



Universidade Federal de Alagoas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O Teorema de Comparação de
Volume de Bishop-Gromov

Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Rio São Francisco

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

O Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Gromov

Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Orientador: Prof^o. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

Maceió, Brasil
27 de fevereiro de 2009

Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

O Teorema de Comparação de Volume
de Bishop-Gromov

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof^o. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

Maceió

2009

Catlogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S237t Santos, Erikson Alexandre Fonseca dos.
O teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov / Erikson Alexandre
Fonseca dos. – Maceió, 2009.
66 f.

Orientador: Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 64.
Índice: f. 65-66.

1. Weitzenböck, Fórmula de. 2. Bishop-Gromov, Comparação de volume.
3. Comparação laplaciano. 4. Região aberta e conexa – Volume. I. Título.

CDU: 514.774

O Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Gromov

Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 27 de fevereiro de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

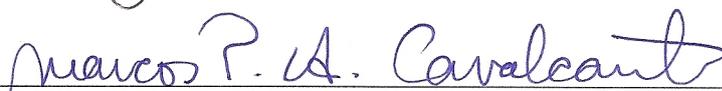
Banca Examinadora:



Prof.º Dr. Antonio Caminha Muniz Neto (UFC)



Prof.º Dr. Fernando Enrique Echaiz Espinoza (UFAL)



Prof.º Dr. Marcos Petrúcio Cavalcante (Orientador)

*Aos meus pais Vera e Enoch,
aos meus irmão Fernando e Júnior
e à minha querida avó Terezinha,
com muito amor, dedico.*

*“A arrogância que nos leva a acreditar
que somos superiores aos outros
tem origem no medo de sermos inferiores.”
(Provérbio espiritual)*

AGRADECIMENTOS

- » Agradeço, primeiramente, ao meu bom Deus pelo dom precioso da vida, pelo amor incondicional e por me amparar sempre, ante tantas dificuldades que a vida nos surpreende.
- » Agradeço à minha mãe Vera, e minha avó Terezinha pelo amor, carinho, incentivo, presença e arrimo durante toda minha existência.
- » Agradeço ao meu pai Enoch, e aos meus irmãos Fernando e Júnior pelo amor, desvelo e carinho em toda minha vida, ainda que contidos.
- » Agradeço à minha família, e de uma maneira muito especial aos “meus” tesouros Gustavo e Lisianne e à minha cunhada Lindiane pelo exemplo de perseverança, pelo apoio e por acreditarem sempre.
- » Agradeço ao meu eterno amigo César por sua presença constante, confiança, honestidade, encorajamento, e pelas valiosas conversas, que muito contribuíram para meu crescimento pessoal e profissional.
- » Agradeço ao meu orientador, Marcos Petrócio, por me acompanhar desde 2005 como seu orientando, pela paciência, confiança, incentivo, apoio, pelas conversas matemáticas e não matemáticas, e por acreditar sempre.
- » Agradeço aos professores Antonio Caminha e Fernando Echaiz pelas valiosas, ponderadas e relevantes sugestões acrescentadas a este trabalho e por assentirem em participar da banca

de defesa desta dissertação.

- » Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas; em particular, aos professores Adán Corcho, Ediel Guerra e Krerley Oliveira pela contribuição significativa à minha formação acadêmica neste programa de Mestrado. Agradeço, de modo especial, ao professor José Adonai por seu valioso material de Geometria Diferencial cedido, gentilmente, durante o curso da disciplina.
- » Agradeço à Márcia e Silvinha, secretárias da Pós-Graduação, pela presteza e competência na execução de suas atribuições em todos os momentos e, em particular, dos que mais necessitei.
- » Agradeço a todos os colegas da Pós-Graduação deste Instituto, em particular aos da minha turma: Arlyson, Borges, Carlos, Darliton, Everson, Leandro e Leonardo pelo companherismo e cumplicidade sempre. Agradeço também a Eduardo pela disposição e paciência, sempre, em compartilhar seus conhecimentos.
- » Agradeço, de maneira muito especial, a Alex, Fábio e Priscila pela sincera amizade que sempre demonstraram, pelo companherismo, estímulo e presença constantes, pelos valiosos fins de semana de estudo e por todos os momentos de lazer dos quais eu nunca fui esquecido, ainda que eu não pudesse estar presente. O meu sincero afeto por vocês.
- » Agradeço a todos os colegas da Computação, que sempre se dispuseram a resolver nossos problemas técnicos, principalmente no surto dos laptops. De maneira particular, agradeço a Michel por sua eterna disposição em solucionar nossos problemas.
- » Agradeço a todos os colegas, servidores e professores que fazem o Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, e de modo particular, à D. Maria.
- » Agradeço à CAPES e à FAPEAL pelo fundamental apoio financeiro concedido durante estes dois anos.
- » Enfim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que mais esta etapa de minha vida fosse concluída. O meu eterno e saudoso agradecimento.

Erikson Alexandre Fonseca

NESTA DISSERTAÇÃO, usamos o teorema de comparação do Laplaciano para demonstrar o teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov, o qual assegura que, se as curvaturas de Ricci de uma variedade Riemanniana completa são maiores ou iguais a $(n - 1)k$, k uma constante real, então, para todo $p \in M$ e para todo $R > 0$, o volume de uma bola centrada em p e de raio R é menor ou igual que o volume de uma bola geodésica de raio R na forma espacial de curvatura seccional constante k . Ademais, a igualdade ocorre se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando p e x , para planos contendo o vetor radial for constante e igual a k .

Palavras-chave: Volume de uma região aberta e conexa, fórmula de Weitzenböck, teorema de comparação do Laplaciano, teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov.

IN THIS dissertation, we use the Laplacian comparison theorem to prove the comparison of volume Bishop-Gromov's theorem, which assures that if the Ricci curvatures of a complete Riemannian manifold are larger than or equal to $(n - 1)k$, the volume of a ball with center in p and radius R is smaller than or equal to the volume of a geodesic ball with radius R in the space form of sectional constant curvature k , for all $p \in M$ and $R > 0$, where $k \in \mathbb{R}$. Moreover, equality occurs if all sectional curvature throughout geodesics connecting p and x , for plans which contain the radial vector, is constant and equal to k .

Keywords: Volume of an open and connected region, Weitzenböck's formula, Laplacian comparison theorem, comparison of volume Bishop-Gromov's theorem.

1	Definições Básicas	15
1.1	Volume	15
1.2	Variedades Completas	21
1.3	Operadores em Variedades	23
1.4	Curvaturas	35
2	Resultados Preliminares	43
2.1	Fórmula de Weitzenböck	43
2.2	O Hessiano da Função Distância	45
3	Teoremas de Comparação	52
3.1	Teorema de Comparação do Laplaciano	52
3.2	O Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Gromov	59
	Referências Bibliográficas	64
	Índice Remissivo	65

LISTA DE FIGURAS

1.1	Ilustração da definição de volume	21
3.1	Comparação entre volumes	59

OS TEOREMAS de comparação são um tópico substancialmente estudado em Geometria Riemanniana e podem ser observados e compreendidos de diversas maneiras. Em particular, nosso interesse estará em um dos teoremas que compara volumes, a saber, o teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov.

Como podemos ver em [2], R. L. Bishop demonstrou em 1964 o teorema que enunciamos a seguir e que é o principal resultado desta dissertação:

Teorema 0.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa e suponhamos que, para k constante,*

$$\text{Ric}(g) \geq (n - 1)kg.$$

Então

$$\text{Vol}(B_R(p)) \leq \text{Vol}(B_R^k),$$

onde B_R^k é uma bola geodésica de raio R na forma espacial de curvatura seccional constante k . A igualdade ocorre, se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando p e x , para planos contendo o vetor radial, for constante e igual a k .

Entre 1982 e 1986, M. Gromov generalizou o resultado acima demonstrando que o quociente

$$\frac{\text{Vol}(B_R(p))}{\text{Vol}(B_R^k)}$$

é decrescente com relação a R , e em função disso, o teorema passou a receber o nome de ambos,

embora alguns autores o intitulem apenas como Bishop, veja a referência [3].

No primeiro dos três capítulos do nosso trabalho, iniciamos revisitando as formas diferenciais, que serão ferramentas imprescindíveis para a elucidação da definição de volume. Passamos, então, a fixar notações e recordar alguns conceitos de Geometria Riemanniana, como as variedades completas, ao passo que também fazemos um estudo dos operadores Laplaciano e Hessiano nestas variedades. Finalizamos este capítulo inicial com o estudo das curvaturas em variedades Riemannianas.

Iniciamos o capítulo subsequente com a apresentação e demonstração de uma identidade sobejamente utilizada em diversos contextos, bem como nesta dissertação, a saber a fórmula de Weitzenböck, também conhecida como fórmula de Bochner-Lichnerowicz, descrita a seguir:

Proposição 0.1. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta\left(|\nabla f|^2\right) = |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f),$$

onde $\text{Hess } f$ denota o Hessiano de f .

Concluimos esta segunda parte com uma seção que é destinada ao estudo do Hessiano da função distância e que culmina com a seguinte proposição:

Proposição 0.2. *Seja \mathbb{R}^n munido com a métrica Riemanniana g , que em coordenadas polares é escrita como*

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)dw^2,$$

onde dw^2 representa a métrica canônica em \mathbb{S}^{n-1} . Seja $r(x) = d(x, p)$, onde d é a função distância correspondente. Então, para $x = rw$, $r > 0$, $w \in \mathbb{S}^{n-1}$ e para quaisquer X, Y ortogonais a $\frac{\partial}{\partial r}$,

$$\text{Hess } r(X, Y) = \frac{f'(r)}{f(r)}g(X, Y).$$

Além disso,

$$\Delta r(x) = (n-1)\frac{f'(r)}{f(r)}.$$

Finalizamos o terceiro capítulo desta dissertação com duas seções. Na primeira, enunciamos e demonstramos o teorema de comparação do Laplaciano, descrito a seguir, que

além de ser um teorema considerável em Geometria Riemanniana, é também a ferramenta fundamental que usamos para a conclusão do teorema de Bishop-Gromov.

Teorema 0.2. *Sejam M uma variedade Riemanniana completa e r a distância geodésica ao ponto $p \in M$. Suponhamos que a curvatura de Ricci de M satisfaz*

$$\text{Ric}(M) \geq (n - 1)k$$

e que a função r é diferenciável no ponto x . Então

$$\Delta r(x) \leq \Delta r_k(\tilde{x}),$$

onde $r_k(\tilde{x}) = r(x) = r_0$, $r_0 < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ se $k > 0$, com r_k sendo a distância geodésica a partir de um ponto fixado numa forma espacial de curvatura seccional constante k e r é a distância geodésica a partir de um ponto fixado numa variedade completa. A igualdade é satisfeita, se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando p e x , para planos contendo o vetor radial for constante e igual a k .

Na segunda seção, demonstramos o teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov, na qual usamos como referência o livro [6]. Para isto, consideramos o Laplaciano das funções $r(x)$ e $r_k(\tilde{x})$, a fim de usar o teorema de comparação do Laplaciano; além disso, usamos a definição de volume de uma região aberta e conexa juntamente com integração em coordenadas polares para concluir a demonstração.

Finalizamos nosso trabalho com um apêndice que esclarece o fato visto na expressão (3.4), na demonstração do teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov.

NESTE CAPÍTULO introduzimos algumas definições e resultados básicos de Geometria Riemanniana com o intuito de fixar algumas notações, admitindo que o leitor seja familiarizado com os pré-requisitos que envolvem tais definições e resultados. Nossas principais referências serão os livros [5] e [8].

Em todo o trabalho, vamos supor que (M^n, g) é uma *variedade diferenciável* conexa e orientada de dimensão finita $n \geq 2$, munida da *métrica Riemanniana* g , a qual denotaremos por M apenas. A *conexão de Levi-Civita* de M será denotada por ∇ . Como é usual, muitas vezes escreveremos $\langle X, Y \rangle$ para denotar $g(X, Y)$, $X, Y \in T_p M$, $p \in M$, ou ainda, algumas vezes também utilizaremos a notação clássica ds^2 para representar a métrica Riemanniana g . Usaremos $\mathcal{X}(M)$ para denotar o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M .

1.1 Volume

Nesta seção desenvolvemos os fundamentos algébricos necessários para estudar as formas diferenciais. Inicialmente faremos um estudo em espaços vetoriais com produto interno e, posteriormente, o faremos em variedades Riemannianas. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências [4] e [10].

Sejam E e F espaços vetoriais e $\varphi : E \times \cdots \times E \rightarrow F$ uma aplicação definida no produto cartesiano de r fatores iguais a E . Dizemos que φ é *r-linear* quando seus valores $\varphi(v_1, \dots, v_r)$

dependem linearmente de cada uma das variáveis $v_1, \dots, v_r \in E$. Com as operações usuais de soma de duas aplicações e produto de uma aplicação por um número, o conjunto das aplicações r -lineares $\varphi : E \times \dots \times E \rightarrow F$ é um espaço vetorial, e o denotaremos por $\mathcal{L}_r(E, F)$.

Dizemos que uma aplicação r -linear $\varphi : E \times \dots \times E \rightarrow F$ é *alternada* quando

$$\varphi(v_1, \dots, v_r) = 0$$

sempre que a sequência (v_1, \dots, v_r) possuir repetições, ou seja, quando existirem $i \neq j$ com $v_i = v_j$. A fim de que $\varphi \in \mathcal{L}_r(E, F)$ seja alternada, é necessário e suficiente que φ seja *anti-simétrica*, ou seja, que

$$\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) = -\varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r)$$

para quaisquer $v_1, \dots, v_r \in E$. De fato, escrevamos o primeiro membro da igualdade acima como $\varphi(v_i, v_j)$. Daí, supondo φ alternada, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(v_i + v_j, v_i + v_j) &= \varphi(v_i, v_i) + \varphi(v_i, v_j) + \varphi(v_j, v_i) + \varphi(v_j, v_j) \\ &= \varphi(v_i, v_j) + \varphi(v_j, v_i), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi(v_i, v_j) = -\varphi(v_j, v_i).$$

Reciprocamente, se φ é antissimétrica, então

$$\varphi(v, v) = -\varphi(v, v).$$

Daí, $2 \cdot \varphi(v, v) = 0$ e $\varphi(v, v) = 0$. Portanto, φ é alternada. Denotaremos por $\mathcal{A}_r(E, F)$ o conjunto das aplicações r -lineares alternadas de E em F . Notemos que $\mathcal{A}_r(E, F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}_r(E, F)$.

Estaremos interessados, de modo especial, nas aplicações r -lineares alternadas $\varphi : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$, as quais chamaremos *formas r -lineares alternadas* ou, simplesmente, *r -formas*. Denotaremos o espaço vetorial $\mathcal{A}_r(E, \mathbb{R})$ apenas por $\mathcal{A}_r(E)$. Os elementos de $\mathcal{A}_r(E)$ são também chamados *formas alternadas de grau r* . Por convenção, $\mathcal{A}_r(E) = \{0\}$ para $r < 0$ e $\mathcal{A}_0(E) = \mathbb{R}$.

Vejam alguns exemplos que ilustram o conceito de r -formas.

Exemplo 1.1. O determinante de uma matriz $m \times m$ é uma m -forma alternada se, para $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^m$, pusermos $\det(v_1, \dots, v_m)$ igual ao determinante da matriz $m \times m$ cujas colunas são os vetores v_1, v_2, \dots, v_m escritos numa base fixada. Denotaremos isto simplesmente por $\det \in \mathcal{A}_m(\mathbb{R}^m)$.

Exemplo 1.2 (Produto Exterior). Seja E^* o espaço dual de E e consideremos r funcionais lineares $f_1, \dots, f_r \in E^*$. Definimos o produto exterior desses funcionais como sendo a r -forma

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_r : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_r)(v_1, \dots, v_r) = \det[f_i(v_j)], \quad i, j = 1, \dots, r.$$

A seguir, enunciamos o fato mais importante a respeito das r -formas, cuja demonstração pode ser encontrada em [10], página 401.

Teorema 1.1. Seja $\{e_i\}_{i=1}^m$ uma base de E^* . As r -formas $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$, onde $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$ percorre os subconjuntos de $\{1, 2, \dots, m\}$ com r elementos, constituem uma base de $\mathcal{A}_r(E)$. Em particular, $\dim \mathcal{A}_r(E) = \binom{m}{r}$.

Um caso particular importante ocorre quando $m = \dim E$. Neste caso, $\dim \mathcal{A}_m(E) = 1$, ou seja, a menos de um fator constante, existe apenas uma forma alternada de grau m sobre um espaço m -dimensional.

Introduziremos agora o conceito de forma de volume em um espaço vetorial. Para isto, seja E um espaço vetorial m -dimensional, orientado,¹ munido de um produto interno e seja $\{e_i\}_{i=1}^m$ uma base ortonormal positiva em E .

Definimos a *forma de volume* de E como sendo a forma $\text{vol} \in \mathcal{A}_m(E)$, dada por

$$\text{vol}(e_1, \dots, e_m) = 1.$$

¹Orientar um espaço vetorial é escolher nele uma base, chamá-la de “positiva” e declarar também positivas todas as demais bases que dela se obtenham por meio de uma matriz de passagem com determinante positivo.

Sabemos que, dada a sequência de vetores $v_1, \dots, v_m \in E$, podemos escrever

$$v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i,$$

para cada $j = 1, \dots, m$. Consideremos a matriz $a = (a_{ij})_{m \times m}$ assim obtida. Afirmamos que

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_m) = \det a.$$

Ora, por um lado temos que $\det(e_1, \dots, e_m) = 1$. Por outro, como $\dim \mathcal{A}_m(E) = 1$ então, para cada $\omega \in \mathcal{A}_m(E)$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\omega(v_1, \dots, v_m) = \lambda \det(v_1, \dots, v_m)$$

quaisquer que sejam $v_1, \dots, v_m \in E$. Pondo

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_m) = \omega(v_1, \dots, v_m),$$

segue que

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_m) = \lambda \det(v_1, \dots, v_m),$$

para quaisquer $v_1, \dots, v_m \in E$ e, em particular,

$$\text{vol}(e_1, \dots, e_m) = \lambda \det(e_1, \dots, e_m),$$

donde $\lambda = 1$. Portanto,

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_m) = \det a.$$

Agora, vamos mostrar que vol independe da escolha da base que fizemos. Com efeito, definamos a matriz

$$g = (\langle v_i, v_j \rangle)_{n \times n},$$

na qual o elemento situado na i -ésima linha e j -ésima coluna é o produto interno $\langle v_i, v_j \rangle$.

Como

$$\begin{aligned}\langle v_i, v_j \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^m a_{ki} e_k, \sum_{s=1}^m a_{sj} e_s \right\rangle \\ &= \sum_{k,s=1}^m a_{ki} a_{sj} \langle e_k, e_s \rangle \\ &= \sum_{k=1}^m a_{ki} a_{kj},\end{aligned}$$

temos que

$$g = a^T a.$$

Logo,

$$\det(g) = \det(a^T a) = [\det(a)]^2,$$

e, portanto,

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_m) = \pm \sqrt{\det(g)},$$

onde o sinal depende da orientação tomada. A igualdade obtida acima mostra que a definição independe da escolha de uma base.

Exemplo 1.3. *Sejam $\{e_i\}_{i=1}^n$ a base canônica do \mathbb{R}^n e $\{dx_i\}_{i=1}^n$ sua base dual. Notemos aqui que a forma de volume de \mathbb{R}^n é dada por $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, ou seja,*

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \begin{cases} 1, & \text{se } 1 = i_1, \dots, n = i_n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Este exemplo também pode ser visto em [4], página 10.

Passamos a estudar, agora, as formas diferenciais em variedades Riemannianas, e veremos que estas são os integrandos naturais das integrais em variedades.

Definimos a *forma elemento de volume em uma variedade Riemanniana orientada* M como a aplicação que faz corresponder a cada ponto $p \in M$, a forma de volume dM do espaço tangente $T_p M$, munida com a orientação induzida.

A seguir veremos como exibir a forma elemento de volume num sistema de coordenadas locais.

Seja $X : U \rightarrow M$ uma parametrização positiva C^∞ em torno de $p = X(q) \in M$. Neste caso, a base coordenada $\left\{ X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$ correspondente à base canônica de \mathbb{R}^n pela parametrização X , define a orientação positiva de $T_p M$. Neste sistema de coordenadas podemos escrever a métrica em sua forma matricial, pondo $G = (g_{ij})$, onde $g_{ij} := \langle X_i, X_j \rangle$. Para uso futuro, denotaremos por $G^{-1} = (g^{ij})$ sua inversa.

Sabemos que a forma *pull back* $X^*(dM)$ de dM é uma n -forma em U e, portanto, existe uma (única) função diferenciável $a : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X^*(dM)(q) = a(q) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(q).$$

Vejamos agora que esta função é facilmente determinada. De fato, segue da nossa discussão à página 17 que

$$\begin{aligned} a &= X^*(dM)(e_1, \dots, e_n) \\ &= dM(X_1, \dots, X_n) \\ &= \sqrt{\det(\langle X_i, X_j \rangle)} \\ &= \sqrt{\det(g_{ij})}. \end{aligned}$$

Para finalizar esta seção, vejamos como a forma elemento de volume é usada para definir o volume de certas regiões de uma variedade Riemanniana.

Seja $R \subset M$ uma região aberta e conexa cujo fecho é compacto e seja $p \in M$. Vamos supor que \bar{R} está contida na vizinhança coordenada $X(U)$ da parametrização $X : U \rightarrow M$ dada acima, e que a fronteira de $X^{-1}(R) \subset U$ tem medida nula em \mathbb{R}^n , como ilustra a figura 1.1.

Definimos o *volume* de R , que denotamos por $\text{Vol}(R)$, como sendo a integral em \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \text{Vol}(R) &= \int_R dM := \int_{X^{-1}(R)} X^* dM \\ &= \int_{X^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

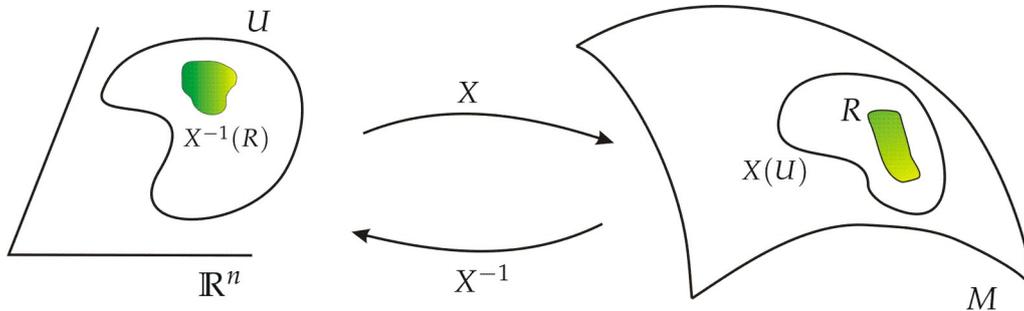


Figura 1.1: Ilustração da definição de volume

1.2 Variedades Completas

Nesta seção recordaremos alguns fatos sobre variedades Riemannianas completas. Para isto, dados $p, q \in M$, definimos a *distância* de p a q em M , que denotamos por $d(p, q)$, como sendo o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando p a q . Como M é conexa, esta definição está bem posta.

Um primeiro fato sobre a função distância é que ela torna M um espaço métrico.

Lema 1.1. *Com a distância d definida acima, toda variedade Riemanniana conexa é um espaço métrico, tal que topologia induzida por d em M coincide com a topologia inicial de M .*

Demonstração. Veja [8], página 94. □

Seja $\alpha : I = [a, b] \rightarrow M$ uma curva suave em M . Dizemos que α é uma *geodésica*, se

$$\nabla_{\alpha'(t)} \alpha'(t) = 0.$$

Isto significa que α tem aceleração nula na variedade. Um fato básico é que geodésicas minimizam comprimento localmente, veja por exemplo [5].

Dizemos que uma geodésica é *maximal* quando não é possível estendê-la a um intervalo \tilde{I} que contenha I propriamente.

Definimos o *comprimento* de α em M , que denotamos por $l(\alpha)$, pela expressão

$$l(\alpha) = \int_I |\alpha'(t)| dt,$$

onde $|\alpha'(t)| = \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}$.

Uma geodésica $\alpha : I \rightarrow M$ é dita *minimizante* se o seu comprimento for menor ou igual que o comprimento de qualquer outra curva $\tilde{\alpha}$, diferenciável por partes, ligando $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$, ou seja, se $l(\alpha) \leq l(\tilde{\alpha})$. Da definição de distância, segue que α é minimizante se, e somente se, $l(\alpha)$ é igual à distância entre seus extremos.

Dizemos que uma variedade Riemanniana é *geodesicamente completa* se toda geodésica maximal está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. O teorema que enunciamos a seguir nos mostra um critério simples para determinar quando uma variedade Riemanniana é geodesicamente completa, e devido a este resultado diremos que M é, simplesmente, *completa*.

Teorema 1.2 (Hopf-Rinow). *Uma variedade Riemanniana é geodesicamente completa se, e somente se, é completa como espaço métrico.*

Demonstração. Veja [8], página 108. □

Uma consequência importante deste teorema é dada no seguinte corolário.

Corolário 1.1. *M é completa se, e somente se, dois pontos quaisquer em M podem ser ligados por uma geodésica minimizante.*

Vejamos alguns exemplos que ilustram o conceito de completude.

Exemplo 1.4. O espaço \mathbb{R}^n munido da métrica Euclidiana $ds_0^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ é uma variedade Riemanniana completa, mas $\mathbb{R}^n \setminus F$, onde $F \neq \emptyset$ é fechado, não é completa.

Exemplo 1.5. O semiplano $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_n > 0\}$, munido da métrica Euclidiana não é uma variedade Riemanniana completa. Contudo, munido da métrica hiperbólica $ds^2(p) = \frac{1}{x_n^2} ds_0^2$, $p = (x_1, \dots, x_n)$, é uma variedade completa.

Para finalizar esta seção trazemos o conceito de cut-locus de um ponto $p \in M$ em uma variedade Riemanniana completa, onde usamos como referência principal o livro [1].

Sabemos, do teorema de Hopf-Rinow, que a aplicação exponencial $\exp_p(rv)$ com $|v| = 1$ está definida para todo $r \in \mathbb{R}$ e $v \in S^{n-1}(1) \subset T_pM$. Além disso, a aplicação exponencial é diferenciável, como pode ser visto em [5], página 73.

Agora, consideremos a aplicação $\psi : v \in S^{n-1}(1) \mapsto \mu(v)$ de modo que $\mu(v) \in]0, \infty]$ seja a cota superior do conjunto dos r 's, tal que a geodésica $\gamma : s \in [0, r] \rightarrow C(s)$, onde $C(s) = \exp_p(sv)$, é minimizante. É claro que, para $0 < r \leq \mu(v)$, a geodésica γ é minimizante.

Definimos o *cut-locus* de p , que denotamos por $C_m(p)$, como o conjunto dos pontos $\exp_p[\mu(v)v]$, quando v varia em $S^{n-1}(1)$.

É possível mostrar que $\mu(v)$ é uma função contínua em $S^{n-1}(1)$ com valor em $]0, \infty]$, veja por exemplo, em [2] seção 11.6. Assim, o cut-locus é um subconjunto fechado de medida nula em M , veja em [7], página 137. Então, quando M é completa, \exp_p , que é definida e diferenciável em todo \mathbb{R}^n , é um difeomorfismo de \mathcal{E}_p em $\Omega = \exp_p(\mathcal{E}_p)$, onde

$$\mathcal{E}_p = \{rv \in \mathbb{R}^n; 0 \leq r < \mu(v), v \in S^{n-1}(1)\}.$$

Por vezes, escrevemos M como a união disjunta dos conjuntos Ω e $C_m(p)$.

1.3 Operadores em Variedades

Nesta seção definiremos os operadores Laplaciano e Hessiano em variedades Riemannianas, os quais serão usados nos capítulos subsequentes. Iniciamos estendendo alguns conceitos clássicos do cálculo em várias variáveis para o contexto de variedades Riemannianas, utilizando a métrica Riemanniana e a conexão de Levi-Civita.

Dada uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, definimos o *gradiente* de f , o que denotamos por ∇f , como o (único) campo vetorial em M que satisfaz

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para qualquer campo vetorial X de M .

Outro conceito importante é o de divergente de um campo. Dado um campo X em M ,

definimos o *divergente* de X , que será denotado por $\operatorname{div} X$, como sendo a aplicação

$$\operatorname{div} : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$$

dada por

$$p \mapsto \operatorname{div} X(p) := \operatorname{tr}(Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)),$$

onde $\mathcal{D}(M)$ denota o anel das funções diferenciáveis em M .

Agora estamos aptos à apresentar os principais conceitos desta seção.

Definimos o *Laplaciano* de f como a aplicação

$$\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \Delta f(p) = \operatorname{div}(\nabla f)(p).$$

O *Hessiano* de f , que denotamos por $\operatorname{Hess} f$, é a forma bilinear simétrica

$$\operatorname{Hess} f : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$$

dada por

$$\operatorname{Hess} f(p)(X, Y) = (XYf)(p) - \nabla_X Y(f)(p).$$

De agora em diante, em geral omitiremos o ponto p explicitando, apenas, quando houver perigo de confusão.

Podemos também definir de forma equivalente, o Hessiano de f a partir da expressão acima. Com efeito,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} f(X, Y) &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) \\ &= X \langle Y, \nabla f \rangle - \langle \nabla_X Y, \nabla f \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, \nabla f \rangle + \langle Y, \nabla_X \nabla f \rangle - \langle \nabla_X Y, \nabla f \rangle \\ &= \langle Y, \nabla_X \nabla f \rangle. \end{aligned} \tag{1.2}$$

A fim de apresentarmos os operadores acima de forma mais palpável, introduziremos o conceito de um referencial local.

Inicialmente, vamos fixar um sistema de coordenadas locais dado por uma parametrização $X : U \rightarrow M$ numa vizinhança de $p \in M$. Também numa vizinhança de p iremos considerar

um *referencial ortonormal geodésico* $\{E_i\}_{i=1}^n$, ou seja, uma família $\{E_i\}$ de campos de vetores ortonormais em cada ponto de um vizinhança V de p , tal que, em p , $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$.

Ao longo desta dissertação faremos uso alternadamente dos campos X_1, \dots, X_n e E_1, \dots, E_n em uma vizinhança de um ponto $p \in M$, conforme for mais conveniente para os cálculos. Em alguns casos usaremos os dois referenciais e, por isso, no que segue estabelecemos como é feita a mudança de um para o outro.

Fixado $p \in M$, temos que as coleções $\{X_i\}$ e $\{E_i\}$ são bases para $T_p M$. Daí, podemos expressar uma em termos da outra,

$$E_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \quad \text{e} \quad X_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} E_j. \quad (1.3)$$

Escrevendo $A = (a_{ij})_{n \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times n}$, afirmamos que

$$A = B^{-1} \quad \text{e} \quad G^{-1} = A^t A.$$

Observemos que isto é equivalente a mostrar que

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \text{e} \quad g^{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}. \quad (1.4)$$

Ora, da expressão (1.3) temos que, para quaisquer i e j ,

$$\begin{aligned} E_i &= \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{j=1}^n b_{kj} E_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) E_j. \end{aligned}$$

Pela unicidade da combinação linear, se $i = j$, então $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = 1$, e caso contrário $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = 0$, verificando assim a primeira identidade em (1.4).

Para verificarmos a segunda identidade de (1.4), inicialmente observamos que esta é equivalente a $G = BB^t$, simplesmente tomando a inversa. Dessa forma, para quaisquer i e

j , temos

$$\begin{aligned}
 g_{ij} &= \langle X_i, X_j \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{k=1}^n b_{ik} E_k, \sum_{l=1}^n b_{jl} E_l \right\rangle \\
 &= \sum_{k,l=1}^n b_{ik} b_{jl} \langle E_k, E_l \rangle \\
 &= \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{jk},
 \end{aligned}$$

que é a (i, j) -ésima entrada em BB^t , provando assim a segunda parte de (1.4).

Vejam agora como ficam os nossos operadores no referencial ortonormal geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$. Afirmamos que o gradiente de f é dado pela expressão

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i.$$

Com efeito, escrevendo $\nabla f = \sum_{i=1}^n b_i E_i$ e tomando o produto interno com E_j temos

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla f, E_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n b_i E_i, E_j \right\rangle \\
 &= b_j.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a definição de gradiente,

$$\langle \nabla f, E_j \rangle = E_j(f),$$

ou seja, $b_j = E_j(f)$, como queríamos demonstrar.

Como consequência direta deste fato temos que

$$|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n E_i^2(f). \quad (1.5)$$

Usaremos este fato na demonstração da fórmula de Weitzenböck, no próximo capítulo.

Agora, escrevendo $X = \sum_{i=1}^n a_i E_i$, afirmamos que $\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n E_i(a_i)$. De fato, como $\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(Y \rightarrow \nabla_Y X)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} X)(p) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{E_i} \left(\sum_{j=1}^n a_j E_j \right), E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n \nabla_{E_i} a_j E_j, E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n (a_j \nabla_{E_i} E_j + E_i(a_j) E_j), E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n E_i(a_j) E_j, E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n E_i(a_j) \langle E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n E_i(a_i),
\end{aligned}$$

onde na quinta igualdade usamos o fato que $\{E_i\}_{i=1}^n$ é um referencial geodésico em p .

Vamos obter agora as expressões dos operadores estudados anteriormente em coordenadas locais. Para isso, vamos simplesmente utilizar as expressões do referencial $\{E_i\}_{i=1}^n$ em termos dos campos coordenados, conforme vimos em (1.3). Como antes, iniciaremos pelo gradiente. Afirmamos que

$$\nabla f = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g^{kj} X_j(f) \right) X_k. \tag{1.6}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n a_{ij} a_{ik} X_j(f) X_k \\
&= \sum_{j,k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} \right) X_j(f) X_k \\
&= \sum_{j,k=1}^n g^{jk} X_j(f) X_k \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g^{kj} X_j(f) \right) X_k.
\end{aligned}$$

De maneira parecida encontramos a expressão do divergente em coordenadas. Para isto utilizaremos os *símbolos de Christoffel*, que são as funções Γ_{ij}^k determinadas pela igualdade

$$\nabla_{X_j} X_i = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k. \quad (1.7)$$

Aqui vale observar que num sistema de coordenadas, o fato de ser ∇ simétrica implica que $\forall i, j = 1, \dots, n$

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad (1.8)$$

e isto é equivalente ao fato que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Também vamos precisar escrever o campo X na base coordenada, digamos $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$.

Assim,

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n x_i X_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} E_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_i b_{ij} \right) E_j \\ &= \sum_{j=1}^n a_j E_j, \end{aligned}$$

onde, $a_j = \sum_{i=1}^n x_i b_{ij}$.

Feito isto, podemos encontrar a expressão para o divergente de X da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{j=1}^n E_j(a_j) = \sum_{j=1}^n E_j \left(\sum_{i=1}^n x_i b_{ij} \right) = \sum_{i,j=1}^n E_j(x_i b_{ij}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n E_j(x_i) b_{ij} + \sum_{i,j=1}^n E_j(b_{ij}) x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} E_j(x_i) \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n E_j(b_{ij}) \right) x_i \\ &= \sum_{i=1}^n X_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n E_j(b_{ij}) \right) x_i. \end{aligned}$$

Para concluir afirmamos que

$$\sum_{j=1}^n E_j(b_{ij}) = \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j.$$

Com efeito, em p temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_j} X_i &= \nabla_{(\sum_{k=1}^n b_{jk} E_k)} \left(\sum_{l=1}^n b_{il} E_l \right) \\
&= \sum_{k=1}^n b_{jk} \sum_{l=1}^n \nabla_{E_k} (b_{il} E_l) \\
&= \sum_{k=1}^n b_{jk} \sum_{l=1}^n (b_{il} \nabla_{E_k} E_l + E_k(b_{il}) E_l) \\
&= \sum_{k,l=1}^n b_{jk} E_k(b_{il}) E_l \\
&= \sum_{k,l=1}^n b_{jk} E_k(b_{il}) \left(\sum_{m=1}^n a_{lm} X_m \right) \\
&= \sum_{m=1}^n \left(\sum_{k,l=1}^n a_{lm} b_{jk} E_k(b_{il}) \right) X_m.
\end{aligned}$$

Comparando a expressão acima com a expressão (1.7) dos símbolos de Christoffel, obtemos que

$$\Gamma_{ij}^m = \sum_{k,l=1}^n a_{lm} b_{jk} E_k(b_{il}).$$

Logo,

$$\Gamma_{ij}^j = \sum_{k,l=1}^n a_{lj} b_{jk} E_k(b_{il}).$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k,l=1}^n a_{lj} b_{jk} E_k(b_{il}) \right) \\
&= \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{lj} b_{jk} \right) E_k(b_{il}) \\
&= \sum_{k,l=1}^n \delta_{lk} E_k(b_{il}) \\
&= \sum_{j=1}^n E_j(b_{ij}),
\end{aligned}$$

como queríamos.

Obtemos, assim, a expressão do divergente em coordenadas, dada por

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n X_i(x_i) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^j x_i. \quad (1.9)$$

A seguir, demonstramos dois fatos que serão úteis para chegar à expressão do Laplaciano em coordenadas locais. Primeiramente, afirmamos que

$$X_k(g) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g X_k(g_{ij}),$$

onde $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ é a função determinante da métrica, definida por $g(p) = \det(G(p))$ que é sempre uma função positiva.

De fato, pela regra da cadeia temos que

$$X_k(g) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} X_k(g_{ij}). \quad (1.10)$$

Agora recordemos que

$$G^{-1} = \left[\frac{(-1)^{i+j}}{g} (G_{ij}) \right]_{n \times n},$$

onde G_{ij} é a matriz dos cofatores, ou seja, G_{ij} é o determinante da matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida eliminando-se a i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz G . Por outro lado, sabemos da *fórmula de Laplace*, veja [9], que

$$g := \det G = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} g_{ij} G_{ij},$$

para qualquer $j = 1, \dots, n$. Portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = (-1)^{i+j} G_{ij},$$

para quaisquer i e j . Assim,

$$G^{-1} = \left[\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \right]_{n \times n},$$

ou seja,

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}.$$

Daí, a expressão (1.10) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$X_k(g) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g X_k(g_{ij}),$$

como queríamos.

Desta última conclusão, temos que

$$\sum_{i,j=1}^n g^{ij} X_k(g_{ij}) = \frac{1}{g} X_k(g) = X_k(\log(g)). \quad (1.11)$$

Agora, recordemos que a expressão dos símbolos de Christoffel em termos da métrica é dada por

$$\Gamma_{ij}^j = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n g^{hj} \{ X_j(g_{ih}) + X_i(g_{hj}) - X_h(g_{ji}) \}. \quad (1.12)$$

Com o auxílio desta expressão verificaremos o segundo fato, ou seja,

$$\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j = \frac{1}{2} X_i(\log(g)).$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n g^{hj} \{X_j(g_{ih}) + X_i(g_{hj}) - X_h(g_{ji})\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_j(g_{ih}) \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_i(g_{hj}) \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_h(g_{ji}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_j(g_{ih}) \right) - \left(\sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_h(g_{ij}) \right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_i(g_{hj}) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_h(g_{ij}) \right) - \left(\sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_h(g_{ij}) \right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_i(g_{hj}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{h,j=1}^n g^{hj} X_i(g_{hj}) \\
&= \frac{1}{2} X_i(\log(g)),
\end{aligned}$$

como havíamos afirmado.

Retornando à expressão do divergente em coordenadas, vista em (1.9), e usando o fato acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n X_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j \right) x_i \\
&= \sum_{i=1}^n X_i(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i(\log(g)) x_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left[X_i(x_i) + \frac{1}{2} X_i(\log(g)) x_i \right].
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{g}}X_i(\sqrt{g}x_i) &= \frac{1}{\sqrt{g}}[X_i(\sqrt{g})x_i + X_i(x_i)\sqrt{g}] \\
&= X_i(x_i) + \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{1}{2}X_i(g)g^{-\frac{1}{2}}\right)x_i \\
&= X_i(x_i) + \frac{1}{2}\left(\frac{X_i(g)}{g}\right)x_i \\
&= X_i(x_i) + \frac{1}{2}X_i(\log(g))x_i,
\end{aligned}$$

e a expressão (1.13) para o divergente do campo $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$ pode ser reescrita como

$$\operatorname{div}X = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}}X_i(\sqrt{g}x_i).$$

Pela definição do Laplaciano, temos que $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$. Recordemos da expressão (1.6) que

$$\nabla f = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g^{kj} X_j(f) \right) X_k.$$

Assim, sendo $f_i = \sum_{j=1}^n g^{kj} X_j(f)$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \operatorname{div} \sum_{i=1}^n f_i X_i \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}} X_i(\sqrt{g} f_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}} X_i \left[\sqrt{g} \left(\sum_{j=1}^n g^{ij} X_j(f) \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n X_i \left(\sqrt{g} g^{ij} X_j(f) \right),
\end{aligned}$$

que é a expressão do Laplaciano em coordenadas locais.

1.4 Curvaturas

Apresentaremos nesta seção o conceito do tensor curvatura em uma variedade Riemanniana, o qual se faz necessário para as definições de curvatura de Ricci e curvatura escalar.

Definimos o *tensor curvatura*, ou simplesmente a *curvatura*, R de M como a aplicação

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

dada por

$$R(X, Y, Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Como é usual, algumas vezes denotaremos $R(X, Y)Z$ por $R(X, Y, Z)$.

Considerando a base coordenada $\{X_i\}_{i=1}^n$ de uma parametrização $X : U \rightarrow M$ em torno de um ponto $p \in M$, podemos reescrever a definição acima da seguinte maneira

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k,$$

onde usamos o fato que $[X_i, X_j] = 0$. Isto significa que a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante.

Ainda neste sistema, ponhamos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s X_s, \quad (1.14)$$

ou seja, R_{ijk}^s são como as *componentes* do tensor curvatura R no sistema de coordenadas (X_1, \dots, X_n) .

Agora, consideremos os campos X, Y e Z de modo que

$$X = \sum_{i=1}^n u_i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^n v_j X_j, \quad \text{e} \quad Z = \sum_{k=1}^n w_k X_k.$$

Como R é trilinear, segue-se que

$$R(X, Y, Z) = \sum_{i,j,k,s=1}^n R_{ijk}^s u_i v_j w_k X_s.$$

Vamos obter a expressão de R_{ijk}^s em termos dos símbolos de Christoffel. Para isto, consideremos a definição de curvatura em coordenadas e a igualdade $\nabla_{X_j} X_i = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$, vista em (1.7).

Assim,

$$\begin{aligned}
R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k \\
&= \nabla_{X_j} \left(\sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l X_l \right) - \nabla_{X_i} \left(\sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l X_l \right) \\
&= \sum_{l=1}^n \{ \Gamma_{ik}^l \nabla_{X_j} X_l + X_j(\Gamma_{ik}^l) X_l \} - \sum_{l=1}^n \{ \Gamma_{jk}^l \nabla_{X_i} X_l + X_i(\Gamma_{jk}^l) X_l \} \\
&= \sum_{s=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + X_j(\Gamma_{ik}^s) - X_i(\Gamma_{jk}^s) \right\} X_s.
\end{aligned}$$

Comparando a expressão acima com a igualdade vista em (1.14), obtemos

$$R_{ijk}^s = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + X_j(\Gamma_{ik}^s) - X_i(\Gamma_{jk}^s). \quad (1.15)$$

Feito isto, consideremos a expressão $R(X_i, X_j)X_k$ e tomemos o produto interno dela com X_m . Daí,

$$R_{ijkm} := \langle R(X_i, X_j)X_k, X_m \rangle = \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s g_{sm}. \quad (1.16)$$

Definida a curvatura, podemos introduzir a noção de curvatura seccional. Para isto, consideremos $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$ gerado pelos vetores linearmente independentes $X, Y \in T_p M$. Definimos a *curvatura seccional* de σ em p pela expressão

$$K(X, Y) := K(\sigma) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}.$$

Não é difícil de se verificar que esta definição não depende das escolhas dos geradores X e Y , veja [5], página 104.

As variedades completas que possuem curvatura seccional constante são chamadas formas espaciais. No teorema principal desta dissertação, trabalharemos com bolas geodésicas neste

tipo de variedade.

A seguir apresentamos o teorema de classificação de Cartan, o qual afirma que essencialmente as únicas variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas, com curvatura seccional constante são o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , a esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e o espaço hiperbólico \mathbb{H}^n de dimensão n .

Teorema 1.3 (Cartan). *Seja M uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante K . Então M é isométrica a:*

- (a) \mathbb{H}^n , se $K = -1$,
- (b) \mathbb{R}^n , se $K = 0$,
- (c) S^n , se $K = 1$.

Demonstração. Veja [5], página 181. □

O *tensor de Ricci*, que denotaremos por Ric , é definido como sendo o traço do tensor R . Mais especificamente, se $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de T_pM , então

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y) &= \text{tr}(Z \mapsto R(X, Z)Y) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle. \end{aligned}$$

Exprimindo o que acabamos de fazer em um sistema de coordenadas, temos que os coeficientes $R_{ik} := \text{Ric}(X_i, X_k)$ do tensor de Ricci nesta base satisfazem as seguintes igualdades

$$R_{ik} = \sum_{j,s=1}^n R_{ijks} g^{js} = \sum_{j=1}^n R_{ijk}^j.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
R_{ik} = \text{Ric}(X_i, X_k) &= \sum_{m=1}^n \langle R(X_i, E_m)X_k, E_m \rangle \\
&= \sum_{m=1}^n \langle R(X_i, \sum_{j=1}^n a_{mj}X_j)X_k, \sum_{s=1}^n a_{ms}X_s \rangle \\
&= \sum_{m,j,s=1}^n \langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle a_{mj}a_{ms} \\
&= \sum_{j,s=1}^n R_{ijks} \sum_{m=1}^n a_{mj}a_{ms} \\
&= \sum_{j,s=1}^n R_{ijks} g^{js} \\
&= \sum_{j,s,p=1}^n R_{ijk}^p g_{ps} g^{js} \\
&= \sum_{j,p=1}^n R_{ijk}^p \delta_{pj} \\
&= \sum_{j=1}^n R_{ijk}^j
\end{aligned}$$

como queríamos, onde na sétima igualdade usamos a expressão (1.16).

Para fins de aplicação futura vamos recordar a definição de derivada covariante para tensores covariantes. Sejam T um tensor covariante de ordem r e $Y_i, Z \in \mathcal{X}(M)$ campos vetoriais em M , com $i = 1, \dots, r$. Definimos a *derivada covariante* ∇T de T como o tensor covariante de ordem $(r+1)$ dado por

$$\begin{aligned}
\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) &= Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) \\
&\quad - \dots - T(Y_1, \dots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r).
\end{aligned}$$

Exemplo 1.6. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Podemos considerar f como sendo um tensor covariante de ordem 0, e denotaremos este fato por $\nabla^0 f$. Mais geralmente, $\nabla^{k+1} f$ é um tensor

covariante de ordem $k + 1$, definido indutivamente da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \nabla^{k+1}f(X_1, \dots, X_k, Y) &:= Y(\nabla^k f(X_1, \dots, X_k)) - \nabla^k f(\nabla_Y X_1, \dots, X_k) \\ &\quad - \dots - \nabla^k f(X_1, \dots, X_{k-1}, \nabla_Y X_k). \end{aligned}$$

Assim, dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, temos que $\nabla^1 f(X)$ e $\nabla^2 f(X, Y)$ coincidem com o gradiente de f e com $\text{Hess}f$, respectivamente. Com efeito,

$$\nabla^1 f(X) = X(\nabla^0 f) = X(f)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) &= Y(\nabla f(X)) - \nabla f(\nabla_Y X) \\ &= YX(f) - \nabla_Y X(f). \end{aligned}$$

Observação 1.1. Se a conexão é simétrica, então o Hessiano também o é. De fato,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) &:= YX(f) - \nabla_Y X(f) \\ &= XY(f) - \nabla_X Y(f) \\ &=: \nabla^2 f(Y, X) \\ &= \text{Hess}f(X, Y). \end{aligned}$$

Em um sistema de coordenadas locais em $p \in M$, sabemos que

$$f_i := df_p(X_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \langle \nabla f, X_i \rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
f_{kj} &= \nabla^2 f(X_k, X_j) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla f(X_k)) - \nabla f(\nabla_{X_j} X_k) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) - \nabla f \left(\sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial f}{\partial x_l}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

De maneira inteiramente análoga, poderíamos calcular as componentes f_{kji} de um tensor covariante de ordem 3, $\nabla^3 f$, cuja expressão é dada por:

$$f_{kji} = \frac{\partial f_{kj}}{\partial x_i} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l f_{lj} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l f_{lk}. \tag{1.18}$$

Agora, provaremos dois fatos importantes que usaremos na demonstração da fórmula de Weitzenböck, no capítulo 2.

Observação 1.2. Considerando um sistema de coordenadas normais em torno de $p \in M$, ou seja, uma parametrização $E : U \rightarrow M$ tal que $\left\{ E_i := \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é uma base ortonormal em p e $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, temos que $f_{ijj} = f_{jij}$. Ora,

$$\begin{aligned}
f_{ijj} - f_{jij} &= \nabla^3 f(E_i, E_j, E_j) - \nabla^3 f(E_j, E_i, E_j) \\
&= E_j \nabla^2 f(E_i, E_j) - \nabla^2 f(\nabla_{E_j} E_i, E_j) - \nabla^2 f(E_i, \nabla_{E_j} E_j) \\
&\quad - E_j \nabla^2 f(E_j, E_i) + \nabla^2 f(\nabla_{E_j} E_j, E_i) + \nabla^2 f(E_j, \nabla_{E_j} E_i) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

em p . Observamos ainda que o sistema de coordenadas normais pode ser considerado como sendo um referencial ortonormal geodésico num ponto fixo $p \in M$, ou seja, os cálculos feitos com o sistema de coordenadas normais valem também para um referencial ortonormal geodésico.

Observação 1.3. Considerando a expressão do gradiente, dada por $\nabla f = \sum_{i=1}^n f_i E_i$, e usando o fato que

$f_i = \nabla f(E_i)$, afirmamos que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n f_{ii}. \quad (1.20)$$

Com efeito, usando as definições do Laplaciano e da derivada covariante, obtemos em p que

$$\begin{aligned} \Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) &= \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^n f_i E_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n E_i(f_i) \\ &= \sum_{i=1}^n E_i(\nabla f(E_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n [\nabla^2 f(E_i, E_i) + \nabla f(\nabla_{E_i} E_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n [\nabla^2 f(E_i, E_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n f_{ii}. \end{aligned}$$

Finalizaremos esta seção provando a Identidade de Ricci que, assim como os dois fatos anteriores, será utilizada na demonstração da fórmula de Weitzenböck.

Lema 1.2. (Identidade de Ricci) Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $E : U \rightarrow M$ um sistema de coordenadas normais em torno de p . Usando as notações acima temos que, para quaisquer $1 \leq i, j, k \leq n$, vale a igualdade:

$$f_{kji} = f_{kij} + \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s f_s. \quad (1.21)$$

Demonstração. Vimos em (1.17) e (1.18) que as expressões de f_{kj} e f_{kji} são dadas por:

$$f_{kj} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial f}{\partial x_l} \quad \text{e} \quad f_{kji} = \frac{\partial f_{kj}}{\partial x_i} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l f_{lj} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l f_{lk}.$$

Usando a simetria dos símbolos de Christoffel, segue que

$$f_{kji} - f_{kij} = \frac{\partial f_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l f_{lj} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l f_{li}. \quad (1.22)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial f_{kj}}{\partial x_i} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} - \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^l) \frac{\partial f}{\partial x_l} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l}.$$

Daí,

$$\frac{\partial f_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_j} = - \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^l) \frac{\partial f}{\partial x_l} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^l) \frac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}.$$

Substituindo a expressão acima em (1.22), obtemos

$$\begin{aligned} f_{kji} - f_{kij} &= - \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^l) \frac{\partial f}{\partial x_l} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^l) \frac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l} \\ &\quad - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_j} - \sum_{s=1}^n \Gamma_{jl}^s \frac{\partial f}{\partial x_s} \right) + \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} - \sum_{s=1}^n \Gamma_{il}^s \frac{\partial f}{\partial x_s} \right). \end{aligned}$$

Novamente pela simetria dos índices inferiores dos símbolos de Christoffel após alguns cancelamentos e usando (1.15), vemos que

$$\begin{aligned} f_{kji} - f_{kij} &= \sum_{s=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + X_j(\Gamma_{ik}^s) - X_i(\Gamma_{jk}^s) \right) f_s \\ &= \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s f_s, \end{aligned}$$

o que completa a prova deste lema. □

Observação 1.4. Observemos que, para este resultado, a função f precisou apenas ser C^3 .

NESTE CAPÍTULO demonstramos resultados importantes que nos auxiliarão na prova dos teoremas de comparação, que estudaremos no próximo capítulo. Os fatos aqui demonstrados tiveram [6] como principal referência.

2.1 Fórmula de Weitzenböck

Mostramos nesta seção a fórmula de Weitzenböck, uma identidade básica utilizada em vários contextos e que nos será útil na demonstração do teorema de comparação do Laplaciano.

Proposição 2.1 (Fórmula de Weitzenböck). *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta \left(|\nabla f|^2 \right) = |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f),$$

onde $\text{Hess } f$ denota ao Hessiano de f .

Demonstração. Consideremos um sistema de coordenadas normais $E : U \rightarrow M$, $\left\{ E_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$, em torno de $p \in M$. Como usual, poremos

$$f_i = E_i(f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \langle \nabla f, E_i \rangle.$$

Recordemos de (1.5) que a norma do gradiente de f nesse sistema de coordenadas é dada por

$$|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2.$$

Derivando a expressão acima em relação a j , obtemos

$$(|\nabla f|^2)_j = \left(\sum_{i=1}^n f_i^2\right)_j = 2 \sum_{i=1}^n f_i f_{ij},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}(|\nabla f|^2)_j = \sum_{i=1}^n f_i f_{ij}.$$

Derivando, novamente, a expressão acima em relação a j , temos que

$$\frac{1}{2}(|\nabla f|^2)_{jj} = \sum_{i=1}^n (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}).$$

Daí, somando em j e usando o fato que $\Delta f = \sum_{j=1}^n f_{jj}$, visto em (1.20), para a função $|\nabla f|^2$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Visto que o Hessiano de uma função é um 2-tensor covariante simétrico, segue que $f_{ij} = f_{ji}$, como vimos em (1.19). Este fato e a identidade de Ricci, vista em (1.21), nos mostram que

$$f_{ijj} = f_{jij} = f_{jji} + \sum_{s=1}^n R_{jij}^s f_s.$$

Substituindo esta última igualdade em (2.1), vemos que

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = \sum_{i,j,s=1}^n [f_{ij}^2 + f_i (f_{jji} + R_{jij}^s f_s)].$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) &= \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^n f_i f_{jji} + \sum_{i,j,s=1}^n R_{jij}^s f_s f_i \\
&= |\text{Hess } f|^2 + \sum_{i=1}^n f_i (\Delta f)_i + \sum_{i,s=1}^n R_{si} f_s f_i \\
&= |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \sum_{i,s=1}^n \text{Ric}(E_s, E_i) f_s f_i \\
&= |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \text{Ric}\left(\sum_{s=1}^n f_s E_s, \sum_{i=1}^n f_i E_i\right) \\
&= |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f),
\end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração da fórmula de Weitzenböck. □

2.2 O Hessiano da Função Distância

O caráter local dos resultados desta seção nos permitem trabalhar num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ do espaço Euclidiano munido de uma métrica Riemanniana g , que em coordenadas polares (r, w) pode ser escrita como

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)dw^2, \quad (2.2)$$

onde dw^2 representa a métrica canônica em S^{n-1} .

Nesse contexto, inicialmente, observamos que fixado $p \in U$, se $r(x) := d(x, p)$ é a função distância induzida por g , então

$$\nabla r = \frac{\partial}{\partial r},$$

onde, para cada w fixado em $T_p M$, $\frac{\partial}{\partial r}$ é o vetor velocidade das geodésicas dadas pelas curvas $r \mapsto \exp_p(rw)$, com \exp denotando a aplicação exponencial.

De fato, por um lado, temos que

$$\left\langle \nabla r, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = \frac{\partial r}{\partial r} = 1. \quad (2.3)$$

via definição de gradiente. Por outro,

$$\left\langle \nabla r, \frac{\partial}{\partial w_i} \right\rangle = \frac{\partial r}{\partial w_i} = 0,$$

pois, r não depende dos w_i 's. Assim, ∇r é um múltiplo de $\frac{\partial}{\partial r}$ e, pela expressão (2.3), o múltiplo de ∇r é igual a 1. Logo,

$$\nabla r = \frac{\partial}{\partial r},$$

como afirmamos.

A seguir, apresentamos o principal resultado dessa seção, o qual usaremos na demonstração do teorema de comparação do Laplaciano.

Proposição 2.2. *Seja \mathbb{R}^n munido com a métrica Riemanniana g em coordenadas polares, vista em (2.2). Então, para $x = r\omega$, $r > 0$, $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, para quaisquer X, Y ortogonais a $\frac{\partial}{\partial r}$, temos*

$$\text{Hess } r(X, Y) = \frac{f'(r)}{f(r)} g(X, Y).$$

Além disso,

$$\Delta r(x) = (n-1) \frac{f'(r)}{f(r)}. \quad (2.4)$$

Demonstração. Inicialmente consideremos X, Y campos de vetores tangentes ao conjunto de nível $r = c$, onde c é uma constante positiva. Daí, considerando a função r e usando a expressão (1.2), temos que

$$\text{Hess } r(X, Y) = \left\langle Y, \nabla_X \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle.$$

Sejam agora $\frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial r}$ o campo normal à hipersfera $r = c$ e $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$ os campos coordenados tangentes à tal hipersfera. Dessa forma, para quaisquer $1 \leq i, j \leq n-1$, temos

que

$$\begin{aligned}
\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \Gamma_{ni}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \left\langle \Gamma_{ni}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \Gamma_{ni}^k g_{kj}.
\end{aligned}$$

Agora, encontraremos uma expressão para Γ_{ni}^k nesse sistema de coordenadas. Para isto, usaremos a fórmula dos símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da métrica, vista em (1.12), e o fato que $g_{ni} = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = 0, \forall i = 1, \dots, n-1$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ni}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ln}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_n} - \frac{\partial g_{ni}}{\partial x_l} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \frac{\partial g_{li}}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Por outro lado, como $g(r, w) = dr^2 + f^2(r)dw^2$, segue que

$$g^{kl} = f^{-2}(dw^2)^{kl} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g_{li}}{\partial r} = 2ff'(dw^2)_{li}, \quad k, l = 1, \dots, n-1.$$

Retornando para (2.5) com as expressões acima, temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ni}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n f^{-2}(dw^2)^{kl} 2ff'(dw^2)_{li} \\
&= \frac{f'}{f} \delta_{ik}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{f'}{f} \delta_{ik} g_{kj} \\ &= \frac{f'}{f} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, usando linearidade, se X e Y são ortogonais a $\frac{\partial}{\partial r}$, então

$$\text{Hess } r(X, Y) = \frac{f'}{f} g(X, Y).$$

Para mostrar a segunda parte da proposição, observemos que dada a aplicação bilinear $\text{Hess } r : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$, para $p \in M$ fixado, sabemos que existe uma aplicação linear

$$A : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

dada por

$$\langle AX, Y \rangle = \text{Hess } r(X, Y).$$

Ademais, $\text{tr} A = \text{tr}(\text{Hess } r)$ e se $A(X_i) = a^{ij} X_j$, então

$$\text{Hess } r(X_i, X_k) = \langle A(X_i), X_k \rangle = \left\langle a^{ij} X_j, X_k \right\rangle = a^{ij} g_{jk},$$

ou seja,

$$a^{ij} = g^{jk} \text{Hess } r(X_i, X_k).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Delta r &= \text{tr}(\text{Hess } r) = \text{tr} A \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} g^{ik} \frac{f'}{f} g(X_i, X_k) \\ &= (n-1) \frac{f'}{f}. \end{aligned}$$

□

Um caso particular da proposição anterior, pode ser visto no seguinte resultado:

Proposição 2.3. *Seja $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $r(x) = d(x, p)$. Então,*

$$\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0.$$

Ademais, se $X \perp \frac{\partial}{\partial r}$, então

$$\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r}, X \right) = 0.$$

Demonstração. Sabemos que, para cada w fixado em $T_p M$, as curvas $r \mapsto \exp_p(rw)$ são geodésicas com vetor velocidade $\frac{\partial}{\partial r}$. Este fato e a definição do Hessiano para a função r nos dão

$$\begin{aligned} \text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \right) - \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} \right) r \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e isto demonstra a primeira parte da proposição.

Para provar a segunda parte, vemos que

$$\begin{aligned} \text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r}, X \right) &= \text{Hess } r \left(X, \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= X \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} \right) (r) \right) - \left(\nabla_X \frac{\partial}{\partial r} \right) (r) \\ &= - \left\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle, \end{aligned}$$

pois $X \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} \right) (r) \right) = X(1) = 0$.

Pela compatibilidade da métrica, segue que

$$\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r}, X \right) = -\frac{1}{2} X \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle.$$

Por fim, como as geodésicas radiais são parametrizadas pelo comprimento de arco, concluímos que

$$\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r}, X \right) = -\frac{1}{2}X(1) = 0,$$

como queríamos. □

Como aplicação das duas proposições que acabamos de mostrar, apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1. *Vamos calcular o Laplaciano da função distância r_k , considerando a métrica*

$$dr^2 + f_k^2(r)dw^2, \tag{2.6}$$

onde

$$f_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(r\sqrt{k}), & \text{se } k > 0 \\ r, & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(r\sqrt{-k}), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Diferenciando a função $f_k(r)$ temos que

$$f'_k(r) = \begin{cases} \cos(r\sqrt{k}), & \text{se } k > 0 \\ 1, & \text{se } k = 0 \\ \cosh(r\sqrt{-k}), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Usando o resultado das duas proposições acima, vemos que

$$\begin{cases} k > 0 \Rightarrow \text{Hess } r_k = \sqrt{k} \cot(r\sqrt{k})g \\ k = 0 \Rightarrow \text{Hess } r = \frac{1}{r}g \\ k < 0 \Rightarrow \text{Hess } r_k = \sqrt{-k} \coth(r\sqrt{-k})g. \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{1}{n-1} \Delta r_k = \begin{cases} \sqrt{k} \cot(r\sqrt{k}), & \text{se } k > 0 \\ \frac{1}{r}, & \text{se } k = 0 \\ \sqrt{-k} \coth(r\sqrt{-k}), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

É possível mostrar que, usando a expressão (2.6) da métrica obtém-se, após alguns cálculos com a fórmula (1.15), que a curvatura seccional é constante e igual a k . Daí, pelo teorema de classificação de Cartan (teorema 1.3), se $k > 0$ existe uma isometria entre esta métrica e a métrica da esfera S^n de raio $\frac{1}{\sqrt{k}}$ que tem curvatura seccional constante k . Se $k < 0$, a métrica (2.6) é isométrica à métrica do espaço hiperbólico H^n , também com curvatura seccional constante igual a k e, por fim, quando $k = 0$, obtemos a isometria entre a tal métrica e a métrica canônica do \mathbb{R}^n em coordenadas polares.

CAPÍTULO 3

TEOREMAS DE COMPARAÇÃO

NESTE CAPÍTULO faremos a demonstração do principal resultado desta dissertação. Para isto, usaremos alguns fatos vistos nos capítulos anteriores e o teorema de comparação do Laplaciano, que introduzimos a seguir.

3.1 Teorema de Comparação do Laplaciano

Teorema 3.1 (Comparação do Laplaciano). *Sejam M uma variedade Riemanniana completa e r a distância geodésica ao ponto $p \in M$. Suponhamos que a curvatura de Ricci de M satisfaz*

$$\text{Ric}(M) \geq (n - 1)k$$

e que a função r é diferenciável no ponto x . Então

$$\Delta r(x) \leq \Delta r_k(\tilde{x}), \tag{3.1}$$

onde $r_k(\tilde{x}) = r(x) = r_0$ e $r_0 < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ se $k > 0$, com r_k sendo a distância geodésica a partir de um ponto fixado numa forma espacial de curvatura seccional constante k e r é a distância geodésica a partir de um ponto fixado numa variedade completa. A igualdade ocorre, se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando p e x , para planos contendo o vetor radial for constante e igual a k .

Demonstração. Como

$$\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r'}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r'}, X \right) = 0, \quad \forall X \perp \frac{\partial}{\partial r'}$$

concluimos que o Hessiano da função r possui um autovalor igual a zero. Este fato e a desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada às matrizes Hessiano de r e Identidade nos dão

$$|\text{Hess } r|^2 \geq \frac{(\Delta r)^2}{n-1}. \quad (3.2)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \left| \text{tr} \left(\text{Hess } r|_{\langle \frac{\partial}{\partial r'} \rangle^\perp} \cdot \text{Id}^T|_{\langle \frac{\partial}{\partial r'} \rangle^\perp} \right) \right| &= |\langle \text{Hess } r, \text{Id} \rangle| \\ &\leq |\text{Hess } r| \cdot |\text{Id}|, \end{aligned}$$

onde omitimos $|_{\langle \frac{\partial}{\partial r'} \rangle^\perp}$, por comodidade. Daí

$$\begin{aligned} |\text{Hess } r|^2 \cdot |\text{Id}|^2 &= |\text{Hess } r|^2 \cdot (n-1) \geq |\Delta r|^2 \\ &= (\Delta r)^2, \end{aligned}$$

pois

$$|\text{Id}|^2 = \text{tr}(\text{Id} \cdot \text{Id}^T) = n-1.$$

Logo,

$$|\text{Hess } r|^2 \geq \frac{(\Delta r)^2}{n-1}.$$

Do fato que $|\nabla r| = 1$ e fazendo uso da fórmula de Weitzenböck para a função r , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= |\text{Hess } r|^2 + \langle \nabla r, \nabla(\Delta r) \rangle + \text{Ric}(\nabla r, \nabla r) \\ &= |\text{Hess } r|^2 + \left\langle \frac{\partial}{\partial r'}, \nabla(\Delta r) \right\rangle + \text{Ric}(\nabla r, \nabla r) \\ &= |\text{Hess } r|^2 + \frac{\partial}{\partial r} \Delta r + \text{Ric}(\nabla r, \nabla r) \\ &= |\text{Hess } r|^2 + (\Delta r)' + \text{Ric}(\nabla r, \nabla r). \end{aligned}$$

Agora, consideremos $\varphi = \Delta r$. Usando a hipótese sobre a curvatura de Ricci e a desigualdade (3.2) na expressão acima, vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= |\text{Hess } r|^2 + \varphi' + \text{Ric}(\nabla r, \nabla r) \\ &\geq \frac{\varphi^2}{n-1} + \varphi' + \text{Ric}(\nabla r, \nabla r) \\ &\geq \frac{\varphi^2}{n-1} + \varphi' + (n-1)k. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Vamos estudar o caso da igualdade na expressão anterior. Para isto, consideremos a aplicação

$$\psi = \Delta r_k = (n-1) \frac{f'_k}{f_k}$$

e vejamos que ψ satisfaz tal igualdade, onde r_k é a função distância sobre a variedade de curvatura seccional constante k e

$$f_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(r\sqrt{k}), & \text{se } k > 0 \\ r, & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(r\sqrt{-k}), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Ora, supondo $k = 0$, temos que

$$f_k = r \quad \text{e} \quad f'_k = 1.$$

Daí

$$\psi = \frac{(n-1)}{r} \quad \text{e} \quad \psi' = -\frac{(n-1)}{r^2}.$$

Logo,

$$\frac{\psi^2}{n-1} + \psi' + (n-1)k = \frac{(n-1)}{r^2} - \frac{(n-1)}{r^2} = 0.$$

Para o caso $k > 0$, vemos que

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(r\sqrt{k}) \quad \text{e} \quad f'_k = \cos(r\sqrt{k}).$$

Assim,

$$\psi = \sqrt{k}(n-1) \frac{\cos(r\sqrt{k})}{\sin(r\sqrt{k})} \quad \text{e} \quad \psi' = -\frac{k(n-1)}{\sin^2(r\sqrt{k})},$$

donde,

$$\begin{aligned} \frac{\psi^2}{n-1} + \psi' + (n-1)k &= k(n-1) \frac{\cos^2(r\sqrt{k})}{\sin^2(r\sqrt{k})} - \frac{k(n-1)}{\sin^2(r\sqrt{k})} + (n-1)k \\ &= \frac{k(n-1) - k(n-1)}{\sin^2(r\sqrt{k})} = 0. \end{aligned}$$

Finalmente supondo $k < 0$, obtemos que

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(r\sqrt{-k}) \quad \text{e} \quad f'_k = \cosh(r\sqrt{-k}).$$

Daí,

$$\psi = \sqrt{-k}(n-1) \frac{\cosh(r\sqrt{-k})}{\sinh(r\sqrt{-k})} \quad \text{e} \quad \psi' = -\frac{k(n-1)}{\sinh^2(r\sqrt{-k})}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\psi^2}{n-1} + \psi' + (n-1)k &= -k(n-1) \frac{\cosh^2(r\sqrt{-k})}{\sinh^2(r\sqrt{-k})} - \frac{k(n-1)}{\sinh^2(r\sqrt{-k})} + (n-1)k \\ &= \frac{k(n-1) - k(n-1)}{\sinh^2(r\sqrt{-k})} = 0, \end{aligned}$$

donde ψ satisfaz a igualdade em (3.3).

Como ψ é injetiva em seu domínio, é possível escolher uma função contínua $\theta(t)$, definida em $[0, r_0)$, de modo que

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \psi(\theta(t)) = \varphi(t). \end{cases}$$

Daí,

$$\frac{\varphi^2(t)}{n-1} + \varphi'(t) + (n-1)k \leq 0 = \frac{\psi^2(\theta(t))}{n-1} + \psi'(\theta(t)) + (n-1)k,$$

o que nos dá

$$\varphi'(t) \leq \psi'(\theta(t)).$$

Como

$$\varphi'(t) = \psi'(\theta(t)) \cdot \theta'(t),$$

segue que

$$\psi'(\theta(t)) \cdot \theta'(t) \leq \psi'(\theta(t)).$$

Visto que $\psi'(t) < 0$, temos $\theta'(t) \geq 1$ e assim

$$\theta(t) \geq t.$$

Do fato de ψ ser decrescente, obtemos que

$$\varphi(t) = \psi(\theta(t)) \leq \psi(t).$$

Portanto,

$$\Delta r(x) \leq \Delta r_k(\tilde{x}).$$

Se a igualdade vale em (3.1), então todas as desigualdades na demonstração tornam-se igualdades. Em particular, a igualdade em (3.2) ocorre se, e somente se, $\text{Hess } r|_{\langle \frac{\partial}{\partial r} \rangle^\perp} = \lambda \text{Id}$, λ uma constante. Como $\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0$ então, neste caso, o termo a_{nn} da matriz Hessiano de r é nulo e, assim,

$$|\text{Hess } r|^2 = (n-1)\lambda^2.$$

Por outro lado, como $\Delta r = \Delta r_k$, ou seja, $\varphi = \psi$, temos que

$$|\text{Hess } r|^2 = \frac{\psi^2}{n-1}.$$

Logo,

$$\lambda = \frac{\psi}{n-1},$$

e isto nos dá que o Hessiano de r tem $n-1$ autovalores iguais a $\frac{\psi}{n-1}$. Para finalizar a demonstração deste resultado, devemos verificar que

$$K \left(e_j, \frac{\partial}{\partial r} \right) \Big|_x = k,$$

k uma constante. Para isto, provaremos uma afirmação que será útil na finalização da prova do teorema.

Afirmção 3.1. Consideremos a base $\mathcal{B} = \left\{ e_1, \dots, e_{n-1}, \frac{\partial}{\partial r} \right\}$ de vetores ortonormais que diagonaliza o Hessiano de r . Afirmamos que

$$\nabla_{e_j} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\psi}{n-1} e_j.$$

Com efeito, vamos escrever $\nabla_{e_j} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)$ na base \mathcal{B} . Assim,

$$\nabla_{e_j} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k + \alpha_n \frac{\partial}{\partial r}.$$

Como

$$\left\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = \alpha_n \quad \text{e} \quad \left\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = \frac{1}{2} e_j \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 0$$

segue-se que

$$\alpha_n = 0,$$

ou seja,

$$\left\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 0.$$

Para $i \neq j$, temos

$$\left\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, e_i \right\rangle = \text{Hess } r(e_j, e_i) = 0,$$

isto é,

$$\alpha_i = 0 \quad \text{para todo } i \neq j.$$

Dessa forma, obtemos que

$$\nabla_{e_j} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) = \alpha_j e_j.$$

Visto que $\alpha_j = \left\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right\rangle = \text{Hess } r(e_j, e_j) = \lambda$, temos

$$\nabla_{e_j} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\psi}{n-1} e_j,$$

provando assim a afirmação.

Temos, portanto,

$$\begin{aligned}
K \left(e_j, \frac{\partial}{\partial r} \right) \Big|_x &= R \left(e_j, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right) \\
&= \left\langle \nabla_{e_j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \nabla_{e_j} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) - \nabla_{[e_j, \frac{\partial}{\partial r}]} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right), e_j \right\rangle \\
&= - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left(\frac{\psi}{n-1} \right) e_j + \nabla_{[e_j, \frac{\partial}{\partial r}]} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right), e_j \right\rangle \\
&= - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left(\frac{\psi}{n-1} \right) e_j, e_j \right\rangle - \left\langle \nabla_{(\nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r})} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right), e_j \right\rangle + \left\langle \nabla_{(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} e_j)} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right), e_j \right\rangle \\
&= - \frac{\psi'}{n-1} - \frac{\psi}{n-1} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} e_j, e_j \right\rangle - \left\langle \nabla_{\left(\frac{\psi}{n-1} e_j \right)} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \nabla_{\left(\left\langle \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)} e_j, e_i \right\rangle e_i + \left\langle \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)} e_j, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \frac{\partial}{\partial r} \right)} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right\rangle \\
&= - \frac{\psi'}{n-1} - \frac{\psi}{n-1} \left\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right\rangle + \left\langle \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)} e_j, e_i \right\rangle \left\langle \nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)} e_j, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right\rangle \\
&= - \frac{\psi'}{n-1} - \frac{\psi}{n-1} \left\langle \left(\frac{\psi}{n-1} \right) e_j, e_j \right\rangle + \left\langle \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)} e_j, e_i \right\rangle \left\langle \left(\frac{\psi}{n-1} \right) e_i, e_j \right\rangle \\
&= - \frac{\psi'}{n-1} - \frac{\psi^2}{(n-1)^2} - \frac{\psi}{n-1} \left\langle \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)} e_j, e_i \right\rangle \delta_{ij} \\
&= - \frac{1}{n-1} \left(\psi' + \frac{\psi^2}{n-1} \right) \\
&= - \frac{1}{n-1} [-k(n-1)] \\
&= k,
\end{aligned}$$

o que nos mostra que a curvatura seccional ao longo de geodésicas, ligando p e x , é constante e igual a k , finalizando assim a demonstração do teorema. \square

3.2 O Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Gromov

Nesta seção provamos o teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov, que é uma aplicação do teorema de comparação do Laplaciano e o principal resultado de nosso trabalho.

Teorema 3.2 (Comparação de Volume de Bishop-Gromov). *Seja M uma variedade Riemanniana completa e suponhamos que, para k constante,*

$$\text{Ric}(g) \geq (n - 1)kg.$$

Então

$$\text{Vol}(B_R(p)) \leq \text{Vol}(B_R^k),$$

onde B_R^k é uma bola geodésica de raio R na forma espacial de curvatura seccional constante k . A igualdade ocorre, se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando p e x , para planos contendo o vetor radial, for constante e igual a k .

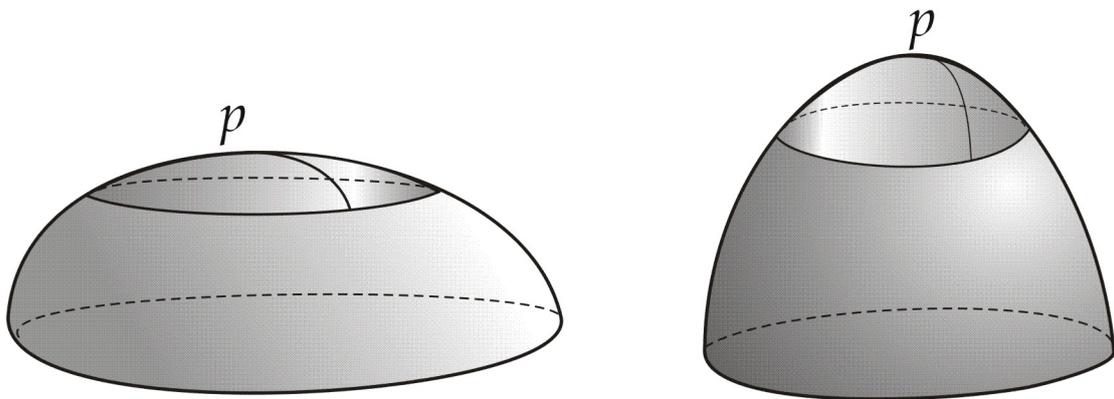


Figura 3.1: Comparação entre volumes

Demonstração. Como vimos em (2.4), a expressão do Laplaciano em coordenadas polares é dada por

$$\Delta r(x) = (n - 1) \frac{f'(r)}{f(r)}.$$

Sabendo que $g = \det(g_{ij})$ e considerando a métrica g em coordenadas polares como sendo

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\tau^2,$$

vista em (2.2), segue que

$$g = f^{2(n-1)}.$$

Assim

$$\sqrt{g} = f^{n-1},$$

donde

$$(\sqrt{g})' = (n-1)f^{n-2}f'.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Delta r &= (n-1)\frac{f'}{f} = (n-1)\frac{\left(\frac{f^n}{f^2}\right)'}{\left(\frac{f^n}{f}\right)}f' \\ &= (n-1)\frac{f^{n-2}}{f^{n-1}}f' \\ &= \frac{(\sqrt{g})'}{\sqrt{g}}. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos que

$$\Delta r_k = (n-1)\frac{f'_k}{f_k} = \frac{(\sqrt{g_k(r)})'}{\sqrt{g_k(r)}}.$$

Do teorema de comparação do Laplaciano temos que $\Delta r \leq \Delta r_k$, e assim para qualquer ω vale

$$\frac{(\sqrt{g(r, \omega)})'}{\sqrt{g(r, \omega)}} \leq \frac{(\sqrt{g_k(r)})'}{\sqrt{g_k(r)}}.$$

Da desigualdade acima, vemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{g(r, \omega)}}{\sqrt{g_k(r)}}\right)' &= \frac{\sqrt{g_k(r)}(\sqrt{g(r, \omega)})' - \sqrt{g(r, \omega)}(\sqrt{g_k(r)})'}{g_k(r)} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Daí, como pode ser visto no apêndice,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g(r, \omega)}}{\sqrt{g_k(r)}} = 1, \quad (3.4)$$

e assim, segue que

$$\sqrt{g(r, \omega)} \leq \sqrt{g_k(r)},$$

para todo $r > 0$.

Por fim, usando a definição de volume vista em (1.1) e integração em coordenadas polares e, lembrando também que $\Omega = \exp_p(\mathcal{E}_p)$ tem medida total, como vimos na seção 1.2, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B_R(p)) &= \int_{B_R(p)} dM \\ &= \int_{B_R(p) \cap \Omega} dM \\ &= \int_{B_R(0) \cap \mathcal{E}_p} \sqrt{g} dr d\omega \\ &\leq \int_{B_R(0) \cap \mathcal{E}_p} \sqrt{g_k} dr d\omega \\ &= \text{Vol}(B_R^k), \end{aligned}$$

como queríamos.

Quanto à igualdade, ela decorre do teorema de comparação do Laplaciano. □

Neste apêndice apresentamos a justificativa para o limite visto na expressão (3.4) na demonstração do teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov.

Consideremos (X, U) um sistema de coordenadas normais em torno de $p \in M$, com $X(0) = p$. Isto significa que

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \nabla_{X_j} X_i(p) = 0,$$

como podemos ver, por exemplo, em [8] Proposição 5.11, página 78. Assim, na expansão de Taylor para g_{ij} , não aparecem termos de ordem 1. Mais precisamente,

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(|x|^2),$$

ou seja, existem constantes $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| \leq C|x|^2, \quad \forall x \in B(0, \varepsilon) \subset U.$$

Dessa forma, também obtemos uma expansão para o determinante $g = \det(g_{ij})$, com $i, j = 1, \dots, n$, a saber

$$g(x) = 1 + O(|x|^{2n}),$$

a qual pode ser escrita como

$$C|x|^{2n} - 1 \leq g(x) \leq 1 + C|x|^{2n}.$$

Claramente obtemos a mesma expansão para a métrica g_k de uma forma espacial de curvatura seccional constante k , mudando apenas a constante, digamos C_k . Assim, obtemos que

$$\frac{C|x|^{2n} - 1}{C_k|x|^{2n} - 1} \leq \frac{g(x)}{g_k(x)} \leq \frac{1 + C|x|^{2n}}{1 + C_k|x|^{2n}},$$

para valores de x próximos de 0.

Em particular, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g(x)}}{\sqrt{g_k(x)}} = 1,$$

como queríamos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Aubin, T., *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*, Springer, 1998.
- [2] Bishop, R. L., Crittenden, R.J. *Geometry of manifolds*, Academic Press, New York-London, 1964.
- [3] Chavel, I., *Riemannian Geometry - A Modern Introduction*, Cambridge University Press, Second Edition, 2006.
- [4] do Carmo, M. P., *Differential Forms and Applications*, Springer-Verlag, 1994.
- [5] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 3ª edição, 2005.
- [6] Escobar, J. F., *Topics in PDE'S and Differential Geometry*, XII Escola de Geometria Diferencial, 2002.
- [7] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J., *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [8] Lee, J. M., *Riemannian Manifolds - An Introduction to Curvature*, Springer, 1997.
- [9] Lima, E. L., *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 7ª edição, 2006.
- [10] Lima, E. L., *Curso de Análise volume 2*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 9ª edição, 2006.

- r -formas, 16
- Aplicação
 - r -linear, 15
 - alternada, 16
 - anti-simétrica, 16
- Base coordenada, 20
- Bola geodésica, 59
- Comprimento de curva, 22
- Curvatura, 35
 - componentes da, 35
 - de Ricci, 35, 52, 54
 - escalar, 35
 - seccional, 36
 - constante, 51, 54
- Cut-locus, 23
- Derivada Covariante, 38
- Distância, 21
- Divergente, 24
 - em coordenadas locais, 31
- Espaço
 - hiperbólico, 51
 - métrico, 22
 - vetorial orientado, 17
- Fórmula de Weitzenböck, 43
- Forma
 - alternada de grau r , 16
 - de volume de um espaço vetorial, 17
 - elemento de volume em variedade, 19
 - espacial, 36
 - pull back, 20
- Geodésica, 21, 45, 49, 52
 - maximal, 22
 - minimizante, 22
 - radial, 50
- Gradiente, 23
 - em coordenadas locais, 27
- Hessiano, 23, 24
 - da função distância, 45
- Identidade de Ricci, 41
- Laplaciano, 23, 24
 - em coordenadas locais, 34
 - em coordenadas polares, 59

Métrica

- canônica, 45
- da esfera, 51
- do espaço hiperbólico, 51

Produto exterior, 17

Referencial ortonormal geodésico, 25

Símbolos de Christoffel, 32, 42, 47

Sistema de coordenadas normais, 40, 43, 62

Tensor

- curvatura, 35
- de Ricci, 37

Teorema

- de Hopf-Rinow, 22
- de classificação de Cartan, 37
- de Comparação
 - do Laplaciano, 52
 - de Volume de Bishop-Gromov, 59

Variedade

- Riemanniana, 59
 - completa, 22, 52
 - geodesicamente completa, 22

Volume, 20