Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

1º avaliação de Análise no $\mathbb{R}^n$

Data: 13 de Abril de 2017

Início: 8h.

Término:12h

Nome: Prof. Marcos Ranieri

---

(1) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$, diz-se localmente conexo quando, para cada $x_0 \in X$, existe $r > 0$ tal que o conjunto $X \cap B(x_0; \rho)$ é conexo para qualquer $0 < \rho \leq r$. Responder e justificar as seguintes questões:
   (a) Todo conjunto conexo é localmente conexo?
   (b) Todo conjunto localmente conexo é conexo?

(2) Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto fechado e r um número real positivo fixado. Seja $Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| = r \text{ para algum } x \in X\}$. Prove que Y é fechado.

(3) Considere as seguintes propriedades de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
   (a) f é contínua;
   (b) O gráfico de f é conexo em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.
   Prove ou desprove as implicações $(a) \Rightarrow (b), (b) \Rightarrow (a)$.

(4) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo. Dados $a, b \in U$, prove que existe um caminho retificável $f : I \to U$ começando em a e terminando em b.

(5) Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é compacto então toda aplicação contínua aberta $f : X \to S^n$ é sobrejetiva.