Universidade Federal de Alagoas
Exame de qualificação - Análise no $\mathbb{R}^n$
(22/12/2021)
Duração: 4 horas

Aluno(a):	

1. Seja $h : B \to \mathbb{R}^n$ o homeomorfismo da bola de centro 0 e raio 1 em $\mathbb{R}^n$ dado por $h(x) = x/(1-|x|)$. Fixado arbitrariamente $a \in \mathbb{R}^n$, seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a translação de $T(x) = x+a$. Considere o homeomorfismo $\varphi = h^{-1}Th : B \to B$. Prove que $\lim_{x\to b}\varphi(x) = b$ para todo $b \in \partial B$. Conclua que, dados arbitrariamente $c, d \in B$ existe um homeomorfismo $\bar{\varphi} : \bar{B} \to \bar{B}$, tal que $\bar{\varphi}(c) = d$, $\bar{\varphi}(x) = x$ para todo $x \in \partial B$.

2. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 no abertu $U \subset \mathbb{R}^m$. Dados $a \in U$ e $\varepsilon > 0$, prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in U,\ |x-a| < \delta, |y-b| < \delta \Rightarrow f(y) - f(x) = f'(a)(y-x) + r(x,y),$$

   onde $|r(x,y)| \leq \varepsilon|x-y|$.

3. Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, positiva, tal que $\int_0^1 f(t)dt = \int_1^2 f(t)dt = 1$. Para cada $x \in [0,1]$, prove que existe um único $g(x) \in [1,2]$ tal que $\int_x^{g(x)} f(t)dt = 1$. Mostre que a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ assim definida é de classe C^1.

4. Sejam $b \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$, $c \in \mathbb{R}$ e H o hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ definido pela equação $\langle b, x\rangle = c$. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para mostrar que o ponto de H mais próximo do ponto $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ é $x = a + \dfrac{c - \langle b, a\rangle}{\|b\|^2} \cdot b$.

5. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $c \in A$ tal que

$$\frac{1}{vol.A}\int_A f(x)dx = f(c).$$

Boa Prova