



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de Geometria Diferencial

Data: 06 de Agosto de 2021

Aluno: _____

1. Seja α uma curva plana dada em coordenadas polares por $\rho = \rho(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$.

(a) Mostre que o comprimento de arco $l(\alpha)$ de α é

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

(b) Mostre que a curvatura é

$$\kappa(\theta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{3/2}},$$

O símbolo ' denota a derivação com respeito a θ .

2. Prove que se uma superfície regular S encontra um plano Π em um único ponto $p \in S$, então Π coincide com o plano tangente a S em p . Generalize o resultado acima para o caso em que $S \cap \Pi$ tem mais de um ponto e S está de um lado de Π .
3. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Fixe $p \in S$ e $u \in T_p S$ com $|u| = 1$. Demonstre que a curvatura média $H(p)$ de S em p é dada por

$$H(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k_n(\theta) d\theta,$$

onde $k_n(\theta)$ é a curvatura normal de S em p na direção que faz um ângulo θ com u .

4. Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ uma parametrização isotérmica da superfície regular S , ou seja, $E = G = \lambda(u, v) > 0$ e $F = 0$. Mostre que a curvatura Gaussiana $K = K(u, v)$ de S em $p = \mathbf{x}(u, v)$ é dada por

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \ln \lambda,$$

onde $\Delta\varphi$ denota o Laplaciano $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$ da função φ . Em seguida, conclua que quando $E = G = (u^2 + v^2 + c)^{-2}$ e $F = 0$, então $K = \text{constante} = 4c$.

Boa Prova!!