Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado

Exame de Geometria Diferencial
27 de janeiro de 2023
Duração: 4h (das 8h às 12h)

1. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$ tal que $\kappa(s) > 0$, $\kappa'(s) \neq 0$ e $\tau(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Mostre que $\alpha(I)$ está contido em uma esfera se, e somente se,

$$R^2 + (R')^2 T^2$$

é constante, onde $R = 1/\kappa$, $T = 1/\tau$ e R' é a derivada de R em relação a s.

2. Existem curvas regulares na esfera unitária cujo mínimo da curvatura seja estritamente menor que um? Justifique.

3. Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável sobre uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$.
   (a) Dado $p \in S$, o que significa p ser um ponto crítico para f?
   (b) Fixado $p_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus S$, defina $f(p) = |p - p_0|$ para $p \in S$. Mostre que $p \in S$ é um ponto crítico para f se, e somente se, a reta que liga p a p_0 é normal a S em p.
   (c) Fixado $v \in \mathbb{R}^3$ com $|v| = 1$, defina $f(p) = \langle p, v \rangle$ para $p \in S$. Mostre que $p \in S$ é um ponto crítico para f se, e somente se, v é um vetor normal a S em p.

4. Considere a superfície parametrizada

$$x(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) Calcule os coeficientes da primeira forma fundamental.
   (b) Calcule os coeficientes da segunda forma fundamental.
   (c) Calcule as curvaturas principais e conclua que x é a parametrização de uma superfície mínima.

(d) Mostre que as linhas de curvatura são exatamente as curvas coordenadas.

(e) Mostre que as linhas assintóticas são exatamente as curvas $u+v =$ const e $u - v =$ const.

5. (a) Seja S uma superfície regular, com curvatura Gaussiana $K < 0$, homeomorfa a um cilindro. Mostre que S possui no máximo uma geodésica simples fechada.

   (b) Dê um exemplo de uma superfície regular com $K < 0$ que possui exatamente uma geodésica simples fechada.

   (c) Com uma figura, ilustre como seria o aspecto de uma superfície regular com $K < 0$ que não possui geodésica simples fechada.

   (d) Sob a hipótese mais fraca $K \leq 0$, o que podemos dizer sobre o item (a) acima?