Universidade Federal de Alagoas- UFAL
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Exame de Geometria Diferencial
Prof. C. T. Cruz e Prof. F. Vitório

NOME:

1. Considere a curva $\gamma : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (1+\cos t, \sin t, 2\sin\frac{t}{2})$. Mostre que:

   a) Mostre que γ está contida na intersecção do cilindro de equação $(x-1)^2 + y^2 = 1$ com a esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$.

   b) γ tem curvatura $\kappa(t) = \frac{\sqrt{13+3\cos t}}{(3+\cos t)^2}$

2. (Funcional de Willmore de uma superfície) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície. O funcional de Willmore é definido como

$$W(S) = \int_S H^2 dA,$$

   onde H é a curvatura média de S.

   a) Quem são H e $W(S)$ quando S é uma esfera de raio R?

   b) Usando Gauss-Bonnet, mostre que quando S é topologicamente uma esfera, então

$$W(S) \geq 4\pi.$$

   Mostre também que se $W(S) = 4\pi$, então S é uma esfera. (Dica: Para a desigualdade, simplifique $(a+b)^2 - (a-b)^2$ e então relacione sua identidade com as definições de K e H.)

3. Seja $\gamma : [0,l] \to \mathbb{R}^3$ uma curva suave fechada em $\mathbb{R}^3$, parametrizada pelo comprimento do arco. Considere a superfície

$$X(s,\theta) = \gamma(s) + r(\cos\theta\,\mathbf{n}(s) + \sin\theta\,\mathbf{b}(s)),$$

   onde $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$ são os vetores normal e binormal a γ em $\gamma(s)$, $s \in [0,l]$ e r é uma constante positiva suficientemente pequena.

   a) Calcule as primeira e segunda formas fundamentais de X.

   b) Calcule a curvatura média de X.

   c) (bônus) Mostre que o funcional de Wilmore para X satisfaz $W(X) \geq 2\pi^2$.

4. Dada uma aplicação suave $f : U \subset R^2 \to \mathbb{R}$ (onde U é um conjunto aberto), considere a superfície $G(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, z = f(x,y)\}$.

a) Classifique os pontos de $G(f)$ relativamente a f_x and f_y, isto é, determine condições para que sejam planares, elípticos, hiperbólicos ou parabólicos.

b) Mostre que a área de $G(f)$ é igual a

$$\iint_U \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$$

.