



**Universidade Federal de Alagoas**  
**Exame de qualificação - Análise no  $\mathbb{R}^n$**   
**(04/08/2021)**  
**Duração: 4 horas**

Aluno(a):

1. **(2,0)** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  (tais que  $a < b$ ),  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  e  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  um caminho de classe  $C^2$ . Mostre que, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |h| < \delta$  então

$$|f(t+h) - f(t) - hf'(t) - \frac{h^2}{2}f''(t)| < \epsilon h^2, \quad \forall t, t+h \in [a, b].$$

2. **(2,0)** Existe uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  injetora e de classe  $C^1$ ?
3. **(2,0)** Sejam  $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  linear positivo cuja matriz é simétrica e

$$M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle Ax, x \rangle = 1\}.$$

Prove que a menor distância de um ponto de  $M$  à origem é  $1/\sqrt{\mu}$ , em que  $\mu$  é o maior autovalor de  $A$ .

4. **(2,0)** Mostre que  $S = \{p \in \mathbb{R}^3; |p - p_0|^2 - \langle p - p_0, a \rangle^2 = r^2\}$ , com  $|a| = 1$  e  $r > 0$ , é uma superfície de classe  $C^\infty$  e

$$T_p S = \{v \in \mathbb{R}^3; \langle p - p_0, v \rangle = \langle p - p_0, a \rangle \langle a, v \rangle\}.$$

“ $S$  é o cilindro circular reto de raio  $r$  cujo eixo é a reta que passa por  $p_0$  na direção de  $a$ .”

5. **(2,0)** Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  um retângulo fechado e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Mostre que existe  $c \in A$  tal que

$$\frac{1}{\text{vol}.A} \int_A f(x) dx = f(c).$$

*Boa Prova*