Universidade Federal de Alagoas
Exame de qualificação - Análise no $\mathbb{R}^n$
(05/02/2021)
Duração: 4 horas

Aluno(a):	

1. **(1,0)** Seja $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Se $\mathbb{R}^n \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ são não vazios e A_1 é limitado então

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{A_j} \neq \emptyset.$$

2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ (tais que $a < b$), $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ um caminho de classe C^2.

   (a) **(1,0)** Mostre que, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |h| < \delta$ então

$$|f(t+h) - f(t) - hf'(t)| < \epsilon|h|, \quad \forall t, t+h \in [a, b].$$

   (b) **(1,0)** Mostre que, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |h| < \delta$ então

$$|f(t+h) - f(t) - hf'(t) - \frac{h^2}{2} f''(t)| < \epsilon h^2, \quad \forall t, t+h \in [a, b].$$

3. **(2,0)** Sejam $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função tal que as funções $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ estão bem definidas e são limitadas (para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$) então f é contínua?

4. **(1,5)** Sejam, $p, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ aberto e $A : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ diferenciável. Definindo

$$\begin{array}{rccc} f: & U \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x, v) & \mapsto & f(x, v) = A(x) \cdot v \end{array}$$

   mostre que f é diferenciável e $f'(x, v) \cdot (h, k) = (A'(x) \cdot h) \cdot v + A(x) \cdot k$.

5. **(2,0)** Sejam $n, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, com $d > n$, e $U \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto. Mostre que, se $f : U \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^k e $c \in \mathbb{R}^n$ é valor regular de f então $M = f^{-1}\{c\}$ é uma superfície de classe C^k. Mais ainda, mostre que $T_p M = \ker f'(p)$ (para cada $p \in M$).

6. **(1,5)** Seja $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ um bloco $n-$dimensional e $f : A \to \mathbb{R}$. Mostre que f é integrável se e somente se, para cada $\epsilon > 0$ existem partições P e Q de A tais que

$$S(f, P) - s(f, Q) < \epsilon.$$

Boa Prova