

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

EXAME DE MESTRADO EM GEOMETRIA DIFERENCIAL

Data: 09 de janeiro de 2015

Duração: 4 horas.

Banca Examinadora

Prof^{ca}. Maria Andrade

Prof. Marcos P. A. Cavalcante

1- Mostre que o traço da curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\alpha(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$$

é uma circunferência de raio 1.

2- (a) Enuncie o teorema Egregium de Gauss.

(b) Mostre que a curvatura gaussianas das superfícies parametrizadas

$$x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

$$y(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log v)$$

é a mesma para todo (u, v) , mas as primeiras formas I_x e I_y são diferentes.

3- Determine as geodésicas das seguintes superfícies:

a) esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

b) cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$

4- Um polígono geodésico P em uma superfície S é uma região simples $P \subset S$ cuja fronteira é a união de arcos geodésicos.

a) Determine uma fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono geodésico contido na esfera S^2 .

b) Calcule a característica de Euler de um polígono de 2 e de 3 lados.

c) Seja S uma superfície com $K \leq 0$. Mostre que todo polígono geodésico em S tem pelo menos três lados.