Universidade Federal de Alagoas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Exame de Análise no $\mathbb{R}^n$ - 09/08/2019

Duração: 4h

1. Seja $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \langle x, y\rangle$.
   (a) Encontre os pontos críticos de f restrita à esfera unitária $|x|^2 + |y|^2 = 1$.
   (b) Use o item acima para demonstrar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^n$.

2. Seja $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ o grupo ortogonal formado pelas matrizes $x \in M(n \times n)$ tais que $x \cdot x^T = I_n$.
   (a) Prove que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{n^2}$.
   (b) Prove que $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ é uma superfície de classe C^∞ e dimensão $n(n-1)/2$ em $\mathbb{R}^{n^2}$.
   (c) Prove que o espaço vetorial tangente a $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ no ponto $x = I_n$ é o conjunto das matrizes $n \times n$ anti-simétricas ($s^T = -s$).

   Dica: Se $x \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ e $s \in M(n \times n)$ com $s^T = s$, então $v = xs/2$ satisfaz $vx^T + xv^T = s$.

3. Sejam $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $c \in [0, 1)$ tais que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c|x - y|$ para quaisquer $x, y \in U$.
   (a) Prove que $f : U \to \mathbb{R}^n$, dada por $f(x) = x + \varphi(x)$, é um difeomorfismo de U sobre sua imagem.
   (b) Se $U = \mathbb{R}^n$, prove que $f(U) = \mathbb{R}^n$.

4. Sejam A_1 e A_2 blocos fechados de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Suponha que $f : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ é uma função integrável. Prove que existe um conjunto de medida m-dimensional nula $X \subset A_1$ tal que $f_x : A_2 \to \mathbb{R}$ é integrável para todo $x \in A_1 - X$.