Universidade Federal de Alagoas
Exame de qualificação - Análise no $\mathbb{R}^n$
(18/03/2022)
Duração: 4 horas

Aluno(a):	

1. Seja $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho fechado diferenciável. Mostre que existe algum $t \in (a,b)$ tal que $\langle \lambda(t), \lambda'(t) \rangle = 0$.

2. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ contínua no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se a função $g : U \to \mathbb{R}$, dada pela expressão $g(x) = \int_0^{f(x)} (t^2+1)\, dt$, for de classe C^∞, então f também será C^∞.

3. Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis. Defina $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pondo $F(x,y) = (f(x) \cdot h(x), g(y))$. Suponha que f e g são difeomorfismos de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$. Mostre que F é um difeomorfismo se e somente se, $0 \notin h(\mathbb{R})$.

4. Sejam $b \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$ e H o hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido pela equação $\langle b, x \rangle = c$. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para mostrar que o ponto de H mais próximo do ponto $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ é $x = a + \dfrac{c - \langle b, a \rangle}{\|b\|^2} \cdot b$.

5. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $c \in A$ tal que
$$\frac{1}{vol.A} \int_A f(x)dx = f(c).$$

Boa Prova