



**Universidade Federal de Alagoas**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**O Teorema de H. Hopf e as Inequações  
de Cauchy-Riemann**

**Maria de Andrade Costa**

Rio São Francisco

Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Dissertação de Mestrado

# O Teorema de H. Hopf e as Inequações de Cauchy-Riemann

Maria de Andrade Costa

Maceió, Brasil  
Dezembro 2006

# O Teorema de H. Hopf e as Inequações de Cauchy-Riemann

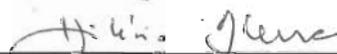
Maria de Andrade Costa

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 4 de dezembro de 2006 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Fernando Codá Marques



Prof. Dr. Hilário Alencar (Orientador)



Prof. Dr. Manfredo do Carmo

A Clarissa e Claudemir.

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por tudo.

Ao professor Hilário Alencar, meu orientador, pelas conversas matemáticas, incentivos durante todo o programa de Mestrado em Matemática e, principalmente, por ter me dado a oportunidade de fazer uma disciplina de doutorado no IMPA, a qual me proporcionou um crescimento matemático qualitativo.

Aos meus colegas de turma: Júlio de Almeida, Thales Vieira, pelas conversas, críticas construtivas e amizade, aos meus colegas de sala de estudo: André Pizzaia, Daniel Nicolau, José Arnaldo dos Santos e Sofia Melo, pelo companherismo.

Aos professores Adán Corcho, Krerley Oliveira e Marcos Petrucio Cavalcante que contribuíram, de forma significativa, na minha formação acadêmica com conversas matemáticas e não-matemáticas.

Ao professor Manfredo do Carmo pelas conversas matemáticas, super agradáveis, que tivemos, as quais me ajudaram a concluir esse trabalho.

Ao professor Fernando Codá pelas sugestões nas correções desse trabalho, pelo incentivo que me deu para estudar mais e por ser um professor esclarecedor dos meus questionamentos.

Ao professor Marcos Petrucio Cavalcante por ter me ajudado a fazer o apêndice desse trabalho e pelas várias conversas interessantes acadêmicas.

Aos meus queridos pais, Josefa Pereira de Andrade Costa e Miguel Francisco da Costa (in memoriam), aos meus irmãos e a minha querida família pelos incentivos.

Aos meus amigos e professores da Universidade Federal de Sergipe que sempre me apoiaram, especialmente: Paulo Rabelo, Valdenberg Araújo e Natanael Dantas.

A todas as pessoas que me receberam aqui em Alagoas. Um agradecimento muito especial a família Codá Marques por me acolher com muito carinho em sua residência e por tudo que fizeram por mim.

Aos meus amigos do IMPA, pelas conversas matemáticas e não-matemáticas, especialmente Cristina Levina e Ana Maria Luz.

Aos meus amigos que deram sugestões nesse trabalho, tanto nas correções como na apresentação do mesmo, Claudemir Leandro, Clarissa Codá, Fábio Boia, Márcio Henrique Batista, Marcius Petrucio e Thiago Fontes.

Ao professor Adailson Peixoto por seus valiosos conselhos e sua verdadeira amizade.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento da bolsa de mestrado concedida durante o período 03/2005 a 12/2006.

# Resumo

Em 1951, H. Hopf publicou em um prestigiado artigo um famoso resultado:

*Seja  $M$  uma superfície compacta de gênero zero imersa no espaço Euclidiano de dimensão três com curvatura média constante. Então  $M$  é isométrica à esfera redonda.*

Neste trabalho descreveremos detalhadamente do ponto de vista matemático uma generalização do resultado obtido por H. Hopf, a qual será publicada na revista *Communication in Analysis and Geometry* em 2007, cujos autores são Hilário Alencar, Manfredo Perdigão do Carmo e Renato Tribuzy. Neste artigo, os pesquisadores classificaram as superfícies compactas de gênero zero imersas na variedade produto: superfícies com curvatura Gaussiana constante cartesiano o espaço Euclidiano de dimensão um e cuja diferencial da curvatura média satisfaz uma certa desigualdade envolvendo uma forma quadrática.

Além disso, estudaremos uma extensão da classificação anterior no caso em que as superfícies estão imersas numa variedade Riemanniana simplesmente conexa, homogênea com um grupo de isometrias de dimensão quatro. Tais resultados foram obtidos recentemente por Hilário Alencar, Isabel Fernández, Manfredo Perdigão do Carmo e Renato Tribuzy. Nas demonstrações destes teoremas foram usadas técnicas de Análise Complexa, fatos de Topologia e uma generalização do Teorema de H. Hopf obtida por Abresch e Rosenberg, publicado em *Acta Mathematica* em 2004.

**Palavras-chave:** curvatura média, esfera, forma quadrática, função holomorfa, inequações de Cauchy-Riemman, superfície de gênero zero.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>10</b>
1.1	Preliminares e Definições . . . . .	10
1.2	O Tensor Curvatura . . . . .	14
1.3	A Segunda Forma Fundamental e as Equações de Gauss, Ricci e Codazzi	16
1.4	O Teorema de Gauss . . . . .	21
1.5	A Métrica Produto e Conexão Produto . . . . .	21
1.6	O Teorema de Green-Stokes . . . . .	22
1.7	A Demonstração do Teorema de H. Hopf . . . . .	25
<b>2</b>	<b>O Teorema de Alencar, do Carmo e Tribuzy</b>	<b>31</b>
2.1	A Demonstração do Teorema de Alencar, do Carmo e Tribuzy . . . . .	31
2.2	A Demonstração do Lema Principal . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Resultados e Generalizações</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>Apêndice</b>	<b>50</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>52</b>

# Introdução

Nesta dissertação apresentaremos resultados que envolvem Geometria Diferencial, Topologia e Análise Complexa. Inicialmente, provaremos o teorema de H. Hopf, ver [6], cujo enunciado é o seguinte:

*Seja  $M$  uma superfície compacta de gênero zero imersa em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média constante. Então  $M$  é isométrica à esfera redonda.*

H. Hopf forneceu duas provas para o teorema citado acima e os detalhes encontram-se na seção 1.7.

Foi a partir de 1951, com a publicação do artigo de H. Hopf, que muitos geômetras começaram a trabalhar com superfícies de curvatura média constante não-nula, pois, até aquele momento, os pesquisadores ligados à Geometria Diferencial davam mais ênfase às superfícies mínimas.

Em 1951, também foi observado por H. Hopf que o teorema acima é válido para superfícies de Weingarten, ou seja, superfícies para as quais existe uma função  $W$  que relaciona as duas curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  da seguinte maneira:  $W(k_1, k_2) = 0$ . Se essa relação pode ser resolvida, digamos, em  $k_2$ , e  $dk_2/dk_1 = -1$  quando  $k_1 = k_2$ , dizemos que a superfície de Weingarten é especial.

Em 2004, Abresch e Rosenberg generalizaram o Teorema de H. Hopf com o seguinte resultado:

**Teorema 0.0.1.** *Sejam  $M$  uma superfície imersa em  $M^2(c) \times \mathbb{R}$  e  $Q$  uma forma quadrática definida por*

$$Q(X, Y) = 2H\alpha(X, Y) - c\langle \xi X, \xi Y \rangle,$$

*onde  $M^2(c)$  é uma variedade Riemanniana com curvatura  $c$ ,  $X, Y$  são vetores tangentes a  $M$ ,  $\alpha$  é a segunda forma fundamental,  $H$  é curvatura média e  $\xi : M^2(c) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a projeção natural sobre  $\mathbb{R}$ , isto é,  $\xi(p, t) = t$ ;  $p \in M^2(c)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Se a curvatura média  $H$  é constante, então  $Q^{(2,0)}$  é uma forma quadrática holomorfa. Como consequência, se  $M$  é uma superfície compacta de gênero zero, então  $M$  é uma superfície mergulhada invariante por rotações no espaço ambiente.*

O resultado de Abresch e Rosenberg foi generalizado por Alencar, do Carmo e Tribuzy em 2005, ver [2], mais precisamente eles provaram o teorema a seguir:

**Teorema 0.0.2.** *Seja  $M$  uma superfície compacta de gênero zero imersa em  $M^2(c) \times \mathbb{R}$ . Suponhamos que*

$$|dH| \leq h(z)|Q^{(2,0)}|,$$

onde  $|dH|$  é a norma da diferencial da curvatura média  $H$  de  $M$ ,  $h$  é uma função real contínua, não-negativa e  $Q^{(2,0)}$  é a parte  $(2,0)$  da forma quadrática  $Q$  definida por Abresch e Rosenberg. Então  $Q^{(2,0)}$  é identicamente nula e  $M$  é uma superfície invariante por rotações em  $M^2(c) \times \mathbb{R}$ .

O Teorema 0.0.2 foi a motivação para essa dissertação. Os detalhes do teorema acima podem ser encontrados na seção 2.1, cuja demonstração utiliza-se do seguinte

**Lema 0.0.1.** *(Lema Principal) Seja  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa definida em um aberto  $U$  do plano complexo que contém a origem  $z = 0$ . Suponhamos que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq h(z)|f(z)|, \quad (1)$$

onde  $h$  é uma função real contínua, não-negativa. Assumamos que  $z = z_0$  é um zero de  $f$ . Então  $f \equiv 0$  em uma vizinhança de  $V \subset U$  de  $z_0$  ou

$$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z), \quad z \in V, \quad k \geq 1,$$

onde  $f_k(z)$  é uma função contínua com  $f_k(z_0) \neq 0$ .

O Lema Principal foi inspirado em alguns resultados obtidos por Chern, ver seção 2.2.

Um resultado bastante interessante envolvendo as superfícies de Weingarten, foi provado por R. Bryant, ver [4], a saber:

**Teorema 0.0.3.** *Seja  $M$  uma superfície compacta de gênero zero imersa em  $\mathbb{R}^3$  e seja  $f$  qualquer função suave definida em um intervalo aberto contendo o intervalo  $[0, \infty)$ . Se  $M$  satisfaz a relação de Weingarten na forma*

$$H = f(H^2 - K) = f(|\alpha^{(2,0)}|^2),$$

onde  $\alpha^{(2,0)}$  é a parte  $(2,0)$  da segunda forma fundamental de  $M$ , então  $M$  é isométrica à esfera.

O teorema anterior foi também generalizado por Alencar, do Carmo e Tribuzy em [2]. Eles provaram a seguinte

**Proposição 0.0.1.** *Sejam  $M$  uma superfície compacta de gênero zero, imersa em  $M^2(c) \times \mathbb{R}$  e  $f$  uma função suave como acima. Suponhamos que*

$$H = f(|Q^{(2,0)}|^2).$$

Então  $Q^{(2,0)} \equiv 0$  e  $M$  é isométrica à esfera.

A demonstração desta Proposição é uma consequência do Teorema de Alencar, do Carmo e Tribuzy, ver capítulo 3.

Recentemente, ver [3], Alencar, do Carmo, Fernández e Tribuzy generalizaram o resultado obtido em [2] para superfícies imersas em  $\mathbb{E}^3(k, \tau)$ ,  $\tau \neq 0$ . Aqui  $\mathbb{E}^3(k, \tau)$  é uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, homogênea com um grupo de isometrias de dimensão 4. Tal variedade é um fibrado Riemanniano com curvatura  $\tau$ , cuja base é uma superfície com curvatura seccional  $k$ . Eles provaram o seguinte resultado:

**Teorema 0.0.4.** *Seja  $M$  uma superfície compacta de gênero zero imersa em  $\mathbb{E}^3(k, \tau)$  com curvatura média  $H$ . Suponhamos que*

$$|dH| \leq g|Q^{(2,0)}|,$$

onde  $g$  é uma função contínua real não-negativa,  $\mathbb{E}^3$  é uma variedade Riemanniana simplesmente conexa homogênea e  $Q(X, Y) = 2\theta\alpha(X, Y) - c\langle\xi, Y\rangle\langle\xi, Y\rangle$ , sendo  $\theta = H + i\tau$  e  $c = k - 4\tau^2$ . Então  $Q^{(2,0)}$  é identicamente nula e, conseqüentemente,  $M$  é uma superfície invariante por rotações em  $\mathbb{E}^3(k, \tau)$ .

A demonstração do Teorema 0.0.4 encontra-se no capítulo 3.

Finalmente, no apêndice desta dissertação determinaremos a parte (2,0) da forma quadrática  $Q$  definida por Abresch e Rosenberg. Além disso, calculamos a norma de  $Q^{(2,0)}$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as definições básicas e os fatos que serão utilizados nos capítulos posteriores. Na seção 1.1, definiremos a conexão de Levi-Civita, a qual será fundamental para conceituarmos o tensor curvatura. Na seção 1.2, introduziremos o tensor curvatura, essencial para definirmos curvatura seccional e curvatura escalar. Na seção 1.3, discorreremos a respeito da segunda forma fundamental de uma imersão isométrica. Exporemos, na seção 1.4, o Teorema de Gauss, que relaciona a curvatura seccional de duas variedades. Introduziremos, na seção 1.5, as definições de métrica produto e conexão produto, que serão fundamentais na demonstração do Principal Teorema do nosso trabalho. Tais definições podem ser encontradas em [8]. E, por último, na seção 1.6, exibiremos alguns fatos de Análise Complexa, os quais serão úteis na demonstração do Teorema de Green-Stokes.

### 1.1 Preliminares e Definições

**Definição 1.1.1.** *Uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $n$  e classe  $C^\infty$  é um conjunto  $M$  e uma família de aplicações biunívocas  $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$ , tais que*

1.  $\cup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$ ;
2. Para todo  $\alpha, \beta$  com  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$  os conjuntos  $\varphi_\alpha^{-1}(W)$  e  $\varphi_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$  são diferenciáveis;
3. A família  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  é máxima relativa às condições (1) e (2), ou seja qualquer outra carta está contida em  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ .

O par  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  (ou aplicação  $\varphi_\alpha$ ),  $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ , é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de  $M$  em  $p$ ;  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  é então chamada uma vizinhança coordenada em  $p$ . Uma família  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  satisfazendo (1) e (2) é chamada uma estrutura diferenciável em  $M$ .

**Observação 1.1.1.** *Uma estrutura diferencial em um conjunto  $M$  induz de uma maneira natural uma topologia em  $M$ . Com efeito, basta definir que  $A \subset M$  é um aberto de  $M$  se*

$\varphi_\alpha^{-1}(A \cap \varphi_\alpha(U_\alpha))$  é um aberto do  $\mathbb{R}^n$  para todo  $\alpha$ . É imediato verificar que  $M$  e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberto e a intersecção finita de abertos é aberto. Observe que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  são abertos e as aplicações  $\varphi_\alpha$  são contínuas.

**Definição 1.1.2.** Sejam  $M^m$  e  $\overline{M}^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\psi : M \rightarrow \overline{M}$  é diferenciável em  $p \in M$ , se dada uma parametrização  $y : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{M}$  em  $\psi(p)$  existe uma parametrização  $x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$  em  $p$ , tal que  $\psi(x(U)) \subset y(V)$  e a aplicação

$$y^{-1} \circ \psi \circ x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é diferenciável em  $x^{-1}(p)$ . Dizemos que  $\psi$  é diferenciável em um aberto de  $M$ , se é diferenciável em todos os pontos abertos deste aberto.

**Definição 1.1.3.** Sejam  $M^m$  e  $\overline{M}^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $\psi : M \rightarrow \overline{M}$  é uma imersão, se  $d\psi_p : T_p M \rightarrow T_{\psi(p)} \overline{M}$  é injetiva para todo  $p \in M$ .

**Observação 1.1.2.** Uma imersão  $\phi : M \rightarrow N$  de uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $n$  numa variedade  $N$  de dimensão  $n + 1$  é dita hipersuperfície.

**Definição 1.1.4.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Dizemos que  $M$  é orientável, se  $M$  admite uma família  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  satisfazendo (1) e (2) da definição 1.1.1, tal que para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , a diferencial da mudança de coordenadas  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  tem determinante positivo.

**Observação 1.1.3.** Entenderemos por variedade diferenciável um espaço de Hausdorff com base enumerável, isto é, a variedade pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas e orientável.

**Definição 1.1.5.** Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente  $T_p M$ , o qual varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se  $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $\varphi_\alpha(x_1, \dots, x_n) = q \in \varphi_\alpha(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial \varphi_j}(q) = d\varphi_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então  $\left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi_j}(q), \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é diferenciável em  $U$ .

**Definição 1.1.6.** Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana.

**Definição 1.1.7.** Sejam  $M$  e  $\overline{M}$  variedades Riemannianas. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow \overline{M}$  é chamado uma isometria, se

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{ para todo } p \in M, u, v \in T_p M.$$

**Definição 1.1.8.** Uma variedade Riemanniana é homogênea, se dados  $p, q \in M$ , existe uma isometria de  $M$  que leva  $p$  em  $q$ .

**Teorema 1.1.1.** *Toda variedade diferenciável  $M$  possui uma métrica Riemanniana.*

**Demonstração.** Ver [8], página 47. ■

**Definição 1.1.9.** *Um campo de vetores  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que a cada ponto  $p \in M$  associa um vetor  $X(p) \in T_pM$ .*

Agora definiremos o conceito de conexão afim. Utilizaremos a seguinte notação:  $\mathcal{X}(M)$  denotará o campo de vetores de classe  $C^\infty$  em  $M$  e  $D(M)$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  definidas em  $M$ .

**Definição 1.1.10.** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

que se indica por

$$(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y,$$

tal que

1.  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ;
2.  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ;
3.  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ .

Aqui  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  e  $f, g \in D(M)$ .

**Definição 1.1.11.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$  e  $\langle, \rangle$  uma métrica Riemanniana. A conexão  $\nabla$  é dita compatível com a métrica  $\langle, \rangle$ , quando*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

**Lema 1.1.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável  $M$ . Então existe um único campo vetorial  $Z = [X, Y]$ , tal que, para todo  $f \in D(M)$ , tem-se*

$$Zf = (XY - YX)f = [X, Y]f.$$

**Demonstração.** Primeiro provaremos que, se  $Z$  existe, ele é único. Admitamos, portanto, a existência de um tal  $Z$ . Sejam  $p \in M$  e  $\varphi : U \rightarrow M$  uma parametrização em  $p$ . Sejam

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

as expressões de  $X$  e  $Y$  nesta parametrização. Então, para todo  $f \in D$ ,

$$\begin{aligned} XYf &= X \left( \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ YXf &= Y \left( \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Portanto,  $Z$  é dado na parametrização  $\varphi$  por

$$Zf = XYf - YXf = \left( \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Isto mostra a unicidade de  $Z$ . A existência do campo  $Z$  é demonstrada da seguinte forma: defina-se  $Z_\alpha$  pela expressão acima em cada vizinhança coordenada  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  de uma estrutura diferenciável  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  de  $M$ . Por unicidade,  $Z_\alpha = Z_\beta$  em  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ , o que permite definir  $Z$  em toda a variedade  $M$ . ■

**Observação 1.1.4.** O campo vetorial  $Z$  dado no lema acima é chamado o colchete  $[X, Y] = XY - YX$  entre  $X$  e  $Y$ .

**Definição 1.1.12.** Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita simétrica, quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

**Teorema 1.1.2.** Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  satisfazendo as condições:

1.  $\nabla$  é simétrica;
2.  $\nabla$  é compatível com a métrica Riemanniana.

**Demonstração.** Suponhamos inicialmente a existência de uma tal conexão  $\nabla$ . Então

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (1.1)$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \quad (1.2)$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \quad (1.3)$$

Adicionando (1.1) e (1.2) e subtraindo (1.3), temos, usando a simetria de  $\nabla$ , que

$$\begin{aligned} & X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &= \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle &= \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &\quad - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

A expressão (1.4) mostra que  $\nabla$  está univocamente determinada pela métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Logo, caso exista, ela será única. Mostraremos que  $\nabla$  existe. De fato, defina  $\nabla$  por (1.4). É fácil verificar que  $\nabla$  está bem definida e que satisfaz às propriedades desejadas. ■

**Observação 1.1.5.** A conexão dada pelo teorema acima é denominada de conexão Levi-Civita de  $M$ .

## 1.2 O Tensor Curvatura

Nesta seção, apresentaremos uma definição de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser Euclidiana. Logo em seguida discutiremos a noção de curvatura seccional.

**Definição 1.2.1.** A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é uma correspondência que associa a cada par de vetores  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  uma aplicação

$$R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M).$$

Observe que, se  $M = \mathbb{R}^n$ , então  $R(X, Y)Z = 0$  para todo  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ . Com efeito, se indicarmos por  $Z = (z_1, \dots, z_n)$  as componentes do campo  $Z$  nas coordenadas naturais do  $\mathbb{R}^n$ , obteremos que

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n),$$

donde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n),$$

o que implica

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0,$$

como havíamos afirmado.

A expressão de  $R$  em um sistema de coordenadas  $(U, X)$  em torno do ponto  $p \in M$  é dada por

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_m R_{ijk}^m X_m.$$

Denotaremos

$$R_{ijks} = \langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle.$$

Estes coeficientes satisfazem:

$$R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kij s} = 0 \quad (\text{Identidade de Biancchi}),$$

$$R_{ijks} = -R_{jiks},$$

$$R_{ijks} = -R_{ijsk},$$

$$R_{ijks} = R_{ksij}.$$

**Proposição 1.2.1.** Seja  $\sigma \subset T_p M$  um espaço bi-dimensional do espaço tangente  $T_p M$  e sejam  $x, y \in \sigma$  dois vetores linearmente independentes. Então

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores  $x, y \in \sigma$ . Aqui  $(x, y, x, y) = \langle R(x, y)x, y \rangle$ .

**Demonstração.** Ver [8], página 105. ■

**Definição 1.2.2.** *Sejam  $p \in M$  e  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço bidimensional. O número real  $K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{\|x \wedge y\|^2}$ , onde  $x$  e  $y$  é uma base qualquer de  $\sigma$  e  $\|x \wedge y\| = \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2}$ , é chamado curvatura seccional de  $\sigma$  em  $p$ .*

**Lema 1.2.1.** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $\geq 2$  munido de um produto interno  $\langle, \rangle$ . Sejam  $R : V \times V \times V \rightarrow V$  e  $R' : V \times V \times V \rightarrow V$  aplicações tri-lineares tais que as propriedades da curvatura  $R$  sejam satisfeitas para*

$$(x, y, z, t) = \langle R(x, y)z, t \rangle, \quad (x, y, z, t)' = \langle R'(x, y)z, t \rangle.$$

*Se  $x, y$  são dois vetores linearmente independentes, escrevamos,*

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}, \quad K'(x, y) = \frac{(x, y, x, y)'}{|x \wedge y|^2},$$

*onde  $\sigma$  é o subespaço bi-dimensional gerado por  $x$  e  $y$ . Se  $K(\sigma) = K'(\sigma)$  para todo  $\sigma \subset V$ , então  $R = R'$ .*

**Demonstração.** Ver [8], página 105. ■

**Lema 1.2.2.** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $p$  um ponto de  $M$ . Defina uma aplicação trilinear  $R' : T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow T_p(M)$  por*

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

*onde  $X, Y, W, Z \in T_p(M)$ . Então  $M$  tem curvatura seccional constante igual a  $K_0$  se, e só se,  $R = K_0 R'$ , onde  $R$  é a curvatura de  $M$ .*

**Demonstração.** Admita que  $K(p, \sigma) = K_0$  para todo  $\sigma \subset T_p(M)$  e faça  $\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, Y, W, Z \rangle'$ . Observe que  $R'$  satisfaz as propriedades da curvatura de uma variedade Riemanniana. Como

$$(X, Y, X, Y)' = \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2,$$

temos que, para todo par de vetores  $X, Y \in T_p(M)$ ,

$$R(X, Y, X, Y) = K_0(|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2) = K_0 R'(X, Y, X, Y).$$

Usando o Lema 1.2.1, isto implica que, para todo  $X, Y, W, Z$ ,

$$R(X, Y, W, Z) = K_0 R'(X, Y, W, Z),$$

donde  $R = K_0 R'$ . A recíproca é imediata. ■

### 1.3 A Segunda Forma Fundamental e as Equações de Gauss, Ricci e Codazzi

**Definição 1.3.1.** Uma imersão  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m=k}$  entre duas variedades Riemannianas é dita isométrica, se

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \forall u, v \in T_p M, \forall p \in M^n. \quad (1.5)$$

**Observação 1.3.1.** Se  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m=k}$  é uma imersão e  $\overline{M}$  é uma variedade Riemanniana, então a métrica Riemanniana  $\overline{M}$  induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em  $M$  dada por (1.5). Tal métrica é chamada de métrica Riemanniana induzida por  $f$ .

A conexão Riemanniana de  $\overline{M}$  será indicada por  $\overline{\nabla}$ . Se  $X, Y$  são campos locais de vetores em  $M$  e  $\overline{X}, \overline{Y}$  extensões locais a  $\overline{M}$ , definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T, \quad (1.6)$$

onde  $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$  é a componente tangencial de  $(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})$ . A expressão (1.6) define uma conexão Riemanniana à métrica induzida de  $M$ .

Seja  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m=k}$  uma imersão de uma variedade Riemanniana  $\overline{M}$ . Então, para cada  $p \in M$ , o produto interno em  $T_p \overline{M}$  decompõe  $T_p \overline{M}$  na soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde  $(T_p M)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_p M$  em  $T_p \overline{M}$ . Tal decomposição varia diferenciavelmente com  $p$ . Ou seja, localmente a parte do fibrado tangente  $T\overline{M}$  que se projeta sobre  $M$  decompõe-se em um fibrado tangente  $TM$  e em um fibrado tangente normal  $TM^\perp$ . A seguir, usaremos as letra latinas  $X, Y, Z$ , etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes e as letras gregas  $\xi, \eta, \varsigma$ , etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais.

Vamos definir a segunda forma fundamental da imersão  $f : M \rightarrow \overline{M}$ . Inicialmente, convém introduzir previamente a seguinte definição: se  $X$  e  $Y$  são campos locais em  $M$ ,

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em  $\overline{M}$  normal a  $M$ . É claro que,  $B(X, Y)$  não depende das extensões  $\overline{X}, \overline{Y}$ . Com efeito, se  $\overline{X}_1$  é uma outra extensão de  $X$ , teremos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1} \overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X} - \overline{X}_1} \overline{Y},$$

que se anula em  $M$ , pois  $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$  em  $M$ . Além disso, se  $\overline{Y}_1$  é uma outra extensão de  $Y$ , então

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}_1 - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} (\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pois  $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$  ao longo de uma trajetória de  $X$ . Portanto  $B(X, Y)$  está bem definida.

No que se segue, indicaremos por  $\mathcal{X}(U)^\perp$  os campos diferenciáveis em  $U$  de vetores normais a  $f(U) \approx U$ .

**Proposição 1.3.1.** Se  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , então a aplicação  $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$  dada por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla_X} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

**Demonstração.** Usando as propriedades de linearidade de uma conexão, conclui-se imediatamente que  $B$  é aditiva em  $X, Y$  e, além disso,  $B(fX, Y) = fB(X, Y)$ ,  $f \in D(U)$ . Indicando por  $\overline{f}$  uma extensão de  $f$  a  $\overline{U}$ , temos

$$\begin{aligned} B(fX, Y) &= \overline{\nabla_X} \overline{fY} - \nabla_X (fY) \\ &= \overline{f} \overline{\nabla_X} \overline{Y} - f \nabla_X Y + \overline{X}(\overline{f}) \overline{Y} - X(f)Y. \end{aligned}$$

Como em  $M$ ,  $f = \overline{f}$  e  $\overline{X}(\overline{f}) = X(f)$ , concluímos que as duas últimas parcelas se anulam, donde  $B(fX, Y) = fB(X, Y)$ , isto é,  $B$  é bilinear.

A aplicação  $B$  é simétrica. De fato, usando a simetria da conexão Riemanniana, obtemos

$$B(X, Y) = \overline{\nabla_X} \overline{Y} - \nabla_X Y = \overline{\nabla_Y} \overline{X} + [\overline{Y}, \overline{X}] - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (1.7)$$

Como  $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X, Y]$  em  $M$ , concluímos que  $B(X, Y) = B(Y, X)$ . ■

**Definição 1.3.2.** Sejam  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . Definimos a aplicação  $H_\eta : T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M.$$

Usando a proposição anterior temos que  $H_\eta$  é uma forma bilinear e simétrica.

A forma quadrática  $II_\eta$  em  $T_p M$ , definida por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x),$$

é chamada a segunda forma fundamental de  $f$  em  $p$ , segundo o vetor normal  $\eta$ .

**Observação 1.3.2.** Como a aplicação  $H_\eta$  é uma forma bilinear e simétrica, podemos sempre associá-la uma aplicação auto-adjunta, a saber:

$$S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M,$$

definida por

$$\langle S_\eta x, y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

**Proposição 1.3.2.** Sejam  $p \in M$ ,  $x \in T_p M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . Seja  $N$  uma extensão local de  $\eta$  normal a  $M$ . Então

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla_x} N)^T.$$

**Demonstração.** Sejam  $x, y \in T_p M$  e  $X, Y$  extensões locais, respectivamente, de  $x, y$ . Então,  $\langle N, Y \rangle = 0$  e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(X, Y)(p), N \rangle = \langle \overline{\nabla_X} Y - \nabla_X Y, N \rangle(p) \\ &= \langle \overline{\nabla_X} Y, N \rangle(p) = -\langle Y, \overline{\nabla_X} N \rangle(p) = \langle -\overline{\nabla_x} N, y \rangle, \end{aligned}$$

$\forall y \in T_p M$ . ■

**Exemplo 1.3.1.** *Sejam  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1=k}$  uma hipersuperfície,  $p \in M$ ,  $S_\eta, \eta \in (T_p M)^\perp$  e  $\|\eta\| = 1$ . Como  $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  é linear e simétrica, então pode ser diagonalizada por uma base ortonormal de autovetores  $\{e_1, \dots, e_n\}$  com valores próprios reais  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , isto é,  $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Visto que  $M$  e  $\overline{M}$  são orientadas, denominamos os  $e_i$  de direções principais e os  $\lambda_i = k_i$  curvaturas principais de  $f$ .*

Dados  $X$  e  $\eta$ , já vimos que a componente tangente de  $\overline{\nabla}_X N$  é dada por  $(\overline{\nabla}_X N)^\top = -S_\eta(X)$ . Vamos estudar, agora, a componente normal de  $\overline{\nabla}_X N$ , que será chamada de conexão normal  $\nabla^\perp$  da imersão. Explicitamente,

$$\nabla_X^\perp \eta = (\overline{\nabla}_X N)^\perp = \overline{\nabla}_X N - (\overline{\nabla}_X N)^\top = \overline{\nabla}_X N + S_\eta(X).$$

A conexão normal  $\nabla^\perp$  possui as propriedades usuais de uma conexão, isto é,  $\nabla^\perp$  é linear e aditiva em  $\eta$ .

De maneira análoga ao caso do fibrado tangente introduz-se, a partir de  $\nabla^\perp$ , uma noção de curvatura no fibrado normal, a qual é chamada curvatura normal  $R^\perp$  da imersão. Esta curvatura normal é definida por

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta.$$

Tudo se passa como se a geometria da imersão se decompusesse em duas geometrias: uma geometria do fibrado tangente e uma geometria do fibrado normal. Estas geometrias se relacionam com a segunda forma fundamental da imersão por meio de expressões que generalizam as equações clássicas de Gauss e Codazzi da teoria das superfícies. A seguir, estabelecemos tais relações.

**Proposição 1.3.3.** *As equações seguintes se verificam:*

1. *Equação de Gauss:*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle B(Y, T), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle.$$

2. *Equação de Ricci:*

$$\langle \overline{R}(X, Y)\eta, \zeta \rangle - \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle = \langle [S_\eta, S_\zeta]X, Y \rangle,$$

onde  $[S_\eta, S_\zeta] = S_\eta \circ S_\zeta - S_\zeta \circ S_\eta$ .

**Demonstração.** Observe que  $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)$ . Como

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, Y)Z &= \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= \overline{\nabla}_Y (\nabla_X Z + B(X, Z)) - \overline{\nabla}_X (\nabla_Y Z + B(Y, Z)) + \nabla_{[X, Y]} Z + B([X, Y], Z), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, Y)Z &= \overline{\nabla}_Y \nabla_X Z + \overline{\nabla}_Y B(X, Y) - \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z - \overline{\nabla}_X B(Y, Z) + \nabla_{[X, Y]} Z + B([X, Y], Z) \\ &= \nabla_Y \nabla_X Z + B(\nabla_X Z, Y) + \nabla_Y^\perp B(X, Z) - S_{B(X, Z)}(Y) - \nabla_X \nabla_Y Z - B(\nabla_Y Z, X) \\ &\quad - \nabla_X^\perp B(Y, Z) + S_{B(Y, Z)}(X) + \nabla_{[X, Y]} Z + B([X, Y], Z) \\ &= R(X, Y)Z + B(Y, \nabla_X Z) + \nabla_Y^\perp B(X, Z) - S_{B(X, Z)}(Y) - B(\nabla_Y Z, X) \\ &\quad - \nabla_X^\perp B(Y, Z) + S_{B(Y, Z)}(X) + \nabla_{[X, Y]} Z + B([X, Y], Z). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Tomando o produto interno de (1.8) com  $T$ , vemos que os termos normais se anulam e, portanto,

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X, Y)Z, T \rangle &= \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle S_{B(X, Z)}(Y), T \rangle - \langle S_{B(Y, Z)}(X), T \rangle \\ &= \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle B(Y, T), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle,\end{aligned}$$

onde a última igualdade foi obtida a partir da observação (1.3.2). Assim, encontramos a equação de Gauss.

Agora, obteremos a equação de Ricci. Com efeito,

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)\eta &= \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \eta - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \eta + \bar{\nabla}_{[X, Y]}\eta \\ &= \bar{\nabla}_Y(\nabla_X^\perp \eta - S_\eta(X)) - \bar{\nabla}_X(\nabla_Y^\perp \eta - S_\eta(Y)) + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta - S_\eta[X, Y] \\ &= \bar{\nabla}_Y \nabla_X^\perp \eta - \bar{\nabla}_Y S_\eta(X) - \bar{\nabla}_X \nabla_Y^\perp \eta + \bar{\nabla}_X S_\eta(Y) + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta - S_\eta[X, Y] \\ &= \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - S_{\nabla_X^\perp \eta}(Y) - \bar{\nabla}_Y S_\eta(X) - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta - S_{\nabla_Y^\perp \eta}(X) + \bar{\nabla}_X S_\eta(Y) \\ &\quad + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta - S_\eta[X, Y] \\ &= \bar{R}^\perp(X, Y)\eta - S_{\nabla_X^\perp \eta}(Y) - \nabla_Y S_\eta(X) - B(S_\eta(X), Y) + S_{\nabla_Y^\perp \eta}(X) \\ &\quad + \nabla_X S_\eta(Y) + B(X, S_\eta Y) - S_\eta[X, Y].\end{aligned}$$

Fazendo o produto interno da última equação com  $\zeta$  e observando que  $\langle B(X, Y), \eta \rangle = \langle S_\eta(X), Y \rangle$ , obtemos

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \zeta \rangle &= \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle - \langle B(S_\eta(X), Y), \zeta \rangle + \langle B(X, S_\eta Y), \zeta \rangle. \\ &= \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle + \langle (S_\eta S_\zeta - S_\zeta S_\eta)X, Y \rangle.\end{aligned}$$

Logo

$$\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \zeta \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle + \langle [S_\eta, S_\zeta]X, Y \rangle.$$

Esta última expressão é denominada de Equação de Ricci. ■

**Observação 1.3.3.** Dizemos que o fibrado normal de uma imersão é plano, se  $R^\perp = 0$ . Admitamos que o espaço ambiente  $\bar{M}$  tem curvatura seccional constante. Então a equação de Ricci se escreve

$$\langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle = -\langle [S_\eta, S_\zeta]X, Y \rangle.$$

Decorre daí que  $R^\perp = 0$  se, e só se,  $[S_\eta, S_\zeta] = 0$ , quaisquer que sejam  $\eta, \zeta \in T^\perp M$ .

As equações de Gauss e de Ricci são expressões algébricas que relacionam, respectivamente, as curvaturas dos fibrados tangente e normal com a segunda forma fundamental da imersão. Uma relação não-algébrica é dada pela equação de Codazzi. Neste caso, precisamos “derivar” a segunda forma fundamental considerada como um tensor.

Dada uma imersão isométrica, convém indicar por  $\mathcal{X}(M)^\perp$  o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a  $M$ . A segunda forma fundamental da imersão pode ser considerada como o tensor

$$B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^\perp \rightarrow D(M)$$

definido por

$$B(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle.$$

A definição de derivada covariante se estende a este tipo de tensor de maneira natural, a saber:

$$(\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = X(B(Y, Z, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla_X^\perp \eta).$$

**Proposição 1.3.4.** (*Equação de Codazzi*). *Com a notação acima,*

$$\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \zeta \rangle = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

**Demonstração.** Observe, inicialmente, que

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) &= X \langle B(Y, Z), \eta \rangle - \langle B(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle - \langle B(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle \\ &\quad - \langle B(Y, Z), \nabla_X^\perp \eta \rangle \\ &= \langle \nabla_X^\perp B(Y, Z), \eta \rangle + \langle B(Y, Z), \nabla_X^\perp \eta \rangle - \langle B(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle \\ &\quad - \langle B(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle - \langle B(Y, Z), \nabla_X^\perp \eta \rangle \\ &= \langle \nabla_X^\perp B(Y, Z), \eta \rangle - \langle B(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle - \langle B(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle. \end{aligned}$$

Considere agora a expressão (1.8) na demonstração da Proposição 1.3.3 e tome o produto interno de (1.8) por  $\eta$ . Logo, levando em consideração a observação acima, vemos que

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(X, Y)\eta, \zeta \rangle &= \langle B(Y, \nabla_X Z), \eta \rangle + \langle \nabla_Y^\perp B(X, Z), \eta \rangle \\ &\quad - \langle B(X, \nabla_Y Z), \eta \rangle - \langle \nabla_X^\perp B(Y, Z), \eta \rangle + \langle B(\nabla_X Y, Z), \eta \rangle - \langle B(\nabla_Y X, Z), \eta \rangle \\ &= -(\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) + (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta), \end{aligned}$$

portanto, obtivemos a Equação de Codazzi. ■

**Observação 1.3.4.** *Se o espaço ambiente  $\bar{M}$  tem curvatura seccional constante, então a Equação de Codazzi se reduz à expressão*

$$(\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) = (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

*Se, além disso, a codimensão da imersão é um,  $\nabla_X^\perp \eta = 0$ , ou seja,*

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X B(Y, Z, \eta) &= X \langle S_\eta(Y), Z \rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y), Z \rangle - \langle S_\eta(Y), \nabla_X Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X(S_\eta(Y)), Z \rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y), Z \rangle. \end{aligned}$$

*Nesse caso, a equação de Codazzi se escreve da seguinte forma:*

$$\nabla_X(S_\eta(Y) - \nabla_Y(S_\eta(X))) = S_\eta([X, Y]).$$

A importância das equações de Gauss, Codazzi e Ricci é que, no caso em que o espaço ambiente tem curvatura seccional constante, elas desempenham um papel ao análogo das equações de compatibilidade na teoria das superfícies.

## 1.4 O Teorema de Gauss

Seja  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^m$  uma imersão isométrica entre variedades Riemannianas. Relacionaremos agora a curvatura de  $M$  com a curvatura de  $\overline{M}$  e as segundas formas fundamentais de duas variedades Riemannianas. Sejam  $x, y \in T_p M \subset T_p \overline{M}$  linearmente independentes, indicaremos por  $K(x, y)$  e  $\overline{K}(x, y)$  as curvaturas seccionais de  $M$  e  $\overline{M}$ , respectivamente, no plano gerado por  $x$  e  $y$ .

**Teorema 1.4.1.** (*Gauss*). *Se  $p \in M$  e  $x, y$  são vetores ortonormais de  $T_p M$ , então*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2. \quad (1.9)$$

**Demonstração.** Decorre da Proposição 1.3.3 item 1. ■

**Observação 1.4.1.** *No caso em que  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é uma hipersuperfície, a fórmula de Gauss (1.9) admite uma expressão mais simples. De fato, sejam  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . Seja  $e_1, \dots, e_n$  uma base ortonormal de autovetores de  $T_p M$  para a qual  $S_\eta$  é diagonal, isto é,  $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são os autovalores próprios de  $S_\eta$ . Portanto, a expressão (1.9) se escreve*

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j. \quad (1.10)$$

**Exemplo 1.4.1.** *A curvatura seccional da esfera unitária  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é igual a constante 1. Com efeito, orientando  $S^n$  pelo campo normal unitário  $N(x) = -x \in S^n$ , temos*

$$-x = dN_p(x) = \frac{d}{dt} N \circ c(t)|_{t=0} = \nabla_x N = (\overline{\nabla}_x N)^T = -S_\eta x, \quad \forall p \in M, \forall x \in T_p M,$$

onde  $c(0) = p$  e  $c'(0) = x$ . Os valores próprios de  $S_\eta$  são todos iguais a 1. Além disso, a curvatura seccional de  $\mathbb{R}^n$  é zero, portanto usando a equação (1.10), temos

$$K(e_i, e_j) = 1, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

## 1.5 A Métrica Produto e Conexão Produto

Sejam  $M$  e  $\overline{M}$  variedades Riemannianas e consideremos o produto cartesiano  $M \times \overline{M}$  com a estrutura diferencial produto. Sejam  $\pi : M \times \overline{M} \rightarrow M$  e  $\overline{\pi} : M \times \overline{M} \rightarrow \overline{M}$  as projeções naturais. Definiremos uma métrica Riemanniana em  $M \times \overline{M}$  da seguinte maneira:

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi u, d\pi v \rangle_p + \langle d\overline{\pi} u, d\overline{\pi} v \rangle_q,$$

para todo  $(p, q) \in M \times \overline{M}$ ,  $u, v \in T_{(p,q)}(M \times \overline{M})$ . Denominamos a métrica definida acima de métrica produto.

Por exemplo, o toro  $S^1 \times \dots \times S^1 = T^n$  tem uma estrutura Riemanniana produto. De fato, basta escolhermos no círculo  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  a métrica Riemanniana induzida por  $\mathbb{R}^2$  e tomarmos a métrica produto. O toro  $T^n$  com esta métrica Riemanniana chama-se toro plano.

Sejam  $M$  e  $\overline{M}$  variedades Riemannianas e consideremos o produto  $M \times \overline{M}$  com a métrica produto. Sejam  $\nabla^1$  e  $\nabla^2$  as conexões, respectivamente, de  $M$  e  $\overline{M}$ . Denotaremos por  $\nabla$  a conexão Riemanniana de  $M \times \overline{M}$  definida por

$$\nabla_{Y_1+Y_2}(X_1 + X_2) = \nabla^1_{Y_1}X_1 + \nabla^2_{Y_2}X_2, \quad \forall X_1, Y_1 \in \mathcal{X}(M) \text{ e } X_2, Y_2 \in \mathcal{X}(\overline{M}).$$

Tal conexão chama-se conexão produto.

## 1.6 O Teorema de Green-Stokes

Nesta seção, apresentaremos alguns fatos sobre Análise Complexa, os quais serão úteis na demonstração do Teorema Principal, além de auxiliar para o entendimento do próximo capítulo.

**Definição 1.6.1.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Dizemos que  $f$  é  $C^k$ , se as funções  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  são  $C^k$ . Se  $u$  e  $v$  são  $C^\infty$ , dizemos que  $f$  é  $C^\infty$ . Aqui estamos identificando  $z = x + iy = (x, y)$ .*

**Lema 1.6.1.** *Sejam  $P : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $Q : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funções  $C^\infty$  definidas num aberto  $U \subset \mathbb{C}$ , então existem funções  $g$  e  $h \in C^\infty$ , tais que*

$$Pdx + Qdy = gdz + hd\bar{z}.$$

**Demonstração.** Sabemos que, para  $z = x + iy$ ,

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy \\ d\bar{z} &= dx - idy. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} Pdx + Qdy &= P \left( \frac{dz + d\bar{z}}{2} \right) + Q \left( \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \right) \\ &= \frac{P}{2}dz + \frac{P}{2}d\bar{z} + \frac{Q}{2i}dz - \frac{Q}{2i}d\bar{z} \\ &= \left( \frac{iP + Q}{2i} \right) dz + \left( \frac{iP - Q}{2i} \right) d\bar{z}. \end{aligned}$$

Tomando  $g = \frac{iP + Q}{2i}$  e  $h = \frac{iP - Q}{2i}$  vemos que  $g$  e  $h$  são funções  $C^\infty$  e, além disso,

$$Pdx + Qdy = gdz + hd\bar{z}.$$

■

Usando as expressões acima, obtemos

**Lema 1.6.2.**

$$dz \wedge d\bar{z} = -2idxdy. \quad (1.11)$$

**Demonstração.**

$$\begin{aligned}(dz \wedge d\bar{z}) &= (dx + idy) \wedge (dx - idy) \\ &= (dx \wedge dx) - i(dx \wedge dy) + i(dy \wedge dx) - i^2(dy \wedge dy).\end{aligned}$$

Como  $(dx \wedge dx) = 0 = (dy \wedge dy)$  e  $(dy \wedge dx) = -(dx \wedge dy)$  temos

$$\begin{aligned}dz \wedge d\bar{z} &= -2i(dx \wedge dy) \\ &= -2idxdy.\end{aligned}$$

■

**Definição 1.6.2.** *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um subconjunto não-vazio e aberto. Dizemos que  $U$  é um domínio, se  $U$  for conexo.*

**Definição 1.6.3.** *Suponhamos que  $U \subset \mathbb{C}$  seja um domínio e  $B \subset U$  um conjunto compacto, cuja fronteira  $\partial B$  consiste de um número finito de curvas de Jordan suaves por partes e tal que  $B - \partial B$  é um domínio. Para cada uma dessas curvas, adotaremos o sentido de percurso tal que o interior de  $B$  está sempre a esquerda quando a percorremos. Nessas condições, dizemos que  $B$  e  $\partial B$  têm orientações compatíveis.*

**Teorema 1.6.1.** *(Teorema de Green-Stokes Complexo). Sejam  $f$  e  $g$  funções  $C^\infty$  definidas num domínio  $U \subset \mathbb{C}$ . Seja  $B$  um conjunto compacto cuja fronteira,  $\partial B$ , consiste de um número finito de curvas de Jordan suaves por partes. Além disso, suponhamos que  $B - \partial B$  seja um domínio, com  $B$  e a  $\partial B$  tendo orientações compatíveis. Então*

$$\int_{\partial B} g dz + h d\bar{z} = \iint_B \left( \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}.$$

**Demonstração.** Como  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  e  $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ , usando o Lema 1.6.2, obtemos

$$\begin{aligned}\iint_B \left( \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} &= \iint_B \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial x} - i \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right\} (-2idxdy) \\ &= \iint_B \left( -i \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} + i \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_B \left( i \frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) dx dy.\end{aligned}$$

Definindo

$$P = g + h \text{ e } Q = ig - ih, \tag{1.12}$$

vemos

$$\iint_B \left( \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} = \iint_B \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Usando o Teorema de Green-Stokes , tem-se

$$\iint_B \left( \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} = \int_{\partial B} P dx + Q dy.$$

Agora, por (1.12), temos que  $g = \frac{iP + Q}{2i}$  e  $h = \frac{iP - Q}{2i}$ . Logo, utilizando o Lema 1.6.2, obtemos

$$\iint_B \left( \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} = \int_{\partial B} g dz + h d\bar{z}.$$

■

**Definição 1.6.4.** *Sejam  $\varphi : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função definida num domínio  $U$  em torno da origem e  $D$  um disco centrado em 0 e raio  $r$ . Sejam  $z_0 \in D$  e  $B(a) = D - B(z_0, a)$ . Definimos*

$$\iint_D \frac{\varphi}{z - z_0} dz \wedge d\bar{z} = \lim_{a \rightarrow 0} \iint_{B(a)} \frac{\varphi}{z - z_0} dz \wedge d\bar{z},$$

se o limite existir.

**Proposição 1.6.1.** *Existe o limite dado pela definição 1.6.4.*

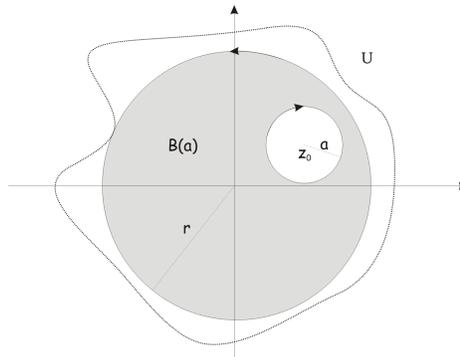


Figura 1.1: Definição da região  $B(a)$

**Demonstração.** Fazemos a seguinte mudança de coordenadas:

$$z = z_0 + re^{i\theta}.$$

Assim

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= (x_0 + r\cos\theta) + i(y_0 + r\sin\theta), \end{aligned}$$

onde  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Dessa forma,

$$x = x_0 + r\cos\theta$$

$$y = y_0 + r \operatorname{sen} \theta$$

e, conseqüentemente,

$$dx = (\cos \theta) dr - (r \operatorname{sen} \theta) d\theta$$

$$dy = (\operatorname{sen} \theta) dr + (r \cos \theta) d\theta.$$

Usando o Lema 1.6.2, temos

$$\begin{aligned} dz \wedge d\bar{z} &= -2i(dx \wedge dy) \\ &= -2i((\cos \theta) dr - (r \operatorname{sen} \theta) d\theta) \wedge (\operatorname{sen} \theta) dr + (r \cos \theta) d\theta \\ &= -2i(r \cos^2 \theta) dr \wedge d\theta - (r \operatorname{sen}^2 \theta) d\theta \wedge dr \\ &= -2i(r \cos^2 \theta) dr \wedge d\theta + (r \operatorname{sen}^2 \theta) dr \wedge d\theta \\ &= -2i r dr \wedge d\theta \\ &= -2i r dr d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz \wedge d\bar{z} &= \lim_{a \rightarrow 0} \iint_{B(a)} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \iint_{B_1(a)} \frac{\varphi(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} (-2i r dr d\theta) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \iint_{B_1(a)} \frac{\varphi(z_0 + re^{i\theta})}{e^{i\theta}} (-2i dr d\theta), \end{aligned}$$

onde  $B_1(a)$  é a região obtida através da mudança de coordenadas de  $B(a)$ . ■

## 1.7 A Demonstração do Teorema de H. Hopf

Provaremos o Teorema de H. Hopf, que é um dos objetivos do trabalho, o qual tem o seguinte enunciado:

**Teorema 1.7.1.** *Seja  $M$  uma superfície compacta de gênero zero imersa em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média  $H$  constante. Então  $M$  é isométrica à esfera redonda.*

Antes de definirmos a forma quadrática de Hopf, necessitaremos estabelecer alguns fatos.

Sejam  $(u, v)$  parâmetros isotérmicos em um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  e  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  uma parametrização compatível com a orientação do campo de vetores normais  $N$  de  $M$  e consideremos a segunda forma fundamental para superfícies

$$II = e du^2 + 2f dudv + g dv^2, \tag{1.13}$$

onde  $e = \langle N, X_{uu} \rangle$ ,  $f = \langle N, X_{uv} \rangle$  e  $g = \langle N, X_{vv} \rangle$ .

A curvatura Gaussiana e a curvatura média em tal sistema de parâmetros são dadas, respectivamente, por

$$K = k_1 k_2 = \frac{eg - f^2}{E^2}$$

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{e + g}{2E},$$

onde  $E = \langle X_u, X_u \rangle$ . As linhas de curvatura são dadas por

$$-fdu^2 + (e - g)dudv + fdv^2 = 0.$$

As equações de Codazzi são

$$e_v - f_u = \frac{E_v}{2E}(e + g) = E_v H$$

$$f_v - g_u = -\frac{E_u}{2E}(e + g) = -E_u H.$$

Como  $EH = \frac{e + g}{2}$ , vemos que

$$E_v H = -EH_v + \frac{e_v + g_v}{2}$$

$$E_u H = -EH_u + \frac{e_u + g_u}{2}.$$

Portanto, as equações de Codazzi podem ser escritas como

$$\left(\frac{e - g}{2}\right)_u + f_v = EH_u$$

$$\left(\frac{e - g}{2}\right)_v - f_u = -EH_v$$

Vamos reescrever (1.13) em parâmetros complexos. Inicialmente, observamos que

$$\begin{aligned} II &= \frac{e}{4}(dz + d\bar{z})^2 - \frac{1}{2}if(dz + d\bar{z})(dz - d\bar{z}) - \frac{g}{4}(dz - d\bar{z})^2 \\ &= \frac{e}{4}(dz^2 + 2dzd\bar{z} + d\bar{z}^2) - \frac{1}{2}if(dz^2 - d\bar{z}^2) - \frac{g}{4}(dz^2 - 2dzd\bar{z} + d\bar{z}^2) \\ &= \left(\frac{e - g}{4} - \frac{1}{2}if\right) dz^2 + \frac{1}{2}(e + g)dzd\bar{z} + \left(\frac{e - g}{4} + \frac{1}{2}if\right) d\bar{z}^2. \end{aligned}$$

Agora, fazendo  $\psi(z, \bar{z}) = \frac{e - g}{2} - if$  e  $\phi(z, \bar{z}) = \frac{e + g}{2}$ , vemos que

$$II = \frac{1}{2}(\psi dz^2 + 2\phi dzd\bar{z} + \bar{\psi} d\bar{z}^2).$$

A expressão  $\mathcal{H} = \psi dz^2$  é chamada a forma quadrática de Hopf.

Nosso objetivo é mostrar que, se  $H$  é constante, então a diferencial de Hopf  $\mathcal{H}$  é holomorfa sobre  $M$ . Além disso, os zeros de  $\mathcal{H}$  são isolados e coincidem com os pontos umbílicos da superfície, a menos que a superfície seja umbílica.

Analisaremos a função  $\psi(z, \bar{z})$  definida acima. Inicialmente, notemos que

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= \left(\frac{e-g}{2}\right)^2 + f^2 = \frac{e^2 - 2eg + g^2 + 4f^2}{4} = \frac{(e^2 + 2eg + g^2) - 4(eg - f^2)}{4} \\ &= \left(\frac{e+g}{2}\right)^2 - (eg - f^2) = E^2 H^2 - E^2 K = E^2(H^2 - K). \end{aligned}$$

Utilizamos na penúltima igualdade o fato de  $(u, v)$  serem parâmetros isotérmicos. Daí, decorre que

$$\frac{|\psi|^2}{E^2} = \frac{1}{4}(k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2 - 4k_1k_2) = \frac{1}{4}(k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2) = \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2,$$

donde

$$\frac{|\psi|}{|E|} = \left|\frac{k_1 - k_2}{2}\right|. \quad (1.14)$$

Portanto, os pontos umbílicos ( $k_1 = k_2$ ) de uma superfície  $M$  são os zeros de  $\psi$ .

Por outro lado, observe que

$$Im\{\psi(dz)^2\} = Im\left\{\left(\frac{e-g}{2} - if\right)(du^2 + 2idudv - dv^2)\right\} = (e-g)dudv - fdu^2 + fdv^2.$$

Logo as linhas de curvatura são determinadas por

$$Im\{\psi(dz)^2\} = 0. \quad (1.15)$$

Utilizando as equações de Codazzi, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{e-g}{2}\right)_u + f_v &= EH_u, \\ \left(\frac{e-g}{2}\right)_v - f_u &= -EH_v. \end{aligned}$$

Daí

$$i\left[\left(\frac{e-g}{2}\right)_v - f_u\right] + \left[\left(\frac{e-g}{2}\right)_u + f_v\right] = E[H_u - iH_v],$$

o que implica,  $\psi_{\bar{z}} = EH_{\bar{z}}$ .

O fato de  $\mathcal{H}$  ser holomorfa é equivalente a curvatura média ser constante. Além disso,  $\phi$  não depende da mudança de parâmetros. Com efeito,

$$\begin{aligned} \psi(z, \bar{z}) &= \frac{e-g}{2} - if = -\frac{1}{2}(X_u N_u - X_v N_v) - i(X_u N_u + X_v N_v) \\ &= -\frac{1}{2}(X_u - iX_v)(N_u - iN_v) = -2X_z N_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Se  $w$  é outro parâmetro complexo e  $\phi(w, \bar{w})$  denota outra função definida como a função  $\psi(z, \bar{z})$ , então  $\phi = -2X_w N_w$ . Como  $X_z = X_w \frac{dw}{dz}$  e  $N_z = N_w \frac{dw}{dz}$ , segue que

$$\psi = -2X_z N_z = -2X_w \frac{dw}{dz} N_w \frac{dw}{dz} = -2X_w N_w \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 = \phi \left( \frac{dw}{dz} \right)^2.$$

Logo

$$\psi dz^2 = \phi dw^2,$$

o que demonstra a afirmação. Falta mostrar que  $\psi$  é identicamente nula para concluirmos que a superfície é uma esfera redonda. De fato, precisaremos do seguinte

**Teorema 1.7.2.** *Dada uma superfície compacta  $M$  de gênero 0, não existe diferencial quadrática holomorfa  $\psi dz^2$  não-nula.*

**Demonstração.** Ver [6], página 140. ■

Assim  $\psi$  é identicamente nula, donde segue por (1.14) que a superfície é umbílica. Como a superfície é compacta temos que  $M$  é uma esfera, o que conclui nossa afirmação.

Agora daremos uma segunda prova para o Teorema de H. Hopf, a qual é considerada mais interessante, pois a idéia dessa demonstração será utilizada na prova do Teorema Principal do nossa dissertação. Antes precisaremos de alguns fatos.

Inicialmente, notemos que (1.15) é equivalente a

$$\arg \psi + 2 \arg dz = m\pi \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \arg dz = \frac{m\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg \psi, \quad (1.16)$$

onde  $dz$  é o elemento tangente das linhas de curvatura.

**Definição 1.7.1.** *Dizemos que um campo de linhas tem singularidade em um ponto  $p$ , se é impossível estender o campo para  $p$  continuamente.*

**Definição 1.7.2.** *Seja  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana fechada. Definiremos por índice de rotação da curva  $\alpha$ , o número inteiro  $m$  tal que*

$$\int_0^l k(s) ds = 2\pi m,$$

onde  $k$  é a curvatura da curva.

**Definição 1.7.3.** *O índice  $j$  de uma singularidade isolada é definido como segue. Sejam  $p$  uma singularidade isolada de um campo de elementos de linha e  $C$  uma curva simples fechada tais que*

1.  $p$  é a única singularidade no interior de  $C$ ;
2. Não existem singularidades em  $C$ .

Seja  $p$  um ponto umbílico isolado. Então  $p$  é uma singularidade isolada de cada uma das duas famílias de linhas de curvatura (uma família correspondente a  $k_1$  e a outra a  $k_2$ , onde mantemos a convenção  $k_1 \geq k_2$ ). Portanto  $p$  tem índice com respeito a cada uma dessas famílias, como cada linha da família são ortogonais, segue imediatamente da definição do índice que os dois índices são iguais. Logo, o índice de pontos isolados umbílicos está definido e satisfaz

$$j = \frac{1}{2\pi} \delta(\arg dz),$$

onde  $\delta$  significa a variação em volta de  $p$  em uma pequena curva no sentido positivo e  $dz$  tem a expressão dada em (1.16). Como o número inteiro  $m$  não varia, segue que

$$j = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \delta(\arg \psi).$$

**Teorema 1.7.3.** *Sejam  $R$  uma região contida em uma superfície com curvatura média constante,  $U$  o conjunto dos pontos umbílicos e  $p \in U$ . Então*

1.  $p$  é um ponto interior de  $U$ ;
2.  $p$  é um ponto isolado de  $U$  e o índice de  $p$  é negativo.

**Demonstração.** Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $R$  está contida na imagem da parametrização. Por (1.14),  $U$  é o conjunto dos zeros da função  $\psi$  definida em sistema de coordenadas, a qual é holomorfa, pois a curvatura média é constante. Portanto, ou  $\psi \equiv 0$  e todos os pontos pertencem a  $U$  ou  $\psi \neq 0$  e  $p$  é um ponto isolado de  $U$ . Neste caso, podemos aplicar a definição 1.7. Como  $\psi$  é analítica, temos

$$\psi(z) = cz^n + \dots,$$

onde  $c \neq 0$ ,  $n \geq 1$ . Portanto,  $\delta(\arg \psi) = 2\pi n$ . Conseqüentemente,

$$j = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \delta(\arg \psi) = -\frac{n}{2} < 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

**Teorema 1.7.4.** *(Poincaré) Se  $F$  é um campo de elementos de linha em  $M$  com um número finito de singularidades, então*

$$\sum j = 2 - 2g,$$

onde  $g$  é o gênero de  $M$ .

**Demonstração.** Ver [6], página 113.

**Observação 1.7.1.** *Segue do Teorema 1.7.4 que qualquer campo na superfície tem pelo menos uma singularidade. Caso tenha no máximo um número finito de singularidades, então tem pelo menos uma singularidade de índice positivo.*

Além disso, podemos provar o Teorema de H.Hopf da seguinte maneira:  
A equação quadrática  $Im(\psi dz^2) = 0$  determina dois campos de direções, cujas singularidades são os zeros de  $\psi$ . Sejam  $U$  o conjunto de pontos umbílicos de  $M$  e  $U^*$  o conjunto de todos os pontos interiores de  $U$ . Então  $U^*$  é aberto e fechado, o que implica  $U^* = \emptyset$  ou  $U^* = M$ . Como  $\psi$  é holomorfa, se  $z_0$  é um zero de  $\psi$ , então  $\psi \equiv 0$  em uma vizinhança  $V$  de  $z_0$  ou  $\psi = (z - z_0)^k f_k(z)$ ,  $z \in V$ ,  $k \geq 1$ , onde  $f_k$  é uma função de  $z$  com  $f_k(z_0) \neq 0$ . Neste último caso,  $z_0$  é uma singularidade isolada do campo de direções e o índice é  $(-k/2)$ , pelo Teorema 1.7.3. Logo  $\psi \equiv 0$  em  $M$  e temos que  $M$  é uma esfera redonda ou todas as singularidades são isoladas e temos índice negativo. Como  $g = 0$ , pelo Teorema 1.7.4, a soma dos índices de todas as singularidades para qualquer campo de direções é 2 (portanto positivo). Isto é uma contradição. Assim  $\psi \equiv 0$  em  $M$ . O que demonstra nossa afirmação.

# Capítulo 2

## O Teorema de Alencar, do Carmo e Tribuzy

Neste capítulo demonstraremos o resultado principal do nosso trabalho. Analisaremos o mesmo problema estudado por Abresch e Rosenberg em 2004 com uma significativa mudança, a saber: a curvatura média não é assumida constante, mas satisfaz  $|dH| \leq g|Q^{(2,0)}|$ , onde  $|dH|$  é a norma da diferencial da curvatura média  $H$  de  $M$  e  $g$  é uma função real, contínua e não-negativa. Na seção 2.1, usaremos cartas isotérmicas para calcularmos a diferencial  $\bar{Z}Q(Z, Z)$ , cuja expressão nos garante a generalização do Teorema de Abresch-Rosenberg. Na seção 2.2, provaremos o Lema Principal, o qual nos dará condições para concluirmos a demonstração do resultado principal da nossa dissertação. Demonstraremos, na seção 2.3, o Teorema de Alencar, do Carmo e Tribuzy.

### 2.1 A Demonstração do Teorema de Alencar, do Carmo e Tribuzy

Nesta seção, demonstraremos o principal resultado do nosso trabalho, mas antes exibiremos o Teorema de Abresch e Rosenberg, cujo enunciado é o seguinte:

**Teorema 2.1.1.** (*Abresch-Rosenberg-2004*) *Sejam  $M$  uma superfície imersa em  $M^2(c) \times \mathbb{R}$  e  $Q$  uma forma quadrática definida por*

$$Q(X, Y) = 2H\alpha(X, Y) - c\langle \xi X, \xi Y \rangle,$$

*onde  $M^2(c)$  é uma variedade Riemanniana com curvatura  $c$ ,  $X$  e  $Y$  são vetores tangentes a  $M$ ,  $\alpha$  é a segunda forma fundamental,  $H$  é a curvatura média e  $\xi : M^2(c) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a projeção natural sobre  $\mathbb{R}$ , isto é,  $\xi(p, t) = t$ ;  $p \in M^2(c)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Se a curvatura média  $H$  é constante, então  $Q^{(2,0)}$  é uma forma quadrática holomorfa. Como consequência, se  $M$  é uma superfície compacta de gênero zero, então  $M$  é uma superfície mergulhada invariante por rotações no espaço ambiente.*

**Demonstração.** Ver [1].

■

Agora provaremos o resultado principal da nossa dissertação, a saber:

**Teorema 2.1.2.** (Teorema de Alencar, do Carmo e Tribuzy) Seja  $M$  uma superfície compacta de gênero zero imersa em  $M^2(c) \times \mathbb{R}$ . Suponhamos que

$$|dH| \leq h(z)|Q^{(2,0)}|,$$

onde  $|dH|$  é a norma da diferencial da curvatura média  $H$  de  $M$ ,  $h$  é uma função real contínua, não-negativa e  $Q^{(2,0)}$  é a parte  $(2,0)$  da forma quadrática definida por Abresch e Rosenberg. Então  $Q^{(2,0)}$  é identicamente nula e  $M$  é uma superfície invariante por rotações em  $M^2(c) \times \mathbb{R}$ .

O resultado acima generaliza o Teorema 2.1.1, pois não temos a hipótese da curvatura média ser constante.

Sejam  $(u, v)$  parâmetros isotérmicos em um conjunto aberto  $U \subset M$ ,  $z = u + iv$ ,  $\bar{z} = u - iv$ ,  $dz = du + idv$  e  $d\bar{z} = du - idv$ . Visto que  $Q^{(2,0)} = \frac{1}{2}\psi(z)(dz)^2$ , assumiremos que exista um ponto  $z_0 \in U$  tal que  $\psi(z_0) = 0$ . Definamos

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \text{ e } \bar{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Como  $(u, v)$  são parâmetros isotérmicos, temos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = \lambda^2, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = 0 \text{ e } \langle Z, \bar{Z} \rangle = \lambda^2.$$

Note que  $Q(Z, Z) = \psi(z)$  e  $|Q(Z, Z)| = |\psi(z)|$ .

Para futuros propósitos vamos considerar o espaço ambiente  $M^n(c) \times \mathbb{R}$ , onde  $M^n(c)$  é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante  $c$ . Seja  $M$  uma variedade imersa em  $M^n(c) \times \mathbb{R}$ . Consideremos

$$Q(X, Y) = 2\langle \alpha(X, Y), \vec{H} \rangle - c\langle \xi(X), \xi(Y) \rangle, \quad (2.1)$$

onde  $\vec{H} = HN$  é o vetor curvatura média da imersão,  $\alpha$  é a segunda forma fundamental e  $\xi : M^n(c) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a projeção  $\xi(p, t) = t$ . Inicialmente, observemos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \bar{Z}Q(Z, Z) = 2\bar{Z}\langle \alpha(Z, Z), \vec{H} \rangle - c\bar{Z}\langle \xi(Z), \xi(Z) \rangle.$$

O primeiro termo nos dá

$$2\bar{Z}\langle \alpha(Z, Z), \vec{H} \rangle = 2\langle \nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha(Z, Z), \vec{H} \rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp \vec{H} \rangle.$$

Por definição

$$(\nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha)(Z, Z) = \nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha(Z, Z) - 2\alpha(\nabla_{\bar{Z}} Z, Z) = \nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha(Z, Z),$$

pois

$$\nabla_{\bar{Z}} Z = \nabla_Z \bar{Z} = 0.$$

Com efeito, utilizando o fato da conexão ser simétrica, temos

$$\nabla_{\bar{Z}}Z - \nabla_Z\bar{Z} = [Z, \bar{Z}].$$

Por outro lado,  $[Z, \bar{Z}] = 0$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} [Z, \bar{Z}](f) &= Z\bar{Z}(f) - \bar{Z}Z(f) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right)(f) - \left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)(f) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + i\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - i\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + i\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} - i\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto implica

$$\nabla_{\bar{Z}}Z = \nabla_Z\bar{Z}.$$

Agora, podemos escrever

$$\nabla_{\bar{Z}}Z = aZ + b\bar{Z}$$

Visto que  $\langle Z, Z \rangle = 0$ , temos

$$0 = \frac{1}{2}\bar{Z}\langle Z, Z \rangle = \langle \nabla_{\bar{Z}}Z, Z \rangle = b\lambda^2.$$

Daí, segue que  $b = 0$  e  $\nabla_{\bar{Z}}Z = aZ$ . Analogamente, como  $\langle \bar{Z}, \bar{Z} \rangle = 0$ ,

$$0 = \frac{1}{2}Z\langle \bar{Z}, \bar{Z} \rangle = \langle \nabla_Z\bar{Z}, \bar{Z} \rangle = a\lambda^2.$$

Temos que  $a = 0$  e, portanto,  $\nabla_{\bar{Z}}Z = \nabla_Z\bar{Z} = 0$ , como havíamos afirmado. Logo

$$2\bar{Z}\langle \alpha(Z, Z), \vec{H} \rangle = 2\langle (\nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha)(Z, Z), \vec{H} \rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp \vec{H} \rangle.$$

Usando a equação de Codazzi e denotando por  $\tilde{R}$  a curvatura do espaço ambiente, obtemos

$$2\bar{Z}\langle \alpha(Z, Z), \vec{H} \rangle = 2\langle (\nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha)(\bar{Z}, Z), \vec{H} \rangle + 2\langle \tilde{R}(\bar{Z}, Z)Z, \vec{H} \rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp \vec{H} \rangle.$$

Vamos calcular cada termo da última igualdade.

**Lema 2.1.1.** *Com respeito à notação acima, temos*

$$\langle \tilde{R}(\bar{Z}, Z)Z, \vec{H} \rangle = c\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle.$$

**Demonstração.** Seja  $\pi : M^n(c) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\pi(p, t) = p$ . Identificaremos, por conveniência de notação,  $\pi$  e  $\xi$  com suas respectivas derivadas. Portanto  $X = \pi X + \xi X$ . Como o espaço ambiente é um produto de espaços, sendo cada espaço com curvatura seccional constante, temos que a curvatura  $\tilde{R}$  é dada por

$$\langle \tilde{R}(Z, \bar{Z})Z, \vec{H} \rangle = c\{\langle \pi \bar{Z}, \pi Z \rangle \langle \pi Z, \pi \vec{H} \rangle - \langle \pi Z, \pi Z \rangle \langle \pi \bar{Z}, \pi \vec{H} \rangle\}. \quad (2.2)$$

Vamos calcular os termos de  $\tilde{R}$ , isto é,

$$\begin{aligned} \langle \pi \bar{Z}, \pi Z \rangle &= \langle \bar{Z} - \xi \bar{Z}, Z - \xi Z \rangle \\ &= \langle \bar{Z}, Z \rangle - \langle \bar{Z}, \xi Z \rangle - \langle \xi \bar{Z}, Z \rangle + \langle \xi \bar{Z}, \xi Z \rangle \\ &= \lambda^2 - \langle \pi \bar{Z} + \xi \bar{Z}, \xi Z \rangle - \langle \xi \bar{Z}, \pi Z + \xi Z \rangle + \langle \xi \bar{Z}, \xi Z \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \pi \bar{Z}, \pi Z \rangle = \lambda^2 - \langle \xi \bar{Z}, \xi Z \rangle.$$

Por outro lado, como  $\langle Z, N \rangle = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \pi Z, \pi \vec{H} \rangle &= \langle Z - \xi Z, \vec{H} - \xi \vec{H} \rangle \\ &= \langle Z, \vec{H} \rangle - \langle Z, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi Z, \vec{H} \rangle + \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle \\ &= -\langle Z, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi Z, \vec{H} \rangle + \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle \\ &= -\langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, o primeiro termo do lado direito de (2.2) torna-se

$$\begin{aligned} \langle \pi \bar{Z}, \pi Z \rangle \langle \pi Z, \pi \vec{H} \rangle &= -(\lambda^2 - \langle \xi \bar{Z}, \xi Z \rangle) \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle \\ &= -\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle + \langle \xi \bar{Z}, \xi Z \rangle \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle. \end{aligned}$$

No caso do segundo termo, usando o fato  $\langle Z, Z \rangle = 0$ , obtemos,

$$\begin{aligned} \langle \pi Z, \pi Z \rangle &= \langle Z - \xi Z, Z - \xi Z \rangle \\ &= -\langle Z, \xi Z \rangle - \langle \xi Z, Z \rangle + \langle \xi Z, \xi Z \rangle. \end{aligned}$$

Fazendo cálculos análogos aos anteriores, concluíremos que

$$\langle \pi Z, \pi Z \rangle = -\langle \xi Z, \xi Z \rangle.$$

Analogamente,

$$\langle \pi \bar{Z}, \pi \vec{H} \rangle = \langle \bar{Z} - \xi \bar{Z}, \vec{H} - \xi \vec{H} \rangle = -\langle \xi \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle.$$

Portanto

$$\langle \pi Z, \pi Z \rangle \langle \pi \bar{Z}, \pi \vec{H} \rangle = \langle \xi Z, \xi Z \rangle \langle \xi \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle.$$

Disto segue que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(Z, \bar{Z})Z, \vec{H} \rangle &= c\{-\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle + \langle \xi \bar{Z}, \xi Z \rangle \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle - \langle \xi Z, \xi Z \rangle \langle \xi \bar{Z}, \xi \vec{H} \rangle\} \\ &= -c\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, usando a simetria do tensor curvatura, concluímos que

$$\langle \tilde{R}(\bar{Z}, Z)Z, \vec{H} \rangle = c\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle,$$

o que conclui a prova do Lema 2.1.1. ■

Voltando ao cálculo de  $\bar{Z}Q(Z, Z)$ , temos

$$\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\langle (\nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha)(\bar{Z}, Z), \vec{H} \rangle + 2c\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp \vec{H} \rangle - c\bar{Z} \langle \xi Z, \xi Z \rangle.$$

Precisamos de mais um resultado auxiliar, a saber:

**Lema 2.1.2.**  $c\bar{Z} \langle \xi Z, \xi Z \rangle = 2c\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle.$

**Demonstração.** Com efeito, inicialmente observemos que

$$\alpha(Z, \bar{Z}) = \bar{\nabla}_{\bar{Z}} Z - (\nabla_{\bar{Z}} Z)^T = \bar{\nabla}_{\bar{Z}} Z,$$

pois  $\nabla_{\bar{Z}} Z = 0$ . Como o espaço ambiente é o produto  $M^n(c) \times \mathbb{R}$  com as projeções naturais  $\pi$  e  $\xi$ , podemos escrever

$$\bar{\nabla}_{\bar{Z}} Z = \bar{\nabla}_{\bar{Z}}(\xi Z + \pi Z) = \nabla_{\bar{Z}}^1(\xi Z) + \nabla_{\bar{Z}}^2(\pi Z),$$

onde  $\nabla^1$  e  $\nabla^2$  são as conexões de  $\mathbb{R}$  e  $M^n(c)$ , respectivamente. Portanto,

$$\xi \alpha(Z, \bar{Z}) = \xi \bar{\nabla}_{\bar{Z}} Z = \xi \nabla_{\bar{Z}}^1(\xi Z) + \xi \nabla_{\bar{Z}}^2(\pi Z) = \nabla_{\bar{Z}}^1(\xi Z).$$

Daí,

$$\langle \xi \alpha(Z, \bar{Z}), \xi Z \rangle = \langle \nabla_{\bar{Z}}^1(\xi Z), \xi Z \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}}(\xi Z), \xi Z \rangle.$$

Agora, observemos que

$$\bar{Z} \langle \xi Z, \xi Z \rangle = 2\langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}}(\xi Z), \xi Z \rangle = 2\langle \xi \alpha(Z, \bar{Z}), \xi Z \rangle.$$

Seja  $E = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2)$ , onde  $e_1$  e  $e_2$  são os vetores unitários de  $\frac{\partial}{\partial u}$  e  $\frac{\partial}{\partial v}$ , respectivamente. Assim,  $Z = \lambda E$  e

$$\begin{aligned} \alpha(Z, \bar{Z}) &= \lambda^2 \alpha(E, \bar{E}) = \lambda^2 \alpha \left( \frac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_1 + ie_2}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \{ \alpha(e_1, e_1) + \alpha(e_2, e_2) \} = \lambda^2 \vec{H}. \end{aligned}$$

Logo

$$\bar{Z} \langle \xi Z, \xi \bar{Z} \rangle = 2\langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}}(\xi Z), \xi Z \rangle = 2\langle \xi \alpha(Z, \bar{Z}), \xi Z \rangle = \lambda^2 \langle \xi \vec{H}, \xi Z \rangle,$$

o que conclui a prova do Lema 2.1.2. ■

Segue dos cálculos acima que

$$\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\langle (\nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha)(\bar{Z}, Z), \vec{H} \rangle + 2c\lambda^2 \langle \xi Z, \xi \vec{H} \rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp \vec{H} \rangle - c\bar{Z} \langle \xi Z, \xi Z \rangle.$$

Assim, utilizando novamente o Lema 2.1.2, obtemos que

$$\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\langle(\nabla_Z^\perp\alpha)(\bar{Z}, Z), \bar{H}\rangle + 2\langle\alpha(Z, Z), \nabla_Z^\perp\bar{H}\rangle.$$

Calcularemos o primeiro termo do lado direito da última igualdade acima. Por definição,

$$\begin{aligned}(\nabla_Z^\perp\alpha)(\bar{Z}, Z) &= \nabla_Z^\perp(\alpha(\bar{Z}, Z)) - \alpha(\nabla_Z\bar{Z}, Z) - \alpha(\bar{Z}, \nabla_Z Z) \\ &= Z\langle\bar{Z}, Z\rangle\bar{H} - \alpha(\bar{Z}, \nabla_Z Z),\end{aligned}$$

onde estamos usando os seguintes fatos:  $\alpha(Z, \bar{Z}) = \lambda^2\bar{H}$  e  $\nabla_Z\bar{Z} = 0$ . Portanto,

$$(\nabla_Z^\perp\alpha)(\bar{Z}, Z) = \langle\nabla_Z\bar{Z}, Z\rangle\bar{H} + \langle\bar{Z}, \nabla_Z Z\rangle\bar{H} + \langle\bar{Z}, Z\rangle\nabla_Z^\perp\bar{H} - \alpha(\bar{Z}, \nabla_Z Z).$$

Agora, seja  $E$  definido como na demonstração do Lema 2.1.2. Então qualquer vetor complexo em  $M$  é dado por  $X = \xi E$ , onde  $\xi$  é um número complexo. Portanto, se  $Y = \eta E$ , então

$$\alpha(X, \bar{Y}) = \xi\bar{\eta}\alpha(E, \bar{E}) = \langle X, \bar{Y}\rangle\bar{H}.$$

Tomando  $X = \nabla_Z Z$  e  $Y = Z$  acima, temos

$$(\nabla_Z^\perp\alpha)(\bar{Z}, Z) = \langle\bar{Z}, \nabla_Z\bar{Z}\rangle\bar{H} + \langle\bar{Z}, Z\rangle\nabla_Z^\perp\bar{H} - \langle\nabla_Z Z, \bar{Z}\rangle\bar{H} = \langle Z, \bar{Z}\rangle\nabla_Z^\perp\bar{H}.$$

Voltando ao cálculo de  $\bar{Z}Q(Z, Z)$ , obtemos finalmente

$$\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\langle\langle Z, \bar{Z}\rangle\nabla_Z^\perp\bar{H}, \bar{H}\rangle + 2\langle\alpha(Z, Z), \nabla_Z^\perp\bar{H}\rangle. \quad (2.3)$$

Notemos que o lado direito da equação é expresso em termos da derivada covariante do vetor curvatura média.

**Observação 2.1.1.** *Obtemos a seguinte generalização do Teorema 1 de Abresch e Rosenberg, ver [1]. Seja  $M$  uma superfície imersa em  $M^n(c) \times \mathbb{R}$  tal que o vetor curvatura média  $\bar{H}$  é paralelo no fibrado normal. Introduzindo uma estrutura complexa em  $M$  compatível com a métrica induzida. Então a parte  $(2, 0)$  da forma quadrática em  $M$*

$$Q(X, Y) = 2\langle\alpha(X, Y), \bar{H}\rangle - c\langle\xi X, \xi Y\rangle$$

*é holomorfa.*

*Aqui  $\alpha$  é a segunda forma fundamental da imersão e  $\xi$  é a projeção do espaço ambiente sobre  $\mathbb{R}$ . Uma questão natural: quais superfícies em  $M^n(c) \times \mathbb{R}$  satisfazem a condição que a forma quadrática acima é holomorfa?*

Antes da prova do Teorema de Alencar, do Carmo e Tribuzy vamos particularizar para  $n = 2$  a expressão (2.3). Como a codimensão é um, segue que  $\nabla_X^\perp N = 0 \forall X \in TM$ , onde  $N$  é o vetor unitário normal da superfície  $M$ . Portanto

$$\nabla_Z^\perp\bar{H} = \nabla_Z^\perp(HN) = (\bar{Z}H)N.$$

Assim

$$\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\lambda^2 Z(H)H + 2\alpha(Z, Z)(\bar{Z}H).$$

Como

$$|Z(H)| = |dH(Z)| \leq |dH||Z| = |dH|\lambda,$$

temos, analogamente, que  $|\bar{Z}(H)| = |dH(\bar{Z})| \leq |dH||\bar{Z}| = |dH|\lambda$ , temos

$$|\bar{Z}Q(Z, Z)| \leq \{2\lambda^3|H| + 2\lambda|\alpha(Z, Z)|\}|dH|.$$

Por hipótese do teorema,  $|dH| \leq g|Q^{(2,0)}|$ . Portanto, obtemos

$$|\bar{Z}Q(Z, Z)| \leq h(Z)|Q(Z, Z)|,$$

onde  $h(Z) = g\{2\lambda^3|H| + 2\lambda|\alpha(Z, Z)|\}$  é uma função contínua não-negativa. Então podemos aplicar o Lema Principal, cujo enunciado é o seguinte:

**Lema 2.1.3.** (*Lema Principal*) *Seja  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa definida em um aberto  $U$  do plano complexo que contém a origem  $z = 0$ . Suponhamos que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq h(z)|f(z)|, \quad (2.4)$$

onde  $h$  é uma função real contínua, não-negativa. Assumamos que  $z = z_0$  é um zero de  $f$ . Então  $f = 0$  em uma vizinhança de  $V \subset U$  de  $z_0$  ou

$$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z), \quad z \in V, \quad k \geq 1.$$

Aqui  $f_k(z)$  é uma função contínua com  $f_k(z_0) \neq 0$ .

A demonstração do Lema Principal encontra-se na seção posterior.

Seja  $U \subset M$  um conjunto aberto coberto por coordenadas isotérmicas. Assumamos que o conjunto dos zeros de  $Q(Z, Z)$  em  $U$  é não-vazio e seja  $z_0 \in U$  um zero de  $Q(Z, Z)$ . Pelo Lema Principal,  $Q(Z, Z)$  é identicamente nula em uma vizinhança  $V$  de  $z_0$  ou os zeros são isolados e o índice de campos de direções determinado por  $\text{Im}[Q(Z, Z)dz^2] = 0$  é  $(-k/2)$  (portanto negativo). Se para alguma vizinhança coordenada  $V$  de zero,  $Q(Z, Z) = 0$ , isto será para qualquer  $M$ . Caso contrário, os zeros na vizinhança de  $V$  iriam contradizer o Lema Principal. Então, se  $Q(Z, Z)$  não é identicamente nula, todos os zeros são isolados e segue-se que o índice é negativo. Como  $M$  tem gênero zero a soma dos índices de singularidades de qualquer campo de direções é 2 (portanto positivo). Isto é uma contradição. Logo  $Q(Z, Z)$  é identicamente nula. Usando a classificação de Abresch-Rosenberg, segue o Teorema Principal.

**Observação 2.1.2.** *Na verdade o resultado de Alencar, do Carmo e Tribuzy é o seguinte: ou o conjunto de zeros de  $Q^{(2,0)}$  é vazio ou em uma vizinhança  $V$  do zero de  $Q^{(2,0)}$ , onde a condição  $|dH| \leq g|Q^{(2,0)}|$  vale, temos duas possibilidades:*

1.  $Q^{(2,0)} \equiv 0$  em  $V$  ou
2. Tal zero é isolado em algum campo de direção em  $V$  tem uma singularidade isolada neste ponto com índice negativo. Dessa forma, a condição pode ser aplicada para a imersão de gênero um em uma superfície  $M$  satisfazendo  $|dH| \leq g|Q^{(2,0)}|$  para concluir que o conjunto de zeros de  $Q^{(2,0)}$  é identicamente zero ou vazio em  $M$ .

## 2.2 A Demonstração do Lema Principal

**Lema 2.2.1.** (*Lema Principal*) *Seja  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa definida em um aberto  $U$  do plano complexo que contém a origem  $z = 0$ . Suponhamos que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq h(z)|f(z)|, \quad (2.5)$$

onde  $h$  é uma função real contínua, não-negativa. Assumamos que  $z = z_0$  é um zero de  $f$ . Então  $f = 0$  em uma vizinhança de  $V \subset U$  de  $z_0$  ou

$$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z), \quad z \in V, \quad k \geq 1.$$

Aqui  $f_k(z)$  é uma função contínua com  $f_k(z_0) \neq 0$ .

Inicialmente, demonstraremos dois lemas auxiliares e logo em seguida provaremos o Lema Principal. Agora vamos assumir, sem perda de generalidade, que o zero de  $f$  é a origem e, além disso,  $U$  é um disco de raio  $R$  e centro 0.

**Lema 2.2.2.** *Assumindo as hipóteses do Lema Principal e o fato do  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^{r-1}} = 0$ ,  $r \geq 1$ , temos que o  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^r}$  existe.*

**Demonstração.** Definamos uma forma diferencial

$$\frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz$$

em  $D_R(0)$  com  $z \neq 0$ ,  $z \neq w$  e  $r \geq 1$ . Aqui  $D_R(0)$  é o disco de raio  $R$  e centro em 0. Usando o Teorema de Stokes -Green (1.6), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_R(0)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz + \int_{\partial D_a(w)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz + \int_{\partial D_a(0)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz &= \\ &= - \iint_{D_R(0) \setminus \{D_a(0) \cup D_a(w)\}} \frac{1}{z^r(z-w)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{f(z)}{z^r(z-w)} \right) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{1}{z^r(z-w)} \right) f(z) + \frac{1}{z^r(z-w)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{1}{z^r(z-w)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad \forall z, w \in D_R(0) \setminus \{D_a(0) \cup D_a(w)\} \end{aligned}$$

e  $\frac{1}{z^r(z-w)}$  é uma função holomorfa em  $D_R(0) \setminus \{D_a(0) \cup D_a(w)\}$ .

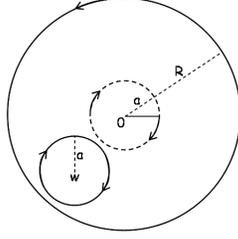


Figura 2.1: Definição da região  $D_R(0) \setminus \{D_a(0) \cup D_a(w)\}$

Agora, calcularemos as integrais de (2.6). Inicialmente, definiremos uma função auxiliar  $g(z) = \frac{f(z)}{z^r}$  e faremos a seguinte mudança de variáveis  $z = w + ae^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , na integral

$$\int_{\partial D_a(w)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz.$$

Daí,

$$\int_{\partial D_a(w)} \frac{g(z)}{z^r} dz = - \int_{\partial D_a^-(w)} \frac{g(z)}{z^r} dz = - \int_0^{2\pi} \frac{g(w + ae^{i\theta})}{ae^{i\theta}} aie^{i\theta} d\theta,$$

onde  $\partial D_a^-(w)$  é  $\partial D_a(w)$  com orientação anti-horária e  $dz = ae^{i\theta} d\theta$ .

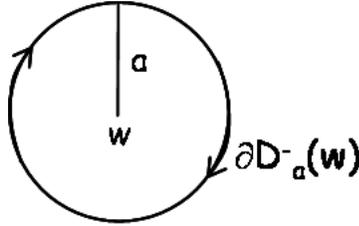


Figura 2.2: Fronteira do disco  $D_a(w)$

Voltando ao cálculo da integral, vemos que

$$\int_{\partial D_a(w)} \frac{g(z)}{z^r} dz = - \int_0^{2\pi} ig(w + ae^{i\theta}) d\theta.$$

Usando a continuidade da função  $g(z)$  em  $D_a(w)$ , temos que

$$\lim_{a \rightarrow 0} g(w + ae^{i\theta}) = g(w)$$

e, portanto,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\partial D_a(w)} \frac{g(z)}{z^r} dz = -ig(w) \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi ig(w) = -2\pi i f(w) w^{-r}.$$

Calcularemos, agora, explicitamente a integral

$$\int_{\partial D_a(0)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz, r \geq 1.$$

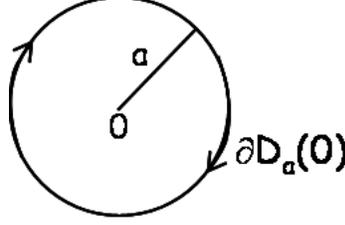


Figura 2.3: Fronteira do disco  $D_a(0)$

Fazendo a mudança de variável  $z = ae^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Obtemos que,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_a(0)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz &= - \int_{\partial D_a^-(0)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz = \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{f(ae^{i\theta})}{a^r e^{ir\theta} (ae^{i\theta} - w)} aie^{i\theta} d\theta = -i \int_0^{2\pi} \frac{f(ae^{i\theta})}{a^{r-1} e^{i(r-1)\theta} (ae^{i\theta} - w)} d\theta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por outro lado, por hipótese,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^{r-1}} = 0.$$

Daí, fazendo  $a \rightarrow 0$ , vemos que  $z \rightarrow 0$ . Logo, usando (2.7) encontramos que o

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_{\partial D_a(0)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz = -i \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(ae^{i\theta})}{a^{r-1} e^{i(r-1)\theta} (ae^{i\theta} - w)} d\theta = 0.$$

Finalmente, tomando o limite em (2.6) quando  $a \rightarrow 0$ , vemos que

$$-2i\pi f(w)w^{-r} + \int_{\partial D_R(0)} \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz = - \iint_{D_R(0)} \frac{1}{z^r(z-w)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}. \quad (2.8)$$

Além disso, a integral dupla à direita (quando  $a \rightarrow 0$ ) acima existe, pois as integrais à esquerda de (2.6), quando  $a \rightarrow 0$ , existem. Agora, voltemos a expressão (2.8). Por hipótese, existe  $A > 0$  tal que

$$\max_{z \in D_R(0)} h(z) \leq A. \quad (2.9)$$

Então, segue de (2.8) que

$$\begin{aligned} 2\pi |f(w)| |w|^{-r} &\leq \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-w|} dz + \iint_{D_R(0)} \frac{1}{|z|^r |z-w|} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| |dz \wedge d\bar{z}| \\ &\leq \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-w|} dz + \iint_{D_R(0)} \frac{2A|f(z)|}{|z|^r |z-w|} dx dy, \end{aligned} \quad (2.10)$$

pois  $dz \wedge d\bar{z} = -2idxdy$ , com  $z = x + iy$ .

Tomando  $z_0 \in D$ ,  $z_0 \neq 0$ , multiplicando a inequação por  $\frac{1}{|w-z_0|}$  e integrando-a com respeito a  $du dv$ , onde  $w = u + iv$ , concluímos, com  $D_\epsilon = D_R(0) \setminus D_\epsilon(z_0)$ , que

$$2\pi \int_{D_\epsilon} \frac{|f(w)|}{|w - z_0| |w|^r} dudv \leq \int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)| |dz|}{|z|^r |z - w| |w - z_0|} dudv + 2A \int_{D_\epsilon} \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z - w| |w - z_0|} dx dy dudv. \quad (2.11)$$

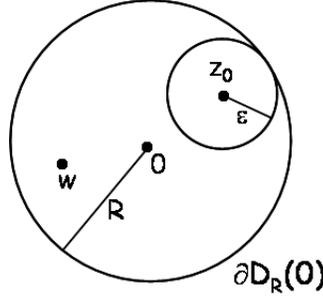


Figura 2.4: Definição da região  $D_\epsilon$

Nosso objetivo agora é estimar as integrais à direita da desigualdade. Inicialmente vamos calcular a

$$\int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)| |dz|}{|z|^r |z - w| |w - z_0|} dudv.$$

De fato, como

$$\frac{1}{|z - w| |w - z_0|} = \frac{1}{|z - z_0|} \left| \frac{1}{z - w} + \frac{1}{w - z_0} \right| \leq \frac{1}{|z - z_0|} \left( \frac{1}{|z - w|} + \frac{1}{|w - z_0|} \right),$$

vemos que

$$\int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)| |dz|}{|z|^r |z - w| |w - z_0|} dudv \leq \int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)| |dz|}{|z|^r |z - z_0| |z - w|} dudv + \int_{D_\epsilon} \int_{D_R(0)} \frac{|f(z)| |dz|}{|z|^r |z - z_0| |w - z_0|} dudv. \quad (2.12)$$

Por outro lado,

$$\int_{D_R(0)} \frac{dudv}{|z - w|} \leq \int_{D_{2R}(z)} \frac{dudv}{|z - w|}.$$

Agora, tomando  $w = u + iv$ , podemos reescrever  $w$  como

$$w = z + \rho e^{i\theta},$$

onde  $0 \leq \rho \leq 2R$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Como  $dw = e^{i\theta} d\rho + i\rho e^{i\theta} d\theta$  e  $d\bar{w} = e^{-i\theta} d\rho - i\rho e^{-i\theta} d\theta$ , obtemos

$$d\bar{w} \wedge dw = -2i\rho d\rho \wedge d\theta \text{ e } dudv = -\rho d\rho \wedge d\theta = \rho d\theta \wedge d\rho.$$

Usando os resultados anteriores, vemos que

$$\int_{D_{2R}(z)} \frac{dudv}{|z-w|} = \int_0^{2R} \int_0^{2\pi} d\theta \wedge d\rho = 4\pi R.$$

Portanto

$$\int_{D_R(0)} \frac{dudv}{|z-w|} \leq 4\pi R.$$

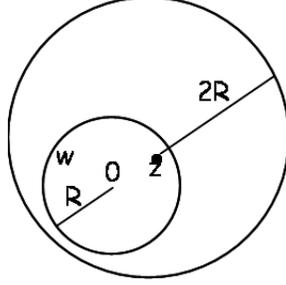


Figura 2.5: Definição da região  $D_{2R}(z)$

Logo, temos a estimativa para o primeiro termo do lado direito de (2.12), ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)| |dz|}{|z|^r |z-w| |w-z_0|} dudv &\leq \int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)| |dz|}{|z|^r |z-z_0| |z-w|} dudv \\ &+ \int_{D_\epsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)| |dz|}{|z|^r |z-z_0| |z-w|} dudv \\ &\leq 4\pi R \left\{ \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} |dz| + \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} |dz| \right\} \\ &= 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} |dz|. \end{aligned}$$

Agora, utilizando (2.11), segue que

$$2A \int_{D_\epsilon} \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r} \frac{1}{|z-w| |w-z_0|} dx dy dudv \leq 16A\pi R \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} dx dy.$$

Portanto, podemos escrever a inequação (2.11) como

$$2\pi \int_{D_\epsilon} \frac{|f(w)|}{|w-z_0| |w|^r} dudv \leq 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} |dz| + 16A\pi R \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} dx dy,$$

ou seja,

$$2\pi(1 - 8AR) \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z-z_0|} dx dy \leq 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)| |dz|}{|z|^r |z-z_0|}.$$

Além disso, podemos escolher  $R$  tal que  $1 - 8AR$  seja positivo. Então temos a seguinte situação para  $z_0 \neq 0$ :

$$0 < 2\pi(1 - 8AR) \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z - z_0|} dx dy \leq 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)| |dz|}{|z|^r |z - z_0|} \leq C(z_0) \leq k,$$

onde  $C$  é uma constante que depende de  $z_0$ . Logo

$$\iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z - z_0|} dx dy$$

é limitada qualquer que seja  $z_0 \in D_R(0)$ . Quando  $z_0 \rightarrow 0$ , vemos que  $|z - z_0| \rightarrow |z|$  e, portanto, o integrando cresce monotonicamente. Logo, concluímos que o

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r |z - z_0|} dx dy \quad (2.13)$$

existe.

Finalmente, usando o fato que (2.13) existe, obtemos, observando (2.10), que  $|f(w)| |w|^{-r}$  é limitado quando  $w \rightarrow 0$ . Portanto, usando (2.8), vemos que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^r} \quad (2.14)$$

existe. ■

**Lema 2.2.3.** *Admitindo as hipóteses do Lema 2.2.2, isto é,  $\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq h(z) |f(z)|$  e supondo que*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^{r-1}} = 0, \forall r \geq 1,$$

*temos,  $f \equiv 0$  em uma vizinhança de 0.*

**Demonstração.** Suponhamos que  $f$  não é identicamente nula em uma vizinhança de 0 e seja  $z_0$  tal que  $f(z_0) \neq 0$ ,  $|z_0| < R$ . Fazendo procedimentos análogos da demonstração do Lema 2.2.2, integrando em relação  $dudv$  a desigualdade (2.10), obtemos

$$2\pi(1 - 8AR) \iint_{D_R(0)} \frac{|f(w)|}{|w|^r} dudv \leq 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)| |dz|}{|z|^r}, \forall r \geq 1, \quad (2.15)$$

onde

$$\int_{D_R(0)} \frac{dudv}{|z - w|} \leq 4\pi R \quad e \quad \max_{z \in D_R(0)} h(z) \leq A.$$

Agora, definindo

$$D^* = \left\{ z \in D_R(0), |z| \leq |z_0| e |f(z)| \geq \frac{|f(z_0)|}{2} \right\},$$

encontramos

$$\begin{aligned}
(1 - 8AR) \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r} dx dy &\geq (1 - 8AR) \iint_{D^*} \frac{|f(z)|}{|z|^r} du dv \\
&\geq \frac{(1 - 8AR)}{2} |f(z_0)| |z_0|^{-r} \text{vol} D^* \\
&= a |z_0|^{-r},
\end{aligned}$$

onde

$$a = \frac{(1 - 8AR)}{2} |f(z_0)| \text{vol} D^*.$$

Por outro lado,

$$4R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r} |dz| \leq bR^{-r}$$

com

$$b = 4R \max_{\partial D_R(0)} |f(z)| \int_{\partial D_R(0)} |dz|.$$

Assim, pelas estimativas acima, temos  $a |z_0|^{-r} \leq bR^{-r}$ , para todo  $r$ . Aqui  $a$  e  $b$  dependem de  $r$ . Portanto, como  $|z_0| < R$ , vemos

$$0 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{a}{b} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{|z_0|}{R} \right)^r.$$

Usando o fato que  $a = \frac{(1 - 8AR)}{2} |f(z_0)| \text{vol} D^*$ , encontramos  $f(z_0) = 0$ . Isto é uma contradição com a definição  $z_0$ . ■

O Lema Principal segue dos Lemas 2.2.2 e 2.2.3. Na verdade, usando o Lema 2.2.3 obtemos que se  $f$  não é identicamente nula em uma vizinhança de 0, existe um  $r$  tal que  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z^{r-1} = 0$  e  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z^r \neq 0$ . Denotaremos tal limite por  $c$ . Logo, podemos escrever

$$f(z) = cz^r + R, \quad \lim_{z \rightarrow 0} R/z^r = 0$$

ou

$$f(z) = z^r f_r(z), \quad f_r(z) = c + R/z^r, \quad \text{tal que } f_r(0) = c \neq 0.$$

Isto prova a nossa afirmação.

# Capítulo 3

## Resultados e Generalizações

R.Bryant, em [4] provou o seguinte resultado :

**Teorema 3.0.1.** *Seja  $M$  uma superfície compacta de gênero zero imersa em  $\mathbb{R}^3$  e seja  $f$  qualquer função suave definida em um intervalo aberto contendo o intervalo  $[0, \infty)$ . Se  $M$  satisfaz a relação de Weingarten na forma*

$$H = f(H^2 - K) = f(|\alpha^{(2,0)}|^2).$$

*Aqui  $\alpha^{(2,0)}$  é a parte  $(2,0)$  da segunda forma fundamental de  $M$ , então  $M$  é isométrica à esfera.*

Alencar, do Carmo e Tribuzy generalizaram o resultado acima.

**Proposição 3.0.1.** *Sejam  $M$  uma superfície compacta de gênero zero, imersa em  $M^2(c) \times \mathbb{R}$  e  $f$  uma função suave como acima. Suponhamos que*

$$H = f(|Q^{(2,0)}|^2).$$

*Então  $Q^{(2,0)} \equiv 0$  e  $M$  é isométrica à esfera.*

**Demonstração.** Visto que  $|dH| = |df||d(|Q^{(2,0)}|^2)|$  e  $|Q^{(2,0)}|^2 = Q^{(2,0)}\overline{Q}^{(2,0)}$  temos

$$d|Q^{(2,0)}|^2 = dQ^{(2,0)}\overline{Q}^{(2,0)} + Q^{(2,0)}d\overline{Q}^{(2,0)}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} |d|Q^{(2,0)}|^2| &\leq |dQ^{(2,0)}||\overline{Q}^{(2,0)}| + |Q^{(2,0)}||d\overline{Q}^{(2,0)}| \\ &= |Q^{(2,0)}|\{|dQ^{(2,0)}| + |d\overline{Q}^{(2,0)}|\}. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$|dH| \leq |df|(|dQ^{(2,0)}| + |d\overline{Q}^{(2,0)}|)|Q^{(2,0)}| = g|Q^{(2,0)}|,$$

onde temos que  $g = |df|(|dQ^{(2,0)}| + |d\overline{Q}^{(2,0)}|)$ . Logo, usando as condições do Teorema de Alencar, do Carmo e Tribuzy, segue-se o resultado.

■

Uma questão natural é a seguinte: no caso do Teorema de Bryant é conhecido que  $|\alpha^{(2,0)}|^2 = H^2 - K$ . Portanto é interessante conhecer uma expressão de  $Q^{(2,0)}$  em termos dos invariantes geométricos simples  $M$ .

Hilário Alencar, Manfredo do Carmo e Renato Tribuzy fizeram os seguintes comentários: Bryant construiu uma forma quadrática globalmente definida na superfície  $M$  de Weingarten, não necessariamente homeomorfa a esfera, a qual é mostrada ser holomorfa em  $M$ . É possível construir tal forma quadrática holomorfa em superfícies de Weingarten imersas em  $M^2(c) \times \mathbb{R}$ ? Este caminho pode parecer útil mesmo com alguma restrição sobre a relação de Weingarten. O problema geométrico relevante é: *quais são as superfícies imersas em  $M^2(c) \times \mathbb{R}$  com curvatura Gaussiana extrínseca constante?*

Agora, vamos demonstrar os fatos mencionados na introdução do nosso trabalho a respeito da generalização do resultado obtido em [3]. Mais precisamente, Hilário Alencar, Isabel Fernández, Manfredo do Carmo e Renato Tribuzy provaram o seguinte resultado:

**Teorema 3.0.2.** *Seja  $M$  uma superfície compacta de gênero zero imersa em  $\mathbb{E}^3(k, \tau)$  com curvatura média  $H$ . Suponhamos que*

$$|dH| \leq g|Q^{(2,0)}|,$$

onde  $g$  é uma função contínua real não-negativa e  $\mathbb{E}^3$  é uma variedade Riemanniana simplesmente conexa homogênea. Então  $Q^{(2,0)}$  é identicamente zero e, conseqüentemente,  $M$  é uma superfície invariante por rotações em  $\mathbb{E}^3(k, \tau)$ .

Antes de demonstrarmos o Teorema 3.0.2, precisaremos de algumas preliminares. Vamos considerar uma variedade homogênea  $\mathbb{E}$  de dimensão 3 com um grupo de isometrias de dimensão 4, curvatura do fibrado  $\tau$  e de curvatura  $k$ . Sejam  $\tilde{R}$  o tensor curvatura Riemanniano,  $M$  uma superfície orientada  $\mathbb{E}$ ,  $\nabla$  a conexão Riemanniana de  $M$ ,  $J$  a rotação de ângulo  $\pi/2$  em  $TM$ ,  $N$  um campo unitário normal a  $M$  e  $S$  o operador de forma de  $M$ . Sejam  $\theta = H + i\tau$  e  $c = k - 4\tau^2$ . Definamos  $Q$  como

$$Q(X, Y) = 2\theta\alpha(X, Y) - c\langle\xi, X\rangle\langle\xi, Y\rangle.$$

Tal expressão foi inspirada na equação (2.3). Aqui valem as mesmas notações utilizadas no capítulo 2.

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\bar{z}} = \bar{Z}Q(Z, Z) &= \bar{Z}\{2\theta\alpha(Z, Z) - c\langle\xi, Z\rangle^2\} \\ &= \bar{Z}\{2\theta\langle SZ, Z\rangle - c\langle\xi, Z\rangle^2\}, \end{aligned}$$

onde  $S$  é o operador de forma correspondente a  $\alpha$ .

**Proposição 3.0.2.**  $\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\bar{Z}(H)\alpha(Z, Z) + 2\theta\lambda^2 Z(H)$  .

**Demonstração.** É claro que

$$\begin{aligned}\bar{Z}Q(Z, Z) &= 2\bar{Z}(\theta)\langle SZ, Z\rangle + 2\theta\langle \nabla_{\bar{Z}}(SZ), Z\rangle \\ &\quad - 2c\langle \xi, Z\rangle\langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}}\xi, Z\rangle - 2c\langle \xi, Z\rangle\langle \xi, \bar{\nabla}_{\bar{Z}}\xi\rangle.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Utilizamos na última igualdade o fato de  $\nabla_{\bar{Z}}Z = 0$ . Calcularemos a seguir cada termo da equação (3.1).

**Lema 3.0.4.**  $\langle \nabla_{\bar{Z}}(SZ), Z\rangle = \langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z\rangle + c\lambda^2\langle \xi, N\rangle\langle \xi, Z\rangle$ .

**Demonstração.** Como  $\nabla_{\bar{Z}}Z = 0$ , usando a Equação de Codazzi e a equação de Codazzi e o corolário 3.2 de [7], temos

$$\begin{aligned}\nabla_{\bar{Z}}(SZ) &= (\nabla_{\bar{Z}}S)(Z) + S(\nabla_Z\bar{Z}) \\ &= (\nabla_ZS)\bar{Z} + \tilde{R}(Z, \bar{Z})N \\ &= (\nabla_ZS)\bar{Z} + c\langle N, \xi\rangle(\langle Z, \xi\rangle\bar{Z} - \langle \bar{Z}, \xi\rangle Z),\end{aligned}$$

onde  $\tilde{R}$  é a curvatura de  $\mathbb{E}^3(k, \tau)$ . Finalmente, visto que  $\langle Z, Z\rangle = 0$ , obtemos

$$\langle \nabla_{\bar{Z}}(SZ), Z\rangle = \langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z\rangle + c\lambda^2\langle \xi, N\rangle\langle \xi, Z\rangle.$$

**Lema 3.0.5.**  $\langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}}\xi, Z\rangle = i\tau\lambda^2\langle \xi, N\rangle$ , onde  $N$  é o vetor normal da superfície  $M$ .

Na demonstração do lema acima utilizaremos a prova da Proposição 3.3, a qual pode ser encontrada em ([7]), ou seja

**Proposição 3.1.** *Qualquer que seja  $X \in \mathcal{X}(M)$ , temos*

$$\nabla_X T = \nu(SX - \tau JX), \quad d\nu(X) + \langle SX - \tau JX, T\rangle = 0.$$

Aqui  $\nu = \langle N, \xi\rangle$  e  $\xi = T + \nu N$ .

**Demonstração.** De fato,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X \xi &= \bar{\nabla}_X T + \nu N \\ &= \bar{\nabla}_X T + d\nu(X)N + \nu\bar{\nabla}_X N \\ &= \nabla_X T + \langle SX, T\rangle N + d\nu(X)N - \nu SX.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X \xi &= \tau X \times \xi \\ &= \tau X \times (T + \nu N) \\ &= \tau(\langle JX, T\rangle N - \nu JX).\end{aligned}$$

Concluiremos a demonstração considerando as partes normais e tangenciais de cada expressão. Assim, para finalizarmos a prova desse lema basta utilizar a Proposição 3.1, para obtermos

$$\bar{\nabla}_{\bar{Z}}\xi = \tau\xi \times \bar{Z} = \tau(\langle J\bar{Z}, \xi\rangle N - \langle \xi, N\rangle J\bar{Z}),$$

onde  $J$  é número complexo multiplicado por  $i$ . Portanto,

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{Z}}\xi, Z\rangle = i\tau\lambda^2\langle \xi, N\rangle.$$

■

**Lema 3.0.6.**  $\langle \xi, \bar{\nabla}_{\bar{Z}} \rangle = \lambda^2 H \langle \xi, N \rangle$  .

**Demonstração.** Sabemos que  $\bar{\nabla}_{\bar{Z}} Z = \nabla_{\bar{Z}} Z + \alpha(\bar{Z}, Z)N$ . Logo,  $\nabla_{\bar{Z}} Z = 0$  e  $\alpha(\bar{Z}, Z) = \lambda^2 H$  por (2.3) segue-se o resultado. ■

Agora substituindo os lemas (3.0.4), (3.0.5) e (3.0.6) na expressão (3.1) de  $\bar{Z}Q(Z, Z)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{Z}Q(Z, Z) &= 2\bar{Z}(H\alpha(Z, Z) + 2\theta\langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z \rangle + 2\theta c\lambda^2\langle N, \xi \rangle\langle Z, \xi \rangle \\ &\quad - 2ci\tau\lambda^2\langle \xi, Z \rangle\langle \xi, N \rangle - 2c\lambda^2 H\langle \xi, N \rangle\langle \xi, Z \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\theta = H + i\tau$ , os dois penúltimos termos cancelam-se com o terceiro termo. Portanto,

$$\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\bar{Z}(H)\alpha(Z, Z) + 2\theta\langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z \rangle. \quad (3.2)$$

Para concluirmos a prova da Proposição 3.0.2, precisaremos de informações sobre o termo  $\langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z \rangle$ .

**Lema 3.0.7.**  $\langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z \rangle = \lambda^2 Z(H)$ .

**Demonstração.** Afirmamos que

$$\nabla_Z Z = \frac{Z(\lambda^2)}{\lambda^2} Z.$$

Com efeito, podemos escrever  $\nabla_Z Z = aZ + b\bar{Z}$ . Daí

$$\langle \nabla_Z Z, Z \rangle = b\lambda^2 = \frac{1}{2}Z\langle Z, Z \rangle = 0.$$

Agora, segue-se que  $b = 0$ , portanto  $\nabla_Z Z = aZ$ . Por outro lado,

$$\langle \nabla_Z Z, \bar{Z} \rangle = Z\langle Z, \bar{Z} \rangle = Z(\lambda^2) = a\langle Z, \bar{Z} \rangle.$$

Isto implica  $a = \frac{Z(\lambda^2)}{\lambda^2}$ , provando assim nossa afirmação. Agora, notemos que

$$Z(\lambda^2 H) = Z(\langle S\bar{Z}, Z \rangle) = \langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z \rangle + \langle S\bar{Z}, \nabla_Z Z \rangle.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Z(S\bar{Z}), Z \rangle &= Z(\lambda^2 H) + \lambda^2 Z(H) - \langle S\bar{Z}, \nabla_Z Z \rangle \\ &= Z(\lambda^2)H + \lambda^2 Z(H) - \langle S\bar{Z}, Z \rangle \frac{Z(\lambda^2)Z}{\lambda^2} \\ &= \lambda^2 Z(H), \end{aligned}$$

pois  $\langle S\bar{Z}, Z \rangle = \lambda^2 H$ . Agora, para concluirmos a demonstração da Proposição 3.0.2, basta substituímos a expressão do Lema 3.0.7 na equação (3.2). ■

Finalmente, demonstraremos o Teorema 3.0.2. Usando a Proposição 3.0.2 ,temos

$$\begin{aligned} |\bar{Z}Q(Z, Z)| &= |2\bar{Z}(H)\alpha(Z, Z)| + 2\theta\lambda^2|Z(H)| \\ &\leq |dH||\lambda|2\alpha(Z, Z) + 2\theta\lambda^2, \end{aligned}$$

pois

$$|\bar{Z}H(Z)| = |dH(\bar{Z})| \leq |dH||\bar{Z}| = |dH||\lambda| \text{ e } |Z(H)| = |dH(Z)| \leq |dH||Z| = |dH||\lambda|.$$

Por hipótese,  $|dH| \leq g|Q^{(2,0)}|$ , onde  $g$  uma função contínua não-negativa. Logo

$$\left| \frac{d\psi}{d\bar{z}} \right| = |\bar{Z}Q(Z, Z)| \leq h|Q^{(2,0)}| = h|\psi(z)|. \quad (3.3)$$

Aqui

$$h = g|\lambda|(|\alpha(Z, Z)| + 2\lambda^2|H + i\tau|),$$

isto é,  $h$  é uma função contínua não negativa em  $M$ . Agora, usando o Lema Principal , o qual afirma que se a função  $\psi(z)$  satisfaz a inequação (3.3) em uma vizinhança  $U$  de  $z_0$  de  $\psi$ , então  $\psi \equiv 0$  em uma vizinhança  $V \subset U$  de  $z_0$ , ou para todo  $z$  em  $V$ ,

$$\psi(z) = (z - z_0)^k f_k(z), \quad k \geq 1 \quad f_k(z_0) \neq 0.$$

Para concluirmos o Teorema 3.0.2, basta usar o mesmo argumento utilizado no Teorema de Alencar, do Carmo e Tribuzy. Isto conclui a demonstração. ■

# Capítulo 4

## Apêndice

Neste apêndice exibiremos a parte  $(2, 0)$  da forma quadrática

$$Q(X, Y) = 2H\alpha(X, Y) - c \langle \xi X, \xi Y \rangle,$$

definida por Abresch e Rosenberg em [1], onde  $\xi : M^2(c) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a projeção natural sobre  $\mathbb{R}$ , isto é,  $\xi(p, t) = t$ ;  $p \in M^2(c)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Além disso, calcularemos a norma de  $Q^{(2,0)}$ .

Sejam  $M$  uma superfície Riemanniana e  $f : M \rightarrow M^2(c) \times \mathbb{R}$  uma imersão isométrica. Se  $c \geq 0$ , então consideraremos  $M$  imersa em  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ . Caso  $c < 0$ , admitiremos  $M$  imersa em  $\mathbb{L}^3 \times \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{L}^3$  é o espaço de Lorentz. De fato, podemos escrever  $f = (p, t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$  e  $p \in M^2(c) \subset \mathbb{R}^3$  para  $c \geq 0$  e  $p \in M^2(c) \subset \mathbb{L}^3$  para  $c < 0$ . Assim, ao escrevermos  $M^2(c) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{E}^4$  significará estas duas possibilidades.

Seja  $(u, v)$  coordenadas locais em  $M$  para as quais  $f(u, v)$  é uma imersão induzida pela métrica conforme  $E(du^2 + dv^2)$  em  $M$ . Sejam  $\partial u$  e  $\partial v$  os vetores coordenados e  $e_1 = E^{-1/2}\partial u$ ,  $e_2 = E^{-1/2}\partial v$  uma base ortonormal tangente a  $M$ . As direções normais unitárias para  $M$  em  $\mathbb{E}^4$  são denotadas por  $n_1$ ,  $n_2$ , ou seja,  $\{n_1, n_2\}$  e  $\{e_1, e_2\}$  são referenciais ortonormais, respectivamente, de  $T^\perp M$  e  $TM$ . Denotaremos por  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  as matrizes, respectivamente, de  $n_1$  e  $n_2$ . Sabemos que  $H = \text{tr}A/2$  e  $K = \det A$ , onde  $H$  e  $K$  são as curvaturas média e Gaussiana, respectivamente. Sejam  $X, Y \in TM$ . Seja  $\psi(X, Y) = \langle d\xi(X), d\xi(Y) \rangle$ . É claro que  $\psi$  é uma forma diferencial quadrática. Daí, temos que

$$\psi(., .) = \tilde{e}du^2 + 2\tilde{f}dudv + \tilde{g}dv^2,$$

onde  $b_{11} = \tilde{e} = \psi(\partial u, \partial u)$ ,  $b_{12} = \tilde{f} = \psi(\partial u, \partial v)$  e  $b_{22} = \tilde{g} = \psi(\partial v, \partial v)$ . Isto implica,

$$\tilde{e} = \psi(\partial u, \partial u) = \xi(\partial u)^2, \quad \tilde{f} = \psi(\partial u, \partial v) = \xi(\partial u)\xi(\partial v) \quad \text{e} \quad \tilde{g} = \psi(\partial v, \partial v) = \xi(\partial v)^2,$$

pois  $d\xi(X) = \langle \nabla \xi, X \rangle = \xi(X)$ . Logo

$$Q^{(2,0)} = 2H \left( \frac{e-g}{2} - if \right) - c \left( \frac{\tilde{e}-\tilde{g}}{2} - i\tilde{f} \right).$$

Definimos as funções de H. Hopf como

$$\psi_1 = \frac{e-g}{2} - if, \quad \psi_2 = \frac{\tilde{e}-\tilde{g}}{2} - i\tilde{f}.$$

Portanto

$$Q^{(2,0)} = 2H\psi_1 - c\psi_2 = \psi.$$

Agora analisaremos a última equação. Notemos que

$$\|A\|^2 = 4H^2 - 2K \text{ e } |\psi_1|^2 = \psi_1\bar{\psi}_1 = \frac{1}{4}[\|A\|^2 - 2K] = H^2 - K.$$

Além disso,

$$B(e_i, e_j) := b_{ij} = -\langle e_i, \nabla_{e_j} n_2 \rangle = \langle e_i^h, e_j^h \rangle = \delta_{ij} - \langle e_i, \partial_t \rangle \langle e_j, \partial_t \rangle,$$

onde na última igualdade usamos o fato  $X = X^h + \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$ ,  $X \in T(M^2 \times \mathbb{R})$ . Daí,

$$\begin{aligned} b_{11} &= 1 - \langle e_1, \partial_t \rangle^2, \\ b_{12} &= \langle e_1, \partial_t \rangle \langle e_2, \partial_t \rangle, \\ b_{22} &= 1 - \langle e_2, \partial_t \rangle^2. \end{aligned}$$

Como  $\{e_1, e_2, n_1\}$  é uma base ortonormal de  $T(M^2 \times \mathbb{R})$ , temos

$$1 = |\partial_t|^2 = \langle e_1, \partial_t \rangle^2 + \langle e_2, \partial_t \rangle^2 + \nu^2.$$

Aqui  $\nu = \langle n_1, \partial_t \rangle$ . Assim,

$$\langle e_1, \partial_t \rangle^2 + \langle e_2, \partial_t \rangle^2 = 1 - \nu^2.$$

Por outro lado,

$$\text{tr} B = b_{11} + b_{22} = 2 - \langle e_1, \partial_t \rangle^2 - \langle e_2, \partial_t \rangle^2 = 1 + \nu^2.$$

Agora, finalmente, calcularemos a norma de  $Q^{(2,0)}$ .

**Proposição 4.0.3.**

$$|Q^{(2,0)}|^2 = 4H^2(H^2 - K) + c^2 \left( \frac{1 - \nu^2}{2} \right)^2 - 2Hc \text{Re}(\psi_1 \bar{\psi}_2)$$

**Demonstração.** Mostraremos, inicialmente, que

$$|\psi_2|^2 = \left( \frac{1 - \nu^2}{2} \right)^2.$$

De fato,

$$\begin{aligned} |\psi_2|^2 &= \psi_2 \bar{\psi}_2 = \left( \frac{b_{11} - b_{22}}{2} \right)^2 + b_{12}^2 \\ &= \left( \frac{\langle e_1, \partial_t \rangle^2 - \langle e_2, \partial_t \rangle^2}{2} \right)^2 + \langle e_1, \partial_t \rangle^2 \langle e_2, \partial_t \rangle^2 \\ &= \frac{1}{4} [\langle e_1, \partial_t \rangle^4 + \langle e_2, \partial_t \rangle^4 - 2\langle e_1, \partial_t \rangle^2 \langle e_2, \partial_t \rangle^2 + 4\langle e_1, \partial_t \rangle^2 \langle e_2, \partial_t \rangle^2] \\ &= \frac{1}{4} (\langle e_1, \partial_t \rangle^2 + \langle e_2, \partial_t \rangle^2)^2 \\ &= \left( \frac{1 - \nu^2}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Portanto, usando as expressões de  $|\psi_1|^2$ ,  $|\psi_2|^2$ , temos

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= \psi\bar{\psi} = (2H\psi_1 - c\psi_2)(2H\bar{\psi}_1 - c\bar{\psi}_2) \\ &= H^2|\psi_1|^2 - 2Hc\psi_1\bar{\psi}_2 - 2Hc\bar{\psi}_1\psi_2 + c^2|\psi_2|^2 \\ &= 4H^2(H^2 - K) + c^2 \left( \frac{1 - \nu^2}{2} \right)^2 - 2Hc\text{Re}(\psi_1\bar{\psi}_2). \end{aligned}$$

O que demonstra nossa afirmação.

Inclusive, no artigo de Alencar, do Carmo e Tribuzy, ver [2], tem a seguinte pergunta:  
*Qual o significado geométrico da  $|Q^{(2,0)}|$ ?* ■

# Referências Bibliográficas

- [1] Abresch, U., Rosenberg, H. *A Hopf differential for constant mean curvature in  $S^2 \times \mathbb{R}$  and  $H^2 \times \mathbb{R}$* , Acta Math. **193** (2004), 141-174.
- [2] Alencar, H., do Carmo, M. P., Tribuzy, R. *A theorem of H. Hopf and the Cauchy-Riemann inequality*, (a aparecer) Communication in Analysis and Geometry, 2007.
- [3] Alencar, H., do Carmo, M. P., Fernández, I., Tribuzy, R. *A theorem of H. Hopf and the Cauchy-Riemann inequality II*, Preprint, IMPA, 2006.
- [4] Bryant, R., *Complex Analysis and a class of Weingarten surfaces*, Preprint, não publicado.
- [5] Cavalcante, M., Lira, J., *Examples and structure of CMC surfaces in some Riemannian and Lorentzian homogeneous spaces*, (a aparecer) Michigan Mathematical Journal, 2007.
- [6] Hopf, H., *Differential Geometry in the Large*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, vol. 1000, 1983.
- [7] Daniel, B., *Isometric immersions into 3-dimensional, homogeneous manifolds*, Preprint, IMPA, 2005.
- [8] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2005.
- [9] Lang, S., *Complex Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Fourth edition, Springer.