.

Caso b₂. $\alpha < 0$.

Quando $t \rightarrow +\infty$, toda solução tende para 0 espiralando em torno da origem no sentido horário (se $\beta > 0$) ou anti-horário (se $\beta < 0$). O ponto 0 é denominado *foco estável*.

Caso b₃. $\alpha > 0$.

As soluções tendem à origem quando $t \rightarrow -\infty$ em forma de espiral no sentido horário (caso $\beta > 0$) ou anti-horário (caso $\beta < 0$). A origem é chamada de *foco instável*.



Caso c. λ_1 e λ_2 são reais e iguais a $\lambda \neq 0$.

Em ambos os casos abaixo, a origem é chamada de *nó impróprio*.

Caso c_1 . O núcleo de $A - \lambda I$ é bidimensional.

Em outras palavras, λ está associado a autovetores v_1 e v_2 linearmente independentes. Neste caso, a trajetória de A passando por $x = (x_1, x_2)$ é a semi-reta

$$\phi(t, x) = e^{\lambda t}(x_1 v_1 + x_2 v_2).$$

Caso c_2 . O núcleo de $A - \lambda I = E_1$ é unidimensional.

Neste caso a trajetória de A passando por $x = (x_1, x_2)$ é

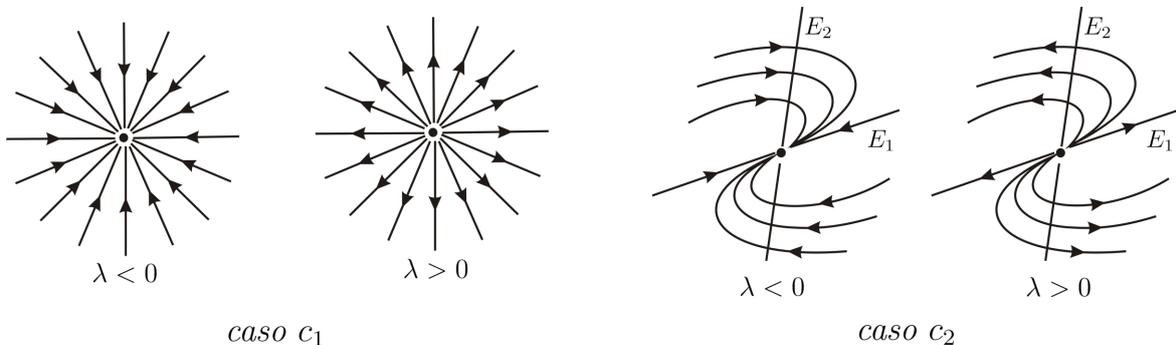
$$\phi(t, x) = e^{\lambda t}[(x_1 + tx_2)v_1 + x_2 v_2],$$

onde v_1 é tal que $Av_1 = \lambda v_1$ e $\{v_1, v_2\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 .

Segue que as órbitas que passam por E_1 ($x_2 = 0$) são semi-retas. Além disso, se $x_2 \neq 0$ a reta tangente à trajetória tende a E_1 quando $t \rightarrow \pm\infty$ pois

$$\frac{x_2 e^{\lambda t}}{(x_1 + tx_2)e^{\lambda t}} = \frac{1}{\frac{x_1}{x_2} + t} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \pm\infty.$$

Se $\lambda < 0$, toda trajetória tende a 0 quando $t \rightarrow +\infty$. De modo análogo, $\lambda > 0$ implica que toda trajetória tende à origem quando $t \rightarrow -\infty$.



Isto encerra nossa discussão sobre a classificação da origem quando $f = A$ é um campo linear no plano.

Definição 1.9.7 *Seja x_0 um ponto de equilíbrio do campo $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que x_0 é um ponto degenerado se a matriz Jacobiana de $Df(x_0)$ é identicamente nula.*

Encerraremos esta subseção com a definição de trajetória periódica.

Definição 1.9.8 Uma trajetória $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma trajetória periódica do campo f se a trajetória não é singular e existem $t_1, t_2 \in I$ tais que $t_1 \neq t_2$ e $x(t_1) = x(t_2)$. Em outras palavras, uma trajetória é periódica se o caminho que a define não é constante nem injetor.

A partir da definição acima é possível provar que, necessariamente, $I = \mathbb{R}$ e existe um único $T > 0$, denominado *período da trajetória*, tal que $x(t) \neq x(0)$ para cada $0 < t < T$. Além disso, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$, vale

$$x(kT + t) = x(t).$$

1.9.2 Retrato de fase

Nesta subseção vamos supor que $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de classe C^1 no aberto $E \subset \mathbb{R}^n$ e que todas as soluções de $x' = f(x)$ têm intervalo máximo $I = \mathbb{R}$.

Definição 1.9.9 Dizemos que a curva integral definida pela imagem da trajetória de $x' = f(x)$ por x_0 é a órbita de f por x_0 .

Observação 1.9.2 Apesar da nomenclatura desta definição e da definição 1.8.1 serem as mesmas, ao longo do trabalho ficará claro, no contexto, a qual das duas “órbitas” estaremos nos referindo.

Decorre da proposição 1.9.2 que uma mesma órbita $\{x(t) | t \in \mathbb{R}\} \subset E$ pode ser definida por uma infinidade de soluções. Cada solução de $x' = f(x)$ fornece uma maneira de parametrizar o mesmo conjunto, que é a órbita. Já por qualquer ponto escolhido de uma órbita existe uma única trajetória do campo pelo ponto, que é a única solução máxima que passa pelo ponto com $t = 0$.

Pela existência e unicidade decorre que por cada ponto de E passa uma única órbita do campo f e que órbitas distintas não podem se cruzar. Isso nos diz que o domínio aberto E do campo f é totalmente particionado em órbitas do campo. Muitas vezes o domínio E do campo é chamado de *espaço de fase* do campo. O *retrato de fase* de f é então a partição do espaço de fase em órbitas orientadas.

Dois tipos importantes de órbitas no retrato de fase de um campo são as parametrizadas por trajetórias singulares e por trajetórias periódicas. A primeira consiste em um único ponto, a singularidade, e chamamos esta órbita de *órbita singular*. A segunda é denominada *órbita periódica* cujo período é o mesmo da trajetória periódica.

Definição 1.9.10 Sejam $f_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dois campos de vetores com fluxos ϕ_t^1 e ϕ_t^2 , respectivamente, e sejam $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$ dois pontos dados. Dizemos que o campo f_1 em x_1 , ou então que o fluxo ϕ_t^1 em x_1 , é localmente topologicamente (diferenciavelmente) conjugado ao campo f_2 , ou ao fluxo ϕ_t^2 em x_2 , se existem vizinhanças $U_1 \subset E_1$ de x_1 e $U_2 \subset E_2$ de x_2 e um homeomorfismo (difeomorfismo) $g : U_1 \rightarrow U_2$, tal que $g(x_1) = x_2$ e

$$\phi^2(t, g(x)) = g(\phi^1(t, x))$$

para qualquer $x \in U_1$ e cada $t \in \mathbb{R}$ tais que $\phi^1(t, x) \in U_1$. O homeomorfismo (difeomorfismo) g é dito uma conjugação local entre os campos nos pontos dados.

É possível mostrar que uma conjugação entre dois campos de vetores mantém as propriedades dinâmicas dos dois campos, levando trajetórias em trajetórias e preservando o aspecto do retrato de fase. Assim, por exemplo, toda conjugação topológica leva singularidades em singularidades e órbitas periódicas em órbitas periódicas de mesmo período.

O próximo teorema garante que, sob certas condições, o aspecto do campo f em torno de um ponto singular x_0 é semelhante ao aspecto do campo linear $Df(x_0)$ próximo da origem. Uma demonstração pode ser encontrada em [5], página 73.

Teorema 1.9.2 (Grobman-Hartman) *Seja $x_0 \in E$ um ponto de equilíbrio do campo de vetores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definido no aberto $E \subset \mathbb{R}^n$. Se x_0 é tal que todos os autovalores generalizados de $Df(x_0)$ têm parte real não nula então f é, em x_0 , localmente topologicamente conjugado ao campo linear $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ em 0.*

O teorema de Grobman-Hartman nos permite classificar os pontos singulares de um campo planar utilizando a classificação feita na subseção 1.9.1 para os campos lineares no plano. Assim, por exemplo, um ponto singular x_0 de um campo $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ será dito um nó estável se a origem de $Df(x_0)$ é um nó estável.

1.9.3 Fluxo tubular

Considere a equação diferencial $y' = \bar{f}(y)$ definida em \mathbb{R}^n pelo campo constante $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$\bar{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (1, 0, \dots, 0) = e_1 \in \mathbb{R}^n,$$

com a condição inicial $y(0) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Obviamente, a solução de $y' = \bar{f}(y)$ é $y(t) = (y_1 + t, y_2, \dots, y_n)$. Portanto, todas as soluções começando no ponto (c, y_2, \dots, y_n) estarão após decorrido um tempo t na posição $(c + t, y_2, \dots, y_n)$. Em outras palavras, o fluxo de \bar{f} é dado por

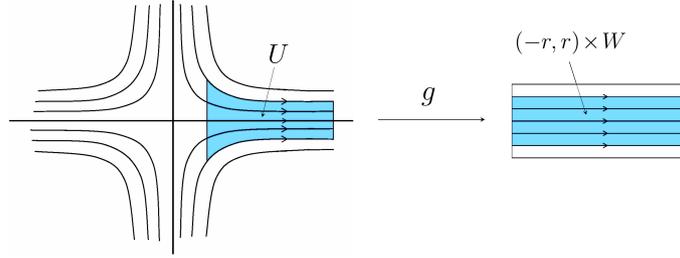
$$\psi_t(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_1 + t, y_2, \dots, y_n).$$

Dizemos que o fluxo do campo constante \bar{f} é *laminar* ou *tubular*, pois todas as trajetórias que estão no hiperplano afim $y_1 = c$ estarão no hiperplano afim $y_1 = c + t$ após decorrido um tempo t .

Definição 1.9.11 *Dado um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, dizemos que o ponto $x_0 \in E$ tem a propriedade do fluxo tubular se existem uma vizinhança $U \subset E$ de x_0 , denominada vizinhança tubular de x_0 , um aberto $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$, uma constante $r > 0$ e um difeomorfismo $g : U \rightarrow (-r, r) \times W$ que conjuga o fluxo ϕ_t de f em U com o fluxo ψ_t do campo constante $\bar{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (1, 0, \dots, 0)$ em $(-r, r) \times W$, ou seja, vale*

$$\psi(t, g(x)) = g(\phi(t, x))$$

para qualquer $x \in U$ e cada $|t| < r$.



Em outras palavras, o ponto x_0 tem a propriedade do fluxo tubular se o campo de vetores f , na vizinhança de x_0 , é dado por f a menos de uma mudança de coordenadas g .

O próximo teorema garante que em torno de um ponto que não é de equilíbrio o campo f se comporta como o campo constante \bar{f} .

Teorema 1.9.3 (Teorema do fluxo tubular) *Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^1 no aberto $E \subset \mathbb{R}^n$. Se $x_0 \in E$ não é um ponto de equilíbrio, então x_0 tem a propriedade do fluxo tubular.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $x_0 = 0$ e que $f(0) = \alpha e_1 = (\alpha, 0, \dots, 0)$. Por hipótese, $f(x_0) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, portanto $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$. Denotemos por H o hiperplano

$$H = [e_1]^\perp = \{(0, x_2, \dots, x_n) \mid x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Uma vez que $f(0) \notin H$ temos, pela continuidade de f , que o mesmo vale para uma vizinhança de 0. Assim, podemos escolher uma bola aberta $W \subset \mathbb{R}^n$ centrada na origem $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{W} \subset E$ e $f(x) \notin H$ para cada $x \in W \cap H$. Denotando $S = W \cap H$ observe que para $r > 0$ suficientemente pequeno temos $(-r, r) \times S \subset E$, onde \mathbb{R}^n foi decomposto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Considere a aplicação $h : (-r, r) \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$h(t, (0, x_2, \dots, x_n)) = \phi(t, (0, x_2, \dots, x_n)) = \phi_t(0, x_2, \dots, x_n).$$

Utilizando a equação logo após a definição 1.9.3 obtemos

$$\frac{\partial h}{\partial t}(0, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, 0) = f(\phi(0, 0)) = f(0) = \alpha e_1.$$

Além disso, como $h(0, (0, x_2, \dots, x_n)) = (0, x_2, \dots, x_n)$, temos que todas as derivadas parciais de h em relação a x_i em 0 são iguais a e_i , para cada $2 \leq i \leq n$. Portanto, a matriz Jacobiana de $Dh(0, 0) = \text{diag}(\alpha, 1, \dots, 1)$ tem determinante igual a $\alpha \neq 0$ donde, é inversível.

De acordo com o teorema da aplicação inversa, existem $\epsilon > 0$ e uma bola aberta W_0 centrada em 0 tais que h restrita a $(-\epsilon, \epsilon) \times (W_0 \cap S)$ é um difeomorfismo sobre um aberto U de \mathbb{R}^n .

Seja $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ o difeomorfismo inverso. Afirmamos que em U a aplicação g conjuga o campo f com o campo laminar constante $\psi \equiv e_1$, isto é, que $\psi_t \circ g = g \circ \phi_t$ em U , para cada $|t| < \epsilon$.

Fixado $x \in U$, sejam $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $\tilde{c} = (0, c_2, \dots, c_n) \in W_0 \cap S$ tais que $x = h(t_0, \tilde{c}) = \phi(t_0, \tilde{c})$. Então $g(x) = g(h(t_0, \tilde{c})) = (t_0, \tilde{c})$ e dado $t \in \mathbb{R}$, com $t + t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$, segue

$$\phi_t(x) = \phi_t(\phi(t_0, \tilde{c})) = \phi(t + t_0, \tilde{c}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (g \circ \phi_t)(x) &= g(\phi_t(x)) = g(h(t + t_0, \tilde{c})) \\ &= (t + t_0, \tilde{c}) = \psi_t(t_0, \tilde{c}) = \psi_t(g(x)) = (\psi_t \circ g)(x). \end{aligned}$$

Isto prova a nossa afirmação e demonstra o teorema. \square

1.9.4 Conjuntos invariantes

Nesta subseção vamos manter as hipóteses de que o campo $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 e que todas as soluções de $x' = f(x)$ estão definidas para todo t real. Desta maneira o fluxo $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ de f fica definido para todo $x \in E$ e todo t real.

Definição 1.9.12 Dizemos que um conjunto $C \subset E$ é invariante pelo fluxo ϕ do campo f se $\phi(t, C) \subset C$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Dizemos que C é positivamente invariante se $\phi(t, C) \subset C$ para todo $t \geq 0$ e negativamente invariante se $\phi(t, C) \subset C$ para todo $t \leq 0$.

Observe que qualquer órbita definida pela trajetória de um campo é um conjunto invariante pelo fluxo do campo; em particular, qualquer ponto de equilíbrio é invariante pelo fluxo. Qualquer união de órbitas do campo também é um conjunto invariante. Mais que isso, um conjunto é invariante pelo fluxo do campo se, e somente se, contém a órbita de cada um de seus pontos.

Definição 1.9.13 O conjunto ω -limite de um ponto $x \in E$ é o conjunto $L_\omega(x)$ dos pontos $y \in E$ para os quais existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x) = y.$$

Analogamente, o conjunto α -limite de um ponto $x \in E$ é o conjunto $L_\alpha(x)$ dos pontos $y \in E$ para os quais $\phi_{t_n}(x) \rightarrow y$ para alguma sequência de tempos $t_n \rightarrow -\infty$.

Proposição 1.9.3 Se y está na órbita de x , então $L_\omega(y) = L_\omega(x)$.

Demonstração. Seja y um ponto da órbita de x , digamos $y = \phi_t(x)$ para certo t . Seja $z \in L_\omega(x)$, de modo que existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $\phi_{t_n}(x) \rightarrow z$. Então, de acordo com a proposição 1.9.2,

$$\begin{aligned} z &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(\phi_0(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(\phi_{t-t}(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n-t}(\phi_t(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n-t}(y). \end{aligned}$$

Portanto, existe uma sequência $t_n - t \rightarrow +\infty$ tal que $\phi_{t_n-t}(y) \rightarrow z$. Logo, $z \in L_\omega(y)$ donde $L_\omega(x) \subset L_\omega(y)$. De maneira semelhante, como x está na órbita de y , podemos mostrar que $L_\omega(y) \subset L_\omega(x)$ e concluir que $L_\omega(y) = L_\omega(x)$. \square

Decorre da proposição anterior que faz sentido definir os conjuntos ω e α -limite de uma órbita como os conjuntos ω e α -limite de qualquer um dos pontos da órbita. Os resultados seguintes fornecem algumas propriedades topológicas dos conjuntos $L_\omega(x)$ e $L_\alpha(x)$.

Proposição 1.9.4 *O conjunto $L_\omega(x)$ é fechado e invariante.*

Demonstração. Dado $y \in L_\omega(x)$ vamos mostrar primeiro que $\phi_t(y) \in L_\omega(x)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. De fato, existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $\phi_{t_n}(x) \rightarrow y$. Como $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ é contínua em x , temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t+t_n}(x) = \phi_t \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x) \right) = \phi_t(y)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Como $t + t_n \rightarrow +\infty$ resulta que $\phi_t(y) \in L_\omega(x)$. Isso mostra que $L_\omega(x)$ é invariante pelo fluxo de f .

Para mostrar que $L_\omega(x)$ é fechado, vamos mostrar que seu complementar é aberto. Segue da definição de ω -limite que dado $y \in \mathbb{R}^m - L_\omega(x)$ existem $\epsilon > 0$ e $\bar{t} > 0$ tais que $\phi_t(x) \notin B(y, \epsilon)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, com $t \geq \bar{t}$. Decorre que $B(y, \epsilon) \cap L_\omega = \emptyset$ de modo que $B(y, \epsilon) \subset \mathbb{R}^m - L_\omega(x)$ e portanto $\mathbb{R}^m - L_\omega(x)$ é aberto. \square

Proposição 1.9.5 *Se $C \subset E$ é um conjunto fechado e positivamente invariante, então $L_\omega(x) \subset C$ para cada $x \in C$.*

Demonstração. Dado $y \in L_\omega(x)$, com $x \in C$, existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que

$$y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x).$$

Temos $\phi_{t_n}(x) \in C$ pela invariância de C e como C é fechado, temos $y \in C$. Logo, $L_\omega(x) \subset C$. \square

Corolário 1.9.1 *Se a órbita de f por x é periódica, então $L_\omega(x)$ é a própria órbita periódica.*

Demonstração. Suponha que a órbita γ de f por x seja periódica de período T . De acordo com o que observamos logo após a definição 1.9.8, $\phi_{nT}(x) = \phi_0(x) = x$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por um lado sabemos que γ é fechado e invariante, o que implica $L_\omega(x) \subset \gamma$ de acordo com a proposição 1.9.5. Por outro lado, dado $y = \phi_t(x)$ (t fixo) um ponto qualquer de γ , temos $\phi_{t+nT}(x) = \phi_t(x) = y$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ de modo que $y \in L_\omega(x)$ pois $t + nT \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$. Logo, $\gamma \subset L_\omega(x)$ e concluímos que $\gamma = L_\omega(x)$. \square

Corolário 1.9.2 *Se $z \in L_\omega(x)$, então $L_\omega(z) \subset L_\omega(x)$.*

Demonstração. Segue da proposição 1.9.4 que $L_\omega(x)$ é fechado e invariante. Dado $z \in L_\omega(x)$, decorre da proposição 1.9.5 que $L_\omega(z) \subset L_\omega(x)$. □

Encerraremos esta subseção apresentando dois teoremas que dizem respeito aos campos planares. As demonstrações destes teoremas podem ser encontradas em [4].

Teorema 1.9.4 (Teorema de Bendixson) *Sejam $E \subset \mathbb{R}^2$ aberto simplesmente conexo e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 . Se f tem uma órbita periódica, então ou $\operatorname{div} f$ é identicamente nulo ou troca de sinal em E .*

Teorema 1.9.5 (Teorema de Poincaré-Bendixson) *Os únicos conjuntos ω -limite compactos, não-vazios e sem singularidades de um campo planar são as órbitas periódicas do campo.*

Capítulo 2

Resultados Principais

Uma vez que demos o embasamento teórico necessário no capítulo 1, desenvolveremos neste capítulo o estudo das hipersuperfícies de curvatura escalar nula invariantes pela ação do grupo $O(p+1) \times O(q+1)$. Veremos na próxima seção que o estudo das hipersuperfícies invariantes por $O(p+1) \times O(q+1)$ em \mathbb{R}^{p+q+2} pode ser reduzido ao estudo de curvas geratrizes no plano e que a hipótese adicional de que tais hipersuperfícies sejam também de curvatura escalar nula nos conduz diretamente a um sistema de equações diferenciais ordinárias que por sua vez está associado a um campo de vetores no plano. O estudo deste campo, feito na seção 2.2, é de fundamental importância para a classificação destas hipersuperfícies. Uma vez obtidas as características das órbitas do campo associado, na seção 2.3 interpretamos estas informações para classificar as hipersuperfícies de curvatura escalar nula invariantes pela ação do grupo $O(p+1) \times O(q+1)$.

2.1 Hipersuperfícies de curvatura escalar nula invariantes por $O(p+1) \times O(q+1)$

Definição 2.1.1 *Sejam M uma variedade, G um grupo de Lie e $\phi : G \times M \rightarrow M$ um grupo de transformações agindo em M . Dizemos que M é invariante pela ação do grupo G quando $\phi_g(M) \subset M$ para todo $g \in G$.*

Sejam $G = O(p+1) \times O(q+1)$, $\mathbb{R}^{p+q+2} = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{q+1}$ e $\eta : G \times \mathbb{R}^{p+q+2} \rightarrow \mathbb{R}^{p+q+2}$ a ação dada por $\eta(A, B, z, w) = (Az, Bw)$. Sabemos do exemplo 1.8.3 que o espaço de órbitas de η pode ser identificado com o conjunto

$$\Omega = \pi(\mathbb{R}^{p+q+2}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Logo, toda hipersuperfície invariante pela ação do grupo G é imagem inversa pela aplicação π de alguma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ em Ω . Tal curva é chamada *curva geratriz* ou *curva perfil*. Em particular, a imagem inversa $\pi^{-1}(\gamma)$ da semi-reta $\gamma(t) = (t \cos \theta, t \sin \theta)$, $t \geq 0$, que faz um ângulo θ com eixo x , recebe o nome de *cone* C_θ .

Uma parametrização explícita de uma hipersuperfície invariante $M = \pi^{-1}(\gamma)$ é dada por

$$\mathbf{x}(t, \phi_1, \dots, \phi_p, \psi_1, \dots, \psi_q) = \left(x(t)\Phi(\phi_1, \dots, \phi_p), y(t)\Psi(\psi_1, \dots, \psi_q) \right),$$

onde Φ e Ψ são parametrizações das esferas unitárias $S^p(1) \subset \mathbb{R}^{p+1}$ e $S^q(1) \subset \mathbb{R}^{q+1}$ em coordenadas polares (veja o apêndice A). O vetor normal associado a esta parametrização é

$$N(t, \phi_1, \dots, \phi_p, \psi_1, \dots, \psi_q) = \left(-y'(t)\Phi(\phi_1, \dots, \phi_p), x'(t)\Psi(\psi_1, \dots, \psi_q) \right).$$

A partir dele obtemos as curvaturas principais de $M = \pi^{-1}(\gamma)$, a saber,

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}; \\ k_i &= \frac{y'(t)}{x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, p; \\ k_j &= -\frac{x'(t)}{y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}, \quad j = p+1, p+2, \dots, p+q. \end{aligned}$$

Por outro lado, a curvatura escalar da hipersuperfície M é dada por

$$S_2 = \sum_{i_1 < i_2} k_{i_1} k_{i_2}.$$

Deste modo, se $M = \pi^{-1}(\gamma)$ é uma hipersuperfície invariante de curvatura escalar nula, podemos verificar, substituindo os valores das curvaturas principais na equação acima, que a curva geratriz $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ satisfaz a seguinte equação:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \left[\frac{-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \left(p \frac{y'(t)}{x(t)} - q \frac{x'(t)}{y(t)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}p(p-1) \left(\frac{y'(t)}{x(t)} \right)^2 + \frac{1}{2}q(q-1) \left(\frac{x'(t)}{y(t)} \right)^2 - pq \frac{x'(t)y'(t)}{x(t)y(t)} \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

As curvas regulares $(x(t), y(t))$ satisfazendo a equação $S_2 = 0$ são invariantes por homotetias e, portanto, cada solução $\gamma(t)$ de (2.1) determina uma família M_λ de hipersuperfícies invariantes de curvatura escalar nula geradas pelas curvas $\gamma_\lambda(t) = (\lambda x(t), \lambda y(t))$.

Quando $y = y(x)$ a equação (2.1) pode ser escrita como

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) \left[-\frac{p(p-1)}{2} \frac{y}{x} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{q(q-1)}{2} \frac{x}{y} + pq \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]}{-qx + py \frac{dy}{dx}}. \quad (2.2)$$

Por outro lado, se $x = x(y)$, temos

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right) \left[-\frac{p(p-1)}{2} \frac{y}{x} - \frac{q(q-1)}{2} \frac{x}{y} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + pq \left(\frac{dx}{dy} \right) \right]}{-py + qx \frac{dx}{dy}}. \quad (2.3)$$

As equações (2.2) e (2.3) mostram que as curvas geratrizes possuem singularidades nos zeros das equações $-qx + py \frac{dy}{dx}$ e $-py + qx \frac{dx}{dy}$.

Se assumirmos que γ está parametrizada pelo comprimento de arco obtemos as equações

$$0 = x''(t)x'(t) + y''(t)y'(t); \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} 0 = & [-x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t)] \left(p \frac{y'(t)}{x(t)} - q \frac{x'(t)}{y(t)} \right) + \frac{1}{2}p(p-1) \left(\frac{y'(t)}{x(t)} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2}q(q-1) \left(\frac{x'(t)}{y(t)} \right)^2 - pq \frac{x'(t)y'(t)}{x(t)y(t)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Isolando y'' na equação (2.4) obtemos no termo que está entre colchetes da equação (2.5):

$$\begin{aligned} -x''y' + x' \left(-x'' \frac{x'}{y'} \right) &= -x'' \left(y' + \frac{(x')^2}{y'} \right) \\ &= -\frac{x''}{y'} ((x')^2 + (y')^2) \\ &= -\frac{x''}{y'}. \end{aligned}$$

Logo, podemos reescrever a equação (2.5) do seguinte modo:

$$x'' = \frac{y'(t) \left[\frac{1}{2}p(p-1) \left(\frac{y'(t)}{x(t)} \right)^2 + \frac{1}{2}q(q-1) \left(\frac{x'(t)}{y(t)} \right)^2 - pq \frac{x'(t)y'(t)}{x(t)y(t)} \right]}{\left[p \frac{y'(t)}{x(t)} - q \frac{x'(t)}{y(t)} \right]}.$$

Analogamente podemos isolar x'' em (2.4), substituir em (2.5) e obtermos

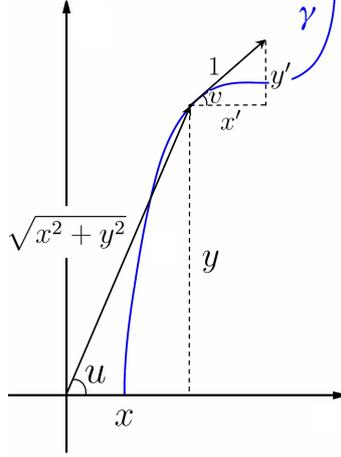
$$y'' = \frac{-x'(t) \left[\frac{1}{2}p(p-1) \left(\frac{y'(t)}{x(t)} \right)^2 + \frac{1}{2}q(q-1) \left(\frac{x'(t)}{y(t)} \right)^2 - pq \frac{x'(t)y'(t)}{x(t)y(t)} \right]}{\left[p \frac{y'(t)}{x(t)} - q \frac{x'(t)}{y(t)} \right]}.$$

2.2 Análise do campo vetorial associado

Considere a mudança de variáveis $(x, y) \mapsto (u, v)$ devida a Bombieri - de Giorgi - Giusti (veja [2]),

$$u = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \quad \text{e} \quad v = \arctan \left(\frac{y'}{x'} \right). \quad (2.6)$$

Uma ideia geométrica desta mudança está ilustrada na figura a seguir.



Segue que u e v satisfazem as seguintes relações:

$$\cos u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{sen } u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (2.7)$$

$$\cos v = x', \quad \text{sen } v = y', \quad (2.8)$$

$$v' = -x''y' + x'y'', \quad u' = \frac{y'x - yx'}{x^2 + y^2}, \quad (2.9)$$

onde as duas últimas igualdades são obtidas ao derivarmos (2.6) em relação a t .

Observe agora que os parâmetros (u, v) estão no fecho do conjunto $R = (0, \frac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)$ uma vez que $(x, y) \in \Omega$. Estes parâmetros também são invariantes pela homotetia $(x, y) \mapsto \lambda(x, y)$.

Admitindo $u' \neq 0$, multiplicando (2.5) por

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} u' = \frac{x^2 y^2 (y'x - yx')}{(x^2 + y^2)^2}$$

e usando as equações (2.7), (2.8) e (2.9) teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} u' \left[v' \left(p \frac{y'}{x} - q \frac{x'}{y} \right) + \frac{1}{2} p(p-1) \left(\frac{y'}{x} \right)^2 + \frac{1}{2} q(q-1) \left(\frac{x'}{y} \right)^2 - pq \frac{x'y'}{xy} \right] \\ &= \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} u' v' \left(p \frac{y'}{x} - q \frac{x'}{y} \right) + u' \frac{p(p-1)}{2} (y')^2 \frac{y^2}{x^2 + y^2} + u' \frac{q(q-1)}{2} (x')^2 \frac{x^2}{x^2 + y^2} \\ &\quad - pq u' x' y' \frac{xy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} u' v' \left(p \frac{y'}{x} - q \frac{x'}{y} \right) + u' \frac{p(p-1)}{2} \text{sen}^2 v \text{sen}^2 u + u' \frac{q(q-1)}{2} \cos^2 v \cos^2 u \\ &\quad - pq u' \cos v \text{sen } v \cos u \text{sen } u \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} u' v' \left(p \frac{y'}{x} - q \frac{x'}{y} \right) + u' \left[\frac{p(p-1)}{2} \sin^2 v \sin^2 u + \frac{q(q-1)}{2} \cos^2 v \cos^2 u - \frac{pq}{4} \sin(2v) \sin(2u) \right].$$

Deixando de lado a segunda parcela da igualdade acima e desenvolvendo a primeira parcela, teremos

$$\begin{aligned} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} u' v' \left(p \frac{y'}{x} - q \frac{x'}{y} \right) &= \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} v' \left(p \frac{y'}{x} - q \frac{x'}{y} \right) \\ &= \frac{x^2 y^2 v'}{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2})} (\cos u \sin v - \sin u \cos v) \left(p \frac{y'}{x} - q \frac{x'}{y} \right) \\ &= v' \sin(v - u) \left(py' \frac{y^2}{x^2 + y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - qx' \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= -v' \sin(u - v) (p \sin v \sin^2 u \cos u - q \cos v \cos^2 u \sin u) \\ &= -v' \cos u \sin u \sin(u - v) (p \sin v \sin u - q \cos v \cos u). \end{aligned}$$

Segue finalmente que

$$\begin{aligned} 0 &= -v' [\cos u \sin u \sin(u - v)] (p \sin v \sin u - q \cos v \cos u) \\ &\quad + u' \left[\frac{p(p-1)}{2} \sin^2 v \sin^2 u + \frac{q(q-1)}{2} \cos^2 v \cos^2 u - \frac{pq}{4} \sin(2v) \sin(2u) \right] \\ &= -v' \cdot X_1(u, v) + u' \cdot X_2(u, v) \\ &= \left\langle (X_1(u, v), X_2(u, v)), (-v', u') \right\rangle, \end{aligned}$$

onde

$$X_1(u, v) = [\cos u \sin u \sin(u - v)] (p \sin v \sin u - q \cos v \cos u), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} X_2(u, v) &= \frac{p(p-1)}{2} \sin^2 v \sin^2 u + \frac{q(q-1)}{2} \cos^2 v \cos^2 u \\ &\quad - \frac{pq}{4} \sin(2v) \sin(2u). \end{aligned} \quad (2.11)$$

A equação $\langle (X_1, X_2), (-v', u') \rangle = 0$ implica que o vetor $X = (X_1, X_2)$ é paralelo ao vetor tangente à curva $\phi(t) = (u(t), v(t))$. Logo, a equação diferencial $\langle (X_1, X_2), (-v', u') \rangle = 0$ é equivalente ao sistema de equações diferenciais ordinárias associado ao campo vetorial no plano (u, v) , dado por

$$X(u, v) = (X_1(u, v), X_2(u, v)) = (u', v').$$

Cada órbita $\phi(t) = (u(t), v(t))$ de X está associada a família M_λ de hipersuperfícies geradas pelas curvas geratrizes $\gamma_\lambda(t) = (\lambda x(t), \lambda y(t))$ determinadas por ϕ a menos de uma homotetia.

Como as funções $X_1(u, v)$ e $X_2(u, v)$ são limitadas (por serem soma e produto de funções limitadas) segue que o campo vetorial $X(u, v)$ é limitado. Além disso, é imediato verificar que $X(u, v)$ é periódico, de período π , em ambas as variáveis, u e v . Os dois lemas seguintes fornecem algumas propriedades das funções $X_1(u, v)$ e $X_2(u, v)$.

Lema 2.2.1 *A primeira função coordenada $X_1(u, v)$ do campo vetorial X possui as seguintes propriedades:*

- (1) *É identicamente nula ao longo dos gráficos das funções $u \equiv 0$, $u \equiv \frac{\pi}{2}$, $v_1(u) = u$ e $v_2(u) = u - \pi$;*
- (2) *É identicamente nula ao longo do gráfico da função $v_3(u) = \arctan\left(\frac{q}{p} \cot(u)\right)$, $u \in (0, \pi)$. Além disso, $\lim_{u \rightarrow 0} v_3(u) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{u \rightarrow \pi} v_3(u) = -\frac{\pi}{2}$;*
- (3) *$X_1(u, 0) = -q \cos^2 u \sin^2 u$ e $X_1(u, \frac{\pi}{2}) = -p \cos^2 u \sin^2 u$;*
- (4) *X_1 é estritamente positiva nos seguintes conjuntos abertos*

$$\begin{aligned} R_1 &= \left\{ v_1(u) < v < v_3(u) \right\} \cap \left\{ 0 < u < \arctan\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right) \right\}, \\ R_3 &= \left\{ v_3(u) < v < v_1(u) \right\} \cap \left\{ \arctan\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right) < u < \frac{\pi}{2} \right\}, \\ R_5 &= \left\{ v_2(u) < v < v_3(u) \right\} \cap \left\{ \frac{\pi}{2} < u < \pi - \arctan\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right) \right\}, \\ R_7 &= \left\{ v_3(u) < v < v_2(u) \right\} \cap \left\{ \pi - \arctan\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right) < u < \pi \right\}; \end{aligned}$$

e X_1 é estritamente negativa nos seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} R_2 &= \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq v < v_1(u) \right\} \cap \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq v < v_3(u) \right\} \cap \left\{ 0 < u < \frac{\pi}{2} \right\}, \\ R_4 &= \left\{ v_3(u) < v \leq \frac{\pi}{2} \right\} \cap \left\{ v_1(u) < v \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \\ R_6 &= \left\{ v_3(u) < v \leq \frac{\pi}{2} \right\} \cap \left\{ v_2(u) < v \leq \frac{\pi}{2} \right\} \cap \left\{ \frac{\pi}{2} < u < \pi \right\}, \\ R_8 &= \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq v < v_3(u) \right\} \cap \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq v < v_2(u) \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração. É imediato verificar que $X_1(u, v)$ é identicamente nula ao longo dos gráficos das funções $u \equiv 0$ e $u \equiv \frac{\pi}{2}$. Então vamos supor $u \neq 0, \frac{\pi}{2}$ e fazer $X_1(u, v) = 0$ para obtermos

$$\cos u \sin u \sin(u - v) = 0 \quad \text{ou} \quad p \sin v \sin u - q \cos v \cos u = 0.$$

Decorre da primeira igualdade que

$$\begin{aligned} \cos u \sin u (\sin u \cos v - \sin v \cos u) = 0 &\Rightarrow \cos u \sin^2 u \cos v = \cos^2 u \sin u \sin v \\ &\xrightarrow{u \neq \frac{\pi}{2}} \sin^2 u \cos v = \cos u \sin u \sin v \\ &\xrightarrow{u \neq 0} \sin u \cos v = \sin u \sin v. \end{aligned}$$

Se $v \neq \pm \frac{\pi}{2}$ segue que $\tan v = \tan u$ donde $v = u$ ou $v = u - \pi$. Se porém $v = \pm \frac{\pi}{2}$ podemos verificar que $X_1(u, \pm \frac{\pi}{2}) \neq 0$ para todo $u \in (0, \pi)$.

Decorre da segunda igualdade que

$$\begin{aligned} p \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u = q \cos v \cos u &\stackrel{u \neq 0}{\Rightarrow} \operatorname{sen} v = \frac{q}{p} \cot u \cos v \\ &\stackrel{v \neq \pm \frac{\pi}{2}}{\Rightarrow} \tan v = \frac{q}{p} \cot u \\ &\Rightarrow v = \arctan \left(\frac{q}{p} \cot u \right). \end{aligned}$$

Em suma, $X_1(u, v)$ é nula apenas ao longo dos gráficos das funções

$$u \equiv 0, \quad u \equiv \frac{\pi}{2}, \quad v_1(u) = u, \quad v_2(u) = u - \pi \quad \text{e} \quad v_3(u) = \arctan \left(\frac{q}{p} \cot u \right).$$

Feito isto, os demais itens são de fácil verificação. Um esboço das regiões do item (4) é apresentado mais adiante com $q > p$. \square

Lema 2.2.2 *A segunda função coordenada X_2 do campo vetorial X possui as seguintes propriedades:*

(1) *É identicamente nula ao longo dos gráficos das funções*

$$w_{\pm}(u) = \arctan \left(\frac{pq \pm \sqrt{pq(p+q-1)}}{p(p-1)} \cot(u) \right),$$

$$u \in (0, \pi). \text{ Além disso, } \lim_{u \rightarrow 0} w_{\pm}(u) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{u \rightarrow \pi} w_{\pm}(u) = -\frac{\pi}{2};$$

(2)

$$\begin{aligned} X_2(0, v) &= \frac{1}{2}q(q-1) \cos^2 v, & X_2\left(\frac{\pi}{2}, v\right) &= \frac{1}{2}p(p-1) \operatorname{sen}^2 v, \\ X_2(u, 0) &= \frac{1}{2}q(q-1) \cos^2 u, & X_2\left(u, \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2}p(p-1) \operatorname{sen}^2 u; \end{aligned}$$

(3) X_2 é estritamente negativa nas regiões

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ w_-(u) < v < w_+(u) \right\} \cap \left\{ 0 < u < \frac{\pi}{2} \right\}, \\ S_3 &= \left\{ w_+(u) < v < w_-(u) \right\} \cap \left\{ \frac{\pi}{2} < u < \pi \right\}; \end{aligned}$$

e X_2 é estritamente positiva nas regiões

$$\begin{aligned} S_2 &= \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq v < w_+(u) \right\} \cap \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq v < w_-(u) \right\} \cap \left\{ 0 < u < \pi \right\}, \\ S_4 &= \left\{ w_+(u) < v \leq \frac{\pi}{2} \right\} \cap \left\{ w_-(u) < v \leq \frac{\pi}{2} \right\} \cap \left\{ 0 < u < \pi \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Como no lema anterior, é fácil verificar que $X_2(0, v) \neq 0 \neq X_2(\pi, 0)$ e que $X_2(u, \pm \frac{\pi}{2}) \neq 0$. Deste modo, supondo $u \neq 0, \frac{\pi}{2}$ e fazendo $X_2(u, v) = 0$, decorre que

$$\frac{p(p-1)}{2} \operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen}^2 u - pq \cos u \cos v \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v + \frac{q(q-1)}{2} \cos^2 v \cos^2 u = 0.$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $(\cos^2 v \sin^2 u)^{-1}$ obtemos a equação quadrática em $\tan v$,

$$\frac{p(p-1)}{2} \tan^2 v - pq \cot u \tan v + \frac{q(q-1)}{2} \cot^2 u = 0,$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} \tan v &= \frac{pq \cot u \pm \sqrt{(pq)^2 \cot^2 u - 4 \frac{p(p-1)}{2} \frac{q(q-1)}{2} \cot^2 u}}{2 \frac{p(p-1)}{2}} \\ &= \frac{pq \cot u \pm \sqrt{(pq)^2 - pq(p-1)(q-1)} |\cot u|}{p(p-1)}. \end{aligned}$$

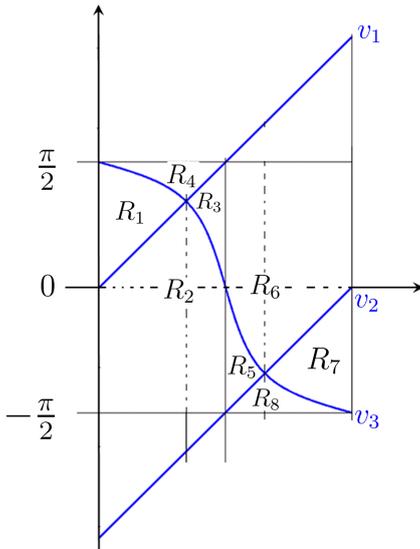
Logo, $X_2(u, v)$ é identicamente nula apenas ao longo dos gráficos das funções

$$\tilde{w}_{\pm}(u) = \arctan \left(\frac{pq \cot u \pm \sqrt{(pq)^2 - pq(p-1)(q-1)} |\cot u|}{p(p-1)} \right).$$

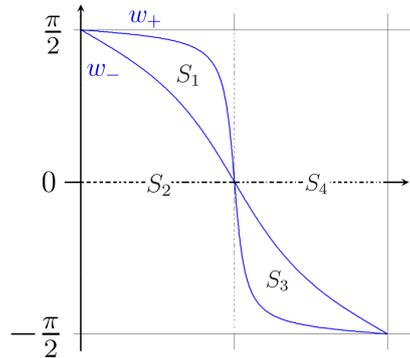
Observe que os gráficos destas funções e das funções

$$w_{\pm} = \arctan \left(\frac{pq \pm \sqrt{pq(p+q-1)}}{p(p-1)} \cot u \right),$$

cobrem o mesmo conjunto em \mathbb{R}^2 . Portanto, podemos afirmar que $X_2(u, v)$ é identicamente nula apenas ao longo dos gráficos das funções $w_{\pm}(u)$. Agora é imediato verificar os demais itens do lema. Um esboço das regiões do item (4) é apresentado logo a seguir com $q > p$. □



Lema 2.2.1



Lema 2.2.2

Decorre das equações (2.10), (2.11) e dos lemas que acabamos de apresentar que os pontos de equilíbrio do campo X são obtidos ao intersectarmos as curvas $v_1(u), v_2(u)$ e $v_3(u)$ com as curvas $w_{\pm}(u)$ e ao fazermos uso da periodicidade de X . A proposição seguinte é imediata.

Proposição 2.2.1 *As singularidades do campo vetorial $X(u, v)$ em $\bar{R} = [0, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi]$ ocorrem nos pontos*

$$P_1 = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right), \quad P_2 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad P_3 = \left(\frac{\pi}{2}, -\pi\right), \quad P_4 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad P_5 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

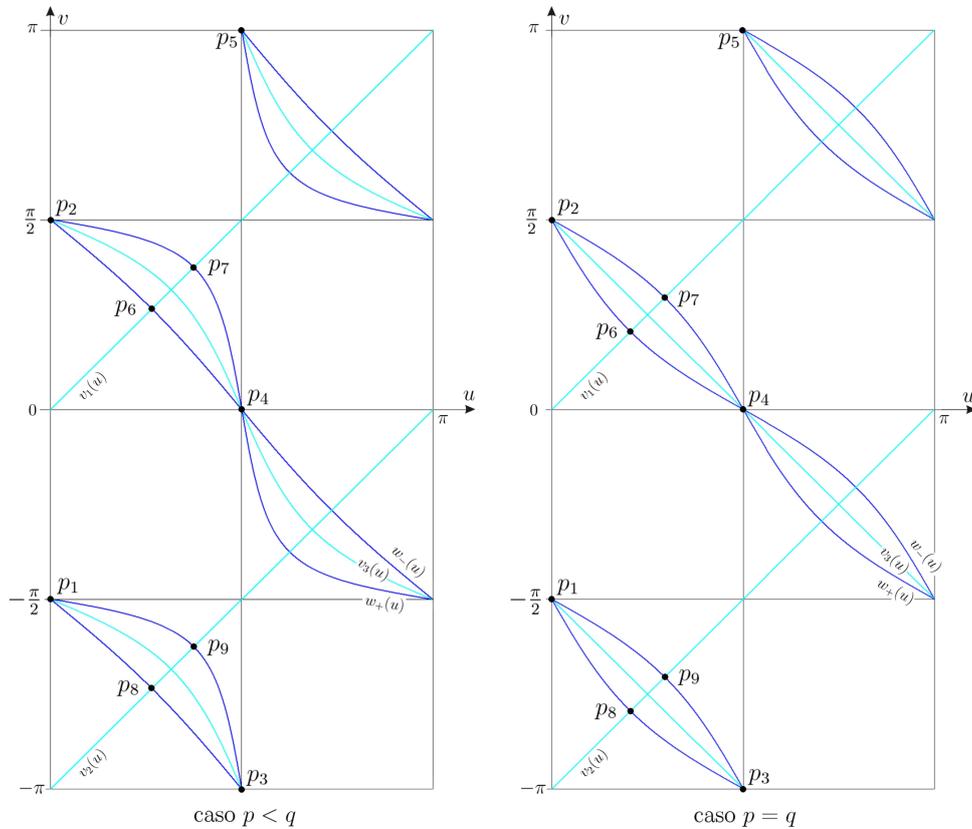
$$P_6 = (\alpha, \alpha), \quad P_7 = (\beta, \beta), \quad P_8 = (\alpha, \alpha - \pi) \quad e \quad P_9 = (\beta, \beta - \pi),$$

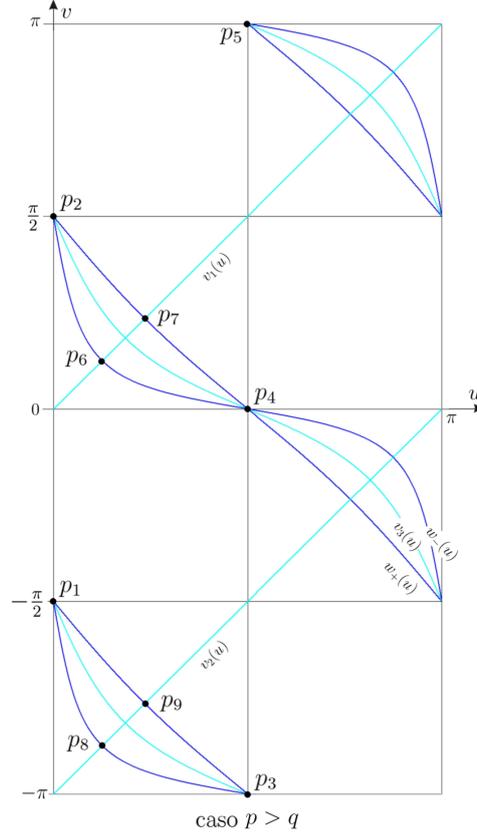
onde

$$\alpha = \arctan \left(\sqrt{\frac{pq - \sqrt{pq(p+q-1)}}{p(p-1)}} \right) \quad e$$

$$\beta = \arctan \left(\sqrt{\frac{pq + \sqrt{pq(p+q-1)}}{p(p-1)}} \right). \quad (2.12)$$

As figuras abaixo nos dão uma ideia geométrica do que diz a proposição anterior separando os três casos possíveis: $p < q$, $p = q$ e $p > q$.





Observação 2.2.1 Derivando cada função coordenada do campo X em relação a u e v obtemos a matriz da diferencial de X , $DX(u, v) = (a_{ij}) \in M(2)$, cujas entradas são

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \left[\cos(2u) \sen(u - v) + \frac{1}{2} \sen(2u) \cos(u - v) \right] \left[-q \cos u \cos v + p \sen u \sen v \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sen(2u) \sen(u - v) \left[q \cos v \sen u + p \sen v \cos u \right]; \\
 a_{12} &= -\frac{1}{2} \sen(2u) \cos(u - v) \left[-q \cos u \cos v + p \sen u \sen v \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sen(2u) \sen(u - v) \left[q \cos u \sen v + p \sen u \cos v \right]; \\
 a_{21} &= -q \cos u \cos v [(q - 1) \cos v \sen u + p \cos u \sen v] \\
 &\quad + p \sen u \sen v [q \cos v \sen u + (p - 1) \cos u \sen v]; \\
 a_{22} &= -q \cos u \cos v [(q - 1) \cos u \sen v + p \cos v \sen u] \\
 &\quad + p \sen u \sen v [q \cos u \sen v + (p - 1) \cos v \sen u].
 \end{aligned}$$

Algumas vezes a matriz $DX(u, v)$ é chamada de *a parte linear* de X .

Lema 2.2.3 Para $v = u$, a parte linear de X é dada por $DX(u, u) = (b_{ij})$, onde

$$\begin{aligned}
 b_{11} = -b_{12} &= \frac{\sen(2u)}{2} [-q \cos^2 u + p \sen^2 u] = \frac{\sen(2u)}{2} \frac{1}{1 + \tan^2 u} [-q + p \tan^2 u]; \\
 b_{21} = b_{22} &= [p + q - 1] b_{11}.
 \end{aligned}$$

Além disso, $DX(u, u) = DX(u, u - \pi)$ o que implica $DX(P_6) = DX(P_8)$ e $DX(P_7) = DX(P_9)$.

Demonstração. As expressões de (a_{ij}) dadas na observação 2.2.1 nos fornecem, após algumas simplificações, as expressões de (b_{ij}) . A partir da observação 2.2.1 podemos ver, também sem dificuldade, que $DX(u, u) = DX(u, u - \pi)$. Sejam

$$\begin{aligned} w &= \tan^2 \alpha = \frac{pq - \sqrt{pq(p+q-1)}}{p(p-1)} > 0, \\ \bar{w} &= \tan^2 \beta = \frac{pq + \sqrt{pq(p+q-1)}}{p(p-1)} > 0. \end{aligned}$$

Antes de calcularmos as matrizes $DX(P_6)$ e $DX(P_7)$ notemos o seguinte:

$$\begin{aligned} p, q > 1 &\Rightarrow 0 < (p+q)(p-1) = p(p-1) + qp - q = -q + p(p+q-1) \\ &\Rightarrow q^2 < pq(p+q-1) \\ &\Rightarrow -q < 0 < q < \sqrt{pq(p+q-1)}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade $-q < \sqrt{pq(p+q-1)}$ obtemos

$$0 < q - pq + pq + \sqrt{pq(p+q-1)} = -q(p-1) + pq + \sqrt{pq(p+q-1)}.$$

Logo,

$$0 < -q + \frac{pq + \sqrt{pq(p+q-1)}}{p-1}.$$

Portanto, $-q + p\bar{w} > 0$. De maneira semelhante, a desigualdade $q < \sqrt{pq(p+q-1)}$ implica $-q + pw < 0$.

Agora, fazendo $a = b_{11}(P_6)$ e $b = b_{21}(P_6)$, obtemos

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sin(2\alpha)}{2} \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} (-q + p \tan^2 \alpha) \\ &= \sin \alpha \cos \alpha (1 + \tan^2 \alpha) \frac{1}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} (-q + p \tan^2 \alpha) \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \sec^2 \alpha \frac{1}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} (-q + p \tan^2 \alpha) \\ &= \frac{\tan \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} (-q + p \tan^2 \alpha) \\ &= \frac{\sqrt{w}}{(1+w)^2} (-q + pw). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} b &= (p+q-1)b_{11}(P_6) \\ &= (p+q-1)a. \end{aligned}$$

Segue daí que $DX(P_6) = DX(P_8) = \begin{bmatrix} a & -a \\ b & b \end{bmatrix}$.

Analogamente podemos mostrar que $DX(P_7) = DX(P_9) = \begin{bmatrix} \bar{a} & -\bar{a} \\ \bar{b} & \bar{b} \end{bmatrix}$, onde

$$\bar{a} = \frac{\sqrt{\bar{w}}}{(1 + \bar{w})^2}(-q + p\bar{w}) \quad \text{e} \quad \bar{b} = (p + q - 1)\bar{a}.$$

Por fim, notemos que

$$-q + pw < 0 < -q + p\bar{w} \implies a < 0 < \bar{a}.$$

□

O leitor pôde observar que a demonstração acima foi além do afirmado no enunciado do lema. Fizemos este esforço adicional porque usaremos fortemente o sinal das constantes a e \bar{a} na demonstração da próxima proposição.

Proposição 2.2.2 *Para quaisquer inteiros $p, q > 1$, os pontos singulares P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 do campo vetorial X , são pontos degenerados. Se $p+q \leq 6$, P_6 e P_8 são nós estáveis e P_7 e P_9 são nós instáveis. Se $p+q \geq 7$, P_6 e P_8 são focos estáveis e P_7 e P_9 são focos instáveis.*

Demonstração. Sabemos que o polinômio característico da matriz $DX(u, v) \subset M(2)$ é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}DX(u, v)\lambda + \det DX(u, v).$$

Segue que as raízes de $p(\lambda)$ são dadas por

$$\lambda = \frac{\text{tr}DX(u, v) \pm \sqrt{(\text{tr}DX(u, v))^2 - 4\det DX(u, v)}}{2},$$

que são os autovalores do operador DX no ponto (u, v) . Assim, é suficiente estudarmos os sinais destas raízes em cada um dos pontos P_i , $i = 1, 2, \dots, 9$.

Podemos verificar através da observação 2.2.1 que $\lambda = 0$ para qualquer dos pontos P_i , $i = 1, \dots, 5$. Logo, os pontos P_i com $i = 1, \dots, 5$ são todos degenerados.

Em relação aos pontos P_6 e P_8 temos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 6ab}}{2} = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 + (p + q - 1)^2 a^2 - 6(p + q - 1)a^2}}{2} \\ &= \frac{a + b \pm |a|\sqrt{(p + q)^2 - 8(p + q) + 8}}{2} \\ &= \frac{a + b \pm |a|\sqrt{[p + q + (-4 + 2\sqrt{2})][p + q + (-4 - 2\sqrt{2})]}}{2}. \end{aligned}$$

Uma vez que $-4 + 2\sqrt{2} \approx -1,7$ e $-4 - 2\sqrt{2} \approx -6,83$ fica claro a partir da igualdade acima porque distinguimos no enunciado os casos $p + q \leq 6$ e $p + q \geq 7$. No

primeiro caso os autovalores são reais puros e no segundo eles são complexos com parte real igual a $a + b$. A partir (da demonstração) do lema 2.2.3 podemos observar ainda que

$$a + b = a(p + q) < 0 \quad \text{e que} \quad [p + q + (-4 + 2\sqrt{2})][p + q + (-4 - 2\sqrt{2})] < (p + q)^2.$$

Logo, caso $p + q \leq 6$,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a + b + |a|\sqrt{[p + q + (-4 + 2\sqrt{2})][p + q + (-4 - 2\sqrt{2})]}}{2} \\ &< \frac{a(p + q) + |a|(p + q)}{2} = \frac{a(p + q) - a(p + q)}{2} = 0; \\ \lambda_2 &= \frac{a + b - |a|\sqrt{[p + q + (-4 + 2\sqrt{2})][p + q + (-4 - 2\sqrt{2})]}}{2} \\ &< \frac{a + b}{2} = \frac{a(p + q)}{2} < 0. \end{aligned}$$

Obviamente, caso $p + q \geq 7$, a parte real de λ_1, λ_2 é negativa. Segue que P_6 e P_8 são nós estáveis (caso $p + q \leq 6$) ou focos estáveis (caso $p + q \geq 7$).

Toda esta análise feita para P_6 e P_8 pode ser reproduzida com os pontos P_7 e P_9 para concluirmos que P_7 e P_9 são nós instáveis (caso $p + q \leq 6$) ou focos instáveis (caso $p + q \geq 7$). Isto finaliza a demonstração. □

Lema 2.2.4 *As funções $f(u, v) = \cos u \sen u \sen(u - v)$, $g(u, v) = p \sen v \sen u - q \cos v \cos u$ e $X_2(u, v)$ satisfazem as seguintes igualdades:*

$$f_u = \sen u \cos v(2 - 3 \sen^2 u) + \sen u \cos v(2 - 3 \cos^2 u); \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} f \cdot g_u &= -q \cos u \cos v [\sen^2 u (\sen v \cos u - \cos v \sen u)] \\ &\quad + p \sen u \sen v [-\cos^2 u (\sen v \cos u - \cos v \sen u)]; \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} (X_2)_v &= -q \cos u \cos v [(q - 1) \cos u \sen v + p \sen u \cos v] \\ &\quad + p \sen u \sen v [q \cos u \sen v + (p - 1) \sen u \cos v]; \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$f \cdot g_u + (X_2)_v = g \cdot [\sen u \cos v(p - \sen^2 u) + \sen v \cos u(q - \cos^2 u)]. \quad (2.16)$$

Demonstração. Calculando diretamente cada um dos termos do lado esquerdo nas igualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned} f_u &= (-\sen u \sen u + \cos u \cos u) \sen(u - v) + \cos u \sen u \cos(u - v) \\ &= (\cos^2 u - \sen^2 u)(\sen u \cos v - \sen v \cos u) \\ &\quad + \cos u \sen u(\cos u \cos v + \sen u \sen v) \\ &= (1 - 2 \sen^2 u) \sen u \cos v + (1 - 2 \cos^2 u) \sen v \cos u \\ &\quad + \cos^2 u \sen u \cos v + \sen^2 u \sen v \cos u \\ &= (2 - 3 \sen^2 u) \sen u \cos v + (2 - 3 \cos^2 u) \sen v \cos u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f \cdot g_u &= \cos u \sin u \sin(u-v)(q \sin u \cos v + p \cos u \sin v) \\
&= q \cos u \cos v \sin^2 u \sin(u-v) + p \sin u \sin v \cos^2 u \sin(u-v) \\
&= -q \cos u \cos v [\sin^2 u (\sin v \cos u - \sin u \cos v)] \\
&\quad + p \sin u \sin v [-\cos^2 u (\sin v \cos u - \sin u \cos v)].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(X_2)_v &= -2 \frac{q(q-1)}{2} \cos^2 u \cos v \sin v + 2 \frac{p(p-1)}{2} \sin^2 u \sin v \cos v \\
&\quad - pq \cos u \sin u (-\sin v \sin v + \cos v \cos v) \\
&= -q(q-1) \cos^2 u \cos v \sin v + p(p-1) \sin^2 u \sin v \cos v \\
&\quad + pq \sin u \sin^2 v \cos u - pq \cos u \cos^2 v \sin u \\
&= -q \cos u \cos v [(q-1) \cos u \sin v + p \cos v \sin u] \\
&\quad + p \sin u \sin v [(p-1) \sin u \cos v + q \sin v \cos u].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f \cdot g_u + (X_2)_v &= -q \cos u \cos v [\sin^2 u (\sin v \cos u - \sin u \cos v) \\
&\quad + (q-1) \cos u \sin v + p \cos v \sin u] \\
&\quad + p \sin u \sin v [-\cos^2 u (\sin v \cos u - \sin u \cos v) \\
&\quad + (p-1) \sin u \cos v + q \sin v \cos u] \\
&= -q \cos u \cos v [\sin u \cos v (p - \sin^2 u) + \sin v \cos u (q - 1 + \sin^2 u)] \\
&\quad + p \sin u \sin v [\sin u \cos v (p - 1 + \cos^2 u) + \sin v \cos u (q - \cos^2 u)] \\
&= (-q \cos u \cos v + p \sin u \sin v) [\sin u \cos v (p - \sin^2 u) \\
&\quad + \sin v \cos u (q - \cos^2 u)] \\
&= g \cdot [\sin u \cos v (p - \sin^2 u) + \sin v \cos u (q - \cos^2 u)].
\end{aligned}$$

□

Na proposição a seguir vamos analisar o comportamento de X nas regiões

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right), & D_2 &= \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \\
D_3 &= \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) & \text{e } D_4 &= \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).
\end{aligned}$$

Proposição 2.2.3 *A divergência do campo vetorial $X(u, v)$ é*

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X(u, v) &= (-q \cos u \cos v + p \sin u \sin v) [\sin u \cos v (p + 2 - 4 \sin^2 u) \\
&\quad + \sin v \cos u (q + 2 - 4 \cos^2 u)]
\end{aligned}$$

e, portanto, X não tem órbitas periódicas em $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$.

Demonstração. Utilizando as funções f , g e X_2 dadas no lema 2.2.4 temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X(u, v) &= (X_1)_u + (X_2)_v = [f_u \cdot g + f \cdot g_u] + (X_2)_v \\
&= f_u \cdot g + [f \cdot g_u + (X_2)_v] \\
&= \sin u \cos v (2 - 3 \sin^2 u) + \sin u \cos v (2 - 3 \cos^2 u) \cdot g \\
&\quad + [\sin u \cos v (p - \sin^2 u) + \sin v \cos u (q - \cos^2 u)] \cdot g \\
&= g [\sin u \cos v (p + 2 - 4 \sin^2 u) + \sin v \cos u (q + 2 - 4 \cos^2 u)],
\end{aligned}$$

donde segue a expressão de $\text{div}X(u, v)$.

Observe agora que, sendo $p, q > 1$, os termos

$$p + 2 - 4 \sin^2 u, \quad q + 2 - 4 \cos^2 u \quad \text{e} \quad \sin u \cos v$$

são estritamente positivos na união das regiões D_i . Além disso, $\sin v \cos u > 0$ para $(u, v) \in D_1 \cup D_4$ e $g(u, v) = -q \cos u \cos v + p \sin u \sin v$ é estritamente positiva acima do gráfico da função

$$v_3(u) = \arctan \left(\frac{q}{p} \cot u \right)$$

e estritamente negativa abaixo (veja a demonstração do lema 2.2.1). Podemos então separar $D_1 \cup D_4$ em dois conjuntos simplesmente conexos e usar o teorema de Bendixson em cada um deles para concluirmos que X não possui órbitas periódicas em $D_1 \cup D_4$. Por outro lado, o lema 2.2.1 nos diz que X_2 é estritamente positivo em $S_2 \cup S_4 \supset D_2 \cup D_3$ e este fato garante que X também não possui órbitas periódicas em $D_2 \cup D_3$. \square

A seguir, $R_i^{\pm\pi}$ representa a translação da região R_i por $(0, \pm\pi)$, $i = 1, 2, 3, 4$ (veja o lema 2.2.1).

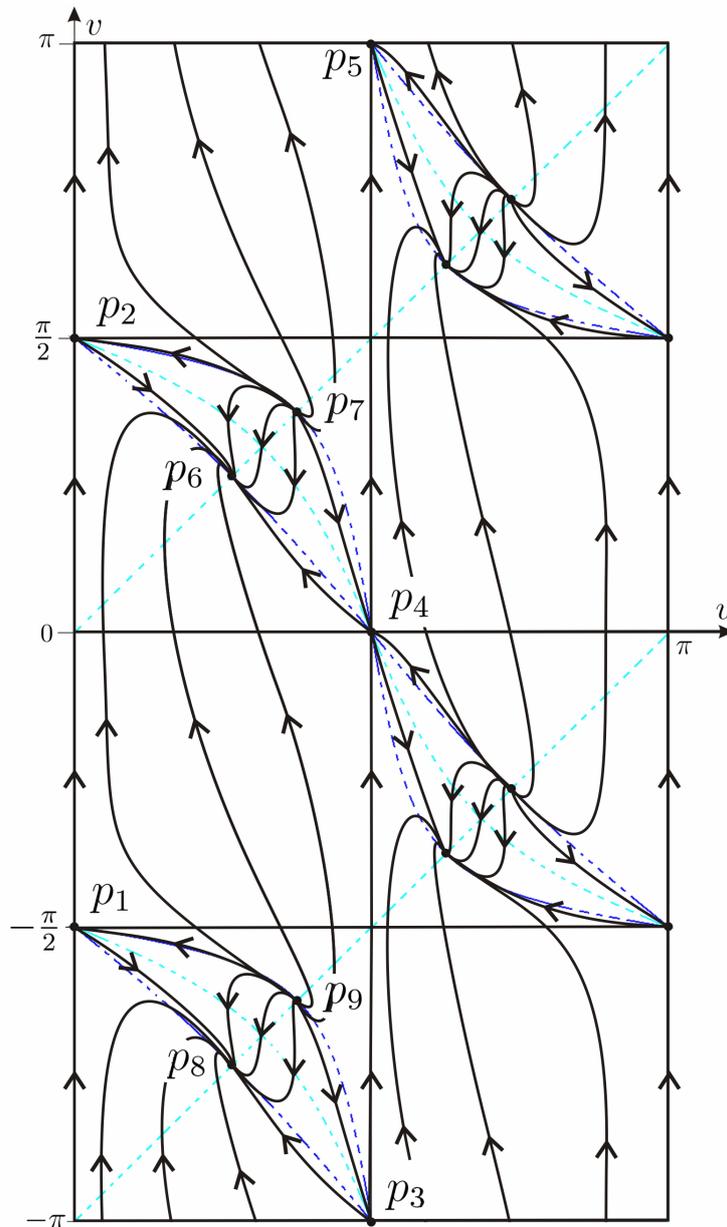
Proposição 2.2.4 *Cada órbita $\phi(t)$, de $X = (X_1, X_2)$, está definida para todos os valores de t . Na região $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, -\pi \leq v \leq \pi\}$ seu possível comportamento é um dos seguintes: (veja figura adiante)*

- (1) $\phi(t)$ é ou uma órbita vertical com α -limite P_1 e ω -limite P_2 ou uma órbita vertical com α -limite P_3 e ω -limite P_4 ou ainda uma órbita vertical com α -limite P_4 e ω -limite P_5 . Incluímos as órbitas singulares P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 neste caso;
- (2) $\phi(t)$ é ou uma semi-órbita vertical com ω -limite P_1 ou uma semi-órbita vertical com α -limite P_2 ;
- (3) $\phi(t)$ é algumas das órbitas singulares P_6, P_7, P_8 ou P_9 ;
- (4) $\phi(t)$ é uma das órbitas em $(0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$ atravessando o gráfico da função $v_3(u)$, $0 < u < \frac{\pi}{2}$, com α -limite P_7 e ω -limite P_6 ;
- (5) $\phi(t)$ é uma órbita contida na região $R_1 \cup R_2 \cup R_3^{-\pi} \cup R_4^{-\pi}$ com α -limite P_9 e ω -limite P_6 ;
- (6) $\phi(t)$ é uma conexão de pontos de sela contidos na região $R_3 \cup R_4$ com α -limite P_7 e ω -limite P_2 ;
- (7) $\phi(t)$ é uma conexão de pontos de sela contidos na região $R_1 \cup [R_2 \cap (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})]$ com α -limite P_2 e ω -limite P_6 ;
- (8) $\phi(t)$ é uma conexão de pontos de sela contidos na região $R_1 \cup [R_2 \cap (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})]$ com α -limite P_4 e ω -limite P_6 ;
- (9) $\phi(t)$ é uma conexão de pontos de sela contidos na região $R_3 \cup R_4$ com α -limite P_7 e ω -limite P_4 ;

(10) $\phi(t)$ é uma órbita, ou parte de uma, obtida pela translação de $(0, \pm\pi)$ de uma das órbitas dadas nos itens anteriores. Mais ainda, para $p+q \leq 6$ os pontos singulares P_6 e P_8 apresentam uma estrutura de nó estável e P_7 e P_9 são nós instáveis. Para $p+q \geq 7$, os pontos singulares P_6 e P_8 são focos estáveis e P_7 e P_9 são focos instáveis.

Demonstração. A demonstração desta proposição é consequência dos lemas 2.2.1 e 2.2.2, das proposições 2.2.1 à 2.2.3, do teorema de Poincaré-Bendixson e do teorema do fluxo tubular. \square

A figura abaixo ilustra o retrato de fase do campo X com $p+q \geq 7$. O retrato de fase para $p+q \leq 6$ é semelhante a este.



2.3 Classificação das hipersuperfícies invariantes

Nesta seção vamos traduzir o comportamento das órbitas $\phi(t) = (u(t), v(t))$ do campo vetorial X dado na proposição 2.2.4 em informações com respeito as curvas geratrizes $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ em Ω . Este estudo geométrico nos possibilita classificar as hipersuperfícies invariantes por $O(p+1) \times O(q+1)$.

Iremos admitir o seguinte fato a respeito de hipersuperfícies invariantes por $O(p+1) \times O(q+1)$: $M = M^{p+q+1} \subset \mathbb{R}^{p+q+2}$ é mergulhada se, e somente se, a curva perfil associada é mergulhada e se a órbita de X associada à curva geratriz é definida para todo $t \in \mathbb{R}$ então a hipersuperfície correspondente é completa.

Observação 2.3.1 Nas demonstrações seguintes usaremos constantemente os sinais das funções X_1 e X_2 . Assim, por exemplo, quando usarmos o lema 2.2.1 estaremos nos referindo ao sinal da função X_1 na região que estamos trabalhando ou, de maneira mais geométrica, a direção que uma órbita pode (ou não) seguir em determinada região.

Para o lema seguinte é útil lembrar que o ponto $(\theta, \theta) \in \mathbb{R}^2$, onde $\theta = \sqrt{\frac{q}{p}}$, é o ponto de intersecção das curvas $v_1(u)$ e $v_3(u)$ dadas no lema 2.2.1. O leitor pode usar a figura da proposição 2.2.4 como guia para sua demonstração.

Lema 2.3.1 *Sejam $\phi(t) = (u(t), v(t))$ uma órbita com α -limite $P_9 = (\beta, \beta - \pi)$ e ω -limite $P_6 = (\alpha, \alpha)$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a curva geratriz associada. A órbita ϕ intersecta o segmento $l = \left\{ \left(\theta = \sqrt{\frac{q}{p}}, v \right) : \theta - \pi < v < \theta \right\}$ exatamente uma vez e portanto $\gamma(t)$ intersecta o raio $y = \sqrt{\frac{q}{p}}x$ exatamente uma vez.*

Demonstração. Em primeiro lugar observe que a intersecção deve ocorrer na região $R_1 \cup R_2 \cup R_4^{-\pi}$. Por hipótese temos

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = \beta, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \alpha,$$

com $\alpha < \theta < \beta$. Decorre do teorema do valor intermediário que existe um t_0 tal que $u(t_0) = \theta$.

Seja t_1 o maior dos $t \in (-\infty, t_0)$ (podendo ser $-\infty$) para o qual $Q_1 = \phi(t_1) = (u(t_1), v(t_1))$ é um ponto do segmento $v = u - \pi$. Daí temos duas possibilidades:

- (i) $t_1 = -\infty$. Neste caso $\phi((-\infty, t_0)) \not\subset R_3^{-\pi}$ pois caso contrário existiriam um $-\infty < \tilde{t} < t_0$, com $\phi(\tilde{t}) \in R_3^{-\pi}$ e, pelo teorema da alfândega, um $\tilde{t} < \tilde{t}_1 < t_0$ com $\phi(\tilde{t}_1)$ pertencente ao gráfico de $v = u - \pi$, contradizendo a escolha de t_1 .
- (ii) $t_1 \neq -\infty$. Neste caso $\phi((-\infty, t_1)) \subset R_3^{-\pi}$. O argumento para provar esta afirmação é semelhante ao do item anterior.

Analogamente podemos escolher t_2 como o menor $t \in (t_0, +\infty)$ para o qual $Q_2 = \phi(t_2) = (u(t_2), v(t_2))$ é um ponto do segmento $v = u$ e mostrar que $t_2 = +\infty$ ou $\phi((t_2, +\infty)) \subset R_1$.

Segue desta construção e da proposição 2.2.4 que a intersecção com l se dá em $\phi((t_1, t_2)) \subset R_2 \cup R_4^{-\pi}$. Mas o lema 2.2.1 implica que $u(t)$ é estritamente decrescente em $R_2 \cup R_4^{-\pi}$ donde injetiva em $[t_1, t_2]$. Logo, existe um único t_0 tal que $u(t_0) = \theta$. Isso mostra que $\phi(t)$ intersecta o segmento l em um único ponto. \square

Proposição 2.3.1 *A curva geratriz dada no lema anterior não possui auto-intersecções.*

Demonstração. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a curva geratriz associada à $\phi(t) = (u(t), v(t))$. Decorre do lema 2.3.1 que existe um certo $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y(t_0) = \sqrt{\frac{q}{p}}x(t_0)$. Por outro lado, o lema 2.2.2 garante que existem únicos $t_1 < t_2$ tais que $v(t_1) = -\frac{\pi}{2}$ e $v(t_2) = 0$. Existem três situações a serem consideradas:

$$t_1 < t_0 < t_2, \quad t_1 < t_2 < t_0 \quad \text{ou} \quad t_0 < t_1 < t_2,$$

sendo que a última é equivalente à segunda tomando a curva $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t)$ no lugar de γ . Portanto, podemos supor que existem apenas duas situações a serem consideradas:

$$t_1 < t_0 < t_2 \quad \text{ou} \quad t_1 < t_2 < t_0.$$

Suponha $t_1 < t_0 < t_2$. Lembrando as hipóteses do lema anterior podemos observar que

$$\begin{aligned} -\pi < \beta - \pi < v(t) < 0, & \quad \forall t \in (-\infty, t_2), \\ -\frac{\pi}{2} < v(t) < \alpha < \frac{\pi}{2}, & \quad \forall t \in (t_1, +\infty). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} y'(t) &= \text{sen } v(t) < 0, & \quad t \in (-\infty, t_2), \\ x'(t) &= \text{cos } v(t) > 0, & \quad t \in (t_1, +\infty). \end{aligned}$$

Isto mostra que $y(t)$ é injetiva em $(-\infty, t_2)$ donde $\gamma(t)$ é injetiva neste intervalo. Do mesmo modo, $x(t)$ é injetiva em $(t_1, +\infty)$ o que implica $\gamma(t)$ injetiva em $(t_1, +\infty)$. Para concluirmos a demonstração deste caso, devemos mostrar que não existem $\tilde{t}_1 < t_1$ e $\tilde{t}_2 > t_2$ tais que $\gamma(\tilde{t}_1) = \gamma(\tilde{t}_2)$. Mas isto é claro, uma vez que a unicidade de t_0 e $y'(t) < 0$, $t \in (-\infty, t_2)$, implicam

$$y(t) > \sqrt{\frac{q}{p}}x(t), \quad \forall t \leq t_1 < t_0 \quad \text{e} \quad y(t) < \sqrt{\frac{q}{p}}x(t), \quad \forall t \geq t_2 > t_0.$$

Logo, caso $t_1 < t_0 < t_2$, $\gamma(t)$ não possui auto-intersecções. Para o caso $t_1 < t_2 < t_0$, sugerimos ao leitor, consultar [8]. \square

Proposição 2.3.2 *A curva geratriz $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ associada a uma órbita contida na região $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ pode ser pensada como o gráfico (ou união de gráficos quando $\gamma(t)$ tem uma singularidade) de uma função $y = y(x)$ ou $x = x(y)$. Além disso, existem singularidades nos zeros das equações*

$$-qx + py \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad -py + qx \frac{dx}{dy} = 0,$$

as quais correspondem as coordenadas (u, v) com $v = \arctan\left(\frac{q}{p} \cot(u)\right)$.

Demonstração. Seja t_0 um ponto não singular de γ , isto é,

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0).$$

Vamos supor $x'(t_0) \neq 0$. Neste caso, o teorema da função inversa garante a existência de uma vizinhança $I \subset \mathbb{R}$ de t_0 tal que $x : I \rightarrow J = x(I) \subset \mathbb{R}$ é um difeomorfismo. Seja $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva dada por

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ x^{-1})(t) = \left(x(x^{-1}(t)), y(x^{-1}(t))\right) = (t, f(t)).$$

Observe que $f(t) = (y \circ x^{-1})(t)$ é diferenciável por ser composição de funções diferenciáveis e que $\tilde{\gamma}$ é o gráfico de f . Isto demonstra a primeira parte da proposição. Quanto à segunda, já vimos das equações (2.2) e (2.3) que as singularidades ocorrem nos zeros das equações

$$-qx + py \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad -py + qx \frac{dx}{dy} = 0.$$

Agora, isolando $\frac{dy}{dx}$ na primeira igualdade e utilizando as equações (2.6), (2.7) e (2.8) podemos ver que

$$\tan v = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = \frac{q}{p} \frac{x}{y} = \frac{q}{p} \cot u \quad \iff \quad v = \arctan\left(\frac{q}{p} \cot u\right).$$

Analogamente podemos isolar $\frac{dx}{dy}$ na segunda igualdade e chegarmos a mesma equivalência acima. □

Teorema 2.3.1 *Seja M^{p+q+1} uma hipersuperfície invariante pela ação do grupo $O(p+1) \times O(q+1)$, $p, q > 1$, com curvatura escalar identicamente nula. Se a curva geratriz associada a M faz um ângulo constante com o eixo x , então M é um dos cones C_α ou C_β .*

Demonstração. Seja γ a curva geratriz satisfazendo as hipóteses do teorema. Neste caso, uma parametrização para γ pode ser dada por $\gamma(t) = (x(t), \tan \theta x(t))$, onde

$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Substituindo as coordenadas de $\gamma(t)$ na equação (2.1) e omitindo a variável t , para não carregar a notação, obtemos

$$0 = \frac{1}{(x')^2 + (\tan \theta x')^2} \left[\frac{-x'' \tan \theta x' + x' \tan \theta x''}{(x')^2 + (\tan \theta x')^2} \left(p \frac{\tan \theta x'}{x} - q \frac{x'}{\tan \theta x} \right) + \frac{1}{2} p(p-1) \left(\frac{\tan \theta x'}{x} \right)^2 + \frac{1}{2} q(q-1) \left(\frac{x'}{\tan \theta x} \right)^2 - pq \frac{x' \tan \theta x'}{x \tan \theta x} \right].$$

Logo,

$$0 = \frac{1}{2} p(p-1) \frac{(\tan \theta)^2 (x')^2}{x^2} + \frac{1}{2} q(q-1) \frac{(x')^2}{(\tan \theta)^2 x^2} - pq \frac{(x')^2}{x^2}.$$

Multiplicando a equação acima por $2 \frac{x^2}{(x')^2} (\tan \theta)^2$ obtemos a equação quadrática em $\tan^2 \theta$,

$$0 = p(p-1)(\tan^2 \theta)^2 - 2pq \tan^2 \theta + q(q-1),$$

cujas soluções são

$$\tan^2 \theta = \frac{pq \pm \sqrt{pq(p+q-1)}}{p(p-1)} \quad \xrightarrow{\theta \in (0, \frac{\pi}{2})} \quad \tan \theta = \sqrt{\frac{pq \pm \sqrt{pq(p+q-1)}}{p(p-1)}}.$$

Portanto, $\theta = \alpha$ ou β . Segue que as duas únicas hipersuperfícies possíveis nas hipóteses do teorema são os cones C_α ou C_β . \square

Lema 2.3.2 *Valem as seguintes relações entre as coordenadas (x, y) da curva geratriz e as coordenadas (u, v) do campo X :*

$$(1) \quad u = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad e \quad u = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(2) \quad v = 0, \pm\pi \Leftrightarrow y' = 0 \quad e \quad v = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x' = 0,$$

$$(3) \quad v = u \Leftrightarrow \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow v = u - \pi \quad e \quad v = \arctan \left(\frac{q}{p} \cot u \right) \Leftrightarrow \frac{y'}{x'} = \frac{q}{p} \frac{y}{x}.$$

Demonstração. Todos os itens são obtidos através das equações (2.6), (2.7) e (2.8). Vamos provar apenas o item (3).

$$\begin{aligned} u = v &\Rightarrow y' = \operatorname{sen} v = \operatorname{sen} u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad e \quad x' = \cos v = \cos u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\Rightarrow \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan v = \tan u \Rightarrow v = u \quad \text{ou} \quad v = u - \pi. \end{aligned}$$

Isto conclui esta parte do item (3). Quanto à outra,

$$v = \arctan \left(\frac{q}{p} \cot u \right) \Leftrightarrow \tan v = \frac{q}{p} \cot u \Leftrightarrow \frac{y'}{x'} = \frac{q}{p} \frac{y}{x}.$$

□

Chegamos ao principal resultado deste trabalho. Em sua demonstração usaremos a notação $l(\theta)$ para representar o conjunto

$$\text{raio}(\gamma(t)) = \{(t \cos \theta, t \sin \theta), \quad t \geq 0\}.$$

Teorema 2.3.2 (Teorema de Classificação) *Uma hipersuperfície M^{p+q+1} , invariante pela ação do grupo $O(p+1) \times O(q+1)$, $p, q > 1$, com curvatura escalar identicamente nula pertence a uma das seguintes classes (veja a figura logo após a demonstração):*

- (1) *Cones com uma singularidade na origem de \mathbb{R}^{p+q+2} (tipo A);*
- (2) *Hipersuperfícies possuindo uma órbita de singularidades e assintotando ambos os cones C_α e C_β (tipo C);*
- (3) *Hipersuperfícies regulares que assintotam o cone C_α (tipo B);*
- (4) *Hipersuperfícies regulares que assintotam o cone C_β (tipo B);*
- (5) *Hipersuperfícies regulares que assintotam ambos os cones C_α e C_β (tipo D).*

Demonstração.

- (1) Estas são as hipersuperfícies obtidas no teorema 2.3.1 correspondentes ao caso (3) da proposição 2.2.4.
- (2) Estas são as hipersuperfícies cujas curvas geratrizes $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ estão associadas às órbitas $\phi(t)$ com α -limite P_7 e ω -limite P_6 (veja o caso (4) da proposição 2.2.4). Uma tal órbita intersecta o gráfico da função $v(u) = \arctan\left(\frac{q}{p} \cot u\right)$ em um determinado ponto P que corresponde à singularidade da curva geratriz conforme vimos na proposição 2.3.2. Segue do lema 2.3.2 e da proposição 2.2.4 que γ não intersecta a fronteira do espaço de órbitas Ω . Além disso, uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = (\beta, \beta), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = (\alpha, \alpha),$$

a curva geratriz γ associada à ϕ assintota os raios $l(\alpha)$ e $l(\beta)$. Portanto, a hipersuperfície gerada por γ assintota os cones C_α e C_β .

- (3) Estas são hipersuperfícies geradas pelas curvas $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ que estão associadas às órbitas $\phi(t) = (u(t), v(t))$ com α -limite P_2 e ω -limite P_6 ou com α -limite P_4 e ω -limite P_6 correspondentes aos casos (7) e (8) da proposição 2.2.4. Segue do lema 2.3.2 que

$$(u, v) \rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad x' \rightarrow 0.$$

Logo, a curva γ intersecta o eixo x ortogonalmente em algum ponto $(x_0, 0)$ com $x_0 > 0$. Observe ainda que $0 < u(t) < \arctan\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)$ para t suficientemente grande

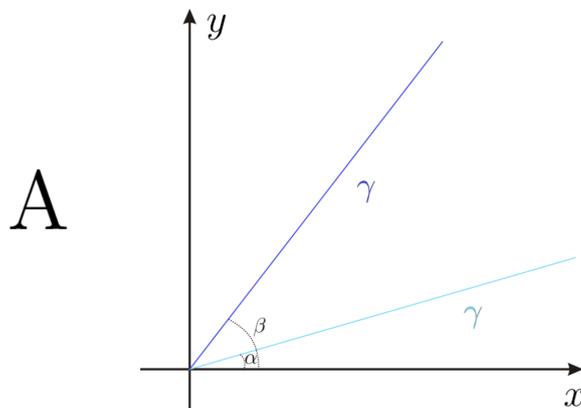
(em ambos os casos: (7) e (8)), o que implica $0 < \tan u = \frac{y}{x} < \sqrt{\frac{q}{p}}$. Portanto, a partir de um certo tempo a curva γ está sempre abaixo do gráfico da função $y = \sqrt{\frac{q}{p}}x$. Além disso, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = (\alpha, \alpha)$ implica que γ assintota o raio $l(\alpha)$. Assim, a hipersuperfície gerada por γ assintota o cone C_α .

- (4) Este item é análogo ao item (3) e corresponde aos casos (6) e (9) na proposição 2.2.4.
- (5) Estas são hipersuperfícies cujas curvas geratrizes $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ estão associadas às órbitas $\phi(t)$ com α -limite P_9 e ω -limite P_6 que correspondem ao caso (5) da proposição 2.2.4. Segue do lema 2.3.2 que γ não intersecta a fronteira do espaço de órbitas Ω . Além disso, decorre de

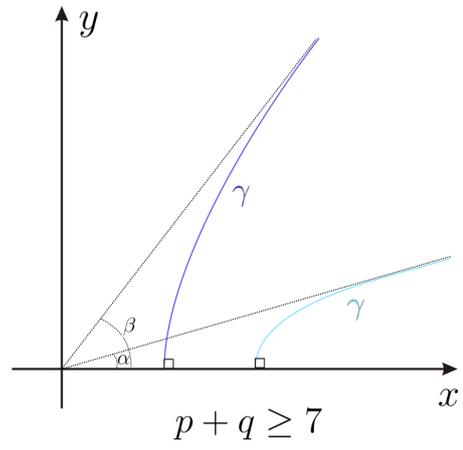
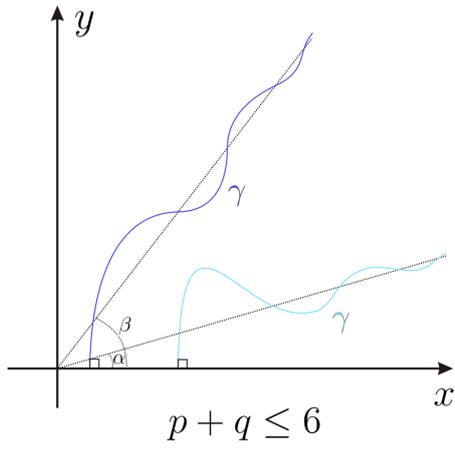
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = (\beta, \beta - \pi), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = (\alpha, \alpha),$$

que γ assintota os raios $l(\alpha)$ e $l(\beta)$. Portanto, a hipersuperfície gerada por γ assintota os cones C_α e C_β .

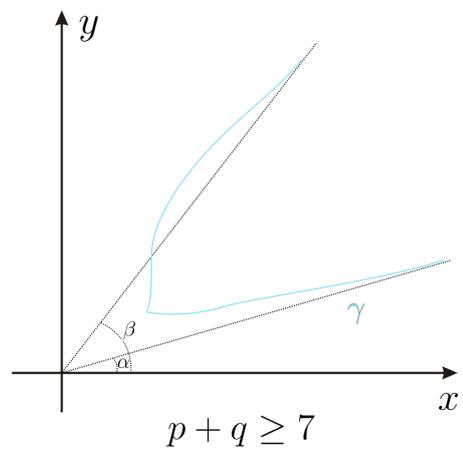
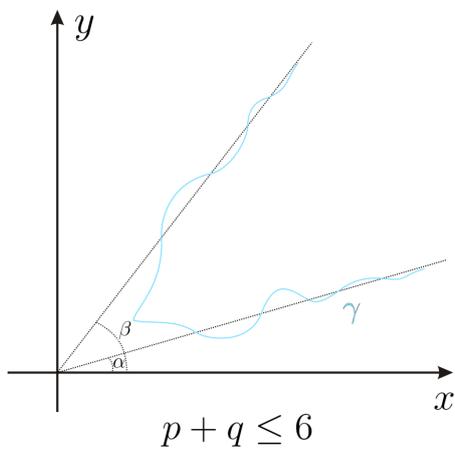
□



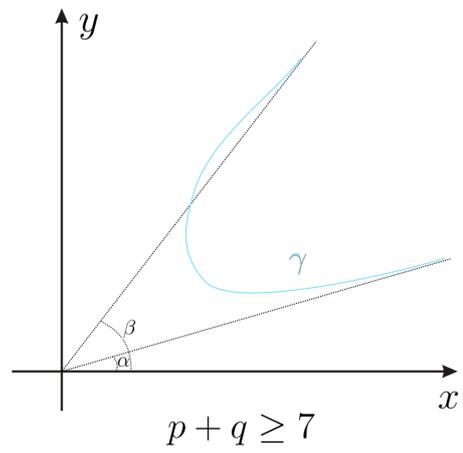
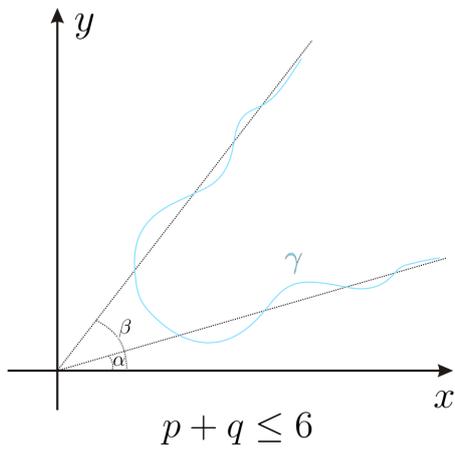
B



C



D



O leitor deve ter percebido que dos dez itens da proposição 2.2.4, apenas os itens (3)–(9) são mencionados no teorema anterior. Isso se deve ao fato de cada curva geratriz associada a uma órbita dos itens (1) ou (2), na proposição 2.2.4, estar sobre o eixo x e portanto não é curva geratriz de uma hipersuperfície em \mathbb{R}^{p+q+2} pela aplicação π (veja exemplo 1.8.3). O item (10) da proposição 2.2.4 não caracteriza nenhuma órbita que já não tenha sido apresentada nos nove itens anteriores. O teorema 2.3.2 cobre portanto, todos os casos possíveis para as hipersuperfícies estudadas neste capítulo.

Referências Bibliográficas

- [1] Alencar, H. Minimal Hypersurfaces in \mathbb{R}^{2m} Invariant by $SO(m) \times SO(m)$. *Trans. Amer. Math. Soc.***337**(1)(1993), 129-141.
- [2] Bombieri, E., de Giorgi, E. and Giusti, E. Minimal Cones and the Berstein Problem. *Invent. Math.***7**(1969), 243-269.
- [3] Carmo, Manfredo P. do. Geometria Riemanniana. 4ª ed. *IMPA, Rio de Janeiro*, 2008.
- [4] Doering, C. I. e Lopes, A. O. Equações Diferenciais Ordinárias. 2ª ed. *IMPA, Rio de Janeiro*, 2007.
- [5] J. Palis Jr. e W. Melo. Introdução aos Sistemas Dinâmicos. *Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA*, 1978.
- [6] Olver, Peter J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. 2nd ed. *Springer-Verlag, New York*, 2000.
- [7] Okayasu, T. $O(2) \times O(2)$ -Invariant Hypersurfaces with Zero Constant Negative Scalar Curvature in E^4 . *Proc. Amer. Math. Soc.***107**(1989), 1045-1050.
- [8] Sato, J. and Neto, V. F. de S. Complete and Stable $O(p+1) \times O(q+1)$ -Invariant Hypersurfaces with Zero Scalar Curvature in Euclidean Space \mathbb{R}^{p+q+2} . *Ann. Global Anal. Geom.* **29**(2006), 221-240.
- [9] Sotomayor Tello, Jorge Manuel. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. *IMPA, Rio de Janeiro*, 1979.

Apêndice A

Coordenadas polares em \mathbb{R}^n

Antes de generalizarmos as coordenadas polares em \mathbb{R}^n vamos apresentar os casos particulares com $n = 2, 3$ e 4 . Sejam $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ a semi-reta partindo da origem do \mathbb{R}^2 e $V = \mathbb{R}^2 - W$. Podemos parametrizar uma vizinhança de qualquer ponto $p \in V$ através da aplicação

$$\begin{aligned}\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V \\ (r, \phi) &\longmapsto (r \cos \phi, r \sin \phi),\end{aligned}$$

onde U é o aberto $(0, +\infty) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$. Note que Φ é um difeomorfismo, isto é, diferenciável, bijetiva e com inversa diferenciável. Para verificarmos a bijetividade, por exemplo, tomamos para cada $p = (p_1, p_2) \in V$, $r_0 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ e $\phi_0 \in (0, 2\pi)$ como a única solução do sistema

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{p_1}{r_0} \\ \sin \phi = \frac{p_2}{r_0}. \end{cases}$$

Note que a soma dos quadrados das coordenadas de $\Phi(r, \phi)$ é r^2 . Dizemos que Φ parametriza o aberto V em *coordenadas polares*. Se o ponto p não pertencer a V podemos alterar convenientemente o domínio de Φ de modo que $p \in \Phi(U)$. Desse modo, qualquer ponto de \mathbb{R}^2 pode ser expresso em coordenadas polares. A esfera $S^1(1) \subset \mathbb{R}^2$ por exemplo, é expressa nestas coordenadas quando tomamos $r = 1$ na aplicação Φ .

Analogamente, o \mathbb{R}^3 pode ser parametrizado através da aplicação $\Phi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(r, \phi_1, \phi_2) = (r \cos \phi_1, r \sin \phi_1 \cos \phi_2, r \sin \phi_1 \sin \phi_2),$$

onde $U = (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Esta maneira de parametrizar o \mathbb{R}^3 é conhecida como *coordenadas polares em \mathbb{R}^3* ou *coordenadas esféricas*.

Dado um ponto $p = (p_1, p_2, p_3) \in V = \Phi(U)$, podemos garantir a bijetividade de Φ fazendo o seguinte: tomando $r_0 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$, $\phi_1 \in (0, \pi)$ como o único ponto tal que

$\cos \phi_1 = p_1/r_0$ e ϕ_2 como o único ponto em $(0, 2\pi)$ que é solução do sistema

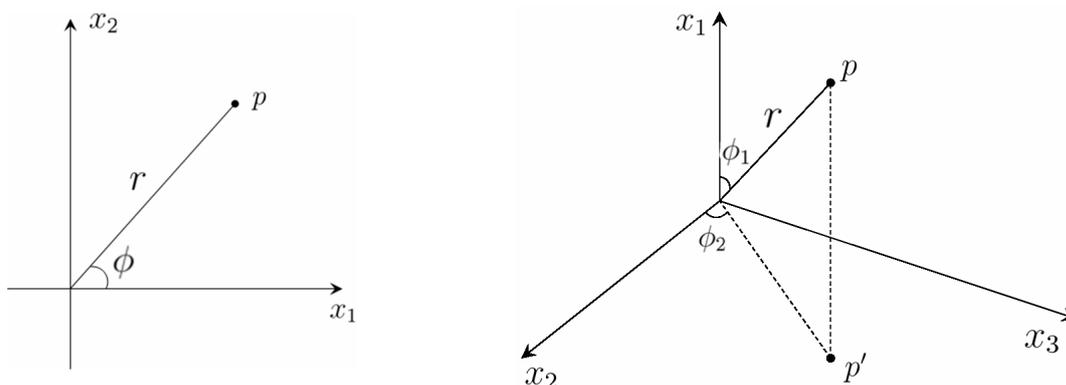
$$\begin{cases} \cos \phi_2 = \frac{p_2}{r_0 \operatorname{sen} \phi_1} \\ \operatorname{sen} \phi_2 = \frac{p_3}{r_0 \operatorname{sen} \phi_1}. \end{cases}$$

Assim como em \mathbb{R}^2 , também vale que a soma das coordenadas de $\Phi(r, \phi_1, \phi_2)$ é r^2 . De fato,

$$\begin{aligned} & (r \cos \phi_1)^2 + (r \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_2)^2 + (r \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2)^2 \\ &= r^2 \cos^2 \phi_1 + r^2 \operatorname{sen}^2 \phi_1 (\cos^2 \phi_2 + \operatorname{sen}^2 \phi_2) = r^2. \end{aligned}$$

Caso o ponto p não pertença a V podemos modificar o domínio U de Φ de modo que $p \in \Phi(U)$, assim como fizemos em \mathbb{R}^2 . A esfera $S^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ é parametrizada por Φ ao tomarmos $r = 1$.

Uma interpretação geométrica das coordenadas polares em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 é dada nas figuras abaixo.



Em \mathbb{R}^4 não temos uma interpretação geométrica destas coordenadas para nos servir de inspiração, mas podemos nos inspirar nos casos de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 para obtermos a expressão de $\Phi : U \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida em um aberto do \mathbb{R}^4 .

Essencialmente, Φ deve satisfazer duas condições: ser bijetiva e a soma dos quadrados de $\Phi(r, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ser igual a r^2 . Se observarmos o método utilizado para provarmos a bijetividade em \mathbb{R}^3 e a maneira com que os quadrados das coordenadas de Φ vão simplificando quando somamos estas coordenadas, podemos imaginar que as coordenadas polares em \mathbb{R}^4 são dadas por

$$\Phi(r, \phi_1, \phi_2, \phi_3) = (r \cos \phi_1, r \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi_2, r \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \cos \phi_3, r \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi_2 \operatorname{sen} \phi_3),$$

onde $0 < r < +\infty$, $0 < \phi_1, \phi_2 < \pi$ e $0 < \phi_3 < 2\pi$.

Dado $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in V = \Phi(U)$, verificamos que Φ é bijetiva tomando $r_0 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}$ em $(0, +\infty)$ e obtemos os ângulos procedendo como em \mathbb{R}^3 : usando a bijetividade do cosseno em $(0, \pi)$, para encontrarmos ϕ_1 e ϕ_2 ; em seguida encontramos

$\phi_3 \in (0, 2\pi)$ como a única solução de um sistema envolvendo $\sin \phi_3$ e $\cos \phi_3$. Observe ainda, que a soma dos quadrados de $\Phi(r, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ é igual a r^2 . Além disso, Φ é diferenciável e sua inversa também. Portanto, Φ é a parametrização do \mathbb{R}^4 em coordenadas polares.

Agora ficou claro como deve ser a generalização de Φ em \mathbb{R}^n . De modo geral, as *coordenadas polares em \mathbb{R}^n* são dadas pela aplicação $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\Phi(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}) = \left(r \cos \phi_1, r \sin \phi_1 \cos \phi_2, \dots, \right. \\ \left. r \sin \phi_1 \cdot \dots \cdot \sin \phi_{n-2} \cos \phi_{n-1}, r \sin \phi_1 \cdot \dots \cdot \sin \phi_{n-1} \right),$$

com $r \in (0, +\infty)$, $\phi_i \in (0, \pi)$, $i = 1, 2, \dots, n-2$, $\phi_{n-1} \in (0, 2\pi)$. A esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é dada em termos destas coordenadas quando tomamos $r = 1$ na expressão de Φ acima.

Em vista do que estamos estudando neste apêndice, podemos parametrizar explicitamente a esfera $S^p(1) \subset \mathbb{R}^{p+1}$ através da aplicação

$$\Phi : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow S^p(1) \subset \mathbb{R}^{p+1} \\ (\phi_1, \dots, \phi_p) \longmapsto (\cos \phi_1, \sin \phi_1 \cos \phi_2, \dots, \sin \phi_1 \cdot \dots \cdot \sin \phi_p).$$

Deste modo, a parametrização explícita de uma hipersuperfície invariante pela ação do grupo das isometrias $O(p+1)$ é dada por (veja exemplo 1.8.3)

$$F : \mathbb{R} \times U \subset \mathbb{R}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{p+1} \\ (t, \phi_1, \dots, \phi_p) \longmapsto x(t)\Phi(\phi_1, \dots, \phi_p),$$

onde $x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ é uma função diferenciável (na notação da seção 2.1, x é a primeira função coordenada da curva geratriz γ). Se chamarmos de Ψ a parametrização de $S^q(1) \subset \mathbb{R}^{q+1}$, uma parametrização explícita de uma hipersuperfície M invariante pela ação do grupo $O(p+1) \times O(q+1)$ é dada por

$$\mathbf{x}(t, \phi_1, \dots, \phi_p, \psi_1, \dots, \psi_q) = \left(x(t)\Phi(\phi_1, \dots, \phi_p), y(t)\Psi(\psi_1, \dots, \psi_q) \right),$$

onde $y : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ é a segunda função coordenada da curva geratriz de M .

Índice Remissivo

- Campo
 - linear, 27
 - tangente, 11
- Campo de vetores, 10
 - ao longo de uma curva, 11
 - paralelo, 12
- Centro, 31
- Cone C_θ , 39
- Conexão Riemanniana, 12
- Conjugação local, 33
- Conjunto
 - α -limite, 36
 - ω -limite, 36
 - invariante, 36
 - negativamente invariante, 36
 - positivamente invariante, 36
- Curva
 - geratriz, 39
 - integral, 26
- Curvatura
 - de Gauss-Kronecker, 21
 - de Ricci, 14
 - de uma variedade, 13
 - escalar, 14
 - média, 21
 - principal, 21
 - seccional, 14
- Derivada covariante, 12
- Diferenciável
 - aplicação, 9
 - curva, 9
 - variedade, 8
- Direções principais, 21
- Distância métrica orbital, 25
- Divergência, 16
- Equação diferencial autônoma, 26
- Espaço
 - de fase, 33
 - tangente, 9
- Estrutura diferenciável, 8
- Fibrado tangente, 9
- Fluxo tubular, 34
 - propriedade do, 34
 - teorema do, 35
- Fluxo(s)
 - conjugados, 33
 - de um campo, 28
- Foco
 - estável, 31
 - instável, 31
- Gradiente, 15
- Grupo
 - agindo regularmente, 24
 - agindo semi-regularmente, 24
 - conexo de transformações, 24
 - das isometrias, 23
 - local de transformações, 23
- Hessiano, 18
- Hipersuperfície, 21
- Homomorfismo, 22
- Imersão, 9
 - codimensão da, 9
 - isométrica, 11
- Intervalo máximo, 27
- Isometria, 11
- Lie
 - grupo de, 21
 - grupo local de, 23
 - subgrupo de, 22

Métrica induzida, 11
 Métrica Riemanniana, 11
 Mergulho, 9
 Nó
 estável, 30
 impróprio, 32
 instável, 30
 Órbita(s), 24
 de um campo, 33
 espaço de, 24
 periódica, 33
 singular, 33
 Operador de Laplace, 17
 Ponto
 de equilíbrio, 29
 assintoticamente estável, 29
 degenerado, 32
 estável, 29
 indiferente, 30
 instável, 29
 isolado, 29
 de sela, 30
 fixo, 29
 regular, 28
 singular, 28
 Problema de valor inicial, 26
 Retrato de fase, 33
 Segmento, 11
 comprimento do, 11
 Segunda forma fundamental, 20
 Solução
 máxima, 27
 regular, 27
 Subvariedade, 9
 Superfície
 invariante, 39
 Tensor de Ricci, 15
 Teorema de
 Bendixson, 38
 Classificação, 59
 Grobman-Hartman, 34
 Poincaré-Bendixson, 38
 Trajetória, 27
 periódica, 33
 regular, 28
 singular, 28
 Variedade
 orientável, 9
 Vetor tangente, 9
 Vizinhança
 coordenada, 8
 tubular, 34