UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Exame de Qualificação - Análise no $\mathbb{R}^n$

Candidato: Janeiro de 2015

(1) Faça os seguintes itens:

(a) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Suponha que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) > \left|\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|$$

para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que: se $f(a,b) = f(c,d)$, então $|c-a| < |d-b|$, a menos que $(a,b) = (c,d)$.

(b) Considere $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x,y) = (x + \sin(x/2 + y/4)\ ,\ y + \cos(x/4 + y/2))\ .$$

Mostre que F é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Calcule as derivadas parciais de F^{-1} em $(0,1)$.

(2) Dê exemplos em $\mathbb{R}^2$ de uma aplicação C^1 aberta que não é submersão e uma aplicação C^1 injetiva que não é uma imersão.

(3) Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 com U um aberto de $\mathbb{R}^m$. Suponha que as singularidades de f sejam pontos isolados e $m > 1$. Mostre que f é uma aplicação aberta. Deduza, ainda, uma prova do Teorema Fundamental da Álgebra.

(4) Suponha que o polinômio $p(Z, a_0, \ldots, a_m) = a_0 + a_1 Z + \cdots + a_m Z^m$ possua uma raíz simples em z_o. Mostre que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que todo polinômio $p(z, b_0, \ldots, b_m)$ com $|b_i - a_i| < \delta$ $(i = 1, \ldots, m)$ possui uma única raíz simples $r(b_0, \ldots, b_m) \in B(z_0; \varepsilon)$. Mostre, ainda, que r é C^∞.

(5) Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto J-mensurável, $x_0 \in X$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja X_n um conjunto J-mensuravel de volume positívo, tal que $X_n = X \cap B(x_0; 1/n)$. Prove que

$$f(x_0) = lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{vol.X_n} \int_{X_n} f(x)dx.$$