Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

EXAME DE MESTRADO EM ANÁLISE

Data: 28 de Julho de 2016	**Banca Examinadora**
Início: 13hs.	Prof. Carlos G. do Rei Filho
Término: 17hs.	Prof. Marcos Ranieri

Escolha 5 das 6 questões abaixo:

1- Prove que toda cobertura aberta $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ possui um número de Lebesgue.
(Recorde: $\delta > 0$ é um número de Lebesgue de uma cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ se, para todo $Y \subset X$ com $diam(Y) < \delta$, existir $\lambda \in L$ tal que $Y \subset C_\lambda$).

2- Determine os pontos de altura máxima e mínima, em relação ao eixo $0z$, da superfície $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 - x + 4y - 2z + 6 = 0\}$.

3- Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicacão C^1 e própria. Suponha que para todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$, a matriz jacobiana de f em x é invertível. Mostre que f é sobrejetiva.

4- a) Mostre que a função diferenciável $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida pela equação $F(x - az, y - bz) = 0$, onde F é uma função diferenciável arbitrária de duas variáveis, a e b constantes, satisfaz

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

b) Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}}, & se\ y > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ 0, & se\ y = 0,\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

verifique que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 f(x, y)dy\right) \neq \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y))dy.$$

5- Classifique cada uma das afirmações abaixo como verdadeira ou falsa. Para as afirmações verdadeiras apresente uma justificativa e para as afirmações falsas dê um contra-exemplo.

(a) A reunião de uma família de compactos com um ponto em comum é um conjunto compacto.
(b) $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.
(c) Seja $f : M \to N$ um difeomorfismo local entre superfícies diferenciáveis. Se N é orientável, então M é orientável.

6- Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto J-mensurável e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ e $\int_X f(x)dx = 0$, então $\{x \in X; f(x) \neq 0\}$ tem medida n-dimensional nula.