

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

EXAME DE MESTRADO EM ANÁLISE

Data: 09 de Março de 2018

Início: 13:30 hs.

Término: 17:30 hs.

Banca Examinadora

Prof. Luis Guillermo Maza

Prof. Marcos Ranieri da Silva

- 1- Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função homogênea de grau k , ou seja, $f(tx) = t^k f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$. Suponha que f é diferenciável em \mathbb{R}^n , mostre que f satisfaz a relação de Euler

$$kf(x) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x),$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

- 2- Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^1 e própria. Suponha que para todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$, a matriz jacobiana de f em x é invertível. Mostre que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

- 3- Mostre que se $K \subset \mathbb{R}^n$ é tal que toda função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada então K é compacto.

- 4- Considere $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y) = (x + \operatorname{sen}(x/2 + y/4), y + \operatorname{cos}(x/4 + y/2))$$

Mostre que F é um difeomorfismo de \mathbb{R}^2 sobre \mathbb{R}^2 . Calcule as derivadas parciais de F^{-1} no ponto $(0, 1)$.

- 5- Suponha que o polinômio $P(z, a_0, \dots, a_k) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k$ possua uma raiz simples em z_0 . Prove que dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que todo polinômio $P(z, b_0, \dots, b_k)$, com $|b_i - a_i| < \delta$ para $i = 1, \dots, k$, possui uma raiz simples $r(b_0, \dots, b_k) \in \mathbf{B}(z_0; \epsilon)$.

- 6- Seja $E \subset \mathbb{R}^k$ um conjunto J -mensurável, $x_0 \in E$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $E_n = E \cap \mathbf{B}(x_0; 1/n)$ seja J -mensurável com volume positivo. Prove que

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{vol}(E_n)} \int_{E_n} f(x) dx.$$