Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática
em associação com a Universidade Federal da Bahia

DAYLANNE FERREIRA RIBEIRO

RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES QUE MINIMIZAM O VOLUME EM VARIEDADES RIEMANNIANAS COM CURVATURA ESCALAR POSITIVA

MACEIÓ-AL
2025

DAYLANNE FERREIRA RIBEIRO

RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES QUE MINIMIZAM O VOLUME EM VARIEDADES RIEMANNIANAS COM CURVATURA ESCALAR POSITIVA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório
Coorientador: Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz

Maceió-AL
2025

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Helena Cristina Pimentel do Vale CRB-4/661

R484r Ribeiro, Daylanne Ferreira.
Rigidez de hipersuperfícies que minimizam o volume em variedades riemannianas com curvatura escalar positiva / Daylanne Ferreira Ribeiro. – 2025
57 f. : il.

. Orientador: Feliciano Marcílio Aguiar Vitório.
Coorientador: Cícero Tiarlos Nogueira Cruz.
Tese (doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática e Universidade Federal da Bahia. Maceió, 2025.

Bibliografia: f. 55-57.

1. Curvatura escalar positiva.2. Hipersuperfícies. 3. Rigidez de superfícies. 4. Invariante de Yamabe. 5. Teorema de Gauss-Bonnet-Chern.s.I. Título.

CDU: 514.764.27

Folha de Aprovação

DAYLANNE FERREIRA RIBEIRO

Rigidez de hipersuperfícies que minimizam o volume em variedades Riemannianas com curvatura escalar positiva

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matématica da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática apresentado em 12 de março de 2025.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
gov.br
FELICIANO MARCILIO AGUIAR VITORIO
Data: 01/04/2025 09:29:05-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório (Orientador)
Universidade Federal de Alagoas

Documento assinado digitalmente
gov.br
CICERO TIARLOS NOGUEIRA CRUZ
Data: 31/03/2025 14:39:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Alagoas

Documento assinado digitalmente
gov.br
MARCOS PETRUCIO DE ALMEIDA CAVALCANTE
Data: 26/03/2025 14:55:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante (Examinador Interno)
Universidade Federal de Alagoas

Documento assinado digitalmente
gov.br
MARIA DE ANDRADE COSTA E SILVA
Data: 25/03/2025 07:04:50-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Maria de Andrade Costa e Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

Documento assinado digitalmente
gov.br
IVALDO PAZ NUNES
Data: 23/03/2025 19:59:09-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes (Examinador Externo)
Universidade Federal do Maranhão

A Deus e aos meus pais, Maria Francisca e Manoel Ivamar.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, fonte de toda sabedoria, força e inspiração, a quem dedico minha mais profunda gratidão. “Porque d’Ele, por Ele e para Ele são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente. Amém.” (Rom 11:36). Sem a Sua graça e misericórdia, esta caminhada acadêmica não teria sido possível. Foi Ele quem me sustentou nos momentos de dificuldade e me deu forças para prosseguir até a conclusão deste trabalho.

Aos meus professores da UFAL, que desempenharam um papel fundamental na minha formação acadêmica. Agradeço a cada um pela dedicação ao ensino e pelo conhecimento transmitido.

Ao meu orientador Feliciano Vitório, pela paciência e pelas valiosas e longas conversas durante este processo. Seu apoio foi muito importante. Obrigada por tudo.

Ao meu coorientador Tiarlos Cruz, suas sugestões e seu acompanhamento fizeram toda a diferença na elaboração deste trabalho. Obrigada pela dedicação e comprometimento, que foram essenciais nesta jornada.

Aos professores Marcos Petrúcio, Ivaldo Nunes e Maria de Andrade por participarem da banca de defesa e pelas valiosas sugestões, correções e contribuições.

Aos meus colegas de turma, com quem compartilhei desafios e aprendizados ao longo desta jornada. Em especial, expresso minha gratidão ao Daniel Silva, por sua ajuda ao revisar este trabalho.

Ao corpo administrativo da secretaria do Instituto de Matemática, pelo suporte e presteza no atendimento às necessidades dos alunos. Meu agradecimento especial à Ana Maria, cuja atenção e disponibilidade sempre facilitaram minha trajetória universitária.

À Jeftte e à Tia Gê, pelo suporte inestimável no início do curso. Seu apoio foi importante.

À Cris Braga, que tem sido uma amiga excepcional ao longo dos anos. Sua generosidade e apoio fizeram a diferença em minha trajetória.

À minha família, meu porto seguro. À minha mãe, Francisca, e ao meu pai, Ivamar, por todo amor e dedicação, amo vocês para sempre. Aos meus irmãos, David e Dayse, que são meu apoio constante, sempre ao meu lado nos momentos de desafios e conquistas. À Emilly e à Alice. E ao meu querido sobrinho, João Guilherme, cuja presença é uma fonte de felicidade em nossa família.

Por fim, mas com um agradecimento especial, ao meu esposo, Helmiton, seu apoio, incentivo e confiança no meu potencial foram fundamentais para que eu chegasse até aqui. Sua presença ao meu lado me fortaleceu nos momentos de insegurança e me impulsionou a continuar, mesmo quando duvidei de mim mesma.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para esta conquista, meu mais sincero agradecimento.

A matemática pura é, à sua maneira, a poesia das ideias lógicas.

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho estende o Teorema de Mendes [25] para dimensões superiores e para o caso de variedades Riemannianas com bordo. Inicialmente, demonstramos uma desigualdade análoga à obtida por Mendes para o volume de hipersuperfícies fechadas localmente conformemente planas que minimizam o volume em variedades Riemannianas de dimensão 7 com curvatura escalar positiva e curvatura de Ricci não negativa. Além disso, provamos que, no caso de igualdade, a hipersuperfície é isométrica à esfera de dimensão 6, enquanto a variedade ambiente é isométrica a um produto do tipo $(-\varepsilon, \varepsilon)\times\mathbb{S}^6$. Adicionalmente, estendemos esses resultados para hipersuperfícies com bordo livre e totalmente geodésico, imersas em variedades de dimensão 5 ou 7 com bordo não vazio e curvatura média não negativa. Nesses casos, obtemos desigualdades análogas e mostramos que, no caso de igualdade, a hipersuperfície é isométrica ao hemisfério de dimensão 4 ou 6, enquanto a variedade ambiente é isométrica a um produto do tipo $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^4_+$ ou $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^6_+$.

Palavras-chave: Curvatura escalar. Hipersuperfícies de dimensão quatro e seis. Hipersuperfícies com bordo livre e totalmente geodésico. Hipersuperfícies que minimizam o volume. Invariante de Yamabe. Teorema de Gauss-Bonnet-Chern.

ABSTRACT

This work extends Mendes' Theorem [25] to higher dimensions and to the setting of Riemannian manifolds with boundary. First, we establish an inequality analogous to Mendes' result for the volume of closed locally conformally flat hypersurfaces that minimize volume in 7-dimensional Riemannian manifolds with positive scalar curvature and nonnegative Ricci curvature. Moreover, we prove that in the equality case, the hypersurface is isometric to the 6-dimensional sphere, while the ambient manifold is isometric to a product of the form $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^6$. Additionally, we extend these results to free-boundary, totally geodesic hypersurfaces immersed in 5- or 7-dimensional manifolds with nonempty boundary and nonnegative mean curvature on the boundary. In these cases, we obtain analogous inequalities and show that, in the equality case, the hypersurface is isometric to the 4- or 6-dimensional hemisphere, while the ambient manifold is isometric to a product of the form $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^4_+$ or $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^6_+$.

Keywords: Scalar curvature. Four- and six-dimensional hypersurfaces. Hypersurfaces with free boundary and totally geodesic boundary. Volume-minimizing hypersurfaces. Yamabe invariant. Gauss-Bonnet-Chern theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14

2 PRELIMINARES 20

2.1 Conceitos e notações 20

2.2 Hipersuperfícies com bordo livre 22

2.3 O Problema de Yamabe 24

2.4 O Teorema de Gauss-Bonnet-Chern 29

2.5 Lema da curvatura escalar conforme 35

3 RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES FECHADAS 39

3.1 Resultados 39

3.2 Rigidez local 41

4 RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES COM BORDO LIVRE 45

4.1 Resultados 45

4.2 Rigidez local 49

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 53

REFERÊNCIAS 54

1 INTRODUÇÃO

Uma questão fundamental em geometria Riemanniana é compreender as relações entre a curvatura escalar de uma variedade Riemanniana e seus demais invariantes geométricos. Em particular, investiga-se a rigidez dos espaços modelo, ou seja, situações em que é impossível aumentar a curvatura escalar de uma dada variedade sem modificar determinados invariantes geométricos. Problemas de rigidez envolvendo a curvatura escalar são amplamente estudados, pois possuem conexões com a teoria das superfícies mínimas e foram motivados, em grande parte, pela teoria da relatividade geral.

Nesse contexto, Schoen e Yau [34] analisaram variedades Riemannianas tridimensionais (M^3, g) com curvatura escalar positiva e estabeleceram relações entre essa curvatura e a topologia das superfícies mínimas estáveis em M. Utilizando a segunda variação da área, a equação de Gauss e o Teorema de Gauss-Bonnet, eles demonstraram resultados fundamentais que serviram de base para o desenvolvimento de diversos teoremas de rigidez aplicados a superfícies fechadas que minimizam a área em 3-variedades.

Motivados por questões relacionadas à topologia dos buracos negros, Cai e Galloway [9] provaram o seguinte resultado

Teorema 1.1 (Cai e Galloway, 1998) *Se uma 3-variedade Riemanniana com curvatura escalar não negativa contém um toro bidimensional mergulhado, dois lados e que minimiza localmente a área, então a métrica é plana em alguma vizinhança do toro.*

Entre os avanços nessa área, destaca-se um resultado de Cai [8], que mostrou uma decomposição local de uma variedade n-dimensional, $n > 3$, com curvatura escalar não negativa contendo uma hipersuperfície de dois lados que minimiza o volume localmente e não admite uma métrica de curvatura escalar positiva.

Nos últimos anos, resultados semelhantes foram estabelecidos para superfícies fechadas, sob diferentes hipóteses sobre a curvatura escalar. Bray, Brendle e Neves [5] estudaram esferas que minimizam a área em uma variedade compacta:

Teorema 1.2 (Bray, Brendle e Neves, 2010) *Seja (M^3, g) uma variedade Riemannina tridimensional com curvatura escalar $R_g \geq 2$. Se Σ^2 é uma esfera mergulhada que minimiza localmente a área, então a área de Σ é menor ou igual a 4π. Além disso, se a igualdade ocorre, então Σ, com a métrica induzida, possui curvatura de Gauss constante igual a 1 e existe uma vizinhança de Σ em M que é isométrica a $(-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$, $\epsilon > 0$, com a métrica produto $dt^2 + g_\Sigma$.*

Em dimensão $n \geq 3$, não é difícil construir variedades M^n com curvatura escalar $R_M \geq \lambda_n > 0$, para alguma constante λ_n dependendo apenas de n, e volume arbitrariamente grande. Veja os exemplos a seguir

Exemplo 1.1 *Seja* $M_r^n = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1(r)$, *onde* $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ *é a esfera unitária canônica e* $\mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{R}^2$ *é o círculo de raio* $r > 0$*. Claramente, temos* $R_{M_r} = (n-1)(n-2)$ *e* $\mathrm{Vol}(M_r) \to \infty$ *quando* $r \to \infty$*. No entanto, essas variedades não são difeomorfas a* $\mathbb{S}^n$*.*

Exemplo 1.2 *No caso esférico, Gromov e Lawson [19] desenvolveram um método que permite construir métricas em* $M^n = \mathbb{S}^n$ *com curvatura escalar* $R_M \geq n(n-1)$ *e volume arbitrariamente grande, se* $n \geq 3$*.*

Esses exemplos mostram que uma desigualdade análoga à de Bray, Brendle e Neves em [5], em geral, não é verdadeira para $n \geq 3$. O trabalho de Nunes [29] estende o resultado de Bray, Brendle e Neves para o contexto de superfícies Σ fechadas, com gênero $g(\Sigma) \geq 2$, mergulhadas em uma variedade Riemanniana com curvatura escalar limitada inferiormente por uma constante negativa.

Teorema 1.3 (Nunes, 2013) *Seja* (M^3, g) *uma variedade tridimensional com curvatura escalar* $R_g \geq -2$*. Se* Σ^2 *é uma superfície compacta, mergulhada, de dois lados, com gênero* $g(\Sigma) \geq 2$ *e que minimiza localmente a área, então a área de* Σ *é maior ou igual a* $4\pi(g(\Sigma) - 1)$*. Além disso, se a igualdade ocorre, então* Σ*, com a métrica induzida* g_Σ*, possui curvatura de Gauss constante igual a* -1 *e existe uma vizinhança de* Σ *em* M *que é isométrica a* $(-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma$*,* $\epsilon > 0$*, com a métrica produto* $dt^2 + g_\Sigma$*.*

Moraru [27] estendeu o teorema de Nunes para o caso de hipersuperfícies Σ fechadas de dimensão $n \geq 3$. Antes disso, Moraru e Micallef [26], forneceram uma prova unificada dos resultados de [5], [9] e [29]. Os autores Chodosh *et al.* [12] mostraram que uma 3-variedade Riemanniana com curvatura escalar não negativa é plana se contém um cilindro minimizante de área.

Ainda nesse contexto, Mendes [25] demonstrou o seguinte resultado

Teorema 1.4 (Mendes, 2019) *Seja* (M^5, g) *uma variedade Riemannina com curvatura escalar* R *satisfazendo* $\inf_M R > 0$ *e curvatura de Ricci não negativa,* $\mathrm{Ric}_M \geq 0$*. Suponha que* (Σ^4, g_Σ) *é uma hipersuperfície fechada, com dois lados, imersa em* M *tal que* Σ *minimiza o volume* *localmente. Então, o volume de Σ satisfaz*

$$|\Sigma|\left(\frac{\inf_M R}{12}\right)^2 \leq |\mathbb{S}^4| + \frac{1}{12}\int_\Sigma ||\mathrm{E}||^2 d\sigma \tag{1}$$

onde E *é o tensor de Ricci sem traço de* Σ *e* $|\Sigma|$ *representa o volume da hipersuperfície* Σ*. Além disso, se a igualdade ocorre, então* (Σ^4, g_Σ) *é isométrica a* $(\mathbb{S}^4, g_{can})$ *e em uma vizinhança de* Σ*,* (M, g) *é isométrica a* $((-\varepsilon, \varepsilon)\times\mathbb{S}^4, dt^2 + g_{can})$*, a menos de uma mudança de escala.*

O teorema acima estende o resultado de Barros *et al.* [4], onde Σ^4 é uma hipersuperfície Einstein. Nesse caso, a desigualdade (1) aparece sem o último termo. Em 2021, H. Deng [13] analisou o caso $n > 4$ com Σ^4 sendo Einstein.

Nesta tese, estendemos o resultado obtido por Mendes para variedades Riemannianas (M, g) de dimensão sete. Inspirados na abordagem desenvolvida por Mendes, empregamos a desigualdade de Hölder e o Teorema de Gauss-Bonnet-Chern, assumindo que Σ seja localmente conformemente plana. Adicionalmente, aplicamos o Teorema 2.3 de Gursky para estabelecer uma desigualdade análoga àquela apresentada em (1). No caso de igualdade, recorremos a uma técnica introduzida por Raulot [32], que nos permite demonstrar que Σ é isométrica à esfera canônica de dimensão seis. Com base nesses desenvolvimentos, no Capítulo 3 apresentamos o seguinte resultado principal:

Teorema 1.5 *Seja* (M^7, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura escalar* $\inf_M R > 0$*,* $\mathrm{Ric}_M \geq 0$ *e seja* (Σ^6, g_Σ) *uma hipersuperfície localmente conformemente plana, com dois lados, compacta imersa em* M*, que é localmente minimizante de volume. Então*

$$|\Sigma|\left(\frac{\inf_M R}{30}\right)^3 \leq |\mathbb{S}^6| + \frac{1}{30^2}\int_\Sigma R_\Sigma ||\mathrm{E}||^2 d\sigma, \tag{2}$$

onde $\mathrm{E} = \mathrm{Ric} - \frac{R}{6}g$*, representa o tensor de Ricci sem traço. Além disso, se a igualdade ocorre, então* (Σ^6, g_Σ) *é isométrica a* $(\mathbb{S}^6, g_{can})$ *e em uma vizinhança de* Σ*,* (M, g) *é isométrica a* $((-\varepsilon, \varepsilon)\times\mathbb{S}^6, dt^2 + g_{can})$*, a menos de uma escala.*

Quando o volume de Σ atinge a igualdade no teorema acima, é possível construir, nas proximidades de Σ, uma folheação de M por hipersuperfícies de curvatura média constante. Essa abordagem tem sido amplamente utilizada por diversos autores, incluindo G. Huisken e Shing-Tung Yau [21], e Hubert Bray [6]. A construção é realizada por meio do teorema da função implícita, seguido da demonstração de que as folhas dessa folheação possuem volume menor ou igual ao de Σ. Como Σ é minimizante de volume, conclui-se que cada folha também é minimizante e que seu volume satisfaz a igualdade do teorema.

No Capítulo 2, apresentamos definições e resultados fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, além de estabelecer as notações utilizadas, garantindo maior clareza e precisão na exposição. Entre esses resultados, destacamos uma consequência da Proposição de Obata [30] para o caso de hemisférios $(\mathbb{S}^n_+, g_{\text{can}})$. Em particular, demonstramos que, se (M, g) é uma variedade Riemanniana com bordo totalmente geodésico, satisfazendo $\mathcal{Y}(M, [g]) = \mathcal{Y}(\mathbb{S}^n_+, [g_{\text{can}}])$ e possuindo curvatura escalar constante, então (M^n, g) é isométrica ao hemisfério $(\mathbb{S}^n_+, g_{\text{can}})$, a menos de uma mudança de escala.

Além disso, ainda no Capítulo 2, estabelecemos um Lema essencial para nossas demonstrações. Em resumo, mostramos que, se Σ^{n-1}, com $n \geq 3$, é uma hipersuperfície localmente minimizante de volume, com bordo livre e totalmente geodésico, com dois lados e imersa em uma variedade Riemanniana (M^n, g) de curvatura escalar positiva e curvatura média do bordo não negativa, então a curvatura escalar de Σ, em uma métrica conforme à métrica induzida, é positiva, e a curvatura média do bordo de Σ é não negativa nessa métrica conforme.

No Capítulo 4, investigamos a rigidez de hipersuperfícies com bordo. Como um primeiro exemplo dentro desse contexto, citamos um resultado de Ambrozio [1], que estabeleceu a seguinte propriedade para uma superfície com bordo livre que minimiza a área em uma variedade tridimensional.

Teorema 1.6 (Ambrozio, 2015) *Seja M uma variedade Riemanniana tridimensional com bordo médio convexo ∂M e curvatura escalar R_M limitada inferiormente. Se $\Sigma \subset M$ é uma superfície com bordo livre, propriamente mergulhada, com dois lados e minimizante de área, então*

$$\frac{1}{2} \inf R_M |\Sigma| + \inf H_{\partial M} |\partial\Sigma| \leq 2\pi\chi(\Sigma),$$

onde $|\Sigma|$ e $|\partial\Sigma|$ denotam, respectivamente, a área e o comprimento do bordo de Σ na métrica induzida e $H_{\partial M}$ denota a curvatura média de ∂M.

Assuma que a igualdade vale e que uma das seguintes hipóteses ocorre:

(i) Cada componente de $\partial\Sigma$ é localmente minimizante de comprimento em ∂M ou;

(ii) $\inf H_{\partial M} = 0$.

Então, existe uma vizinhança de Σ em M que é isométrica a $((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma, dt^2 + g)$, onde (Σ, g) tem curvatura de Gauss constante igual a $\frac{1}{2} \inf R_M$ e $\partial\Sigma$ tem curvatura geodésica constante igual a $\inf_M H_{\partial M}$ em Σ.

Em 2020, A. Barros e C. Cruz [3] estudaram o contexto de hipersuperfícies compactas com bordo livre em variedades Riemannianas com bordo. A seguir $\mathcal{Y}(\Sigma, \partial\Sigma)$ denota o invariante de Yamabe para variedades com bordo. Para mais detalhes, consulte o Capítulo 2, seção 2.3 sobre o Problema de Yamabe.

Teorema 1.7 (Barros e Cruz, 2020) *Seja M^n uma variedade Riemanniana ($n \geq 4$) com bordo médio convexo ∂M tal que a curvatura escalar R_M é limitada inferiormente. Seja Σ^{n-1} uma hipersuperfície com bordo livre, compacta, com dois lados, propriamente mergulhada e que minimiza localmente o volume.*

(I) Se $\inf \mathbb{R}_M < 0$ e $\mathcal{Y}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$, então

$$|\Sigma| \geq \left(\frac{\mathcal{Y}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R_M} \right)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{3}$$

Além disso, se a igualdade é atingida, então uma vizinhança de Σ é isométrica ao produto $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ para algum $\varepsilon > 0$, com a métrica $dt^2 + g$, onde g é a métrica induzida em Σ, que é Einstein e tem curvatura escalar negativa (igual a $\inf R_M$). Além disso, $\partial\Sigma$ é uma superfície mínima com respeito à métrica induzida.

(II) Se $R_M \geq 0$ e $\mathcal{Y}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq 0$, então uma vizinhança de Σ é isométrica à métrica produto $dt^2 + g$ em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ para algum $\varepsilon > 0$, onde g é a métrica induzida em Σ, que é Ricci-plana, e $\partial\Sigma$ é uma hipersuperfície mínima com respeito à métrica induzida.

A construção acima consiste na obtenção de uma família a um parâmetro de hipersuperfícies com curvatura média constante e bordo livre, propriamente mergulhadas. Essa abordagem, aliada à existência da solução do problema de Yamabe para variedades compactas com bordo, garante que cada hipersuperfície nessa folheação possui o mesmo volume. Para esse fim, os autores adaptaram uma técnica desenvolvida por Moraru [27].

Motivados por essa construção e com o objetivo de estender o resultado de Mendes para o contexto com bordo, investigamos o caso em que (M, g) é uma variedade Riemanniana com bordo não vazio e a hipersuperfície (Σ, g_Σ) possui bordo livre. Nosso objetivo é estabelecer uma nova desigualdade geométrica sob hipóteses adequadas, fornecendo um critério de rigidez para essas hipersuperfícies. Mais precisamente, mostramos que, sob certas condições, vale uma desigualdade análoga a (1) e, no caso de igualdade, provamos que a hipersuperfície (Σ, g_Σ) é isométrica ao hemisfério $(\mathbb{S}^4_+, g_{\text{can}})$.

Teorema 1.8 *Seja (M^5, g) uma variedade Riemanniana com bordo, com Ric $_M \geq 0$, curvatura escalar positiva e curvatura média do bordo não negativa. Seja Σ^4 uma hipersuperfície com* *bordo livre e totalmente geodésico, cuja característica de Euler satisfaça $\chi(\Sigma) \leq 1$, com dois lados e imersa em M^5, que minimiza localmente o volume. Então, temos a seguinte desigualdade:*

$$|\Sigma| \left(\frac{\inf_M R}{12} \right)^2 \leq |\mathbb{S}^4_+| + \frac{1}{12} \int_\Sigma ||\mathrm{E}||^2 d\sigma.$$

Além disso, se a igualdade é atingida, então (Σ^4, g_Σ) é isométrica a $(\mathbb{S}^4_+, g_{can})$ e, em uma vizinhança de Σ, a variedade (M, g) é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^4_+, dt^2 + g_{can})$, a menos de um escalonamento.

Dando continuidade ao nosso estudo, buscamos estender esse resultado para variedades de dimensão superior. Em particular, investigamos o caso em que (M, g) é uma variedade Riemanniana de dimensão sete e Σ é uma hipersuperfície com bordo livre. Mantendo as mesmas hipóteses do teorema anterior, provamos uma desigualdade semelhante a (2).

Teorema 1.9 *Seja (M^7, g) uma variedade Riemanniana com bordo, com $\mathrm{Ric}_M \geq 0$, $\inf_M R > 0$ e $H_{\partial M} \geq 0$. Seja Σ^6 uma hipersuperfície com bordo livre e totalmente geodésico, cuja característica de Euler satisfaça $\chi(\Sigma) \leq 1$, localmente conformemente plana, com dois lados, imersa em M^7, que minimiza localmente o volume. Então, temos a seguinte desigualdade:*

$$|\Sigma| \left(\frac{\inf_M R}{30} \right)^3 \leq |\mathbb{S}^6_+| + \frac{1}{30^2} \int_\Sigma R_{g_\Sigma} ||\mathrm{E}||^2 d\sigma + \frac{1}{30^3} \int_{\partial\Sigma} \beta_2 \, ds,$$

onde $\mathcal{B}_2 = \dfrac{75}{2} \left(\dfrac{\partial ||E||^2}{\partial N} + \dfrac{4}{5} E(N, \nabla R) \right)$.

Além disso, se a igualdade é atingida, então (Σ^6, g_Σ) é isométrica a $(\mathbb{S}^6_+, g_{can})$ e, em uma vizinhança de Σ, a variedade (M, g) é isométrica ao produto $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^6_+, dt^2 + g_{can})$, a menos de um escalonamento.

Esses resultados não apenas estendem teoremas prévios para o caso com bordo, mas também evidenciam a rigidez geométrica imposta por tais hipóteses. Além disso, demonstram que, sob condições adequadas, a estrutura da hipersuperfície minimizante de volume é fortemente restringida, levando à sua isometria com um hemisfério padrão.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos as definições fundamentais e fixamos as notações e terminologias que serão utilizadas ao longo do texto. Em seguida, discutimos as hipersuperfícies com bordo livre, introduzindo conceitos essenciais para os resultados desenvolvidos posteriormente. Abordamos o problema de Yamabe para variedades Riemannianas (com ou sem bordo), ressaltando os aspectos centrais necessários para nosso estudo. Algumas provas são omitidas, mas fornecemos as referências apropriadas para consulta.

Dedicamos uma seção ao Teorema de Gauss-Bonnet-Chern nas dimensões 4 e 6, destacando sua relevância no contexto das variedades consideradas. Finalizamos com um Lema sobre a curvatura escalar de métricas conformes, que desempenha um papel crucial em nossas demonstrações.

2.1 CONCEITOS E NOTAÇÕES

O objetivo desta seção é fixar as notações e apresentar aos leitores alguns fatos básicos sobre a geometria Riemanniana. Ao longo do texto (M, g) representa uma variedade Riemannina de dimensão n. Para melhor compreensão das definições a seguir, consulte os livros de Petersen [31] e do Carmo [14]. Nesta seção, admitimos que o bordo da variedade M, representado por $\partial\mathrm{M}$, é vazio.

Seja $\mathcal{X}(\mathrm{M})$ o espaço dos campos vetoriais suaves em M e $\mathcal{D}(\mathrm{M})$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 2.1 *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação* $\nabla : \mathcal{X}(\mathrm{M}) \times \mathcal{X}(\mathrm{M}) \to \mathcal{X}(M)$ *indicada por* $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}$ *e que satisfaz as propriedades:*

1. $\nabla_{f\mathrm{X}+gY}Z = f\nabla_{\mathrm{X}}Z + g\nabla_Y Z.$

2. $\nabla_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}+\mathrm{Z}) = \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y} + \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Z}.$

3. $\nabla_{\mathrm{X}}(f\mathrm{Y}) = f\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y} + X(f)\mathrm{Y}$, *onde* $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$ *e* $f, g \in \mathcal{D}(\mathrm{M})$.

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana e temos uma conexão que satisfaz

1. ∇ é uma conexão afim simétrica, isto é,

$$\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y} - \nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{X} = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}],$$

   para todo $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{X}(\mathrm{M})$ e

2. $\nabla_{\mathrm{Z}}\, g(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = g(\nabla_{\mathrm{Z}}\mathrm{X},\mathrm{Y}) + g(\mathrm{X},\nabla_{\mathrm{Z}}\mathrm{Y})$, onde g a métrica canônica em $\mathbf{M}^n$,

então dizemos que ∇ é uma conexão Riemanniana. A conexão Riemannina é unicamente determinada pela métrica.

Teorema 2.1 *Em uma variedade Riemannina* (M, g) *existe uma, e somente uma, conexão Riemanniana.*

A conexão Riemanniana dada pelo Teorema acima também é chamada de conexão de Levi-Civita. Para mais detalhes, vejas os livros citados no início desta seção. A conexão é incrivelmente útil na generalização de muitos dos conceitos mais conhecidos, como Hessiano, Laplaciano e Divergência.

Definição 2.2 *O tensor de curvatura Riemanniana de* M*, denotado por* $\mathcal{R}$*, é definido como*

$$\mathcal{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{Z} = \nabla_X\nabla_Y\mathrm{Z} - \nabla_Y\nabla_X\mathrm{Z} - \nabla_{[X,Y]}\mathrm{Z},$$

em que X,Y *e* Z *são campos de vetores em* $\mathcal{X}(\mathrm{M})$*,* ∇ *é a conexão de Levi-Civita de* M *e* $[\ ,\ ]$ *é o colchete de Lie.*

Usando a métrica g, podemos escrever o tensor de curvatura Riemannina como: $\mathcal{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z},\mathrm{W}) = g(\mathcal{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{Z},\mathrm{W})$.

Definição 2.3 *Se* $e_1,\ldots,e_n \in T_p\mathrm{M}$ *é uma base ortonormal, a curvatura de Ricci é um traço de* $\mathcal{R}$*,*

$$\textbf{\textit{Ric}}\,(v,w) = \sum_{i=1}^{n} g(\mathcal{R}(e_i,v)w,e_i) = \sum_{i=1}^{n} g(\mathcal{R}(v,e_i)e_i,w).$$

Assim, Ric é uma forma bilinear simétrica. Também pode ser definida como um tensor simétrico: o tensor de Ricci em um ponto $p \in \mathrm{M}$ na direção de $v \in T_p\mathrm{M}$, $|v| = 1$, é dado por

$$\mathrm{Ric}_{\,p}(v,v) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{R}(v,e_i,v,e_i),$$

onde $\{v,e_1,\ldots,e_{n-1}\} \subset \mathrm{T}_p\mathrm{M}$ é uma base ortonormal. Se todos os autovalores de Ric (v) forem maiores ou iguais a um certo k (ou $\leq k$), podemos dizer que Ric $(v) \geq k$ (ou $\leq k$). Se (M, g) satisfaz Ric $(v) = k \cdot v$, ou equivalentemente Ric $(v,w) = k \cdot g(v,w)$ então (M, g) é chamada de variedade Einstein.

Definição 2.4 *A curvatura escalar é definida como o traço do tensor de Ricci, isto é, a curvatura escalar de* M *em* p *é definida por*

$$\mathrm{R}_M = \sum_{i=1}^{n} \textbf{\textit{Ric}}\,(e_i,e_i),$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *é uma base ortonormal de* T_pM.

A seguir, seja $\Sigma^{n-1} \subset \mathrm{M}^n$ uma hipersuperfície. A *segunda forma fundamental* A de Σ é dada por

$$\mathrm{A}_p(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (\nabla_X \mathrm{Y})^{\perp},$$

onde $(.)^{\perp}$ representa a componente ortogonal ao espaço tangente a Σ com respeito a métrica g e $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{T}_p\Sigma$. Ao longo do texto denotamos o volume de Σ na métrica induzida g_Σ por $|\Sigma|$.

Definição 2.5 *A curvatura média de* Σ, H_Σ, *em um ponto* $p \in \Sigma$ *com respeito a* N, *um campo normal unitário ao longo de* Σ, *é dada por*

$$\mathrm{H}_\Sigma(p) = -\langle \overrightarrow{\mathrm{H}}_\Sigma(p), \mathrm{N}(p) \rangle,$$

onde $\overrightarrow{H}_\Sigma(p)$ *é o vetor curvatura média de* Σ, $\overrightarrow{\mathrm{H}}_\Sigma(p) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{A}(e_i, e_i)$, $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ *representa uma base ortonormal de* $\mathrm{T}_p\Sigma$ *com respeito a métrica induzida e* $g = \langle , \rangle$.

Relacionamos a curvatura do ambiente M e da sua hipersuperfície Σ através da seguinte expressão

$$\mathcal{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{W}) = \mathcal{R}_\Sigma(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{W}) - \langle \mathrm{A}(\mathrm{X}, \mathrm{W}), \mathrm{A}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) \rangle - \langle \mathrm{A}(\mathrm{X}, \mathrm{Z}), \mathrm{A}(\mathrm{Y}, \mathrm{W}) \rangle,$$

onde $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ e W são campos vetoriais em Σ e $\mathcal{R}_\Sigma$ representa a curvatura reimanniana de Σ. Tomando sucessivos traços da relação acima, obtemos a *equação de Gauss* (contraída),

$$\mathrm{Ric}_{\,M}(N, N) = \frac{1}{2}(\mathrm{R}_M - \mathrm{R}_\Sigma + \mathrm{H}_\Sigma^2 - ||\mathrm{A}||^2), \tag{4}$$

em que R_Σ é a curvatura escalar de Σ na métrica induzida por M.

Dizemos que uma hipersuperfície é *mínima* quando sua curvatura média é nula, isto é, $\mathrm{H}_\Sigma \equiv 0$. Hipersuperfícies mínimas em uma variedade Riemanniana são pontos críticos do problema variacional de miminização de volume.

Uma métrica g é *localmente conformemente plana* se, em torno de cada ponto, existe um sistema de coordenadas no qual a métrica g é conforme à métrica Euclidiana. Isso é equivalente a exigir que o tensor de Weyl W é identicamente zero, isto é, $W = 0$.

2.2 HIPERSUPERFÍCIES COM BORDO LIVRE

Nesta seção, seguimos a estrutura utilizada por Barros e Cruz [3] para apresentar as definições e resultados principais, com eventuais ajustes de notação para compatibilidade com o restante do trabalho. Seja $(\mathrm{M}^{\mathrm{n}}, g)$ uma n-variedade Riemanniana com bordo $\partial\mathrm{M}$ não vazio e

(Σ^{n-1}, g_Σ) uma hipersuperfície compacta. A hipersuperfície Σ é dita *propriamente imersa* em M quando existe uma imersão suave $f:\Sigma\to\mathrm{M}$, tal que, $f(\Sigma)\cap\partial\mathrm{M}=f(\partial\Sigma)$. As hipersuperfícies consideradas neste trabalho são propriamente imersas, portanto diremos apenas que Σ é uma hipersuperfície em M.

A hipersuperfície Σ tem *bordo livre* se Σ intersecta o $\partial\mathrm{M}$ ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma$. A hipersuperfície Σ tem *dois lados*, se admite um campo vetorial normal unitário e suave N definido globalmente em Σ.

Seja $t\to\Sigma_t, t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, uma variação de Σ em M. Mais precisamente, Σ_t é dada por $\Sigma_t=\{\tilde{f}(t,x):x\in\Sigma\}$, onde $\tilde{f}:(-\varepsilon,\varepsilon)\times\Sigma\to\mathrm{M}$ é uma aplicação diferenciável para $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ com velocidade inicial

$$\mathrm{X}=\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(t,x)\Big|_{t=0}$$

e $\tilde{f}(t,\cdot):\Sigma\to\mathrm{M}$ é uma imersão, para todo $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, tal que $\tilde{f}((-\varepsilon,\varepsilon)\times\partial\Sigma)$ está contido em $\partial\mathrm{M}$ e $\tilde{f}(0,\cdot)=f$.

A *fórmula da primeira variação do volume* é dada por

$$\delta\Sigma(\varphi)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}|\Sigma_t|=\int_\Sigma \mathrm{H}\varphi d\sigma+\int_{\partial\Sigma}\langle\mathrm{X},\nu\rangle d\sigma_{\partial\Sigma}, \tag{5}$$

onde X é o campo variacional, $\varphi=\langle\mathrm{X},\mathrm{N}\rangle$, ν é o conormal de $\partial\Sigma$ que aponta para fora de Σ e $d\sigma$ e $d\sigma_{\partial\Sigma}$ são o elemento de volume e de área de Σ e $\partial\Sigma$, respectivamente.

Por (5), Σ é o ponto crítico do funcional volume se, e somente se, Σ é mínima e tem bordo livre. O operador

$$\mathrm{L}=\Delta_\Sigma+\mathrm{Ric}_M(N,N)+||\mathrm{A}||^2 \tag{6}$$

é chamado de *operador de Jacobi*, ou *operador de estabilidade* e Δ_Σ é o operador de Laplace-Beltrami de (Σ,g) ou simplesmente o Laplaciano.

A *fórmula da segunda variação do volume*, veja [3], é dada por

$$\delta^2\Sigma(\varphi,\varphi)=\frac{d^2}{dt^2}|\Sigma_t|\Big|_{t=0}=-\int_\Sigma\varphi\mathrm{L}\varphi d\sigma+\int_{\partial\Sigma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}-\Pi(\mathrm{N},\mathrm{N})\varphi\right)\varphi d\sigma_{\partial\Sigma}, \tag{7}$$

ou ainda,

$$\delta^2\Sigma(\varphi,\varphi)=\int_\Sigma[||\nabla_\Sigma\varphi||^2-(\mathrm{Ric}_M(N,N)+||\mathrm{A}||^2)\varphi^2]d\sigma-\int_{\partial\Sigma}\Pi(\mathrm{N},\mathrm{N})\varphi^2 d\sigma_{\partial\Sigma}.$$

A partir da equação (7) podemos determinar a estabilidade de Σ.

Definição 2.6 *Seja Σ^{n-1} uma hipersuperfície mínima com dois lados. Dizemos que Σ é estável se, e somente se,*

$$\delta^2\Sigma(\varphi,\varphi)\geq 0, \tag{8}$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$.

Uma hipersuperfície Σ compacta é *minimizante de volume* se ela possui o menor volume entre todas as hipersuperfícies homotópicas a ela (ou ainda, tiver o menor volume entre todas as hipersuperfícies propriamente imersas em uma vizinhança de Σ). Desta maneira, dizer que uma hipersuperfície Σ é minimizante de volume implica dizer que Σ é mínima e estável.

2.3 O PROBLEMA DE YAMABE

O problema de Yamabe consiste em mostrar que qualquer métrica Riemanniana em uma variedade fechada é conforme a uma métrica de curvatura escalar constante. Em 1960, Yamabe [36] formulou a conjectura de que esse problema sempre teria solução. Posteriormente, em 1968, Trudinger [35] confirmou a validade do resultado para o caso em que a curvatura escalar é não positiva. Em 1976, Aubin [2] avançou no estudo do problema ao demonstrar sua solução para variedades (M^n, g) com $n \geq 6$, desde que não sejam conformemente planas. Finalmente, em 1984, Richard Schoen [33] resolveu o problema de Yamabe para os casos restantes.

Teorema 2.2 (Trudinger, Aubin, Schoen) *Qualquer variedade Riemanniana compacta* (M^n, g) *tem uma métrica conforme* $\bar{g} = u^{4/(n-2)}g, u > 0$*, de curvatura escalar constante.*

Vamos apresentar algumas definições relevantes. Seja (M^n, g) uma variedade suave fechada (compacta sem bordo). O funcional de Hilbert-Einstein $\mathcal{E}$ atribui a cada métrica Riemanniana g em M um número real da seguinte forma:

$$\mathcal{E}(g) = \frac{\int_M \mathrm{R}_g d\mathrm{V}_g}{\left(\int_M d\mathrm{V}_g\right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

onde R_g é a curvatura escalar de (M, g).

Definição 2.7 *O invariante de Yamabe de* (M, g) *é o invariante conforme:*

$$\mathcal{Y}(\mathrm{M}, [g]) = \inf_{\bar{g} \in [g]} \mathcal{E}(\bar{g}),$$

onde $[g] = \{e^{2f}g : f \in C^\infty(\mathrm{M})\}$.

A solução clássica do problema de Yamabe afirma que toda classe conforme $[g]$ contém métricas $\bar{g}$, as *métricas de Yamabe*, que realizam o mínimo, isto é

$$\mathcal{E}(\bar{g}) = \mathcal{Y}(\mathrm{M}, [g]),$$

e que possuem curvatura escalar constante

$$\mathrm{R}_{\bar{g}} = \mathcal{Y}(\mathrm{M},[g])\mathrm{Vol}\,(\mathrm{M},\bar{g})^{-\frac{2}{n}}.$$

No caso bidimensional, segue do Teorema de Gauss-Bonnet que $\mathcal{Y}(\mathrm{M},[g]) = 4\pi\chi(\mathrm{M})$, onde $\chi(\mathrm{M})$ é a característica de Euler de M. Em [22], Kobayashi afirma que $\mathcal{Y}(M,[g]) > 0$ se, e somente se, M admite uma métrica de curvatura escalar positiva. Além disso, sempre ocorre a seguinte desigualdade

Lema 2.1 (Aubin, 1976) *Se M é uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$, então*

$$\mathcal{Y}(\mathrm{M},[g]) \leq \mathcal{Y}(\mathbb{S}^n,[g_{can}]). \tag{9}$$

A igualdade em (9) ocorre se, e somente se, (M,g) é conformemente difeomorfa à esfera $(\mathbb{S}^n,[g_{\mathrm{can}}])$, para detalhes sobre o Lema 2.1 veja [2], [23] e [25]. Ainda sobre a solução do problema de Yamabe, em uma classe conforme $\bar{g}$, Gursky [20] provou o seguinte resultado

Teorema 2.3 (Gursky, 1994) *Seja M uma variedade 4- ou 6-dimensional compacta que admite uma métrica g localmente conformemente plana de curvatura escalar não negativa. Então $\chi(\mathrm{M}) \leq 2$. Além disso, $\chi(\mathrm{M}) = 2$ se, e somente se, (M,g) é conformemente equivalente a esfera com sua métrica canônica, e $\chi(\mathrm{M}) = 1$ se, e somente se, (M,g) é conformemente equivalente ao plano projetivo com sua métrica canônica.*

Se $\bar{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ é uma métrica conforme a métrica g, então a relação entre a curvatura escalar da métrica g, R_g, e a curvatura escalar da métrica $\bar{g}$, $\mathrm{R}_{\bar{g}}$, é dada por

$$\mathrm{R}_{\bar{g}}u^{\frac{n+2}{n-2}} = \mathrm{R}_g u - \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u \tag{10}$$

onde Δ_g é o Laplaciono calculado com respeito a métrica g.

Apresentamos a seguir a Proposição de Obata [30], que será relevante para os desenvolvimentos subsequentes:

Proposição 2.1 (Obata, 1971) *Seja $(\mathbb{S}^n,g)$ uma n-esfera Euclidiana de raio 1, e $\bar{g}$ outra métrica Riemanniana em $\mathbb{S}^n$ conforme a g. Então $\bar{g}$ tem curvatura escalar constante igual a $n(n-1)$ se, e somente se, tem curvatura seccional constante igual a 1.*

A demonstração do resultado acima decorre do fato de que $(\mathbb{S}^n,\bar{g})$ é uma variedade Einstein e localmente conformemente plana. Como consequência, a métrica $\bar{g}$ possui curvatura seccional constante. Para os detalhes da demonstração consulte [30]. Como consequência da Proposição 2.1, destacamos as seguintes afirmações:

- Se o invariante de Yamabe $\mathcal{Y}(\mathrm{M}^n,[g])$ coincide com o invariante de Yamabe da esfera padrão, ou seja,
$$\mathcal{Y}(\mathrm{M}^n,[g])=\mathcal{Y}(\mathbb{S}^n,[g_{\text{can}}]),$$
então a métrica g pertence à mesma classe conforme que a métrica canônica g_{can}. Portanto (M,g) é conformemente equivalente a esfera padrão $(\mathbb{S}^n,g_{\text{can}})$.

- Se a métrica g possui curvatura escalar constante, então, pela Proposição 2.1, g também possui curvatura seccional constante.

- As únicas métricas de curvatura seccional constante na esfera $\mathbb{S}^n$ são aquelas conformemente equivalentes à métrica canônica da esfera, a menos de um escalonamento.

- Consequentemente, a variedade Riemanniana (M^n,g) é isométrica à esfera padrão $(\mathbb{S}^n,g_{\text{can}})$, a menos de um escalonamento. Reunimos as afirmações na Proposição a seguir:

Proposição 2.2 *Seja (M^n,g) uma variedade Riemanniana compacta sem bordo, de dimensão n, tal que o invariante de Yamabe satisfaz*
$$\mathcal{Y}(M,[g])=\mathcal{Y}(\mathbb{S}^n,[g_{can}])$$
e a métrica g tem curvatura escalar constante. Então, (M^n,g) é isométrica à esfera $(\mathbb{S}^n,g_{can})$, a menos de um escalonamento.

Quando (M^n,g) é uma variedade Riemanniana com bordo $\partial\mathrm{M}$ não vazio, $n\geq 3$, J. F. Escobar encontrou uma solução afirmativa para quase todos os casos do problema de Yamabe. Existem duas maneiras naturais de estender o problema de Yamabe para variedades com bordo:

(i) Encontrar uma métrica $\bar{g}$ na classe conforme de g tal que $\mathrm{R_g}$ é constante e $\mathrm{H}_{\partial\mathrm{M}}=0$.

(ii) Encontrar uma métrica $\bar{g}$ na classe conforme de g tal que $\mathrm{R_g}=0$ e $\mathrm{H}_{\partial\mathrm{M}}$ é constante.

Neste trabalho, focamos no problema (i). Os dois problemas foram estudados por Escobar em [17], [16] e [18], e em seguida por outros autores, como por exemplo Marques [24] para o problema (ii) e Brendle e Chen [7] para o problema (i).

A solução do problema (i) é equivalente à existência de um ponto crítico do funcional de Yamabe, que definimos a seguir, com base em [3]. Para $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{(0,0)\}$,
$$Q_g^{a,b}(u)=\frac{\int_{\mathrm{M}}\left(\frac{4(n-1)}{n-2}|\nabla u|_g^2+\mathrm{R}_g u^2\right)d\sigma+2\int_{\partial\mathrm{M}}\mathrm{H}_{\partial\mathrm{M}}u^2 d\sigma_{\partial\mathrm{M}}}{\left(a\left(\int_{\mathrm{M}}u^{\frac{2(n-2)}{n-3}}d\sigma\right)+b\left(\int_{\partial\mathrm{M}}u^{\frac{2(n-2)}{n-3}}d\sigma_{\partial\mathrm{M}}\right)^{\frac{n-1}{n-2}}\right)^{\frac{n-3}{n-1}}},\tag{11}$$

Aqui, R_g denota a curvatura escalar de g, $H_{\partial\mathrm{M}}$ denota a curvatura média do bordo $\partial\mathrm{M}$ e u é uma função suave positiva em M satisfazendo o problema abaixo:

$$\begin{cases} \Delta_g u - \dfrac{n-3}{4(n-2)} R_g u + \dfrac{n-3}{4(n-2)} C u^{\frac{n+1}{n-3}} = 0 & \text{em } \mathrm{M}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + \dfrac{n-3}{2(n-2)} H_{\partial\mathrm{M}} u = 0 & \text{em } \partial\mathrm{M}, \end{cases}$$

onde η é o vetor normal que aponta para fora de $\partial\mathrm{M}$.

A constante de Yamabe é definida por

$$Q_g^{a,b}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) = \inf_{u \in C^\infty(\mathrm{M}, \mathbb{R}^+)} Q_g^{a,b}(u),$$

para $(a,b) \in \{(0,1),(1,0)\}$, que é invariante sob mudança conforme da métrica g para $(a,b) \in \{(0,1),(1,0)\}$, veja Escobar [17] e [18], e satisfaz

$$-\infty \leq Q_g^{1,0}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) \leq Q_g^{1,0}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+),$$

onde $Q_g^{1,0}(\mathbb{S}^n_+, \partial\mathbb{S}^n_+)$ denota o invariante de Yamabe do hemisfério $\mathbb{S}^n_+$ munido com a métrica canônica, e

$$-\infty \leq Q_g^{0,1}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) \leq Q_g^{0,1}(B^n, \partial B^n),$$

onde B^n é a bola unitária em $\mathbb{R}^n$ munida com a métrica usual.

Denote por $[g]$ e $C(\mathrm{M})$ a classe conforme de g e o espaço de todas as classes conformes em M, respectivamente. Podemos então definir o *invariante de Yamabe* de uma variedade compacta M com bordo $\partial\mathrm{M}$ tomando o supremo das constantes de Yamabe sobre todas as classes conformes

$$\mathcal{Y}^{a,b}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M}) = \sup_{[g] \in C(\mathrm{M})} \inf_{u>0} Q_g^{a,b}(u). \tag{12}$$

Ao longo do texto, utilizamos o invariante de Yamabe $\mathcal{Y}^{1,0}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$, que, para fins de simplicidade, denotaremos por $\mathcal{Y}(\mathrm{M}, \partial\mathrm{M})$ neste trabalho.

Seja $\bar{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ uma métrica conforme a métrica g. A relação entre a curvatura média do bordo de M, $\partial\mathrm{M}$, com respeito a métrica g e a métrica $\bar{g}$, é dada pela equação

$$\mathrm{H}_{\bar{g}} u^{\frac{n}{n-2}} = \mathrm{H}_{\partial M} u + \frac{2}{n-2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \tag{13}$$

onde $\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ é a derivada normal externa calculada em relação a métrica g.

A Proposição 2.2 estabelece que uma variedade compacta sem bordo, com curvatura escalar constante e invariante de Yamabe igual ao da esfera padrão, deve ser isométrica a esta última, a menos de um escalonamento. Essa ideia pode ser estendida para o caso em que a variedade possui bordo totalmente geodésico.

Nesse contexto, a Proposição 2.2 pode ser reformulada considerando o hemisfério $\mathbb{S}^n_+$. Na verdade, essa afirmação decorre da combinação de dois teoremas de Escobar [15].

Teorema 2.4 (Escobar, 1990) *Seja* $(\tilde{\mathrm{M}}^n, g_0)$ *uma variedade de Einstein e suponha que* $\partial\tilde{\mathrm{M}}$ *seja totalmente geodésico. Se* g *é uma métrica conforme a* g_0*, com curvatura escalar constante e bordo mínimo, então* g *é uma métrica Einstein.*

Teorema 2.5 (Escobar, 1990) *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Suponha que exista uma função não constante* ϕ *satisfazendo*

$$\begin{cases} \phi_{ij} + k\phi(g_0)_{ij} = 0, & \textit{on } M, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, & \textit{on } \partial M. \end{cases}$$

onde $k = \dfrac{R_g}{n(n-1)} > 0$*. Então,* (M^n, g) *é isométrica a* $(S^n_+(\sqrt{k}), g_{can})$*.*

Para mais detalhes veja os Teoremas 4.1 e 4.2 de [15]. Agora, apresentamos a seguinte Proposição, que adapta o caso da Proposição 2.2 para o contexto do hemisfério

Proposição 2.3 *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana compacta de dimensão* n*, com bordo totalmente geodésico, e suponha que o invariante de Yamabe satisfaz*

$$\mathcal{Y}(M, [g]) = \mathcal{Y}(\mathbb{S}^n_+, [g_{can}]).$$

Se, além disso, a métrica g *possui curvatura escalar constante igual a* $n(n-1)$*, então* (M^n, g) *é isométrica ao hemisfério* $(\mathbb{S}^n_+, g_{can})$*, a menos de um escalonamento.*

Demonstração: O hemisfério $(\mathbb{S}^n_+, g_{\mathrm{can}})$ é uma variedade Einstein com bordo totalmente geodésico. Além disso, qualquer métrica conforme à métrica canônica g_{can}, que tenha curvatura escalar constante e bordo mínimo, também é uma métrica Einstein. Portanto, (M, g), conforme definido na Proposição 2.3, é uma variedade Einstein. Esse resultado segue diretamente do Teorema 2.4, considerando que $(\tilde{\mathrm{M}}^n, g_0) = (\mathbb{S}^n_+, g_{\mathrm{can}})$.

De fato, como o invariante de Yamabe satisfaz $\mathcal{Y}(\mathrm{M}, [g]) = \mathcal{Y}(\mathbb{S}^n_+, [g_{\mathrm{can}}])$, concluímos que g é conforme a g_{can}, isto é, a métrica g pode ser escrita como $g = u^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathrm{can}}$. Além disso, (M, g) possui bordo mínimo, pois seu bordo é totalmente geodésico por hipótese.

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal, tal que $e_n = \eta$ é o campo vetorial normal unitário exterior em ∂M. Seja $X = \nabla v = X_i e_i$, onde $v = u^{-\frac{2}{(n-2)}}$. De acordo com a demonstração do Teorema 2.4 (Teorema 4.1 de [15]), no caso em que as curvaturas escalares R_g e $R_{g_{\text{can}}}$ são positivas e as métricas g e g_{can} são métricas Einstein, existe uma função $\phi = \operatorname{div} X$ que satisfaz

$$\begin{cases} \phi_{ij} + k\phi(g_{\text{can}})_{ij} = 0, & \text{on } M, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, & \text{on } \partial M. \end{cases}$$

onde $k = \dfrac{n(n-1)}{n(n-1)} = 1$. Portanto, o resultado segue pelo Teorema 2.5, assim (M^n, g) é isométrica a (S^n_+, g_{can})

Q.E.D.

2.4 O TEOREMA DE GAUSS-BONNET-CHERN

O Teorema de Gauss-Bonnet-Chern estende o clássico Teorema de Gauss-Bonnet para variedades Riemannianas de dimensões superiores, conforme demonstrado por Shiing-Shen Chern (veja [10] e [11]). Esse resultado estabelece uma conexão fundamental entre as propriedades topológicas de uma variedade e sua curvatura. Neste trabalho, concentramos nossa atenção nos casos de dimensão par, mais especificamente nas dimensões quatro e seis.

O Teorema de Gauss-Bonnet-Chern para a característica de Euler $\chi(\mathrm{M})$, quando (M^n, g) é uma variedade Riemanniana com o bordo ∂M não vazio, é a seguinte:

(i) quando $n = 4$,

$$192\pi^2\chi(\mathrm{M}) = 6\int_M ||\mathrm{W}||^2 d\mathrm{V}_g + \int_M \mathrm{R}^2 d\mathrm{V}_g - 12\int_M ||\mathrm{E}||^2 d\mathrm{V}_g + 48\int_{\partial \mathrm{M}} \mathcal{B} ds, \quad (14)$$

onde

$$\mathcal{B} = 3\mathrm{RH} - 6\mathrm{Ric}_M(N, N)\mathrm{H} - 6\mathrm{Rm}_{\gamma\alpha\gamma\beta}\Pi^{\alpha\beta} + 2\mathrm{H}^3 - 6\mathrm{H}||\Pi||^2 + 4\mathrm{tr}\,(\Pi^3),$$

E é o tensor de Ricci sem traço, Rm é o tensor de curvatura de Riemann de M, W representa o tensor de Weyl e Π é a segunda forma fundamental de $\partial\mathrm{M}$. O termo $\mathrm{tr}\,(\Pi^3)$ é definido por $\Pi_{\alpha\beta}\Pi_{\beta\gamma}\Pi_{\gamma\alpha}$.

(ii) quando $n = 6$ e M é localmente conformemente plana com bordo totalmente geodésico,

$$384\pi^3\chi(\mathrm{M}) = \frac{2}{75}\int_M \mathrm{R}^3 d\mathrm{V}_g + \frac{3}{2}\int_M \mathrm{Tr}(\mathrm{E}^3) d\mathrm{V}_g - \frac{3}{5}\int_M \mathrm{R}||\mathrm{E}||^2 d\mathrm{V}_g. \quad (15)$$

O bordo de $\partial \mathrm{M}$ é chamado de *umbílico* se $\Pi_{\alpha\beta} = \mu(x) g_{\alpha\beta}$. Chamamos $\partial \mathrm{M}$ de *totalmente geodésico* quando sua segunda forma fundamental é identicamente nula. Evidentemente, se $\partial \mathrm{M}$ é totalmente geodésico, então ele também é totalmente umbílico e mínimo. Além disso, nesse caso, o termo da integral de $\mathcal{B}$ sobre o bordo de M se anula, uma vez que a segunda forma fundamental é zero e o bordo é mínimo.

Podemos reformular (15) com base no seguinte Lema, estabelecido por Gursky (Lema 1.3, [20])

Lema 2.2 (Gursky, 1994) *Seja* (M, g) *uma variedade* n*-dimensional (*$n \geq 3$*) localmente conformemente plana. Se* E_{ij} *representa as componentes do tensor de Ricci sem traço em um sistema de coordenadas locais, então*

$$\begin{aligned} \Delta E_{ij} = & -\frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\nabla_i\nabla_j R - \frac{1}{2n}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)(\Delta R) g_{ij} \\ & + \frac{1}{n-2}||E||^2 g_{ij} - \frac{n}{n-2} E_{i\alpha} E_{j\beta} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{n-1} R E_{ij}. \end{aligned} \tag{16}$$

Agora, com o objetivo de obter uma expressão para o termo $\int_{\mathrm{M}} \mathrm{Tr}(E^3)$, multiplicamos ambos os lados da equação (16) por $g^{ik} g^{jl} E_{kl}$ e integramos sobre M:

$$\begin{aligned} \int_M g^{ik} g^{jl} E_{kl} \Delta E_{ij} dv = & -\int_M g^{ik} g^{jl} E_{kl} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\nabla_i\nabla_j R\right) dv \\ & - \int_M g^{ik} g^{jl} E_{kl} \left(\frac{1}{2n}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)(\Delta R) g_{ij}\right) dv \\ & + \int_M g^{ik} g^{jl} E_{kl} \left(\frac{1}{n-2}||E||^2 g_{ij}\right) dv \\ & - \int_M g^{ik} g^{jl} E_{kl} \left(\frac{n}{n-2} E_{i\alpha} E_{j\beta} g^{\alpha\beta}\right) dv \\ & - \int_M g^{ik} g^{jl} E_{kl} \left(\frac{1}{n-1} R E_{ij}\right) dv. \end{aligned} \tag{17}$$

Primeiro, vamos calcular

$$I_1 = \int_M g^{ik} g^{jl} E_{kl} \nabla_i \nabla_j R \, dv.$$

Reescrevendo com índices elevados,

$$I_1 = \int_M E^{ij} \nabla_i \nabla_j R \, dv.$$

Aplicamos a integração por partes, usando a identidade

$$\int_M A^{pq} \nabla_p \nabla_q B \, dv = -\int_M (\nabla_p A^{pq}) \nabla_q B \, dv + \int_{\partial M} A^{pq} \nabla_q B \, N_p \, ds, \tag{18}$$

No nosso caso, ao tomarmos $A^{pq} = E^{ij}$ e $B = R$, obtemos

$$I_1 = -\int_M \nabla^i E^{ij} \nabla_j R \, dv + \int_{\partial M} E^{ij} \nabla_j R N_i \, ds.$$

Pela identidade de Bianchi$\nabla^i E_{ij} = \frac{n-2}{2n} \nabla_j R$, substituindo essa identidade na equação anterior,

$$I_1 = -\int_M \left(\frac{n-2}{2n} \nabla_j R \right) \nabla^j R \, dv + \int_{\partial M} E^{ij} \nabla_j R N_i \, ds,$$

ou seja,

$$\int_M E^{ij} \nabla_i \nabla_j R \, dv = -\frac{n-2}{2n} \int_M ||\nabla R||^2 \, dv + \int_{\partial M} E(N, \nabla R) \, ds.$$

Multiplicando pelo fator $-\frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)$, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{n-1}\right) \int_M g^{ik} g^{jl} E_{kl} \nabla_i \nabla_j R dv = & \frac{(n-2)^2}{4n(n-1)} \int_M ||\nabla R||^2 dv \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{n-1}\right) \int_{\partial M} E(N, \nabla R) ds. \end{aligned} \tag{19}$$

Agora desejamos calcular

$$I_2 = \int_M g^{ik} g^{jl} E_{kl} \Delta E_{ij} \, dv.$$

Usamos a definição do Laplaciano

$$\Delta E_{ij} = g^{pq} \nabla_p \nabla_q E_{ij},$$

substituindo isso na integral,

$$I_2 = \int_M g^{ik} g^{jl} E_{kl} g^{pq} \nabla_p \nabla_q E_{ij} \, dv.$$

Aplicamos integração por partes no termo $E_{kl} \nabla_p \nabla_q E_{ij}$. Para isso, usamos a identidade (18), tomando $A^{pq} = g^{ik} g^{jl} E_{kl}$ e $B = E_{ij}$, temos

$$I_2 = -\int_M g^{ik} g^{jl} (\nabla_p E_{kl})(\nabla^p E_{ij}) \, dv + \int_{\partial M} g^{ik} g^{jl} E_{kl} \nabla^p E_{ij} N_p \, ds.$$

O primeiro termo pode ser escrito como $-\int_M ||\nabla E||^2 dv$, onde $||\nabla E||^2 = g^{ik} g^{jl} (\nabla_p E_{kl})(\nabla^p E_{ij})$. Para o termo de bordo, observe que

$$\frac{\partial ||E||^2}{\partial N} = 2 g^{ik} g^{jl} E_{kl} \nabla^p E_{ij} N_p.$$

Assim, podemos reescrever o termo de bordo como

$$\int_{\partial M} g^{ik} g^{jl} E_{kl} \nabla^p E_{ij} N_p \, ds = \frac{1}{2} \int_{\partial M} \frac{\partial ||E||^2}{\partial N} \, ds.$$

Portanto,

$$\int_M g^{ik}g^{jl}E_{kl}\Delta E_{ij}\,dv = -\int_M ||\nabla E||^2\,dv + \frac{1}{2}\int_{\partial M}\frac{\partial ||E||^2}{\partial N}\,ds. \tag{20}$$

Em seguida, seja

$$I_3 = \int_M g^{ik}g^{jl}E_{kl}RE_{ij}\,dv.$$

Podemos escrever

$$E_{ij} = \left(R_{ij} - \frac{1}{n}Rg_{ij}\right).$$

Substituindo essa expressão para E_{ij} e E_{kl}, temos

$$I_3 = \int_M g^{ik}g^{jl}\left(R_{kl} - \frac{1}{n}Rg_{kl}\right)R\left(R_{ij} - \frac{1}{n}Rg_{ij}\right)dv.$$

Expandindo o produto no integrando

$$I_3 = \int_M \left(R^{ij}R_{ij} - \frac{1}{n}Rg^{ij}R_{ij} - \frac{1}{n}RR^{ij}g_{ij} + \frac{1}{n^2}R^2g^{ij}g_{ij}\right)dv,$$

usando $g^{ij}g_{ij} = n$, obtemos

$$I_3 = \int_M \left(R^{ij}R_{ij} - \frac{2}{n}RR^{ij}g_{ij} + \frac{1}{n}R^2\right)Rdv.$$

Agora, como a norma ao quadrado do tensor E é dada por

$$||E||^2 = g^{ik}g^{jl}E_{ij}E_{kl} = E^{ij}E_{ij}$$

e sabemos que

$$E^{ij}E_{ij} = \left(R^{ij}R_{ij} - \frac{2}{n}RR^{ij}g_{ij} + \frac{1}{n}R^2\right),$$

multiplicando por R, obtemos

$$\int_M g^{ik}g^{jl}E_{kl}RE_{ij}dv = \int_M R||E||^2dv.$$

Assim,

$$-\frac{1}{n-1}\int_M g^{ik}g^{jl}E_{kl}RE_{ij}dv = -\frac{1}{n-1}\int_M R||E||^2dv. \tag{21}$$

Agora, vamos analisar o termo

$$I_4 = \int_M g^{ik}g^{jl}E_{kl}\left(\frac{n}{n-2}E_{i\alpha}E_{j\beta}g^{\alpha\beta}\right)dv.$$

Distribuímos os fatores dentro da integral

$$I_4 = \frac{n}{n-2}\int_M g^{ik}g^{jl}g^{\alpha\beta}E_{kl}E_{i\alpha}E_{j\beta}dv.$$

Assim,

$$I_4 = \frac{n}{n-2}\int_M \mathrm{tr}(E^3)dv.$$

Logo

$$\int_M g^{ik}g^{jl}E_{kl}\left(\frac{n}{n-2}E_{i\alpha}E_{j\beta}g^{\alpha\beta}\right)dv = \frac{n}{n-2}\int_M \mathrm{tr}(E^3)dv. \tag{22}$$

Seja agora

$$I_5 = \int_M g^{ik}g^{jl}E_{kl}\left(\frac{1}{2n}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)(\Delta R)g_{ij}\right)dv,$$

fatorando,

$$\frac{1}{2n}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int_M g^{ik}g^{jl}E_{kl}(\Delta R g_{ij})dv,$$

como $g^{jl}g_{ij} = \delta_i^l$, podemos simplificar

$$\frac{1}{2n}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int_M E^i_{\ i}(\Delta R)dv = 0,$$

pois $E^i_{\ i} = 0$. De fato, E é o tensor de Ricci sem traço, ou seja, ele satisfaz

$$E^i_{\ i} = g^{ij}E_{ij} = R - \frac{1}{n}Rg^{ij}g_{ij} = R - R = 0.$$

Portanto, o termo I_5 desaparece. Agora seja

$$I_6 = \int_M g^{ik}g^{jl}E_{kl}\left(\frac{1}{n-2}||E||^2 g_{ij}\right)dv.$$

Reescrevendo

$$\frac{1}{n-2}\int_M g^{ik}g^{jl}E_{kl}||E||^2 g_{ij}dv.$$

Novamente, usando $g^{jl}g_{ij} = \delta_i^l$, obtemos

$$\frac{1}{n-2}\int_M E^i_{\ i}||E||^2 dv = 0,$$

pois, como já vimos, $E^i_{\ i} = 0$, então o termo I_6 também desaparece. Agora, unindo os resultados, (19), (20), (21) e (22), obtemos de (17) a seguinte igualdade

$$\frac{n}{n-2}\int_M \mathrm{Tr}(E^3)dv = \int_M ||\nabla E||^2\,dv + \frac{(n-2)^2}{4n(n-1)}\int_M ||\nabla R||^2 dv - \frac{1}{n-1}\int_M R||E||^2 dv$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\partial M}\frac{\partial ||E||^2}{\partial N}\,ds - \frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\int_{\partial M} E(N,\nabla R)ds$$

Portanto,

$$\int_M \mathrm{Tr}(E^3)dv = \frac{n-2}{n}\int_M ||\nabla E||^2\,dv + \frac{(n-2)^3}{4n^2(n-1)}\int_M ||\nabla R||^2 dv - \frac{n-2}{n(n-1)}\int_M R||E||^2 dv$$
$$-\frac{n-2}{2n}\left(\int_{\partial M}\frac{\partial ||E||^2}{\partial N}\,ds + \frac{(n-2)}{(n-1)}\int_{\partial M} E(N,\nabla R)ds\right)$$

Para $n = 6$, temos

$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{Tr}(E^3)dv = \frac{2}{3}\int_M ||\nabla E||^2\, dv + \frac{4}{45}\int_M ||\nabla R||^2 dv - \frac{2}{15}\int_M R||E||^2 dv \\ - \frac{1}{3}\left(\int_{\partial M} \frac{\partial ||E||^2}{\partial N}\, ds + \frac{4}{5}\int_{\partial M} E(N, \nabla R) ds\right). \qquad (23)\end{aligned}$$

Além disso, pela identidade de Bianchi contraída, a divergência do tensor de Ricci é dada por

$$\nabla^i R_{ij} = \frac{1}{2}\nabla_j R,$$

e podemos escrever a divergência de E_{ij}

$$\nabla^i E_{ij} = \nabla^i R_{ij} - \frac{1}{6}\nabla_j R = \frac{1}{3}\nabla_j R.$$

Por definição de norma e substituindo o que encontramos, temos

$$\begin{aligned}||\nabla E||^2 &= g^{ij}(\nabla^i E_{ij})(\nabla^j E_{ij}) = g^{ij}\left(\frac{1}{3}\nabla_i R\right)\left(\frac{1}{3}\nabla_j R\right) \\ &= \frac{1}{9} g^{ij}\nabla_i R \nabla_j R = \frac{1}{9}||\nabla R||^2\end{aligned}$$

logo,

$$||\nabla E||^2 = \frac{1}{9}||\nabla R||^2. \qquad (24)$$

Substituindo (24) em (23), obtemos

$$\int_M \mathrm{Tr}(\mathrm{E}^3) = \frac{22}{135}\int_M ||\nabla \mathrm{R}||^2 d\mathrm{V}_g - \frac{2}{15}\int_M \mathrm{R}||\mathrm{E}||^2 d\mathrm{V}_g - \frac{1}{3}\left(\int_{\partial M} \frac{\partial ||E||^2}{\partial N} + \frac{4}{5}E(N, \nabla R)\right) ds,$$

Dessa maneira, (15) é igual a

$$\begin{aligned}384\pi^3\chi(\mathrm{M}) = \frac{2}{75}\int_M \mathrm{R}^3 d\mathrm{V}_g + \frac{11}{45}\int_M ||\nabla \mathrm{R}||^2 d\mathrm{V}_g - \frac{4}{5}\int_M \mathrm{R}||\mathrm{E}||^2 d\mathrm{V}_g \\ - \frac{1}{2}\left(\int_{\partial M} \frac{\partial ||E||^2}{\partial N} + \frac{4}{5}E(N, \nabla R)\right) ds \qquad (25)\end{aligned}$$

Se a curvatura escalar de M é constante, Raulot [32] provou o seguinte lema:

Lema 2.3 (S. Raulot, 2012) *Se (M^6, g) é uma variedade localmente conformemente plana com curvatura escalar constante e bordo totalmente geodésico, a fórmula de Chern-Gauss-Bonnet é dada por:*

$$384\pi^3\chi(\mathrm{M}) = \frac{2}{75}\mathrm{R}^3\mathrm{Vol}(\mathrm{M}, g) - \frac{4\mathrm{R}}{5}\int_M ||\mathrm{E}||^2 d\mathrm{V}_g.$$

Seja (M, g) uma variedade fechada (isto é, compacta sem bordo) de dimensão $n \geq 3$. O Teorema de Gauss-Bonnet-Chern ou a *fórmula de Gauss-Bonnet-Chern* para a característica de Euler $\chi(\mathrm{M})$ é a seguinte:

(i) quando $n = 4$,

$$192\pi^2\chi(\mathrm{M}) = 6\int_M ||\mathrm{W}||^2 d\mathrm{V}_g + \int_M \mathrm{R}^2 d\mathrm{V}_g - 12\int_M ||\mathrm{E}||^2 d\mathrm{V}_g, \tag{26}$$

onde W representa o tensor de Weyl, $\mathrm{E} := \mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{R}}{4}g$ representa o tensor de Ricci sem traço e R é a curvatura escalar de M na métrica g;

(ii) quando $n = 6$ e M é localmente conformemente plana (i. é, $\mathrm{W} \equiv 0$),

$$256\pi^3\chi(\mathrm{M}) = \frac{4}{225}\int_M \mathrm{R}^3 d\mathrm{V}_g + \int_M \mathrm{Tr}(\mathrm{E}^3) d\mathrm{V}_g - \frac{2}{5}\int_M \mathrm{R}||\mathrm{E}||^2 d\mathrm{V}_g. \tag{27}$$

Podemos escrever (27) de outra forma, utilizando o Lema 2.2. Tomando $n = 6$, multiplicando ambos os lados de (16) por $g^{ik}g^{jl}E_{kl}$ e integrando, obtemos (o mesmo resultado do caso anterior, sem os termos de integral sobre o bordo)

$$\int_M \mathrm{Tr}(E^3) dv = \frac{2}{3}\int_M ||\nabla E||^2\, dv + \frac{4}{45}\int_M ||\nabla R||^2 dv - \frac{2}{15}\int_M R||E||^2 dv. \tag{28}$$

Dessa maneira, utilizando (24) em (28), e em seguida substituindo o resultado em (27), obtemos

$$384\pi^3\chi(\mathrm{M}) = \frac{2}{75}\int_M \mathrm{R}^3 d\mathrm{V}_g + \frac{11}{45}\int_M ||\nabla \mathrm{R}||^2 d\mathrm{V}_g - \frac{4}{5}\int_M \mathrm{R}||\mathrm{E}||^2 d\mathrm{V}_g \tag{29}$$

2.5 LEMA DA CURVATURA ESCALAR CONFORME

Apresentamos a seguir um Lema de fundamental importância para as demonstrações dos próximos capítulos. Em essência, ele estabelece que, se Σ^{n-1}, com $n \geq 3$, é uma hipersuperfície localmente minimizante de volume, com bordo livre e totalmente geodésico, dois lados e imersa em uma variedade Riemanniana (M^n, g) de curvatura escalar positiva, Ric $_M$ não negativo e bordo mínimo, então, em uma métrica conforme à métrica induzida, a curvatura escalar de Σ é positiva e a curvatura média do bordo de Σ é nula.

No caso em que a hipersuperfície não possui bordo, o lema afirma que, se a curvatura escalar da variedade M munida da métrica g é positiva e Ric $_M$ é não negativo, então a curvatura escalar de qualquer hipersuperfície localmente minimizante de volume em M, quando munida de uma métrica conforme à métrica induzida por g, também é positiva. A seguir, detalhamos essas afirmações

Lema 2.4 *Seja* (Σ^{n-1}, g_Σ)*,* $n \geq 3$*, uma hipersuperfície com bordo livre e totalmente geodésico, dois lados, imersa em uma variedade Riemannina* (M^n, g) *com curvatura escalar positiva,* $\mathrm{R}_M > 0$*, Ric* $_M \geq 0$ *e bordo mínimo, tal que* Σ *é localmente minimizante de volume. Defina* $\bar{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g_\Sigma$*, onde* $u \in C^\infty(\Sigma)$*. Então a curvatura escalar de* $(\Sigma, \bar{g})$ *é positiva,* $R_{\bar{g}} > 0$ *e a curvatura média de* $(\partial\Sigma, \bar{g})$ *é nula,* $H_{\bar{g}} = 0$*.*

Demonstração: A hipersuperfície Σ é por hipótese localmente minimizante de volume, então Σ é estável e mínima. A segunda derivada do funcional volume (7) é dada por

$$\delta^2\Sigma(f,f) = -\int_\Sigma fLf\,d\sigma + \int_{\partial\Sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu} - \Pi(\mathrm{N},\mathrm{N})f\right) f\,d\sigma_{\partial\Sigma},$$

onde Π é a segunda forma fundamental de $\partial\mathrm{M}$ em relação ao vetor normal unitário que aponta para o interior de Σ. Pela condição de estabilidade, ver (8), para qualquer $f \in C^\infty(\Sigma)$, temos

$$\int_\Sigma (\mathrm{Ric}_M(N,N) + ||A||^2)f^2 d\sigma + \int_{\partial\Sigma} \Pi(N,N)f^2\,d\sigma_{\partial\Sigma} \leq \int_\Sigma |\nabla f|^2 d\sigma. \tag{30}$$

Por hipótese, Σ tem bordo livre, logo

$$\Pi(N,N) + H_{\partial\Sigma} = H_{\partial M}.$$

A hipersuperfície Σ tem bordo totalmente geodésico, então $H_{\partial\Sigma} = 0$. Além disso $H_{\partial M} = 0$, pois ∂M é mínimo. Portanto, $\Pi(N,N) = 0$. Dessa forma, tomando $f = 1$ em (30), obtemos

$$\int_\Sigma (\mathrm{Ric}_M(N,N) + ||A||^2)d\sigma \leq 0.$$

Assim, como $\mathrm{Ric}_M(N,N) \geq 0$ e $||A||^2 \geq 0$, segue que $\mathrm{Ric}_M(N,N) = 0$ e $||A|| = 0$ ao longo de Σ. Concluímos, pela equação de Gauss (4)

$$\mathrm{Ric}_M(\mathrm{N},\mathrm{N}) = \frac{1}{2}(\mathrm{R}_M - \mathrm{R}_\Sigma + \mathrm{H}^2_\Sigma - ||\mathrm{A}||^2),$$

que as curvaturas escalares de R_{g_Σ} e R_M possuem o mesmo valor ao longo de Σ, isto é, $R_{g_\Sigma} = R_M$ ao longo de Σ.

Considere o seguinte problema de fronteira

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = 0 \;\text{ em }\; \Sigma \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \;\text{ em }\; \partial\Sigma, \end{cases} \tag{31}$$

onde λ é o primeiro autovalor e $u \in C^\infty(\Sigma), u > 0$, é a primeira autofunção do operador de Jacobi

$$Lu = \Delta_g u + \mathrm{Ric}_M(N,N)u + ||A||^2 u, \tag{32}$$

que, pela equação de Gauss (4), pode ser reescrito como

$$Lu = \Delta_g u + \frac{1}{2}(R_M - R_{g_\Sigma} + ||A||^2)u. \tag{33}$$

Assim, substituindo em (33) que $R_{g_\Sigma} = R_M$, $||A||^2 = 0$ e $Lu = -\lambda u$ por (31), obtemos $\Delta_g u = -\lambda u$. Por Yamabe [36], conforme indicado em (10), as curvaturas escalares de $\bar{g}$ e g_Σ estão relacionadas por

$$\mathrm{R}_{\bar{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}} = \mathrm{R}_{g_\Sigma} u - \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g u. \tag{34}$$

Segue que

$$\mathrm{R}_{\bar{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}} = \mathrm{R}_{g_\Sigma} u + \frac{4(n-1)}{n-2} \lambda u > 0,$$

pois $n \geq 3$, $u > 0$, $\lambda \geq 0$ (pois Σ é estável), $R_{g_\Sigma} = R_M > 0$. Portanto, $\mathrm{R}_{\bar{g}} > 0$.

E a relação entre as curvaturas médias do bordo de Σ com respeito as métricas $\bar{g}$ e g_Σ, conforme indicado em (13), estão relacionadas por

$$\mathrm{H}_{\bar{g}} u^{\frac{n}{n-2}} = \mathrm{H}_{\partial\Sigma} u + \frac{2}{n-2} \frac{\partial u}{\partial \nu}. \tag{35}$$

Por outro lado, temos por (31) que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, logo

$$\mathrm{H}_{\bar{g}} u^{\frac{n}{n-2}} = \mathrm{H}_{\partial\Sigma} u = 0, \tag{36}$$

pois a hipersuperfície Σ tem bordo totalmente geodésico. Assim,

$$H_{\bar{g}} = 0.$$

Q.E.D.

Para o caso em que a hipersuperfície é fechada, escrevemos o lema da seguinte forma

Lema 2.5 *Seja Σ^{n-1}, $n \geq 3$, uma hipersuperfície fechada, dois lados, imersa em uma variedade Riemannina (M^n, g) de curvatura escalar $R_M > 0$ e $Ric_M \geq 0$, tal que Σ é localmente minimizante de volume. Seja g_Σ a métrica Riemanniana em Σ induzida por M e defina uma nova métrica $\bar{g} = u^{\frac{n-2}{n+2}} g_\Sigma$, onde $u \in C^\infty(\Sigma)$. Então a curvatura escalar de $(\Sigma^{n-1}, \bar{g})$ é positiva, isto é, $R_{\bar{g}} > 0$.*

Demonstração: A hipersuperfície é estável e mínima, pois é localmente minimizante de volume. A condição de estabilidade nos garante que

$$\int_\Sigma (\mathrm{Ric}_M(N,N) + ||A||^2) f^2 \leq \int_\Sigma |\nabla f|^2.$$

Tomando $f = 1$ na expressão anterior, obtemos

$$\int_\Sigma (\mathrm{Ric}_M(N,N) + ||A||^2) \leq 0,$$

e como $\text{Ric}_M \geq 0$, segue que $\text{Ric}_M(N,N) = 0$ e $||A|| = 0$ ao longo de Σ.

Fazendo as substituições $||A|| = 0$ e $\text{Ric}_M(N,N) = 0$ na equação de Gauss (4), dada por

$$\text{Ric}_M(N,N) = \frac{1}{2}(R_M - R_{g_\Sigma} - ||A||^2),$$

obtemos,

$$R_{g_\Sigma} = R_M \ \text{ ao longo } \ \Sigma.$$

As curvaturas escalares de g_Σ e $\bar{g}$ estão relacionadas por (34). Seja $u \in C^\infty(\Sigma), u > 0$, a primeira autofunção do operador de estabilidade (32), associada ao primeiro autovalor λ. Ou seja, u satisfaz a equação $Lu + \lambda u = 0$, onde L é o operador de Jacobi. Substituindo $R_{g_\Sigma} = R_M$, $||A||^2 = 0$ e $Lu = -\lambda u$ em (33), obtemos $\Delta_g u = -\lambda u$. Portanto, utilizando a relação (34), concluímos que

$$R_{\bar{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}} = R_{g_\Sigma} + \frac{4(n-1)}{n-2}\lambda u > 0,$$

pois $\lambda \geq 0$ (Σ é estável), $n \geq 3$, $u > 0$ e $R_{g_\Sigma} = R_M > 0$. Logo, $R_{\bar{g}} > 0$.

$\boxed{\text{Q.E.D.}}$

3 RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES FECHADAS

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão sete com curvatura escalar positiva e curvatura de Ricci não negativa. Neste capítulo, mostramos que se Σ é uma hipersuperfície localmente minimizante de volume, fechada, dois lados e imersa em M, então encontramos uma desigualdade semelhante à de Mendes [25], veja (1). Além disso, no caso de igualdade, mostramos que Σ é isométrica à esfera canônica de dimensão seis.

3.1 RESULTADOS

Seja M^7 uma variedade Riemanniana com curvatura escalar positiva e curvatura de Ricci não negativa. Sob as hipóteses do teorema a seguir, provamos que a curvatura escalar da hipersuperfície Σ coincide com a curvartura escalar de M ao longo de Σ, isto é, $\mathrm{R}_{\mathrm{M}} = R_{g_\Sigma}$ ao longo de Σ. A partir dessa relação, utilizando a desigualdade de Hölder, o Teorema de Gauss-Bonnet-Chern e o Teorema de Gursky, obtemos a desigualdade principal.

No caso de igualdade, todas as desigualdades utilizadas na demonstração tornam-se igualdades, permitindo-nos derivar uma série de conclusões relevantes. Em particular, empregando o lema da curvatura escalar conforme, Lema 2.5, a definição do invariante de Yamabe, o Teorema de Gauss-Bonnet-Chern e a Proposição (2.2), chegamos a conclusão de que Σ é isométrica a $\mathbb{S}^6$. A seguir, detalhamos essas ideias.

Teorema 3.1 *Seja (M^7, g) uma variedade Riemanniana com curvatura escalar positiva, Ric $_M \geq 0$ e (Σ^6, g_Σ) uma hipersuperfície localmente conformemente plana, dois lados, compacta imersa em M, que é localmente minimizante de volume. Então*

$$|\Sigma| \left(\frac{\inf_M R}{30} \right)^3 \leq |\mathbb{S}^6| + \frac{1}{30^2} \int_\Sigma R_{g_\Sigma} ||E||^2 d\sigma,$$

onde $E = Ric - \frac{R}{6} g$, representa o tensor de Ricci sem traço. Além disso, se a igualdade ocorre, então (Σ^6, g_Σ) é isométrica a $(\mathbb{S}^6, g_{can})$ e em uma vizinhança de Σ, (M, g) é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^6, dt^2 + g_{can})$, a menos de uma mudança de escala.

Demonstração: A condição de estabilidade e a hipótese de que Ric $_M \geq 0$ nos garante que

$$\text{Ric}_M(N, N) = 0 \text{ e } ||A|| = 0 \text{ ao longo de } \Sigma.$$

Logo, Σ é uma hipersuperfície totalmente geodésica. Pela equação de Gauss (4), concluímos que

$$R_{g_\Sigma} = R_M \text{ ao longo } \Sigma,$$

para mais detalhes dessa afirmaçao, veja a seção 2.5, o início da demonstração do Lema 2.5.

A partir da desigualdade de Hölder

$$|\Sigma|(\inf_M R) \leq \int_\Sigma R_{g_\Sigma} d\sigma \leq |\Sigma|^{\frac{2}{3}} \left(\int_\Sigma R_{g_\Sigma}^3 d\sigma \right)^{\frac{1}{3}},$$

deduzimos a relação

$$|\Sigma|(\inf_M R)^3 \leq \int_\Sigma R_{g_\Sigma}^3 d\sigma. \tag{37}$$

Assim, usando o Teorema de Gauss-Bonnet-Chern para 6-variedades localmente conformemente planas (29), temos

$$\begin{aligned} \int_\Sigma R_\Sigma^3 d\sigma &= 2^6 3^2 5^2 \pi^3 \chi(\Sigma) + 30 \int_\Sigma R_{g_\Sigma} ||E||^2 d\sigma - \frac{55}{6} \int_\Sigma ||\nabla R_{g_\Sigma}||^2 d\sigma \\ &\leq 2^6 3^2 5^2 \pi^3 \chi(\Sigma) + 30 \int_\Sigma R_{g_\Sigma} ||E||^2 d\sigma. \end{aligned} \tag{38}$$

Portanto, unindo (37) e (38), obtemos

$$|\Sigma|(\inf_M R)^3 \leq 2^6 3^2 5^2 \pi^3 \chi(\Sigma) + 30 \int_\Sigma R_{g_\Sigma} ||E||^2 d\sigma.$$

Como Σ é localmente conformemente plana e $R_{g_\Sigma} > 0$, então pelo Teorema 2.3, temos que $\chi(\Sigma) \leq 2$, e portanto

$$\begin{aligned} |\Sigma| \left(\frac{\inf_M R}{30} \right)^3 &\leq \frac{2^7 3^2 5^2}{30^3} \pi^3 + \frac{30}{30^3} \int_\Sigma R_{g_\Sigma} ||E||^2 d\sigma \\ &= |\mathbb{S}^6| + \frac{1}{30^2} \int_\Sigma R_{g_\Sigma} ||E||^2 d\sigma, \end{aligned} \tag{39}$$

porque $|\mathbb{S}^6| = \dfrac{16}{15}\pi^3$.

Se ocorre a igualdade em (39), a característica de Euler é igual a dois, o ínfimo da curvatura escalar de M e a curvatura escalar de M são iguais ao longo de Σ, $R_M = \inf_M R > 0$ e $||\nabla R_{g_\Sigma}|| = 0$, logo R_{g_Σ} é positiva e constante. Pelo Lema 2.5, como Σ possui curvatura escalar positiva na métrica induzida g_Σ então, $R_{\bar{g}} > 0$, onde $\bar{g}$ é uma métrica na classe conforme de g_Σ. Assim como $R_{\bar{g}} > 0$ então $\mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma) > 0$ (veja a seção 2.3).

Queremos provar que (Σ^6, g_Σ) é isométrica a $(\mathbb{S}^6, g_{\text{can}})$, a menos de um escalonamento. Suponhamos que a igualdade ocorra em (39) e que (Σ^6, g_Σ) não seja conformemente isométrica a $(\mathbb{S}^6, g_{\text{can}})$, por (9) temos que $\mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma^6) < \mathcal{Y}_{[g_{\text{can}}]}(\mathbb{S}^6)$. Logo, o invariante de Yamabe de (Σ^6, g_Σ) satisfaz:

$$0 < \mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma) < \mathcal{Y}_{[g_{\text{can}}]}(\mathbb{S}^6) = 30(16\pi^3/15)^{\frac{1}{3}}. \tag{40}$$

Existe uma métrica $\tilde{g}$ conforme a g_Σ tal que $|\Sigma|_{\tilde{g}} = 1$, então por definição do invariante de Yamabe $R_{\tilde{g}} = \mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma)$ e $R_{\tilde{g}}$ é constante.

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet Chern para 6-variedades localmente conformemente planas (29), temos que

$$\begin{aligned} 384\pi^3\chi(\Sigma) &= \frac{2}{75}\int_\Sigma R_{\tilde{g}}^3 d\sigma - \frac{4}{5}\int_\Sigma R_{\tilde{g}}||E||^2 d\sigma + \frac{2}{15}\int_\Sigma ||\nabla R_{\tilde{g}}||^2 d\sigma \\ &= \frac{2R_{\tilde{g}}^3}{75}\text{Vol}\,(\Sigma,\tilde{g}) - \frac{4R_{\tilde{g}}}{5}\int_\Sigma ||E||^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Logo,

$$384\pi^3\chi(\Sigma) \leq \frac{2}{75}R_\Sigma^3. \tag{41}$$

Se (Σ^6, g_Σ) não é isométrica a $(\mathbb{S}^6, g_{\text{can}})$, então obtemos uma contradição de (40) e (41), pois como $\chi(\Sigma) = 2$, segue que

$$768\pi^3 \leq \frac{2}{75}\mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma)^3 < \frac{2}{75}\mathcal{Y}_{[g_{\text{can}}]}(\mathbb{S}^6)^3 = \frac{2}{75}30^3(16\pi^3/15) = 768\pi^3.$$

Portanto, $\mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma^6) = \mathcal{Y}_{[g_{\text{can}}]}(\mathbb{S}^6)$ e R_{g_Σ} é constante. Logo, pela Proposição 2.2, (Σ^6, g_Σ) é isométrica a esfera $(\mathbb{S}^6, g_{\text{can}})$, a menos de um escalonamento.

$\boxed{\text{Q.E.D.}}$

3.2 RIGIDEZ LOCAL

Nas hipóteses do Teorema 3.1, no caso de igualdade em (39), desejamos mostrar que em uma vizinhança de Σ, (M, g) é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^6, dt^2 + g_{\text{can}})$, a menos de um escalonamento.

A prova da divisão local é realizada construindo uma folheação de M em torno de Σ por hipersuperfícies com curvatura média constante. Esta técnica, que descrevemos a seguir para completude da prova, foi utilizada por diversos autores, veja [4], [5], [25], [26] e [29].

Proposição 3.1 *Se Σ atinge a igualdade em (39), então em uma vizinhança de Σ, (M, g) é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^n, dt^2 + g_{can})$, a menos de um escalonamento.*

Demonstração: Nas hipóteses do nosso teorema, Σ é localmente minimizante de volume, o que implica que $H(0) = 0$. Além disso, mostramos que Σ é isométrica à esfera padrão $\mathbb{S}^6$, a menos de um escalonamento.

Considere a função suave $w : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Para cada ponto $x \in \Sigma$, temos $w(0, x) = 0$, $\dfrac{\partial w}{\partial t}(t, x)\Big|_{t=0} = 1$ e $\int_\Sigma (w(t, \cdot) - t) d\sigma = 0, \forall\, x \in \Sigma$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

2. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\Sigma_t = \{\exp_x(w(t,x)N(x)) \in M : x \in \Sigma\}$ é uma hipersuperfície fechada e imersa em M com curvatura média nula.

As condições Ric $(N, N) = 0$ e $\|A\|^2 = 0$ implicam que o operador de Jacobi associado a Σ é igual a $L = \Delta_\Sigma$. A existência da função w é garantida pelo Teorema da Função Implícita, para mais detalhes veja [29].

A função $w(t, x)$ descreve a deformação da hipersuperfície Σ ao longo da direção normal $N(x)$ para gerar as hipersuperfícies Σ_t. A condição $w(0, x) = 0$, garante que, no instante inicial ($t = 0$), a hipersuperfície Σ_t coincide com Σ. A condição $\frac{\partial w}{\partial t}(t, x)\big|_{t=0} = 1$ garante que a "velocidade" inicial da deformação ao longo do campo normal $N(x)$ seja unitária e $\int_\Sigma (w(t, \cdot) - t) d\sigma = 0$ garante que a deformação preserva o centro de massa de Σ, ou seja, a deformação não desloca a hipersuperfície como um todo.

Vamos mostrar que $|\Sigma_0| = |\Sigma_t|$, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno. Denote por $H(t)$ a curvatura média de Σ_t. A função lapso ρ_t, definida por $\rho_t = \langle \frac{\partial}{\partial t}, N_t \rangle$, satisfaz a equação de Jacobi

$$H'(t) = -\Delta_t \rho_t - (\text{Ric}\,(N_t, N_t) + \||A_t\||^2)\rho_t,$$

onde $H'(t) = \frac{\partial H}{\partial t}$. Podemos assumir, diminuindo ε se necessário, que $\rho_t > 0$, $\forall\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, pois $\rho_0 = 1$ e Σ é compacta. Multiplicando a equação de Jacobi por $\frac{1}{\rho_t}$, integrando sobre Σ_t, pelo teorema da divergência e como Ric ≥ 0 e $||A||^2 \geq 0$, $\forall\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, obtemos

$$H'(t) \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t \leq -\int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla_t \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t \leq 0, \tag{42}$$

Assim, como $\rho_t > 0$, $H'(t) \leq 0$, $\forall\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. A hipersuperfície Σ é mínima, então $H(0) = 0$, logo $H(t) \leq 0 \leq H(-t)\ \forall\ [0, \varepsilon)$.

A fórmula da primeira variação do volume é, onde $\rho_t > 0$,

$$\frac{d}{dt}|\Sigma_t| = \int_{\Sigma_t} H(t)\rho_t d\sigma_t.$$

Como $H(0) = 0$ e $H(t) \leq 0 \leq H(-t),\ \forall\ [0, \varepsilon)$, segue que da fórmula da primeira variação que $|\Sigma_t| \leq |\Sigma_0|$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Por outro lado, como Σ é localmente minimizante de volume, $|\Sigma_t| \geq |\Sigma_0|$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Portanto $|\Sigma_t| = |\Sigma_0|$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Como consequência, $\dfrac{d}{dt}|\Sigma_t| = 0$ e $H(t) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Usando que $H'(t) = 0$ em (42), concluímos que ρ_t é constante em Σ_t e Σ_t é totalmente geodésica em M para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Para mostrar que M tem estrutura de produto local em uma vizinhança de Σ, considere o campo normal unitário $N_t(x)$ ao longo da curva $t \mapsto G(t, x) = \exp_x(w(t, x)N(x))$. Usando coordenadas locais $(x_1, \dots, x_6)$ em Σ, verificamos que

$$\langle \nabla_{\partial_t G} N_t, \partial_i G\rangle = -\langle N_t, \partial_t \partial_i G\rangle = -\partial_i \langle N_t, \partial_t G\rangle + \langle \nabla_{\partial_i G} N_t, \partial_t G\rangle = -\partial_i \rho_t = 0,$$

onde ∂_i representa $\frac{\partial}{\partial x_i}$ e ∂_t representa $\frac{\partial}{\partial t}$. Acima, usamos que $\nabla_{\partial_t G} N_t = 0$, pois Σ é totalmente geodésica e $\langle \nabla_{\partial_t G} N_t, N_t\rangle = \frac{1}{2}\partial_t \langle N_t, N_t\rangle = 0$. Isso implica que N_t é paralelo ao longo da curva $t \mapsto G(t, x)$.

Finalmente, a condição $\int_\Sigma (w(t, \cdot) - t) d\sigma = 0$ e o fato que $\rho_t = \langle \partial_t G, N_t\rangle = \partial_t w$ é constante em Σ_t, implicam

$$0 = \frac{d}{dt} \int_\Sigma (w(t, \cdot) - t) d\sigma = \int_\Sigma (\partial_t w - 1) d\sigma = (\partial_t w - 1)|\Sigma|,$$

portanto, $\partial_t w(t, x) = 1$ para todo $(t, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$. Portanto, $w(t, x) = t$ e a aplicação $G(t, x) = \exp_x(tN(x))$ define uma isometria entre $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ e uma vizinhança de Σ em M.

Q.E.D.

Nas mesmas hipoteses do Teorema 3.1, no caso de igualdade em (39), provamos que o recobrimento Riemanniano de (M, g) é isométrico a $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^6, dt^2 + g_{\text{can}})$, a menos de um escalonamento.

A prova rigidez global, que escrevemos a seguir, é essencialmente a prova descrita por Mendes [25], seguindo as ideias de [5].

Proposição 3.2 *O mapa $G : \mathbb{R} \times \Sigma \to M$ definido por $G(t, x) = \exp_x(tN(x))$ é uma isometria local e um mapa de cobertura.*

Demonstração: No caso de igualdade em (39) do Teorema 3.1, afirmamos que o mapa G : $\mathbb{R} \times \Sigma \to \mathrm{M}$ definido por $G(t, x) = \exp_x(tN(x))$, é uma isometria local e um mapa de cobertura. Vamos provar esta afirmação.

Seja $I = \{t \in \mathbb{R}_+ : G_{|(0,t)\times\Sigma}\}$ uma isometria local. Pelos resultados anteriores $I \neq \emptyset$ e Σ é isometrica a $\mathbb{S}^6$, a menos de um escalonamento. Precisamos mostrar que I é fechado e aberto em $(0, \infty)$. Primeiro, afirmamos que I é aberto. De fato, dado $t \in I$, $G_t = G(t, \Sigma)$ é homotópico a Σ em M, $|\Sigma_t| = |\Sigma|$ e $|E| = 0$, pois $G : \{t\} \times \Sigma \to \Sigma_t$ é uma isometria local e Σ_t minimiza o volume em sua classe de homotopia e atinge a igualdade em (39). Logo, existe $\delta > 0$ tal que $G_{|(0,t+\delta)\times\Sigma}$ é uma isometria local e I é aberto em $(0, \infty)$. Agora, vamos mostrar que I é fechado em $(0, \infty)$. Suponha que $t_k \in I$ converge para $t \in (0, \infty)$, se $t \le t_k$ para algum k então $t \in I$ porque $(0, t) \times \Sigma \subset (0, t_k) \times \Sigma$ e $G_{|(0,t_k)\times\Sigma}$ é uma isometria. Por outro lado, se $t_k < t$ para todo

k então $\cup_k (0, t_k) \times \Sigma = (0, t) \times \Sigma$, isto é, $t \in I$, porque $G_{|(0,t_k)\times\Sigma}$ é uma isometria local para k. Portanto, $I = (0, \infty)$ e $G_{|(0,\infty)\times\Sigma}$ é uma isometria local. Da mesma maneira, mostra-se que $G_{|(-\infty,0)\times\Sigma}$ é uma isometria local. Logo, G é uma isometria local e um mapa de cobertura.

Q.E.D.

4 RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES COM BORDO LIVRE

Neste capítulo, apresentamos os resultados sobre hipersuperfícies com bordo livre. Assim como no capítulo anterior, utilizamos a estabilidade da hipersuperfície, a equação de Gauss e o Teorema de Gauss-Bonnet-Chern para variedades com bordo de dimensão quatro e seis.

Com base no Teorema 4.1 de Escobar [17] e no Lema 2.3, Raulot [32] mostrou que se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana orientada compacta com bordo de dimensão $n = 6$ ou 4, localmente conformalmente plana com bordo totalmente umbílico, $\chi(M) = 1$ e $\mathcal{Y}[g](\mathrm{M}) > 0$, então a variedade (M^n, g) é conformemente isométrica ao hemisfério $(\mathbb{S}^n_+, g_{\text{can}})$. Seguindo algumas das ideias de Raulot, mostramos a rigidez dos principais teoremas deste capítulo: o Teorema 4.1 e o Teorema 4.2. Em todos os casos, supomos que a hipersuperfície possui o bordo totalmente geodésico e usamos o Teorema de Gauss-Bonnet-Chern para este cenário, conforme discutido em (14) e (25).

4.1 RESULTADOS

Os dois principais resultados desta seção estendem o Teorema 3.1 para o caso em que a variedade M^n, $n = 5$ ou 7, possui bordo não vazio e curvatura média do bordo não negativa. Além disso, assumimos que a hipersuperfície (Σ, g_Σ) possui bordo livre e totalmente geodésico. Encontramos uma desigualdade análoga ao caso fechado e, na ocorrência de igualdade, concluímos que (Σ, g_Σ) é isométrica ao hemisfério $(\mathbb{S}^4_+, g_{\text{can}})$, quando sua dimensão é 4, ou ao hemisfério $(\mathbb{S}^6_+, g_{\text{can}})$, quando sua dimensão é 6.

Teorema 4.1 *Seja* (M^5, g) *uma variedade Riemannina com bordo, Ric* $_M \geq 0$*, com curvatura escalar* $\inf_M R > 0$ *e curvatura média do bordo não negativa, isto é,* $H_{\partial M} \geq 0$*. Seja* Σ^4 *uma hipersuperfície com bordo livre e totalmente geodésico, dois lados, imersa em* M^5*, que minimiza o volume locamente, tal que* $\chi(\Sigma) \leq 1$*. Então*

$$|\Sigma| \left(\frac{\inf_M R}{12}\right)^2 \leq |\mathbb{S}^4_+| + \frac{1}{12}\int_\Sigma ||E||^2 d\sigma.$$

Além disso, se a igualdade se mantem, então (Σ^4, g_Σ) *é isométrica a* $(\mathbb{S}^4_+, g_{can})$ *e em uma vizinhança de* Σ*,* (M, g) *é isométrica a* $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^4_+, dt^2 + g_{can})$*, a menos de um escalonamento.*

Demonstração: Sob nossas hipóteses, mostramos no início da demonstração do Lema 2.4 que a curvatura escalar de Σ, denotada por R_{g_Σ}, coincide com a curvatura escalar de M, ou seja, $R_{g_\Sigma} = R_M$.

De fato, como Σ tem bordo livre e totalmente geodésico e $H_{\partial \mathrm{M}} \geq 0$, então $\Pi(N,N) \geq 0$. Assim, a condição de estabilidade (8) se reduz à seguinte desigualdade

$$\int_\Sigma (\text{Ric}\,(N,N) + ||A||^2) f^2 d\sigma \leq \int_\Sigma |\nabla f|^2 d\sigma. \tag{43}$$

Dessa forma, tomando $f = 1$ em (43), obtemos Ric $(N,N) = 0$ e $||A|| = 0$ ao longo de Σ, pois por hipótese Ric $_M \geq 0$. Pela equação de Gauss (4), segue que as curvaturas escalares de R_{g_Σ} e R_M possuem o mesmo valor ao longo de Σ. Para mais detalhes dessa afirmação, veja a primeira parte da demonstração do Lema 2.4.

Usando o Teorema de Gauss-Bonnet-Chern para 4-variedades com bordo, veja (14),

$$\int_\Sigma R^2 d\sigma = 192\pi^2\chi(\Sigma) - 6\int_\Sigma ||W||^2 d\sigma + 12\int_\Sigma ||E||^2 d\sigma - 48\int_{\partial\Sigma} \mathcal{B}\ d\sigma_{\partial\Sigma}, \tag{44}$$

onde

$$\mathcal{B} = 3\mathrm{RH} - 6\text{Ric}\,_M(N,N)\mathrm{H} - 6\mathrm{Rm}_{\gamma\alpha\gamma\beta}\Pi^{\alpha\beta} + 2\mathrm{H}^3 - 6\mathrm{H}||\Pi||^2 + 4\mathrm{tr}\,(\Pi^3),$$

e a desigualdade de Hölder,

$$|\Sigma|(\inf_M R)^2 \leq \int_\Sigma R^2_{g_\Sigma} d\sigma,$$

como Σ tem bordo totalmente geodésico e $||W||^2 \geq 0$, obtemos

$$|\Sigma|(\inf_M R)^2 \leq 192\pi^2\chi(\Sigma) + 12\int_\Sigma ||E||^2 d\sigma.$$

Por hipótese, a característica de Euler satisfaz $\chi(\Sigma) \leq 1$. Substituindo essa condição na desigualdade anterior, concluímos que

$$|\Sigma|\left(\frac{\inf R}{12}\right)^2 \leq |\mathbb{S}^4_+| + \frac{1}{12}\int_\Sigma ||E||^2 d\sigma, \tag{45}$$

pois, $|\mathbb{S}^4_+| = \frac{4}{3}\pi^2$.

No caso em que ocorre a igualdade em (45), observe que todas as desigualdades consideradas tornam-se igualdades, logo $\chi(\Sigma) = 1$ e $||W|| = 0$, assim Σ é localmente conformemente plana. Além disso, pelo Lema (2.4), como $R_{g_\Sigma} = R_M = \inf_M R > 0$, temos que $R_{\bar{g}} > 0$ e na igualdade, $\Pi(N,N) = 0$, assim por (36), $(\Sigma, \bar{g})$ tem bordo mínimo, i. é, $H_{\bar{g}} = 0$, onde $\bar{g}$ é uma métrica conforme a g_Σ. Como a curvatura escalar $R_{\bar{g}} > 0$ e a curvatura média $H_{\bar{g}} = 0$ então $\mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma, \partial\Sigma) > 0$.

Suponhamos que ocorra a igualdade em (45) e que (Σ^4, g_Σ) não seja conformemente isométrica a $(\mathbb{S}^4_+, g_{\mathrm{can}})$, por [17] temos que $\mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma^4) < \mathcal{Y}_{[g_{\mathrm{can}}]}(\mathbb{S}^4_+)$, e o invariante de Yamabe de (Σ^4, g_Σ) satisfaz:

$$0 < \mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma) < \mathcal{Y}_{[g_{\mathrm{can}}]}(\mathbb{S}^4_+) = 12(4\pi^2/3)^{\frac{1}{2}}. \tag{46}$$

Existe uma métrica $\tilde{g}$ conforme a g_Σ tal que $|\Sigma|_{\tilde{g}} = 1$, então por definição do invariante de Yamabe $R_{\tilde{g}} = \mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma) > 0$ e $R_{\tilde{g}}$ é constante.

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet Chern para 4-variedades localmente conformemente planas com bordo, como a curvatura escalar é constante e Σ tem bordo totalmente geodésico, temos

$$192\pi^2\chi(\Sigma) = R_{\tilde{g}}^2|\Sigma|_{\tilde{g}} - 12\int_\Sigma ||E||^2 d\sigma$$

e portanto,

$$192\pi^2\chi(\Sigma) \leq R_{\tilde{g}}^2.$$

Desse modo, como $\chi(\Sigma) = 1$, obtemos por (46)

$$192\pi^2 \leq \mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma)^2 < \mathcal{Y}_{[g_{\text{can}}]}(\mathbb{S}^4_+)^2 = 12^2(4\pi^2/3) = 192\pi^2,$$

o que nos leva a uma contradição. Portanto, $\mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma^4) = \mathcal{Y}_{[g_{\text{can}}]}(\mathbb{S}^4_+)$ e R_{g_Σ} é constante. Como consequência da Proposição 2.3, (Σ^4, g_Σ) é isométrica ao hemisfério $(\mathbb{S}^4_+, g_{\text{can}})$.

Q.E.D.

Seguindo argumentos semelhantes ao caso anterior, agora consideramos a situação em que a variedade ambiente M tem dimensão 7 e a hipersuperfície Σ tem dimensão 6. Mantemos hipóteses análogas às do Teorema 4.1, garantindo a estrutura necessária para estender os resultados ao caso de dimensão superior. Com essa abordagem, obtemos o seguinte teorema

Teorema 4.2 *Seja (M^7, g) uma variedade Riemannina com bordo, Ric$_M \geq 0$, $H_{\partial M} \geq 0$ e curvatura escalar positiva. Seja Σ^6 uma hipersuperfície com bordo livre e totalmente geodésico, localmente conformemente plana, dois lados, imersa em M^7, que minimiza o volume locamente, tal que $\chi(\Sigma) \leq 1$. Então*

$$|\Sigma|\left(\frac{\inf_M R}{30}\right)^3 \leq |\mathbb{S}^6_+| + \frac{1}{30^2}\int_\Sigma R_{g_\Sigma}||E||^2 d\sigma + \frac{1}{30^3}\int_{\partial\Sigma} \mathcal{B}_2\, ds,$$

onde $\mathcal{B}_2 = \dfrac{75}{2}\left(\dfrac{\partial ||E||^2}{\partial N} + \dfrac{4}{5}E(N, \nabla R)\right)$.

Além disso, se a igualdade se mantem, então (Σ^6, g_Σ) é isométrica a $(\mathbb{S}^6_+, g_{can})$ e em uma vizinhança de Σ, (M, g) é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon)\times\mathbb{S}^6_+, dt^2 + g_{can})$, a menos de um escalonamento.

Demonstração: As curvaturas escalares de (Σ, g_Σ) e (M, g), possuem valores iguais ao longo de Σ, isto é, $R_{g_\Sigma} = R_M$ ao longo de Σ (veja o início da demonstração do Lema 2.4).

Usando a desigualdade de Hölder (37),

$$|\Sigma|(\inf_M \mathrm{R}) \leq \int_\Sigma \mathrm{R}_\Sigma \, d\sigma \leq |\Sigma|^{\frac{2}{3}} \left(\int_\Sigma \mathrm{R}_\Sigma^3 \, d\sigma\right)^{\frac{1}{3}},$$

isto é,

$$|\Sigma|(\inf_M \mathrm{R})^3 \leq \int_\Sigma \mathrm{R}_\Sigma^3 \, d\sigma, \tag{47}$$

Em razão do Teorema de Gauss-Bonnet-Chern (25), temos

$$\int_M \mathrm{R}^3 dV_g = 2^6 3^2 5^2 \pi^3 \chi(\mathrm{M}) - \frac{55}{6}\int_M ||\nabla \mathrm{R}||^2 dV_g + 30 \int_M \mathrm{R}||\mathrm{E}||^2 dV_g + \int_{\partial M} \mathcal{B}_2 ds.$$

onde $\mathcal{B}_2 = \dfrac{75}{2}\left(\dfrac{\partial ||E||^2}{\partial N} + \dfrac{4}{5}E(N, \nabla R)\right)$, logo

$$\begin{aligned} |\Sigma|(\inf_M R)^3 &\leq 2^6 3^2 5^2 \pi^3 \chi(\Sigma) - \frac{55}{6}\int_\Sigma ||\nabla \mathrm{R}||^2 dV_g + 30 \int_\Sigma \mathrm{R}||\mathrm{E}||^2 d\mathrm{V}_g + \int_{\partial\Sigma} \mathcal{B}_2 ds \\ &\leq 2^6 3^2 5^2 \pi^3 \chi(\Sigma) + 30 \int_\Sigma \mathrm{R}||\mathrm{E}||^2 d\mathrm{V}_g + \int_{\partial\Sigma} \mathcal{B}_2 ds. \end{aligned} \tag{48}$$

pois $||\nabla R||^2 \geq 0$. Por hipótese, $\chi(\Sigma) \leq 1$, substituindo em (48), encontramos o resultado desejado

$$|\Sigma| \left(\frac{\inf \mathrm{R}}{30}\right)^3 \leq |\mathbb{S}^6_+| + \frac{1}{30^2}\int_\Sigma \mathrm{R}_\Sigma ||E||^2 + \frac{1}{30^3}\int_{\partial\Sigma} \mathcal{B}_2 ds, \tag{49}$$

visto que $|\mathbb{S}^6_+| = \frac{8}{15}\pi^3$.

No caso em que ocorre a igualdade em (49), afirmamos que (Σ^6, g) é isométrica a $(\mathbb{S}^6_+, g)$. Vamos provar esta afirmação por contradição. Em razão da igualdade em (47), $R_{g_\Sigma} = R_M = \inf_M \mathrm{R} > 0$ e R_Σ é constante. Devido ao Lema (2.4), temos que $R_{\bar{g}} > 0$ e $\Pi(N, N) = 0$ (na igualdade) por (36), $(\Sigma, \bar{g})$ tem bordo mínimo, i. é, $H_{\bar{g}} = 0$, onde $\bar{g}$ é uma métrica conforme a g_Σ. Como a curvatura escalar $R_{\bar{g}} > 0$ e a curvatura média $H_{\bar{g}} = 0$ então $\mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma, \partial\Sigma) > 0$.

Suponhamos que ocorra a igualdade em (49) e que (Σ^6, g_Σ) não seja conformemente isométrica a $(\mathbb{S}^6_+, g_{\text{can}})$, por [17] temos que $\mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma^6) < \mathcal{Y}_{[g_{\text{can}}]}(\mathbb{S}^6_+)$, e o invariante de Yamabe de (Σ^6, g_Σ) satisfaz:

$$0 < \mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma) < \mathcal{Y}_{[g_{\text{can}}]}(\mathbb{S}^6_+) = 30(8\pi^3/15)^{\frac{1}{3}}. \tag{50}$$

Existe uma métrica $\tilde{g}$ conforme a g_Σ tal que $|\Sigma|_{\tilde{g}} = 1$, então por definição do invariante de Yamabe $R_{\tilde{g}} = \mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma) > 0$ e $R_{\tilde{g}}$ é constante.

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet Chern para 6-variedades localmente conformemente planas com bordo, como a curvatura escalar é constante e Σ tem bordo totalmente geodésico, veja o Lema 2.3, temos

$$384\pi^3\chi(\Sigma) = \frac{2}{75}R^3_{\tilde{g}}|\Sigma|_{\tilde{g}} - \frac{4R}{5}\int_\Sigma ||E||^2 d\sigma$$

e portanto,

$$384\pi^3\chi(\Sigma) \leq \frac{2}{75}R_{\tilde{g}}^3.$$

Desse modo, como $\chi(\Sigma) = 1$, obtemos por (50)

$$384\pi^3 \leq \frac{2}{75}\mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma)^3 < \frac{2}{75}\mathcal{Y}_{[g_{\text{can}}]}(\mathbb{S}^6_+)^3 = \frac{2}{75}30^3(8\pi^3/15) = 384\pi^3,$$

o que nos leva a uma contradição. Portanto, $\mathcal{Y}_{[g_\Sigma]}(\Sigma^6) = \mathcal{Y}_{[g_{\text{can}}]}(\mathbb{S}^6_+)$ e R_{g_Σ} é constante. Como consequência da Proposição 2.3, (Σ^6, g_Σ) é isométrica ao hemisfério $(\mathbb{S}^6_+, g_{\text{can}})$.

$\boxed{\text{Q.E.D.}}$

4.2 RIGIDEZ LOCAL

Sob as mesmas hipóteses do Teorema 4.1, mostramos a seguir que, quando a igualdade em (45) ocorre, em uma vizinhança de Σ^4, (M^5, g) é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^4_+, dt^2 + g_{\text{can}})$, a menos de um escalonamento. A demonstração sob as hipóteses do Teorema 4.2 é análoga.

Seguimos as ideias de Ambrozio [1] e Barros e Cruz [3]. Estes autores demonstraram um resultado análogo para uma variedade Riemanniana M de dimensão n com bordo não vazio, assumindo a existência de uma hipersuperfície com bordo livre propriamente mergulhada, sob as condições de que $H_{\partial M}$ e R_M são limitados inferiormente.

Observe que, nas nossas hipóteses (Σ, g_Σ) é isométrica a $(\mathbb{S}^4_+, g_{\text{can}})$ e em particular Σ é Einstein. Uma hipersuperfície Σ com bordo livre e totalmente geodésico, dois lados, Einstein na métrica induzida, propriamente imersa em M, com $R_M = \inf R_M$, Ric (N, N) se anula ao longo de Σ, $H_{\partial M} = \inf H_{\partial M}$, $\forall p \in \partial M$, é chamada de *hipersuperfície infinitesimalmente rígida*.

Um exemplo de hipersuperfícies infinitesimalmente rígidas são faixas horizontais $\{r\} \times \Sigma$ em uma variedade Riemanniana $\mathbb{R} \times \Sigma$ munida da métrica produto, onde Σ é uma variedade de Einstein com curvatura escalar constante e o bordo sendo uma hipersuperfície com curvatura média constante.

Proposição 4.1 *Se Σ atinge a igualdade em (45), então em uma vizinhança de Σ, (M, g) é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^4_+, dt^2, +g_{can})$, a menos de um escalonamento.*

Demonstração: Nas hipóteses do Teorema 4.1, Σ é infinitesimalmente rígida, vamos provar que existe um número real positivo ε e uma função suave $w : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \to \mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- Para cada ponto $x \in \Sigma$, temos $w(0, x) = 0$, $\left.\frac{\partial w}{\partial t}(t, x)\right|_{t=0} = 1$ e $\int_\Sigma (w(t, \cdot) - t) d\sigma = 0, \forall\, x \in \Sigma$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

- Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\Sigma_t = \{\varphi(w(t,x),x) : x \in \Sigma\}$ é uma hipersuperfície com bordo livre e curvatura média constante.

Primeiro, seja Y um campo vetorial normal unitário em $\partial\mathrm{M}$ que coincide com o conormal exterior ν de $\partial\Sigma$. Considere $E_n = \{u \in C^{n,\alpha}(\Sigma); \int_\Sigma u \ d\sigma = 0\}$ o espaço de Banach com expoente de Hölder $\alpha \in (0,1)$. Seja Z um campo vetorial em M que coincide com N em Σ e $\mathrm{Z}(p)$ é tangente a $\partial\mathrm{M}$ para todo $p \in \partial\mathrm{M}$. Seja $\varphi = \varphi(t,x)$ o fluxo do campo Z. Escolha $\beta > 0, \delta > 0$ e u uma função real em uma bola aberta $B_\delta(0) = \{u \in C^{2,\alpha}(\Sigma); ||u||_{2,\alpha} < \delta\}$ tal que $\Sigma_u = \{\varphi(u(x),x),t); x \in \Sigma\}$ define uma hipersuperfície propriamente mergulhada, para todo $(u,t) \in B_\delta(0) \times (-\beta,\beta)$.

A partir daqui, usamos o subscrito u para indicar as quantidade associadas a Σ_u, logo H_u denotará a curvatura média de Σ_u, N_u denotará o campo vetorial normal unitário de Σ_u e Y_u denotará a restrição de Y a $\partial\Sigma_u$. Observe que $\Sigma_0 = \Sigma, H_0 = 0$, pois Σ é totalmente geodésica e $\langle N_0, X_0\rangle = 0$, pois Σ tem bordo livre.

Dados $\beta > 0$ e $\delta > 0$ pequenos, definimos o mapa $\Phi : (B_\delta(0) \cap E_2) \times (-\beta,\beta) \to E_0 \times C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)$ dado por

$$\Phi(u,t) = \left(H_{u+t} - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H_{u+t} d\sigma, \langle N_{u+t}, Y_{u+t}\rangle \right).$$

O mapa Φ está bem definido e $\Phi(0,0) = (0,0)$ porque $\Sigma_0 = \Sigma$ é mínimo e tem bordo livre. Note que $D\Phi(0,0)$ é um isomorfismo quando restrito a $0 \times E$, pois, para cada $v \in E_2$, o mapa $f : (-\beta,\beta) \times \Sigma \to M$ tal que $f(\cdot,t) = \varphi(tv(\cdot),\cdot) \in M$ nos dá uma variação cujo vetor variacional é $\left.\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0} = vZ = vN$ em Σ. Como Σ é infinitesimalmente rígida obtemos

$$D\Phi_{(0,0)}(0,v) = \left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{t=0}(0,tv) = \left(-\Delta_\Sigma v + \frac{1}{|\Sigma|}\int_{\partial\Sigma} \frac{\partial v}{\partial \nu} d\partial\Sigma, -\frac{\partial v}{\partial \nu}\right).$$

Escolhendo $\psi \in E_0$ e $z \in C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)$ encontramos o seguinte

$$\int_\Sigma \left(\psi + \frac{1}{|\Sigma|}\int_{\partial\Sigma} z d\partial\Sigma\right) d\sigma = \int_{\partial\Sigma} z d\partial\Sigma,$$

isto implica que existe uma única função $\theta \in E_2$ que resolve o seguinte problema de fronteira de Neumann

$$\begin{cases} \Delta_\Sigma \theta = \psi + \frac{1}{|\Sigma|}\int_{\partial\Sigma} z \ d\partial\Sigma & \text{em } \Sigma \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = -z & \text{em } \partial\Sigma \end{cases}$$

para mais detalhes veja o Teorema 2.1 de Nardi [28]. Logo, $D\Phi_{(0,0)}(0,\theta) = (\psi, z)$, assim $D\Phi_{(0,0)}$ é um isomorfismo quando restrito a $0 \times E_2$.

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, para algum ε pequeno, existe uma função $u(\cdot,t) \in B_\delta(0) \cap E_2$, para $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ tal que $u(x,0) = 0$ e $\Phi(u(t,x),t) = \Phi(0,0) = (0,0), \forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Assim, definindo $w(x,t) = u(x,t) + t$, para $(x,t) \in \Sigma \times (-\varepsilon,\varepsilon)$, temos que todas as hipersuperfícies $\Sigma_{t+u(t)} = \{\varphi(t+u(x,t),x); x \in \Sigma\}$ são hipersuperfícies com bordo livre e curvatura constante. Por definição, $w(x,0) = u(x,0) = 0$ para todo $x \in \Sigma$ e $w(\cdot,t) - t = u(t)$ pertence a $B_\delta(0) \cap E_2$ para todo $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Podemos construir uma variação $G(x,t) = \varphi(x, w(x,t)) \in M$ cujo vetor velocidade em Σ é igual a

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}\right) N.$$

Uma vez que para cada t temos

$$\left(H_{w(\cdot,t)} - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H_{w(\cdot,t)} d\sigma, \langle N_{w(\cdot,t)}, Y_{w(\cdot,t)}\rangle\right) = \Phi(t,u(t)) = (0,0),$$

tomando a derivada em $t = 0$ concluímos que $\frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0}$ satisfaz o problema de Neumann homogêneo. Além disso, $\int_\Sigma (w(x,t) - t) d\sigma = \int_\Sigma u(t,x) d\sigma = 0$ para todo t, tomando novamente a derivada em $t = 0$, obtemos

$$\int_\Sigma \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} d\sigma = |\Sigma|.$$

Portanto, $\frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 1$.
Observe que $G_0(x) = \varphi(x,0) = x$,

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} N_0(x) = N_0(x),\ \forall x \in \Sigma_0.$$

Assim, tomando um ε menor, se necessário, G parametriza uma folheação de M em torno de Σ_0.

A partir daqui, usaremos o subscrito t para denotar as quantidades associadas a $\Sigma_t = G_t(\Sigma_0)$. Queremos mostrar que $|\Sigma| = |\Sigma_t|$, para cada $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

A função lapso ρ_t dada por $\langle \frac{\partial G}{\partial t}, N_t\rangle$, para cada $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, satisfaz

$$\begin{aligned} H'(t) &= -\Delta_t \rho_t - (\text{Ric}\,(N_t,N_t) + |A_t|^2)\rho_t, \text{ em } \Sigma & (51)\\ \frac{\partial \rho_t}{\partial \nu_t} &= \Pi(N_t,N_t)\rho_t \text{ no } \partial\Sigma & (52)\end{aligned}$$

veja Ambrozio ([1], proposição 18) e Barros e Cruz ([3], Lema 1), onde $H'(t) = \partial H/\partial t$.

Como $\rho_0 = 1$, $\frac{\partial G}{\partial t}(x,0) = N_0(x)$ para todo $x \in \Sigma$. Podemos assumir que $\rho_t > 0$, $\forall\ t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Multiplicando (51) por $\dfrac{1}{\rho_t}$ e integrando sobre Σ_t

$$H'(t)\int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t = -\int_{\Sigma_t} \frac{\Delta_t \rho_t}{\rho_t} d\sigma_t - \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}\,(N_t,N_t) + |A_t|^2)\rho_t d\sigma_t.$$

Usando o teorema da divergência e (52)

$$\int_{\Sigma_t} \frac{\Delta_t \rho_t}{\rho_t} d\sigma_t = \int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla_t \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t + \int_{\partial \Sigma_t} \Pi(N_t, N_t) d\gamma_t.$$

Dessa maneira, como Ric ≥ 0, $\Pi \geq 0$

$$\begin{aligned} H'(t) \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t &= -\int_{\Sigma_t} \frac{\Delta_t \rho_t}{\rho_t} d\sigma_t - \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}\,(N_t, N_t) + |A_t|^2) \rho_t d\sigma_t \\ &\leq -\int_{\Sigma_t} \frac{|\nabla_t \rho_t|^2}{\rho_t^2} d\sigma_t - \int_{\partial \Sigma_t} \Pi(N_t, N_t) d\partial\Sigma_t \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

Assim, $H'(t) \leq 0,\ \forall t \in [0, \varepsilon)$, pois $\rho_t > 0$. Portanto, $H(t) \leq 0 \leq H(-t)\ \forall\ [0, \varepsilon)$. Por outro lado, como cada Σ_t tem bordo livre, pela fórmula da primeira variação do volume (5),

$$\frac{d}{dt} |\Sigma_t| = \int_{\Sigma_t} H(t) \rho_t d\sigma_t$$

e pelo fato de Σ ser localmente minimizante de volume, temos $|\Sigma_t| = |\Sigma|,\ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dessa forma, cada Σ_t é infinitesimalmente rígida.

Uma vez que a função de lapso satisfaz o problema de Neumann homogêneo, ela é constante (como função de t) em cada t. A função $u(t, x) = 0$ enquanto o campo vetorial N_t é paralelo para todo $(t, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ e seu fluxo é dado pelo mapa exponencial, ou seja, $G(t, x) = \exp_x(tN(x)), \forall x \in \Sigma$, que define uma isometria para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Portanto, a métrica de (M, g) em uma vizinhaça de Σ pode ser escrita como a métrica produto $d_t^2 + g_{\text{can}}$.

$\boxed{\text{Q.E.D.}}$

5 Considerações Finais

Os resultados obtidos neste trabalho contribuem para uma melhor compreensão da rigidez geométrica de hipersuperfícies que minimizam o volume em variedades Riemannianas com restrições de curvatura, abrangendo tanto o caso fechado quanto o caso com bordo. O estudo da rigidez dessas hipersuperfícies, sejam elas com ou sem bordo, evidencia a profunda interrelação entre geometria diferencial, análise variacional e topologia. Além de sua importância teórica, essas estruturas geométricas possuem conexões diretas com problemas fundamentais em física matemática, como aqueles associados à relatividade geral, e surgem naturalmente como soluções de problemas variacionais. Os resultados aqui apresentados podem motivar novas investigações, incluindo generalizações para outras dimensões, extensões para variedades com diferentes condições geométricas. Além disso, as ferramentas analíticas e geométricas utilizadas ao longo deste estudo podem ser aplicadas a uma ampla gama de problemas, promovendo avanços tanto na teoria quanto em aplicações matemáticas e físicas.

REFERÊNCIAS

[1] Ambrozio, L. C. Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds. *The Journal of Geometric Analysis 25* (2015), 1001–1017.

[2] Aubin, T. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl.(9) 55* (1976), 269–296.

[3] Barros, A., and Cruz, C. Free boundary hypersurfaces with non-positive Yamabe invariant in mean convex manifolds. *J. Geom. Anal. 30*, 4 (2020), 3542–3562.

[4] Barros, A., Cruz, C., Batista, R., and Sousa, P. Rigidity in dimension four of area-minimising Einstein manifolds. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 158*, 2 (2015), 355–363.

[5] Bray, H., Brendle, S., and Neves, A. Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds. *Comm. Anal. Geom. 18*, 4 (2010), 821–830.

[6] Bray, H. L. *The Penrose inequality in general relativity and volume comparison theorems involving scalar curvature*. stanford university, 1997.

[7] Brendle, S., and Chen, S.-Y. S. An existence theorem for the Yamabe problem on manifolds with boundary. *Journal of the European Mathematical Society 16*, 5 (2014), 991–1016.

[8] Cai, M. Volume minimizing hypersurfaces in manifolds of nonnegative scalar curvature. In *Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry (Baltimore, MD, 1999)*, vol. 34 of *Adv. Stud. Pure Math.* Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, pp. 1–7.

[9] Cai, M., and Galloway, G. Rigidity of area minimizing tori in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. *arXiv preprint math/9804096* (1998).

[10] Chern, S.-s. A simple intrinsic proof of the gauss-bonnet formula for closed riemannian manifolds. *Annals of mathematics 45*, 4 (1944), 747–752.

[11] Chern, S.-s. On the curvatura integra in a riemannian manifold. *Annals of Mathematics 46*, 4 (1945), 674–684.

[12] Chodosh, O., Eichmair, M., and Moraru, V. A splitting theorem for scalar curvature. *Comm. Pure Appl. Math. 72*, 6 (2019), 1231–1242.

[13] Deng, H. A bray-brendle-neves type inequality for a riemannian manifold. *Acta Mathematica Scientia 41* (2021), 487–492.

[14] Do Carmo, M. P. *Geometria riemanniana*, quinta ed. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

[15] Escobar, J. F. Uniqueness theorems on conformal deformation of metrics, Sobolev inequalities, and an eigenvalue estimate. *Comm. Pure Appl. Math. 43*, 7 (1990), 857–883.

[16] Escobar, J. F. Conformal deformation of a riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary. *Annals of Mathematics 136*, 1 (1992), 1–50.

[17] Escobar, J. F. The Yamabe problem on manifolds with boundary. *Journal of Differential Geometry 35*, 1 (1992), 21–84.

[18] Escobar, J. F. Conformal metrics with prescribed mean curvature on the boundary. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations 4*, 6 (1996), 559–592.

[19] Gromov, M., and Lawson, H. B. The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature. *Annals of Mathematics 111*, 3 (1980), 423–434.

[20] Gursky, M. J. Locally conformally flat four- and six-manifolds of positive scalar curvature and positive Euler characteristic. *Indiana Univ. Math. J. 43*, 3 (1994), 747–774.

[21] Huisken, G., and Yau, S.-T. Definition of center of mass for isolated physical systems and unique foliations by stable spheres with constant mean curvature. *Inventiones mathematicae 124*, 1-3 (1996), 281–311.

[22] Kobayashi, O. Scalar curvature of a metric with unit volume. *Math. Ann. 279*, 2 (1987), 253–265.

[23] Lee, J. M., and Parker, T. H. The Yamabe problem. *Bulletin of the American Mathematical Society 17*, 1 (1987), 37–91.

[24] Marques, F. C. Existence results for the Yamabe problem on manifolds with boundary. *Indiana University mathematics journal* (2005), 1599–1620.

[25] Mendes, A. a. Rigidity of volume-minimising hypersurfaces in Riemannian 5-manifolds. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 167*, 2 (2019), 345–353.

[26] Micallef, M., and Moraru, V. Splitting of 3-manifolds and rigidity of area-minimising surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc. 143*, 7 (2015), 2865–2872.

[27] Moraru, V. On area comparison and rigidity involving the scalar curvature. *The Journal of Geometric Analysis 26*, 1 (2016), 294–312.

[28] Nardi, G. Schauder estimate for solutions of poisson's equation with neumann boundary condition. *L'enseignement Mathématique 60*, 3 (2015), 421–435.

[29] Nunes, I. Rigidity of area-minimizing hyperbolic surfaces in three-manifolds. *Journal of Geometric Analysis 23* (2013), 1290–1302.

[30] Obata, M. The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. *J. Differential Geometry 6* (1971/72), 247–258.

[31] Petersen, P. Riemannian geometry. *Graduate Texts in Mathematics/Springer-Verlag* (2006).

[32] Raulot, S. Rigidité conforme des hémisphères $\mathbb{S}^4_+$ et $\mathbb{S}^6_+$. *Math. Z. 271*, 3-4 (2012), 707–714.

[33] Schoen, R. Conformal deformation of a riemannian metric to constant scalar curvature. *Journal of Differential Geometry 20*, 2 (1984), 479–495.

[34] Schoen, R., and Yau, S.-T. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature. *Annals of Mathematics 110*, 1 (1979), 127–142.

[35] Trudinger, N. S. Remarks concerning the conformal deformation of riemannian structures on compact manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche 22*, 2 (1968), 265–274.

[36] Yamabe, H. On a deformation of riemannian structures on compact manifolds. *Osaka Math. J.* (1960).