UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Exame de Qualificação de Análise no $\mathbb{R}^n$ Data: 30/01/2017

1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Aluno(a): ____________________

Banca Avaliadora: Dr. Gregório Silva Neto e Dr. Luis Guillermo Martinez Maza

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem em $x = y = 0$.

(b) f é diferenciável em $x = y = 0$? f é contínua em $x = y = 0$?.

(c) Defina diferenciabilidade de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em termos de condições das suas derivadas parciais.

2. Usando a fórmula $f'(x) \cdot h = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(x+th) - f(x)}{t}$ e admitindo a existências das derivadas em questão, calcule $\varphi'(x) \cdot v$, para $v \in \mathbb{R}^n$ arbitrário e $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ por $\varphi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$, o produto interno dos vatores $f(x), g(x)$, onde $f, g : U \to \mathbb{R}^p$ são funções diferenciáveis em U.

3. Seja A um conjunto convexo. Se o caminho $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ cumpre $f(t) \in A$ para todo $t \in [a,b]$, prove que $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t)dt \in \overline{A}$, onde $\overline{A}$ é o fecho de A.

4. Dados $a_1, a_2, \ldots, a_k$ em $\mathbb{R}^n$, determine o ponto em que a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \|x - a_i\|^2$ assume seu valor mínimo.

5. Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se no ponto $a \in U$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, prove que

$$\lim_{r \to 0} \frac{f(B(a,r))}{B(a;r)} = |\det f'(a)|.$$

Boa Prova!