



Universidade Federal de Alagoas
Exame de qualificação - Análise no \mathbb{R}^n
(04/08/2021)
Duração: 4 horas

Aluno(a):

1. **(2,0)** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ (tais que $a < b$), $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho de classe C^2 . Mostre que, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |h| < \delta$ então

$$|f(t+h) - f(t) - hf'(t) - \frac{h^2}{2}f''(t)| < \epsilon h^2, \quad \forall t, t+h \in [a, b].$$

2. **(2,0)** Existe uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ injetora e de classe C^1 ?
3. **(2,0)** Sejam $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ linear positivo cuja matriz é simétrica e

$$M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle Ax, x \rangle = 1\}.$$

Prove que a menor distância de um ponto de M à origem é $1/\sqrt{\mu}$, em que μ é o maior autovalor de A .

4. **(2,0)** Mostre que $S = \{p \in \mathbb{R}^3; |p - p_0|^2 - \langle p - p_0, a \rangle^2 = r^2\}$, com $|a| = 1$ e $r > 0$, é uma superfície de classe C^∞ e

$$T_p S = \{v \in \mathbb{R}^3; \langle p - p_0, v \rangle = \langle p - p_0, a \rangle \langle a, v \rangle\}.$$

“ S é o cilindro circular reto de raio r cujo eixo é a reta que passa por p_0 na direção de a .”

5. **(2,0)** Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $c \in A$ tal que

$$\frac{1}{\text{vol}.A} \int_A f(x) dx = f(c).$$

Boa Prova