Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Terceira avaliação de Análise no $\mathbb{R}^n$

Data: 12 de Maio de 2017

Início: 8h.

Término:12h

Nome: Prof. Marcos Ranieri

---

(1) Enuncie e prove a Forma Local das Submersões.

(2) Se $f : U \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e tem posto 3 em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^4$ então $|f(x)|$ não assume valor máximo para $x \in U$.

(3) Mostre que existe um $\epsilon > 0$ tal que se $A \in M_{2\times 2}$ é uma matriz real 2x2 satisfazendo $|a_{ij}| \leq \epsilon$ para todas as entradas a_{ij} de A, então existe uma matriz real $X \in M_{2\times 2}$ tal que $X^2 + X^T = A$, onde X^T é a transposta de X. Tal matriz X é única?

(4) Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe C^k.

  (a) Prove que o fibrado tangente $TM := \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; p \in M \text{ e } v \in T_pM\}$ é uma superfície de classe C^{k-1} e dimensão $2m$.

  (b) Prove que o fibrado tangente TM é orientável (mesmo que M não seja).

(5) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Prove que $P^2 = f(\mathbb{S}^2)$ é uma superfície C^∞ de dimensão 2 e compacta em $\mathbb{R}^4$. (P^2 é um modelo do plano projetivo em $\mathbb{R}^4$).