UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE MESTRADO DE ANÁLISE NO $\mathbb{R}^n$

Banca Examinadora: Hilário Alencar e Gregório Silva Neto   Data: 21/01/2025

Aluno(a): ______________________________   Horário: 8h às 12h   Sala: 103 IM Novo

1. Sejam $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}^m$ caminhos diferenciáveis e $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação bilinear. Prove que o caminho $g : I \to \mathbb{R}^n$ definido por $g(t) = \varphi(f_1(t), f_2(t))$ é diferenciável e vale $g'(t) = \varphi(f_1'(t), f_2(t)) + \varphi(f_1(t), f_2'(t))$ para todo $t \in I$.

2. Dados $a_1, \ldots, a_k$ em $\mathbb{R}^n$, determine o ponto em que a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} |x - a_i|^2,$$

assume seu valor mínimo.

3. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in U$ tal que $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$. Mostre que

(a) O gradiente aponta para uma direção segundo a qual a função é crescente;

(b) Dentre todas as direções ao longo das quais f cresce, a direção do gradiente é a de crescimento mais rápido;

(c) O gradiente de f no ponto a é ortogonal ao conjunto de nível de f que passa por a.

4. Determine os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \langle x, y \rangle$, restrita à esfera unitária $|x|^2 + |y|^2 = 1$ e conclua daí a desigualdade de Schwarz.

5. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, com $f(x) \neq 0$ para todo $x \in U$.

(a) Defina $\varphi : U \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = \dfrac{1}{|f(x)|}$ (norma euclidiana). Para todo $x \in U$ e todo $v \in \mathbb{R}^m$, determine $\varphi'(x) \cdot v$;

(b) Seja $g : U \to \mathbb{R}^k$ diferenciável. Defina $\xi : U \to \mathbb{R}^k$ pondo $\xi(x) = \dfrac{g(x)}{|f(x)|}$. Calcule $\xi'(x) \cdot v$ para todo $x \in U$ e todo $v \in \mathbb{R}^m$.

6. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco n-dimensional $A \subset \mathbb{R}^n$ com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$. Defina $C(f) = \{(x, y); x \in A, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Prove que:

(a) Para toda partição P de A tem-se

$$s(f; P) \leq \text{vol.int.}C(f) \leq \text{vol.ext.}C(f) \leq S(f; P);$$

(b) Conclua que, se f é integrável então $C(f)$ é J-mensurável e vale

$$\text{vol}C(f) = \int_A f(x)dx.$$