Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de Análise - Mestrado em Matemática
Data: 31 de agosto de 2016
Duração: 04h

Aluno(a): ______________________________

1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função homogênea de grau 1 no sentido: $f(tx) = tf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e qualquer $t \in \mathbb{R}$.
   (i) Demonstre que f possui derivadas direcionais em 0 em qualquer direção;
   (ii) Demonstre que f é diferenciável em 0 se, e somente se, f é linear.

2. Mostre que $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

3. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1, com $detDf(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Sejam $y \notin f(A)$ e $\psi(x) = \ |y - f(x)\|^2$. Prove que $\nabla\psi(x) \neq 0$ para todo $x \in A$.

4. Sejam $f, g : U \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciáveis no aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in U$. Prove que se $f(a) = g(a)$, $df(a) = dg(a)$ e $d^2f(x) = d^2g(x)$, para todo $x \in U$, então $f = g$.

5. Sejam U um conjunto J-mensurável, $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $x_0 \in U$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja U_n um conjunto J-mensurável de volume positivo tal que $U_n \subset U \cap \mathbf{B}(x_0; 1/n)$. Prove que
$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{vol \cdot U_n} \int_{U_n} f(x)dx = f(x_0).$$

Boa Prova!!