Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de Análise no $\mathbb{R}^n$

Data: 25 de janeiro de 2023 — **Professores:**
Horário: 09h às 13h — Márcio Batista e Rafael Lucena

Discente: ______________________________

1. Assinale se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira (V) ou falsa (F) justificando de forma breve sua resposta ou através de um contra-exemplo.

   (a) ( ) Toda aplicação contínua $f : \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cuja imagem $f(X)$ é um conjunto discreto é localmente constante;

   (b) ( ) O teorema da aplicação inversa implica o teorema da função implícita;

   (c) ( ) Todo conjunto de medida nula é enumerável.

2. Mostre que o conjunto das aplicações lineares sobrejetivas é um aberto em $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

3. Sejam $f, g : U \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciáveis no aberto e conexo $U \subset \mathbb{R}^m$. Prove que se $f(a) = g(a)$, $df(a) = dg(a)$ e $d^2f(x) = d^2g(x)$ para todo $x \in U$, então $f = g$.

4. Suponha que M e N são duas superfícies de classe C^k. Assuma que elas são difeomorfas e uma delas é orientável, prove que a outra também é orientável.

5. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Mostre que:

   (a) Se $p \in U$ é tal que df_p é isomorfismo, então $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\mathrm{Vol}(f(B(p,r)))}{\mathrm{Vol}(B(p,r))} = |\det df_p|$;

   (b) Se $p \in U$ é tal que df_p não é isomorfismo e f é injetiva, então $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\mathrm{Vol}(f(B(p,r)))}{\mathrm{Vol}(B(p,r))} = 0$. Apresente um contra-exemplo caso omitamos a injetividade de f.

Bom exame!!!!!