UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Banca examinadora Maria Andrade e Marcos Petrúcio
Aluno(a):

Análise no $\mathbb{R}^n$ - Exame de Qualificação de Mestrado

- **Justifique todas as suas respostas de forma clara.**
- **Você pode escolher 5 das 6 questões para resolvê-las.**

1. Mostre que o conjunto das matrizes $n \times n$ com determinate 1 é fechado, ilimitado e com interior vazio em R^{n^2}.

2. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que para $x,\ v \in \mathbb{R}^m$ quaisquer tem-se $\langle f'(x) \cdot v, v\rangle \geq \alpha|v|^2$, onde α é uma constante positiva. Prove que $|f(x) - f(y)| \geq \alpha|x - y|$ para $x,\ y$ arbitrários. Conclua que $f(\mathbb{R}^m)$ é fechado e daí que f é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ sobre si mesmo.

3. Considere a aplicação $f : M(n \times n) \to M(n \times n)$ definida por $f(X) = X^k,\ k \geq 1$. Mostre os seguintes itens:

   a) $f'(X)V = \sum_{i=1}^{k} X^{i-1}VX^{k-i}$

   b) $\exp : M(n \times n) \to M(n \times n)$ definida por
   $$\exp(X) = e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$
   é de classe C^1 e sua derivada em $X = 0$ é a transformação linear identidade.

   c) Mostre que existe uma aplicação $\log : U \to M(n \times n)$, de classe C^1 numa vizinhança U da transformação identidade $I \in M(n \times n)$, tal que $e^{\log(X)} = X$, para todo $X \in U$.

4. Seja $O(3) = \{X \in M(3 \times 3);\ XX^T = I\}$. Mostre que:

   a) $O(3)$ é uma superfície de classe C^∞ de dimensão 3.

   b) $O(3)$ é compacta. Ela é orientável?

   c) $T_I O(3) = \{v \in M(3 \times 3);\ v + v^T = 0\}$, onde $T_I O(3)$ é o plano tangente de $O(3)$ no ponto $p = I$.

5. Se $X \subset \mathbb{R}^p$ e $v \in \mathbb{R}^p$, escreve-se $X + v = \{x + v;\ x \in X\}$. Sejam $M, N \subset \mathbb{R}^p$ superfícies de classe C^1 tais que $\dim(M) + \dim(N) < p$. Mostre que o conjunto V dos vetores v tais que $M + v$ é disjunta de N é denso em $\mathbb{R}^p$. Se M e N são compactas, além de denso, V é um aberto de $\mathbb{R}^p$.

6. Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Para algum $a \in U$, seja $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ um isomorfismo. Mostre que $\lim_{r \to 0} \frac{vol(f(B[a;r]))}{vol(B[a;r])} = |det f'(a)|$.
   Dica: Você pode usar o Teorema da Mudança de Variáveis para Integrais.

Duração: 4h

BOA PROVA!