UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PPGMAT

Exame de Qualificação
Geometria Diferencial

Data: 05 de fevereiro de 2021
Horário: 8h às 12h

Resolva as questões abaixo. As soluções devem ser enviadas para o e-mail `abraao.mendes@im.ufal.br` até às **12h00min** do dia de hoje. Não serão aceitas soluções enviadas após este horário.

1. Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ um curva regular parametrizada pelo comprimento de arco.

   (a) Defina o triedro de Frenet T, N, B para a curva γ. Deduza as equações de Frenet.

   (b) Suponha que γ tenha curvatura constante $\kappa > 0$ e torção $\tau \equiv 0$. Mostre que
   $$\alpha(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa} N(s)$$
   é uma curva constante, isto é, $\alpha(s) = p$ para algum ponto fixo p. Aqui N representa o vetor normal à curva γ.

2. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em S. O *gradiente* de f é uma aplicação diferenciável $\text{grad } f : S \to \mathbb{R}^3$ que associa a cada ponto $p \in S$ um vetor $\text{grad } f(p) \in T_pS \subset \mathbb{R}^3$ tal que
   $$\langle \text{grad } f(p), v \rangle = df_p(v), \quad \forall v \in T_pS.$$
   Mostre que se E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental em uma parametrização $\mathbf{x}$, $f_u = df_p(\mathbf{x}_u)$ e $f_v = df_p(\mathbf{x}_v)$, então
   $$\text{grad } f(p) = \left(\frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \right)(p)\, \mathbf{x}_u(p) - \left(\frac{f_u F - f_v E}{EG - F^2} \right)(p)\, \mathbf{x}_v(p).$$

3. (a) Seja S uma superfície regular sem pontos umbílicos. Prove que S é uma superfície mínima se, e somente se, a aplicação de Gauss $N : S \to S^2$ satisfaz, para todos $p \in S$ e $w_1, w_2 \in T_pS$, a seguinte relação:
$$\langle dN_p(w_1), dN_p(w_2) \rangle_{N(p)} = \lambda(p) \langle w_1, w_2 \rangle_p,$$
onde $\lambda(p) \neq 0$ é um número que depende apenas de p.

   (b) Considere uma vizinhança V de um ponto p da superfície mínima sem pontos planares S do item (a) tal que $N : S \to S^2$ restrita a V é um difeomorfismo sobre a imagem $N(V)$ aberta em S^2 (como $K(p) = \det(dN_p) \neq 0$, uma tal vizinhança V existe pelo Teorema da Aplicação Inversa). Considere a parametrização $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to S^2$ de S^2 dada pela projeção estereográfica e defina
$$U = \mathbf{x}^{-1}(N(V)) \subset \mathbb{R}^2.$$
Prove que a parametrização $\mathbf{y} = N^{-1} \circ \mathbf{x} : U \to V \subset S$ é isotérmica.

   O item (b) *acima fornece uma maneira de introduzir parâmetros isotérmicos em superfícies mínimas sem pontos planares.*

4. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular conexa, compacta e orientável que não é homeomorfa a uma esfera. Prove que existem pontos em S onde a curvatura Gaussiana é positiva, negativa e nula.