Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado

Exame de Geometria Diferencial
31 de março de 2023
Duração: 4h (das 13h às 17h)

1. Mostre que a curvatura média H de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em um ponto $p \in S$ é dada por

$$H(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k_n(\theta) d\theta,$$

onde $k_n(\theta)$ é a curvatura normal em p na direção que faz um ângulo θ com uma direção fixada.

2. Seja $\varphi : S \to \bar{S}$ um difeomorfismo entre duas superfícies regulares $S, \bar{S} \subset \mathbb{R}^3$. Dizemos que φ *preserva área* se $\varphi(R)$ tem a mesma área que R para toda região $R \subset S$. Prove que se φ é conforme e preserva área, então φ é uma isometria.

3. (a) Prove que toda superfície regular compacta contida em $\mathbb{R}^3$ possui pontos elípticos.
   (b) Use o item (a) para concluir que, se S é uma superfície regular compacta, conexa e orientável que não é homeomorfa à esfera, então existem pontos em S em que a curvatura Gaussiana é positiva, negativa e nula.

4. Considere a superfície parametrizada

$$x(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) Calcule os coeficientes da primeira forma fundamental.
   (b) Calcule os coeficientes da segunda forma fundamental.
   (c) Calcule as curvaturas principais e conclua que x é a parametrização de uma superfície mínima.
   (d) Mostre que as linhas de curvatura são exatamente as curvas coordenadas.
   (e) Mostre que as linhas assintóticas são exatamente as curvas $u+v =$ const e $u - v =$ const.