Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

EXAME DE MESTRADO EM GEOMETRIA DIFERENCIAL

Banca Examinadora
Prof. Feliciano Vitório
Prof. Marcos P. A. Cavalcante

Data: 10 de março de 2017
Duração: 4 horas.

Escolha 5 questões

1- Mostre que o traço da curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$\alpha(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \operatorname{sen} t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$$

é uma circunferência de raio 1.

2- Quais dos entes abaixo são invariantes por isometrias? Dê uma breve justificativa ou um contra-exemplo.

(a) Curvatura Gaussiana.

(b) Curvatura média.

(c) Curvatura geodésica.

(d) Direções principais.

3- Seja S uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$.

(a) Prove que se P é um plano de simetria de S, então $P \cap S$ é uma geodésica.

(b) Mostre que as interseções do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ com os planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ são geodésicas do elipsóide.

4- Um polígono geodésico P em uma superfície S é uma região simples $P \subset S$ cuja fronteira é a união de arcos geodésicos.

a) Determine uma fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono geodésico contido na esfera $\mathbb{S}^2$.

b) Calcule a característica de Euler de um polígono de 2 e de 3 lados.

c) Seja S uma superfície com $K \leq 0$. Mostre que todo polígono geodésico em S tem pelo menos três lados.

5- Seja R uma região numa superfície S orientada, tal qual R é um anel com bordo formado por uma geodésica β fechada simples e uma curva α com quatro vértices formada por segmentos de geodésica ortogonais. Prove que existem pontos em R com curvatura $K \neq 0$.

6- Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície homeomorfa ao cilindro com curvatura Gaussiana negativa em todos os pontos. Mostre que M tem no máximo uma geodésica fechada.