UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO EM MESTRADO

CLEISIANE DA SILVA FERNANDES

HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS COMPACTAS COM ÍNDICE UM NO ESPAÇO PROJETIVO REAL

Maceió - AL

2025

CLEISIANE DA SILVA FERNANDES

HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS COMPACTAS COM ÍNDICE UM NO ESPAÇO PROJETIVO REAL

Dissertação de Mestrado apresentada à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva

Maceió - AL

Fevereiro de 2025

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Helena Cristina Pimentel do Vale CRB-4/661

F363h Fernandes, Cleisiane da Silva.
Hipersuperfícies mínimas compactas com índice um no espaço projetivo real / Cleisiane da Silva Fernandes. – 2025.
38 f. : il.

. Orientador: José Anderson de Lima e Silva.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática. Maceió, 2025.

Bibliografia: f. 37-38.

1. Hipersuperfície de Clifford. 2. Índice estável. 3. Esferas totalmente geodésicas. I. Título.

CDU: 51

CLEISIANE DA SILVA FERNANDES

HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS COMPACTAS COM ÍNDICE UM NO ESPAÇO PROJETIVO REAL

Dissertação de Mestrado apresentada à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, e aprovada em 27 de fevereiro de 2025.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
JOSE ANDERSON DE LIMA E SILVA
Data: 27/02/2025 18:23:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva
Instituto de Matemática - UFAL
Orientador

Documento assinado digitalmente
MARCIO HENRIQUE BATISTA DA SILVA
Data: 27/02/2025 20:38:56-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva
Instituto de Matemática - UFAL
Examinador

Documento assinado digitalmente
FABIO REIS DOS SANTOS
Data: 27/02/2025 20:42:23-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Fabio Reis dos Santos
Departamento de Matemática - UFPE
Examinador

À minha sobrinha, que trouxe luz em um momento de escuridão.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me proporcionado chegar até aqui e por tantas outras coisas que tem feito em minha vida. Sem a Tua graça, eu nada faria.

Agradeço também à minha família por todo o apoio e compreensão, por estarem sempre ao meu lado em todos os momentos, principalmente nas ocasiões em que me senti incapaz.

Meus sinceros agradecimentos aos meus amigos, que estiveram comigo em todas as etapas, mesmo que indiretamente, ajudando como podiam. Em especial, agradeço à Gennifer pelos momentos de vinho e descontração, à Claudia pelas broncas e incentivos, e à Barbara pelos momentos de discussões matemáticas e surtos coletivos.

Agradeço ao meu orientador, Prof Dr. Anderson Lima, por ser tão paciente e prestativo comigo. Obrigada por sempre me dar apoio e mostrar que sou capaz. Obrigada também por sua amizade. Agradeço também aos professores da banca por disponibilizarem seu tempo para contribuírem de maneira significativa para minha formação.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta dissertação enunciaremos e demonstraremos o teorema de Do Carmo - Ritoré - Ros, que estabelece que as únicas hipersuperfícies mínimas dois-lados compactas com índice um no espaço projetivo real $\mathbb{RP}^{n+1}$ são as esferas totalmente geodésicas e as hipersuperfícies mínimas de Clifford. Além disso, as únicas mergulhadas são as hipersuperfícies de Clifford. Uma consequência é que as únicas hipersuperfícies mínimas compactas dois-lados que são estáveis preservando volume no espaço projetivo real $\mathbb{RP}^{n+1}$ são as esferas totalmente geodésicas e as hipersuperfícies mínimas de Clifford.

Palavras-chave: Hipersuperfície de Clifford, Índice, Estavél, Esferas Totalmente Geodésicas.

Abstract

In this dissertation, we will state and prove the Do Carmo - Ritoré - Ros theorem, which establishes that the only two-sided compact minimal hypersurfaces with index one in the real projective space $\mathbb{RP}^{n+1}$ are the totally geodesic spheres and the Clifford minimal hypersurfaces. Moreover, the only embedded ones are the Clifford hypersurfaces. A consequence is that the only two-sided compact minimal hypersurfaces that are volume-preserving stable in the real projective space $\mathbb{RP}^{n+1}$ are the totally geodesic spheres and the Clifford minimal hypersurfaces.

Keywords: Clifford Hypersurface, Index, Stable, Totally Geodesic Spheres.

Sumário

Introdução

A teoria das hipersuperfícies mínimas é um dos temas centrais da Geometria Diferencial, apresentando conexões profundas com a Análise e a Topologia. Em particular, o estudo das hipersuperfícies mínimas compactas em espaços de curvatura constante tem atraído grande interesse devido à sua relação com problemas variacionais e de estabilidade.

Seja $f : M \longrightarrow \overline{M}$ uma imersão. Dizemos que M é uma hipersuperfície de $\overline{M}$ se a co-dimensão da imersão for 1. A relação entre a curvatura de M e a curvatura do espaço ambiente $\overline{M}$ é descrita pela Equação de Gauss, que envolve a segunda forma fundamental da imersão. Mais precisamente, seja $p \in M$ e considere x, y vetores ortonormais no espaço tangente T_pM. As curvaturas seccionais K e $\overline{K}$ de M e $\overline{M}$, respectivamente, satisfazem:

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y)\rangle - |B(x, y)|^2. \tag{1}$$

No caso de hipersuperfície, a equação de Gauss admite uma expressão mais simples. Seja $\eta \in (T_pM)^\top$, com $|\eta| = 1$, e considere $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. Então, a segunda forma fundamental H satisfaz:

$$H(e_i, e_i) = \lambda_i, \quad H(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j,$$

onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são os valores próprios da aplicação de forma de Weingarten $A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$. Portanto, a equação (1) pode ser reescrita como:

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

Dizemos que uma imersão $f : M \longrightarrow \overline{M}$ é **mínima** se, para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_pM)^\top$, o traço da aplicação de Weingarten A_η for zero, ou seja,

$$\operatorname{tr} A_\eta = 0.$$

Além disso, uma hipersuperfície M é dita **orientável** se admite um campo contínuo de vetores normais não-nulos $v = \nabla f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que, para todo $x \in M$ e qualquer vetor $w \in T_xM$, vale a relação

$$\langle v(x), w\rangle = 0.$$

Se uma hipersuperfície M tem um campo de vetores normais unitários N, definido globalmente, então dizemos que M é dois-lados.

Para qualquer hipersuperfície, a segunda variação do funcional área induz uma forma quadrática Q. O índice dessa forma quadrática é chamado de **índice de Morse**.

A pesquisa sobre hipersuperfícies mínimas remonta aos estudos clássicos de Bernhard Riemann, Marcel Berger e Shiing-Shen Chern, que investigaram a relação entre a curvatura e a estabilidade dessas variedades. Esses trabalhos forneceram uma base para a compreensão de superfícies mínimas em espaços projetivos e esféricos, que continuam a ser objeto de intensa investigação matemática.

Neste contexto, uma questão fundamental é a classificação das hipersuperfícies mínimas com índice um no espaço projetivo real $\mathbb{RP}^{n+1}$. Esse problema se insere em uma linha de pesquisa que busca compreender quais variedades minimizam funcionais geométricos sob certas condições topológicas e diferenciais. O índice de Morse, que conta o número máximo de direções em que uma hipersuperfície pode ser deformada para reduzir sua área, desempenha um papel crucial nessa análise.

Um marco importante nesse estudo foi estabelecido por Do Carmo, Ritoré e Ros em seu artigo *Compact Minimal Hypersurfaces With Index One In The Real Projective Space*, onde os autores caracterizam as hipersuperfícies mínimas compactas com índice um no espaço projetivo real. Especificamente, eles demonstram que

As únicas hipersuperfícies mínimas dois-lados compactas com índice um no espaço projetivo real $\mathbb{RP}^{n+1}(1)$ *são as esferas totalmente geodésicas e as hipersuperfícies mínimas de Clifford. Além disso, as únicas mergulhadas são as hipersuperfícies de Clifford.*

Este trabalho tem como principal objetivo apresentar e demonstrar esse resultado, explorando ferramentas clássicas da Geometria Diferencial e da teoria das hipersuperfícies mínimas. Para isso, estruturamos a dissertação da seguinte forma:

No primeiro capítulo, introduzimos conceitos fundamentais de Geometria Riemanniana e Geometria Diferencial, essenciais para a compreensão das hipersuperfícies mínimas e de sua estabilidade.

No segundo capítulo, Apresentamos a caracterização das hipersuperfícies mínimas de Clifford no espaço projetivo real e as esferas totalmente geodésicas e demonstramos que elas possuem índice um. Desenvolvemos também os argumentos matemáticos necessários para a prova do teorema principal. Em particular, utilizamos a função teste $\phi_{a,b} : M \to \mathbb{R}^{n+}$, definida por

$$\phi_{a,b} = -\langle f, a\rangle f + \langle N, a\rangle N + \langle f, b\rangle N,$$

para estabelecer os lemas e corolários fundamentais. Esses resultados permitem, por fim, concluir a demonstração da classificação das hipersuperfícies mínimas com índice um em $\mathbb{RP}^{n+1}$.

A importância desse estudo reside não apenas na caracterização dessas hipersuperfícies, mas também na aplicação das técnicas utilizadas, que possuem desdobramentos em diversas áreas da Geometria Diferencial e da Física Matemática. Esperamos que esta dissertação contribua para uma melhor compreensão desse problema e sirva como base para investigações futuras sobre hipersuperfícies mínimas e suas propriedades variacionais. Entre as possíveis direções futuras, destacamos a análise de hipersuperfícies mínimas com índice maior que um e sua relação com espaços projetivos complexos.

1 Pré-requisitos

Neste capítulo estabeleceremos noções necessárias a compreensão dos capítulos posteriores.

1.1 Conexões; Curvaturas

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, de dimensão n e classe C^∞. Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M. Salvo menção do contrário, os resultados aqui apresentados encontram-se demonstrados em [4].

Definição 1. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y, \end{aligned}$$

que satisfaz as propriedades:

$$\begin{aligned} &i) \quad \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \\ &ii) \quad \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \\ &iii) \quad \nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y, \end{aligned}$$

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Podemos então definir a curvatura R de uma variedade Riemanniana M.

Definição 2. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \ Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemmaniana de M.

Dado um espaço vetorial V, seja

$$|X \wedge Y| = \sqrt{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelo par $X, Y \in V$.

Definição 3. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $S \in T_pM$ o número*

$$K(S) = K(X,Y) = \frac{(X,Y,X,Y)}{|X \wedge Y|^2},$$

onde $\{X,Y\}$ é uma base qualquer de S, é chamado de curvatura seccional de S em p.

Proposição 1. *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação trilinear $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$ por*

$$\langle R'(X,Y,W),Z\rangle = \langle Y,W\rangle \langle X,Z\rangle - \langle X,W\rangle \langle Y,Z\rangle,$$

para todo $X,Y,W,Z \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se e só se $R = K_0R'$, onde R é a curvatura de M.

Definição 4. *Dado um ponto $p \in M$, seja $\{e_1, ...e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM, definimos tensor curvatura de Ricci por*

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,e_i)e_i, Y\rangle,$$

e a curvatura escalar em p por

$$R(p) = \sum_{j=1}^{n} Ric(e_j,e_j) = \sum_{i,j}^{n} \langle R(e_j,e_i)e_i, e_j\rangle.$$

Sejam M e $\overline{M}$ variedades Riemannianas e $\phi : M \longrightarrow \overline{M}$ imersão isométrica. Considere ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e $\overline{M}$, respectivamente, tal que

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T,$$

para quaisquer $X,Y \in \mathcal{X}(M)$.

Definição 5. *A segunda forma fundamental B de M é definida como a aplicação bilinear e simétrica $B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)^{\perp}$ dada por*

$$B(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}.$$

Em particular,

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

Teorema 1. *(Equação de Gauss). Sejam $p \in M$ e X,Y vetores ortonormais de T_pM.Então*

$$K(X,Y) - \overline{K}(X,Y) = \langle B(X,X), B(Y,Y)\rangle - |B(X,Y)|^2.$$

Dada uma imersão isométrica, a segunda forma fundamental da imersão pode ser considerada como um tensor $B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^{\perp} \longrightarrow \mathcal{D}(M)$ definido por

$$B(X, Y, \eta) = \langle B(B, Y), \eta \rangle .$$

A derivada covariante se estende a esse tensor de maneira natural

$$(\overline{\nabla}_X B(Y, Z, \eta)) = X(B(Y, Z, \eta) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla_X^{\perp} \eta).$$

Seja $f : \overline{M} \longrightarrow M$ hipersuperfície fechada dois-lados imersa em uma variedade Riemanniana. Seja N o campo vetorial normal unitário ao longo de f, dado $p \in M$ e um vetor normal unitário $N \in T_pM$, definimos o operador linear $A_N : T_pM \longrightarrow T_pM$, denominado operador de Weingarten, por

$$A_N X = -\overline{\nabla}_X N, \forall X \in T_pM.$$

A_N é autoadjunto e está relacionado com a segunda forma fundamental B pela equação

$$\langle B(X, Y), N \rangle = \langle A_N X, Y \rangle.$$

Quando a codimensão de M é um, escrevemos apenas A. Os autovalores de A são chamados de curvaturas principais de M.

Proposição 2. *(Equação de Codazzi) Com a notação acima*

$$\left\langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta \right\rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

Definição 6. *Dada uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM. Definimos o vetor curvatura média de M em p por*

$$H(p) = \sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i)(p).$$

Dizemos que M é mínima se $H(p) = 0$, para todo $p \in M$.

1.2 Operadores em Variedades Riemmanianas e Índice de Morse

Nesta seção, introduziremos alguns operadores essenciais para compreensão das seções posteriores, ver [12].

Definição 7. *Seja $f \in C^{\infty}(M)$. Definimos:*

1. *O gradiente de f, grad f é o campo de vetores caracterizado pela equação*

$$df(X) = \langle grad\ f, X \rangle .$$

2. *O Hessiano de f, Hess f, é o tensor simétrico tal que, para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$*

$$Hess\ f(X,Y) = \langle \nabla_X grad\ f, Y\rangle = XYf - (\nabla_X Y)f.$$

3. *O Laplaciano de f, $\Delta f \in C^\infty(M)$ é a função*

$$\Delta f = Tr(Hess\ f) = \sum_{i=1}^{k}[\nabla_{E_i}(\nabla_{E_i} f) - (\nabla_{E_i} E_i)f],$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^k$ é uma base ortonormal para TM.

O Laplaciano satisfaz a regra do produto

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle grad\ f, grad\ g\rangle.$$

Definição 8. *Uma variação é dita normal se $X = uN$ para alguma função $u \in C^\infty(M)$. Cada função suave u introduz uma variação normal ϕ com campo variacional uN, dada por*

$$\psi_t(p) = \exp_{x(p)}(tu(p)N(p)),$$

donde exp *denota a aplicação exponencial em M, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e ϵ é suficientemente pequeno.*

Definição 9. *Podemos considerar o funcional área $\mathcal{A}_u : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ associado à variação normal ϕ, definido por*

$$\mathcal{A}_u(t) = |M_t| = \int_M dV_t,$$

onde M_t é a variedade M com a métrica induzida por x_t e dV_t é o volume Riemmaniano.

Definição 10. *O funcional volume $\mathcal{V}_u : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ é definido por*

$$\mathcal{V}_u(t) = \int_{[0,t]\times M} \psi^* dV,$$

onde dV é o elemento volume de M.

Dizemos que a variação normal ψ preserva volume se, e somente se, $\mathcal{V}_u(t) = \mathcal{V}_u(0)$ para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

A fórmula para a primeira variação do volume é

$$\mathcal{V}'(0) = \int_M \langle X, N\rangle\, dV,$$

onde $X = \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{t=0}$. De fato, fixe $p \in M$ e escolha um referencial ortonormal positivo $e_1, \cdots e_{n+1} = N$ em torno de $f(p)$, então

$$\psi^*(dM) = a(t,p)dt \wedge dM,$$

onde

$$\begin{aligned} a(t,p) &= \psi^*(d\overline{M})\left(\frac{\partial}{\partial t}, e_1, \cdots, e_n\right) \\ &= d\overline{M}\left(\frac{\partial X}{\partial t}, dX_t e_1, \cdots, dX_t e_n\right) \\ &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t \right\rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'(0) &= \frac{d}{dt}\left(\int_{[0,t]\times M} a(t,p)dt \wedge dM\right)_{t=0} \\ &= \int_M a(0,p)dM \\ &= \int_M \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(0), N \right\rangle dM \\ &= \int_M \langle X, N\rangle \, dV. \end{aligned}$$

Uma variação normal com campo variacional uN preserva volume se, e somente se, u tem média nula, isto é, $\int_M u \; dV = 0$.

Considere $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \longrightarrow \overline{M}$ uma variação própria de ϕ com campo variacional V. A fórmula da primeira variação da área é

$$\mathcal{A}'_u(0) = -\int_M n \langle H, V\rangle \, dM.$$

De fato, pela regra de Leibniz

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt}(0) = \int_M \frac{d}{dt} V_t \Big|_{t=0}.$$

Basta mostrarmos então que

$$\frac{d}{dt} V_t \Big|_{t=0} = div(V^\top) - n\langle H, V\rangle,$$

onde $V^\top$ é a projeção ortogonal de V em TM, dái o resultado segue, pelo teorema da divergência. Fixe $p \in M$ e um referencial ortonormal $\{e_1, \cdots, e_n\}$ numa vizinhança $U \subset M$ de p em relação à métrica induzida por $\Phi_0 = \varphi$. Podemos diminuir U,se necessário, de modo que $(\Phi_t)_{|U} : U_t := \Phi_t(U)$ é um mergulho pata $|t| < \epsilon$. Considere o referencial $\{e_1(t), \cdots, e_n(t)\}$ em U_t tal que $e_i(t) = d\Phi_t e_i$ para $1 \leq i \leq n$. Então existem funções $a_{ij} : \overline{U}_t \longrightarrow \mathbb{R}$ com

$$e_i(t) = a_{ij}\overline{e}_k(t),$$

tais que $\det\ A(t) = \det\ (a_{ij}(t)) > 0$. Portanto,

$$\langle e_i(t), e_j(t)\rangle = a_i k \overline{jk} = (AA\top)_{ij},$$

daí
$$\det A(t) = \sqrt{det(g_{ij}(t)} = \sqrt{g(t)}.$$
Sendo dV_t o elemento volume de U_t em relação à métrica induzida por $\overline{M}$, segue que,

$$\begin{aligned} dV_t(e_1, \cdots, e_n) &= (\Phi_t^* dV_t)(e_1, \cdots, e_n) \\ &= dV_t(d\Phi_t e_1, \cdots, d\Phi_t e_n) \\ &= (e_1, \cdots, e_n) \\ &= (\det A) dV_t(\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_n) \\ &= \det A \\ &= \sqrt{g(t)}. \end{aligned}$$

De $g_{ij}(0) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ segue que $g(0) = \det(g_{ij}(0)) = \det Id = 1$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} dV_t\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(\sqrt{g(t)} dV\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(0)}} \frac{dg}{dt}(0) dV \\ &= \frac{1}{2}\frac{dg}{dt}(0) dV \\ &= \frac{1}{2} tr(g'_{ij}(0)) dV \\ &= \frac{1}{2} g'_{kk}(0) dV. \end{aligned}$$

Note que
$$g'_{kk}(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \langle e_k(t), e_k(t) \rangle = 2 \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial t}} e_k(t), e_l(t) \right\rangle.$$
Em $(-\epsilon, \epsilon) \times M$ tome a métrica canônica e denotando por e_k o levantamento vertical de $e_k \in \mathcal{X}(U)$ a $(-\epsilon, \epsilon) \times U$, temos $[\partial_t, e_k] = 0$. Por outro lado, de $\Phi_t = \Phi \circ (t, q)$ segue que

$$e_k(t) = (d\Phi_t) e_k = d\Phi_{(t,q)} \circ (d(t, q)) e_k = d\Phi_{(t,q)} e_k.$$

Portanto,
$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}, e_k(t)\right]_{\Phi(t,q)} = [d\Phi_{(t,q)} \partial_t, d\Phi(t, q) e_k] = d\Phi_{(t,q)} [\partial_t, e_k] = 0,$$
logo

$$\left\langle \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}, e_k(t)\right]_{\Phi(t,q)}, e_k(t) \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial \Phi}{\partial t}} e_k(t), e_k(t) \right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_{e_k(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} e_k(t), e_k(t) \right\rangle,$$

logo

$$g'_{kk}(t) = 2 \left\langle \overline{\nabla}_{e_k(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} e_k(t), e_l(t) \right\rangle = 2 \left\{ e_k(t) \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t}, e_k(t) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \overline{\nabla}_{e_k(t)} e_k(t) \right\rangle \right\}$$

Supondo que $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial geodésico em $p \in U$ e denotando por A a segunda forma fundamental de φ. Obtemos a partir de $e_k(0) = e_k$ que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}g'_{kk}(0) &= e_k\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t}, e_k\right\rangle - \langle V, \overline{\nabla}_{e_k}e_k\rangle \\
&= e_k\left\langle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^{\top}, e_k\right\rangle - \langle V, \nabla_{e_k}e_k\rangle - \langle V, A(e_k, e_k)\rangle \\
&= \left\langle \nabla_{e_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^{\top}, e_k\right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^{\top}, \nabla_{e_k}e_k\right\rangle - n\langle V, H\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_k}V\top, e_k\rangle - n\langle V, H\rangle \\
&= div(V^{\top}) - n\langle V, H\rangle .
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{d}{dt}dV_t\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}g'_{kk}(0) = div(V^{\top}) - n\langle V, H\rangle .$$

Temos portanto que M é hipersuperfície mínima se, e somente se, M é ponto crítico do funcional área para todo $u \in C^{\infty}(M)$. Assumindo então que M é mínima e aplicando o teorema da divergência, temos a segunda variação da área

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}''_u(0) &= \int_M (|\nabla u|^2 - (\overline{Ric}(N,N) + |A|^2)u^2)d\mu = \int_M u(\Delta u + (\overline{Ric}(N,N) + |A|^2)u)d\mu \\
&= -\int_M uLudV,
\end{aligned}$$

onde

$$L = \Delta + \overline{Ric}(N,N) + |A|^2,$$

é conhecido como operador de Jacobi, $|A|^2 = tr(A^2)$ é a norma de Hilbert-Schimidt do operador A e $\overline{Ric}$ é o tensor curvatura de Ricci de $\overline{M}$.

O operador de Jacobi de M, dado por $L = \Delta + |A|^2 + n$, está associado a forma quadrática

$$Q(u,u) = -\int_M uLudV = \int_M \{|\nabla u|^2 - (|A|^2 + n)u^2\}dV,$$

para qualquer função suave u.

Se λ é autovalor do Laplaciano Δ associado a autofunção u, então

$$\Delta u + \lambda u = 0,$$

como $Lu = \Delta u + |A|^2 u + nu$ segue que

$$Lu + (\lambda - |A|^2 - n)u = 0.$$

Portanto, se λ é autovalor do Laplaciano Δ, então $(\lambda - |A|^2 - n)$ é autovalor de L, se $|A|^2$ for constante.

Definição 11. *Seja M hipersuperfície mínima em $\overline{M}$. O índice de Morse de M, $Ind(M)$, é definido como a maior dimensão de qualquer subespaço $V \subset C^{\infty}(M)$ em que a forma quadrática Q é negativa definida, isto é,*

$$Ind(M) = \max\{\dim\ (V) : V \subset C^{\infty}(M), Q(f,f) < 0, \forall f \in V\}.$$

Segue então que $Ind(M)$ é o número de autovalores negativos de L (contando multiplicidades). Dizemos que M é estável se $Ind(M) = 0$.

1.3 Espaços de Recobrimento

Considere o espaço topológico X e as aplicações contínuas $a, b : [s_0, s_1] \to X$. Dado o caminho fechado $I = [0,1]$, suponha que $a(s_0) = a(s_1)$ e $b(s_0) = b(s_1)$. Dizemos que a e b são caminhos homotópicos, denotado por $a \simeq b$, se existir uma homotopia $H : [s_0, s_1] \times I \to X$ tal que

$$H(0,x) = a(0) = b(0) \quad \text{e} \quad H(1,x) = a(1) = b(1), \quad \forall x \in A \subset X.$$

A relação $a \simeq b$ goza das propriedades reflexivas, simétricas e transitivas. Indicaremos por $\alpha = [a]$ a classe de homotopia do caminho a e $\beta = [b]$ a classe de homotopia do caminho b. Definiremos o produto $\alpha\beta$ pondo

$$\alpha\beta = [a \cdot b] \Longrightarrow [a][b] = [a \cdot b].$$

Definição 12. *Seja X um espaço topológico e $x \in X$. O grupo fundamental $\pi_1(X,x)$ é um grupo formado pelas classes de homotopia dos caminhos fechados relativos a $\{0,1\}$ em X, com a operação*

$$[u][v] = [u \cdot v],$$

onde $[u], [v]$ são as classes de homotopia de u, v respectivamente.

Um aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$ induz um homomorfismo

$$f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0),\ y_0 = f(x_0),$$

definido por $f_{\#}(\alpha) = [f \circ a]$, onde $\alpha = [a]$.

Definição 13. *Sejam $f : X \longrightarrow Y$, $g : Z \longrightarrow Y$ aplicações contínuas. Um levantamento de g (relativamente a f) é uma aplicação contínua $\overline{g} : Z \longrightarrow Z$ tal que $f \circ \overline{g} = g$.*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[ur, "\overline{g}"] \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Proposição 3. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ contínua, localmente injetiva, definida num espaço de Hausdorff X. Se Z é conexo e $g : Z \longrightarrow Y$ é contínua então dois levantmentos $\overline{g}, \hat{g} : Z \longrightarrow X$ de g, que coincidem num ponto $z \in Z$, são iguais.*

Corolário 1. *Seja X conexo de Hausdorff. Uma aplicação contínua localmente injetiva $f : X \longrightarrow Y$ que admite uma secção $\sigma : Y \longrightarrow X$ é homeomorfismo e σ é seu inverso. Neste caso $\sigma \circ f$ são levantamentos de f.*

Dada uma aplicação de recobrimento $p : \overline{X} \longrightarrow X$, com $\overline{x} \in X$ e $x = p(\overline{x})$, denotaremos por $H(\overline{x})$ a imagem do homomorfismo $p_{\#} : \pi_1(\overline{X}, \overline{x}) \longrightarrow \pi_1(X, x)$. Se $\overline{X}$ é simplesmemte conexo então $\overline{H}(\overline{x}) = \{0\}$, para todo $\overline{x} \in \overline{X}$.

Lema 1. ***(O lema geral de levantamento.)*** *Seja $p : E \to B$ um revestimento; seja $p(e_0) = b_0$. Seja $f : Y \to B$ uma função contínua, com $f(y_0) = b_0$. Suponha que Y seja conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. O mapeamento f pode ser levantado para um mapeamento $\tilde{f} : Y \to E$ tal que $\tilde{f}(y_0) = e_0$ se e somente se*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Além disso, se tal levantamento existir, ele é único.

2 Classificação de Hipersuperfícies no Espaço Projetivo

Neste capítulo, classificaremos as hipersuperfícies no Espaço Projetivo e enunciaremos e provaremos os principais resultados que servirão de base para a demonstração do teorema principal.

2.1 Esferas Totalmente Geodésicas

Nesta seção introduziremos as Esferas Totalmente Geodésicas, onde calcularemos as suas curvaturas principais, quando ela é mínima e segunda forma fundamental. Mais detalhes em [6].

Considere a esfera unitária

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

As esferas de dimensão menor,

$$\mathbb{S}^k = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{k+1} = \cdots = x_{n+1} = 0\},$$

para $0 \leq k \leq n$, são subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{S}^n$. De fato, a aplicação

$$f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n, \quad f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_k, -x_{k+1}, \ldots, -x_{n+1})$$

é uma isometria cujo conjunto de pontos fixos é $\mathbb{S}^k$. Pelo seguinte teorema:

Teorema 2. *Seja $f : \overline{M} \longrightarrow \overline{M}$ uma isometria. Então, cada componente conexa M do conjunto dos pontos fixos de f,*

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in \overline{M} \mid f(x) = x\},$$

com a métrica Riemanniana induzida, é uma subvariedade totalmente geodésica.

Concluímos que $\mathbb{S}^k$ é uma esfera totalmente geodésica.

Como as esferas $\mathbb{S}^k$ são invariantes pela aplicação antípoda $A(p) = -p$, temos que ela induz subvariedades $\mathbb{RP}^k := \mathbb{S}^k/\{\pm\} \subset \mathbb{RP}^n := \mathbb{S}^n/\{\pm\}$. Essas subvariedades $\mathbb{S}^k/\{\pm\}$ são esferas totalmente geodésicas. De fato, seja α uma geodésica em $\mathbb{RP}^k$, então $\pi^{-1} \circ \alpha$ é uma geodésica de $\mathbb{S}^k$. Como $\mathbb{S}^k$ é totalmente geodésica em $\mathbb{S}^n$, segue que $\pi^{-1} \circ \alpha$ é geodésica de $\mathbb{S}^n$ logo α é geodésica em $\mathbb{RP}^n$.

As $\mathbb{S}^k/\{\pm\}$ são ditas esferas totalmente geodésicas em $\mathbb{RP}^n$. Note que para $k = n - 1$ podemos ter espaços projetivos ou esferas.

Seja $M = \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ dada por

$$M = \mathbb{S}^{n-1} := \mathbb{S}^n \cap \pi,$$

onde π é o hiperplano que passa pela origem com vetor normal unitário η. Seja $p \in M$, então o vetor normal unitário a M em p é o vetor

$$N = N(p) = \eta.$$

De fato, $|N| = |\eta| = 1$, além disso, para $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ temos $\langle p, N\rangle = 0$.

Além disso, dado $v \in T_pM$, seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Como $\alpha(t) \in \mathbb{S}^n$, então

$$\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle = |\alpha(t)|^2 = 1.$$

Derivando essa equação em relação a t, obtemos

$$\langle \alpha'(t), \alpha(t)\rangle = 0, \quad \forall t.$$

Em particular, para $t = 0$, temos

$$\langle N, v\rangle = \langle p, v\rangle = \langle \alpha(0), \alpha'(0)\rangle = 0.$$

Portanto, N é, de fato, normal a M.

Como N é constante, segunda forma fundamental de M, para $v, w \in T_pM$, é, portanto,

$$A(v, w) = \langle \nabla_v N, w\rangle = 0.$$

2.2 Hipersuperfícies de Clifford

Nesta seção introduziremos as hipersuperfícies de Clifford, onde calcularemos as suas curvaturas principais, quando ela é mínima e segunda forma fundamental.

Sejam n_1, n_2 inteiros, tais que $n_1 + n_2 = n$ e R_1, R_2 reais, tais que $R_1^2 + R_2^2 = 1$. Dadas as esferas $\mathbb{S}^{n_i}(R_i) = \{p_i \in \mathbb{R}^{n_i+1} : |p_i| = R_i\}, i = 1, 2$, produto cartesiano das esferas $\mathbb{S}^{n_1}(R_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(R_2)$ é hipersuperfície compacta, homogênea chamada de hipersuperfície de Clifford. Se $p = (p_1, p_2)$ é um ponto em $M = \mathbb{S}^{n_1}(R_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(R_2)$, então o vetor normal unitário a M em p é definido por

$$N = N(p) = \left(-\frac{R_2}{R_1}p_1, \frac{R_1}{R_2}p_2\right).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
|N| &= \sqrt{\left|-\frac{R_2}{R_1}p_1\right|^2 + \left|-\frac{R_1}{R_2}p_2\right|^2} \\
&= \sqrt{\frac{R_2^2}{R_1^2}|p_1|^2 + \frac{R_1^2}{R_2^2}|p_2|^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

N é unitário. Além disso $N \in (T_pM)^{\perp}$, de fato

$$\begin{aligned}
\langle p, N\rangle &= \left\langle (p_1, p_2), \left(-\frac{R_2}{R_1}p_1, \frac{R_1}{R_2}p_2\right)\right\rangle \\
&= -\frac{R_2}{R_1}|p_1|^2 + \frac{R_1}{R_2}|p_2|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dado $v = (v_1, v_2) \in T_pM$, seja

$$\begin{aligned}
\alpha : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow M \\
t &\longmapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t)),
\end{aligned}$$

uma parametrização de uma curva em M, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, sendo $\alpha_1(t) \in \mathbb{S}^{n_1}(R_1)$, $\alpha_2(t) \in \mathbb{S}^{n_2}(R_2)$. Note que

$$\langle \alpha_1(t), \alpha_1(t)\rangle = |\alpha_1(t)|^2 = R_1^2;$$
$$\langle \alpha_2(t), \alpha_2(t)\rangle = |\alpha_2(t)|^2 = R_2^2,$$

derivando o primeiro produto interno,

$$\langle \alpha_1'(t), \alpha_1(t)\rangle = 0, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

em particular, para $t = 0$,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_1'(0), \alpha_1(0)\rangle &= 0 \\
\langle v_1, p_1\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Analogamente $\langle v_2, p_2\rangle = 0$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\langle N, v\rangle &= \left\langle \left(-\frac{R_2}{R_1}p_1, \frac{R_1}{R_2}p_2\right), (v_1, v_2)\right\rangle \\
&= -\frac{R_2}{R_1}\langle p_1, v_1\rangle + \frac{R_1}{R_2}\langle p_2, v_2\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo $v \in T_pM$. Portanto N é, de fato, normal a M. Note que

$$N(\alpha(t)) = \left(-\frac{R_2}{R_1}\alpha_1(t), \frac{R_1}{R_2}\alpha_2(t)\right),$$

daí,

$$Av = -\frac{\partial N(\alpha(t))}{\partial t} = \left(\frac{R_2}{R_1}\alpha_1'(t), -\frac{R_1}{R_2}\alpha_2'(t)\right),$$

para $v = (\alpha_1'(0), 0)$,

$$Av = \frac{R_2}{R_1}(\alpha_1'(0), 0) = \frac{R_2}{R_1}v,$$

portanto $\frac{R_2}{R_1}$ é uma curvatura principal e analogamente vê-se que $-\frac{R_1}{R_2}$ é também curvatura principal, assim o operador A, na base ortonormal de T_pM $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é representado por

$$A = \begin{pmatrix} \frac{R_2}{R_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_2}{R_1} & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & -\frac{R_1}{R_2} & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & -\frac{R_1}{R_2} \end{pmatrix}.$$

Logo $tr\ A = \frac{R_2}{R_1}n_1 - \frac{R_1}{R_2}n_2$. Portanto $\frac{R_2}{R_1}$ tem multiplicidade n_1 e $-\frac{R_1}{R_2}$ tem multiplicidade n_2. Daí, M é mínima se, e somente se,

$$\begin{aligned} H &= 0 \\ \frac{\frac{R_2 n_1}{R_1} - \frac{R_1 n_2}{R_2}}{n+1} &= 0 \\ \frac{R_2 n_1}{R_1} - \frac{R_1 n_2}{R_2} &= 0 \\ \frac{R_2^2 n_1 - R_1^2 n_2}{R_1 R_2} &= 0 \\ R_2^2 n_1 &= R_1^2 n_2. \end{aligned}$$

Assumindo que M é mínima, segue que o quadrado da segunda forma fundamental A é

$$\begin{aligned} |A|^2 &= n_1\frac{R_2^2}{R_1^2} + n_2\frac{R_1^2}{R_2^2} \\ &= n_1\frac{R_2^2}{R_1^2} + n_1\frac{R_1^2}{R_1^2} - n_1\frac{R_1^2}{R_1^2} + n_1\frac{R_1^2}{R_2^2} + n_2\frac{R_2^2}{R_2^2} - n_2\frac{R_2^2}{R_2^2} \\ &= \frac{n_1}{R_1^2} + \frac{n_2}{R_2^2} - \frac{n_1 R_1^2 R_2^2 + n_2 R_1^2 R_2^2}{R_1^2 R_2^2} \\ &= \frac{n_1 R_2^2 + n_2 R_1^2 - n_1 R_1^2 R_2^2 - n_2 R_1^2 R_2^2}{R_1^2 R_2^2} \\ &= \frac{n_1 R_2^2 R_2^2 + n_2 R_1^2 R_1^2}{R_1^2 R_2^2} \\ &= \frac{n_2 R_1^2 R_2^2 + n_1 R_2^2 R_1^2}{R_1^2 R_2^2} \\ &= n_1 + n_2 \\ &= n. \end{aligned}$$

Portanto a curvatura de Ricci da esfera $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ é n. Portanto, o operador de Jacobi de M é

$$\begin{aligned} L &= \Delta + |A|^2 + n \\ &= \Delta + n + n \\ &= \Delta + 2n. \end{aligned}$$

Por [12] os autovalores do Laplaciano de M são

$$\frac{k_1(k_1+n_1-1)}{R_1^2} + \frac{k_2(k_2+n_2-1)}{R_2^2},$$

onde k_1, k_2 são inteiros não-negativos, com multiplicidade 1. Note que a hipersuperfície M é invariante por aplicação antipodal. De fato, dado $p = (p_1, p_2) \in M$, tem-se $p_1 \in \mathbb{S}^{n_1}(R_1)$ e $p_2 \in \mathbb{S}^{n_2}(R_2)$, daí

$$|-p_1| = |p_1| = R_1;$$

$$|-p_2| = |p_2| = R_2$$

Portanto o antípoda de p, $-p = (-p_1, -p_2) \in \mathbb{S}^{n_1} \times \mathbb{S}^{n_2} = M$.

Tem-se então que M introduz uma hipersuperfície mínima $M/\{\pm\}$ no espaço projetivo real $\mathbb{RP}^{n+1}(1) = \mathbb{S}^{n+1}(1)/\{\pm\}$, onde $\mathbb{RP}^{n+1}(1)$ é o conjunto das retas de $\mathbb{R}^{n+2}$ que passam pela origem. De fato, cada reta que passa pela origem determina, na esfera, dois pontos antípodas, e essa correspondência é biunívoca e sobrejetiva. Logo, essa hipersuperfície, que também chamaremos de hipersuperfície de Clifford, está bem definida. O operador de Jacobi de $M/\{\pm\}$ é dado também por $L = \Delta + 2n$, pois a projeção $\pi : \mathbb{S}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n+1}$ é uma isometria local, mas as autofunções são as que se mantém invariantes pelo mapeamento, ou seja, as funções pares. Logo, os autovalores de $M/\{\pm\}$ são dados por $k_1 + k_2$.

Em particular, os primeiros autovalores não negativos do Laplaciano de $M/\{\pm\}$ correspondentes a $k_1 = k_2 = 1$ são

$$\begin{aligned} \frac{k_1(k_1+n_1-1)}{R_1^2} + \frac{k_2(k_2+n_2-1)}{R_2^2} &= \frac{n_1}{R_1^2} + \frac{n_2}{R_2^2} \\ &= n_1\frac{1}{R_1^2} + n_2\frac{1}{R_2^2} \\ &= n_1\frac{R_1^2+R_2^2}{R_1^2} + n_2\frac{R_1^2+R_2^2}{R_2^2} \\ &= n_1 + n_1\frac{R_2^2}{R_1^2} + n_2 + n_2\frac{R_1^2}{R_2^2} \\ &= (n_1+n_2) + \left(n_1\frac{R_2^2}{R_1^2} + n_2\frac{R_1^2}{R_2^2}\right) \\ &= n + n \\ &= 2n. \end{aligned}$$

Portanto as hipersuperfícies mínimas de Clifford $M/\{\pm\}$ em $\mathbb{RP}^{n+1}$ tem índice um.

2.3 Resultados Básicos

Nesta seção, faremos alguns resultados básicos que são fundamentais para a compreensão e demonstração dos teoremas principais.

Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão de uma hipersuperfície mínima, orientável, compacta na esfera unitária. Fixando $a \in \mathbb{R}^{n+2}$, considere as funções em M definidas por $h_a(x) = \langle f(x), a\rangle$ e $g_a(x) = \langle N(x), a\rangle$, para $x \in M$ e definimos o campo vetorial tangente $a^\top : M \to \mathbb{R}^{n+2}$ por $a^\top = a - h_a f - g_a N$.

Lema 2. *Para qualquer vetor $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ fixado, temos*

1. $\nabla h_a = a^\top$ *e* $\nabla g_a = -A(a^\top)$;
2. $\Delta h_a = -nh_a + nHg_a$ *e* $\Delta g_a = nHh_a - |A|^2 g_a - \left\langle a^\top(p), \nabla H(p)\right\rangle.$

Em particular, se M for superfície mínima, então

$$\Delta h_a = -nh_a \text{ e } \Delta g_a = -|A|^2 g_a.$$

Demonstração. Para qualquer $v \in T_pM$, seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ uma curva, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Temos que

$$dh_a(v) = \left.\frac{dh_a(\alpha(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\langle\alpha(t), a\rangle}{dt}\right|_{t=0} = \langle\alpha'(0), a\rangle = \left\langle v, a^\top(p)\right\rangle.$$

Como a igualdade vale para qualquer $v \in T_pM$, então $\nabla h_a(p) = a^\top$.

Para g_a,

$$\begin{aligned} dg_a(v) &= \left.\frac{dg_a(\alpha(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\langle N\alpha(t), a\rangle}{dt}\right|_{t=0} = \langle dN\alpha'(0), a\rangle = -\left\langle A(v), a^\top(p)\right\rangle \\ &= \left\langle v, -A(a^\top(p))\right\rangle, \end{aligned}$$

então $\nabla g_a = -A(a^\top)$.

Por um lado, usando os Laplacianos das funções h_a e g_a,

$$\begin{aligned} \nabla_v \nabla h_a &= \nabla_v a^\top \\ &= \nabla_v(a - h_a f - g_a N) \\ &= \nabla_v a - h_a \nabla_v f - g_a \nabla_v N \\ &= -h_a(p)v + g_a(p)A(v). \end{aligned}$$

Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ base ortonormal de T_pM. Então,

$$\begin{aligned} \Delta h_a(p) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla h_a, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle -h_a(p)e_i + g_a(p)A(a), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_a e_i + \sum_{i=1}^{n} A(v) g_a(p) \\ &= -nh_a(p) + nHg_a(p). \end{aligned}$$

Por outro lado, pela equação de Codazzi,

$$\begin{aligned} \nabla_v \nabla g_a &= -\nabla_v (A(a^\top)) \\ &= -(\nabla_v A)(a^\top(p)) - A(\nabla_v a^\top) \\ &= -(\nabla_v A)(a^\top(p)) - A(-h_a(p)v + g_a(p)A(v)) \\ &= -(\nabla_{a^\top} A)(v) + h_a(p)A(v) - g_a(p)A^2(v). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Delta g_a(p) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla g_a, e_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left\langle (\nabla_{a^\top} A)(v) + h_a(p)A(v) - g_a(p)A^2(v), e_i \right\rangle \\ &= -\left\langle a^\top(p), \nabla H(p) \right\rangle + Hh_a(p) - |A|^2(p) g_a(p). \end{aligned}$$

No caso em que a hipersuperfície é mínima segue que $H = 0$ e então

$$\Delta h_a = -nh_a \text{ e } \Delta g_a = -|A|^2 g_a.$$

□

Corolário 2. *Sejam $f : M \longrightarrow \mathbb{S}^{n+2}$ uma hipersuperfície mínima e $a \in \mathbb{R}^{n+2}$. Então*

1. $L(\langle f, a \rangle f) = (|A|^2 - n) \langle f, a \rangle f + 2a^T$;

2. $L(\langle f, a \rangle N) = -2Aa^T$;

3. $L(\langle N, a \rangle f) = -2Aa^T$;

4. $L(\langle N, a \rangle N) = (n - |A|^2) \langle N, a \rangle N + 2A^2 a^T$.

Demonstração. Usando a equação do operador de Jacobi e o lema anterior, temos que

1. Pela linearidade do Operador de Jacobi e $\Delta h_a = -nh_a$,

$$\begin{aligned}
L(\langle f,a\rangle f) &= \Delta(\langle f,a\rangle f) + n(\langle f,a\rangle f) + |A|^2(\langle f,a\rangle f)\\
&= \Delta(\langle f,a\rangle)f + (\langle f,a\rangle)\Delta f + 2(\langle \nabla \langle f,a\rangle, \nabla f\rangle) + n(\langle f,a\rangle f) + |A|^2(\langle f,a\rangle f)\\
&= -n\langle f,a\rangle f - \langle f,a\rangle nf + 2\langle \nabla \langle f,a\rangle, \nabla f\rangle + n(\langle f,a\rangle f) + |A|^2(\langle f,a\rangle f)\\
&= (|A|^2 - n)(\langle f,a\rangle f) + 2a^T.
\end{aligned}$$

2. Pela linearidade do Operador de Jacobi, $\Delta h_a = -nh_a$ e $\Delta g_a = -|A|^2 g_a$,

$$\begin{aligned}
L(\langle f,a\rangle N) &= \Delta(\langle f,a\rangle N) + n(\langle f,a\rangle N) + |A|^2(\langle f,a\rangle N)\\
&= \Delta(\langle f,a\rangle)N + (\langle f,a\rangle)\Delta N + 2(\langle \nabla \langle f,a\rangle, \nabla N\rangle) + n(\langle f,a\rangle f)\\
&\quad +|A|^2(\langle f,a\rangle f)\\
&= -n(\langle f,a\rangle)N - (\langle f,a\rangle f)|A|^2 N + 2(\langle \nabla \langle f,a\rangle, \nabla N\rangle) + n(\langle f,a\rangle N)\\
&\quad +|A|^2(\langle f,a\rangle N)\\
&= -2Aa^T.
\end{aligned}$$

3. Pela linearidade do Operador de Jacobi e $\Delta g_a = -|A|^2 g_a$,

$$\begin{aligned}
L(\langle N,a\rangle f) &= \Delta(\langle N,a\rangle f) + n(\langle N,a\rangle f) + |A|^2(\langle N,a\rangle f)\\
&= \Delta(\langle N,a\rangle)f + (\langle N,a\rangle)\Delta f + 2(\langle \nabla \langle N,a\rangle, \nabla f\rangle) + n(\langle N,a\rangle f)\\
&\quad +|A|^2(\langle N,a\rangle f)\\
&= -|A|^2(\langle N,a\rangle f) - \langle N,a\rangle nf + 2(\langle \nabla \langle N,a\rangle, \nabla f\rangle) + n\langle N,a\rangle f\\
&\quad +|A|^2(\langle N,a\rangle f)\\
&= -2Aa^T.
\end{aligned}$$

4. Pela linearidade do Operador de Jacobi e $\Delta g_a = -|A|^2 g_a$,

$$\begin{aligned}
L(\langle N,a\rangle N) &= \Delta(\langle N,a\rangle N) + n(\langle N,a\rangle N) + |A|^2(\langle N,a\rangle N)\\
&= \Delta(\langle N,a\rangle)N + (\langle N,a\rangle)\Delta N + 2(\langle \nabla \langle N,a\rangle, \nabla N\rangle) + n(\langle N,a\rangle N)\\
&\quad +|A|^2(\langle N,a\rangle N)\\
&= -|A|^2\langle N,a\rangle N - \langle N,a\rangle |A|^2 N + 2\langle \nabla \langle N,a\rangle, \nabla N\rangle + n(\langle N,a\rangle N)\\
&\quad +|A|^2(\langle N,a\rangle N)\\
&= (n - |A|^2)(\langle N,a\rangle N) + 2A^2 a^T.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3. *(Teorema de Obata) Para que uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n \geq 2$ admita uma função não constante ϕ satisfazendo*

$$\nabla_X d\phi = -c^2\phi X, \quad \textit{para qualquer vetor } X,$$

é necessário e suficiente que a variedade seja isométrica a uma esfera $S^n(c)$ de raio $1/c$ no espaço Euclidiano de dimensão $n+1$.

Demonstração. Ver [9]). □

Dados $a, b \in \mathbb{R}^{n+2}$ considere a função vetorial $\phi_{a,b} : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ definida por

$$\phi_{a,b} = -\langle f, a\rangle f + \langle N, a\rangle N + \langle f, b\rangle N.$$

Lema 3. *O valor do operador de Jacobi aplicado na função $\phi_{a,b} : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ é dado por*

$$L\phi_{a,b} = (n - |A|^2)(\langle f, a\rangle f + \langle N, a\rangle N) + X,$$

onde $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ é o campo vetorial tangente a M, da forma $X = 2A^2a^T - 2a^T - 2Ab^T$.

Demonstração. Pela linearidade do operador de Jacobi, segue que

$$\begin{aligned} L\phi_{a,b} &= L(-\langle f, a\rangle f + \langle N, a\rangle N + \langle f, b\rangle N) \\ &= L(-\langle f, a\rangle f) + L(\langle N, a\rangle N) + L(\langle f, b\rangle N) \\ &= -(|A|^2 - n)\langle f, a\rangle f - 2a^T + (n - |A|^2)\langle N, a\rangle N + 2A^2a - 2Ab^T \\ &= (n - |A|^2)(\langle f, a\rangle f + \langle N, a\rangle N) + X. \end{aligned}$$

□

Lema 4. *Dados $a, b \in \mathbb{R}^{n+2}$, temos*

$$\int_M (|A|^2 - n)\langle N, a\rangle \langle f, b\rangle \, dV = 0.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \int_M (|A|^2 - n)\langle N, a\rangle \langle f, b\rangle \, dV &= \int_M |A|^2 \langle N, a\rangle \langle f, b\rangle - n\langle N, a\rangle \langle f, b\rangle \, dV \\ &= \int_M \left\langle |A|^2 N, a\right\rangle \langle f, b\rangle - \langle N, a\rangle \langle nf, b\rangle \, dV \\ &= \int_M -\langle \Delta N, a\rangle \langle f, b\rangle + \langle N, a\rangle \langle \Delta f, b\rangle \, dV \\ &= \int_M -\Delta\langle N, a\rangle \langle f, b\rangle + \langle N, a\rangle \Delta\langle f, b\rangle \, dV = 0. \end{aligned}$$

Onde usamos o teorema da divergência na última igualdade. □

2.4 Resultados Principais

Nesta seção enunciaremos e provaremos os principais teoremas deste trabalho.

Teorema 4. *As únicas hipersuperfícies mínimas dois-lados compactas com índice um no espaço projetivo real* $\mathbb{RP}^{n+1}(1)$ *são as esferas totalmente geodésicas e as hipersuperfícies de Clifford. Além disso, as únicas mergulhadas são as hipersuperfícies de Clifford.*

Demonstração. Seja $\overline{f} : \overline{M} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n+1}$ hipersuperfície mínima dois-lados compacta com índice um. Note que $\overline{M}$ é conexa. De fato, suponha que $\overline{M}$ possua uma componente conexa $\overline{M}_1$ e seu complementar $\overline{M}_2$. Defina

$$\begin{aligned} u &: \overline{M} \longrightarrow \mathbb{R}, u(\overline{M}_1) = 1 \text{ e } u(\overline{M}_2) = 0; \\ v &: \overline{M} \longrightarrow \mathbb{R}, v(\overline{M}_1) = 0 \text{ e } v(\overline{M}_2) = 1. \end{aligned}$$

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a combinação linear dessas funções resulta em:

$$\alpha u + \beta v = \begin{cases} \alpha, & \text{se } x \in \overline{M}_1, \\ \beta, & \text{se } x \in \overline{M}_2. \end{cases}$$

Para que essa função seja identicamente nula em toda $\overline{M}$, deve-se ter:

$$\alpha = 0 \quad \text{em} \quad \overline{M}_1, \quad \text{e} \quad \beta = 0 \quad \text{em} \quad \overline{M}_2.$$

Ou seja, a única solução possível é $\alpha = \beta = 0$, o que implica que u e v são linearmente independentes.

Note que $Q(u, v) = 0$ e $Q(u, u) = Q(v, v) < 0$, logo

$$\begin{aligned} Q(\alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v) &= \alpha^2 Q(u, u) + 2\alpha\beta Q(u, v) + \beta^2 Q(v, v) \\ &= \alpha^2 Q(u, u) + \beta^2 Q(v, v) < 0. \end{aligned}$$

Daí, como $\Delta u = 0$, segue que

$$L(u) = \Delta u + (n + |A|^2)u = (n + |A|^2)u.$$

Portanto

$$L(u) - (n + |A|^2)u = 0.$$

Analogamente,

$$L(v) - (n + |A|^2)v = 0.$$

Logo, $(n + |A|^2)$ é auto-valor negativo de L para as auto-funções u e v. Desse modo, $Ind\ \overline{M} > 1$, contradição! Então $\overline{M}$ é conexa.

Se $\overline{f}$ eleva-se a uma imersão na esfera, considere a aplicação $f : \overline{M} \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}(1)$ tal que $\pi \circ f = \overline{f}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{S}^{n+1} \arrow[d, "\pi"] \\
\overline{M} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathbb{RP}^{n+1}
\end{tikzcd}
$$

Então $\overline{M}$ é mínima, orientável com índice 1 na esfera. De fato, denote a diferencial de f e $\overline{f}$ respectivamente por $df = f_*$ e $d\overline{f} = \overline{f}_*$ e as conexões de $\mathbb{RP}^{n+1}$ e $\mathbb{S}^{n+1}$ por $\hat{\nabla}$ e $\overline{\nabla}$. Note que

$$
\begin{aligned}
\overline{f}_* \nabla_Y^M X &= \left(\hat{\nabla}_{\overline{f}_* Y} \overline{f}_* X\right)^{\top}; \alpha_{\overline{f}}(X,Y) = \left(\hat{\nabla}_{\overline{f_*} Y} \overline{f}_* X\right)^{\perp}; \\
f_* \nabla_Y^M X &= \left(\overline{\nabla}_{f_* Y} f_* X\right)^{\top}; \alpha_f(X,Y) = \left(\overline{\nabla}_{f_* Y} f_* X\right)^{\perp}.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\alpha_{\overline{f}}(X,Y) &= \left(\hat{\nabla}_{\overline{f_*} Y} \overline{f}_* X\right)^{\perp} \\
&= \left(\pi_* \overline{\nabla}_{f_* Y} f_* X\right)^{\perp} \\
&= \pi_* \left(\overline{\nabla}_{f_* Y} f_* X\right)^{\perp} \\
&= \pi_* \alpha_f(X,Y).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
H\overline{f} = Tr\ \alpha\overline{f} = Tr\ \pi_* \alpha f = \sum_{i=1}^{n} \pi_* \alpha f(e_i, e_i) = \pi_* Hf.
$$

como $H\overline{f} = 0$, segue que $Hf = 0$. Portanto, $\overline{M}$ é mínima. Além disso, pelo levantamento de campos, existe N tal que $\pi_* N = \overline{N}$, em cada ponto de $f(M) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, donde

$$
1 = |\overline{N}| = |\pi_* N| = |N|,
$$

e

$$
\langle N, X\rangle = \langle \pi_* N, \pi_* X\rangle = \left\langle \overline{N}, \pi_* X\right\rangle = 0, \forall X \in T_{\overline{f}}\overline{f}(M).
$$

Logo $\overline{M}$ é orientável na esfera. Por fim, mostraremos que o índice de $\overline{M}$ é um. Note que é suficiente mostrar que $|A_{\overline{f}}|^2 = |A_f|^2$, pois o índice depende da forma quadrádica associada ao operador de Jacobi. Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ base ortonormal em T_pM,

$$
\begin{aligned}
|A_{\overline{f}}|^2 &= \sum_{i,j} |\alpha_{\overline{f}}(e_i, e_j)|^2 \\
&= \sum_{i,j} |\pi_* \alpha_f(e_i, e_j)|^2 \\
&= \sum_{i,j} |\alpha_f(e_i, e_j)|^2 \\
&= |A_f|^2.
\end{aligned}
$$

Portanto $\overline{M}$ tem índice um na esfera. Segue de Simons [13] que $\overline{M}$ é esfera totalmente geodésica.

Assuma que o levantamento acima de $\overline{f} : \overline{M} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n+1}$ não existe. Pelo [7, Teorema 14.4] existe M e $h : M \to \overline{M}$ tal que $h_{\#}(\pi_1(M)) = Ker\, \overline{f}_{\#}$. Logo, $\overline{f} \circ h : M \to \mathbb{RP}^{n+1}$ verifica que $(\overline{f} \circ h)_{\#}(\cdot) = \overline{f}_{\#}(h_{\#}(\cdot)) = 0 \subset 0 = \pi_{\#}(0) = \pi_{\#}(\pi_1(S^{n+1}))$. Portanto, por [7, Lemma 14.2] a aplicação $\overline{f} \circ h$ pode ser levantada para uma aplicação $f : M \to S^{n+1}$ tal que $\pi \circ f = \overline{f} \circ h$ (Isto é, f é localmente congruente a $\overline{f}$).

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\overline{f}\circ h"] & \mathbb{S}^{n+1} \arrow[d, "\pi"] \\
\overline{M} \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathbb{RP}^{n+1}
\end{tikzcd}
$$

Sejam $X, Y \in TM$,

$$
\begin{aligned}
\left\langle (\overline{f} \circ h)_* X, (\overline{f} \circ h)_* Y \right\rangle &= \left\langle \overline{f}_* h_* X, \overline{f}_* h_* Y \right\rangle \\
&\overset{\overline{f}\text{é iso}}{=} g(h_* X, h_* Y) \\
&= (h_* g)(X, Y),
\end{aligned}
$$

onde g é a métrica de $\overline{M}$ e $h_* g$ é a métrica de M. Isto é, $\overline{f} \circ h$ preserva métrica e

$$
d(\overline{f} \circ h)(p) = d\overline{f}(h(p)) \cdot dh(p),
$$

como $d\overline{f}(h(p)$ tem posto máximo e $dh(p)$ é isometria linear segue que $\overline{f} \circ h$ tem posto máximo e portanto é isometria linear.

De $\overline{f}_{\#} : \pi_1(\overline{M}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, por passagem ao quociente, $\overline{f}$ induz uma bijeção

$$\hat{\overline{f}}_{\#} : \pi_1(\overline{M})/Ker\ \overline{f}_{\#} \longrightarrow Im\ (\overline{f}_{\#}).$$

Em particular, o número cardinal de $\mathbb{Z}_2$ é igual ao índice $[\pi_1(M) : Ker\ \overline{f}_{\#}]$, ou seja o recobrimento tem 2 folhas, então é duplo.

Seja $p \in M$, então $h^{-1}(\{p\}) = \{p_1, p_2\}$. Defina $s : M \longrightarrow M$,

$$\begin{aligned} s : \overline{M} &\longrightarrow \overline{M} \\ p_i &\longmapsto p_j,\ i \neq j, \end{aligned}$$

a involução isométrica induzida pela cobertura, de modo que $s(s(p_1)) = p_1 \Longrightarrow s^2 = I$. Temos que

$$\begin{aligned} \pi(f(p_1)) &= \overline{f}(h(p_1)) = \overline{f}(p) \\ \pi(f(p_2)) &= \overline{f}(h(p_2)) = \overline{f}(p), \end{aligned}$$

logo

$$f(p_1) = -f(p_2) = -f(s(p_1)) = -(f \circ s)(p_1).$$

Concluímos então que f é ímpar. Além disso, a bilinearidade de $\overline{M}$ implica que M é orientável e como o recobrimento duplo orientável inverte orientação, segue que o campo de vetores normal unitário $N : M \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}(1)$ verifica $N \circ s = -N$. Em particular as funções $\phi_{a,b}$ são pares com respeito a s, isto é, $\phi_{a,b} \circ s = \phi_{a,b}$. As primeiras autofunções φ do operador de Jacobi L de M é par também, pois os autoespaços associados tem dimensão um, s é uma isometria e $\varphi > 0$ em M.

Afirmação 1: Para qualquer $u \in U := \{u \in C^\infty(M) : u \circ s = u\}$ com

$$\int_M u\varphi dV = 0,$$

temos que $Q(u,u) \geq 0$. Além disso, $Q(u,u) = 0$ implica em $Lu = 0$.

Demonstração. A primeira parte é imediata do fato de M ter índice 1. Para a segunda parte, sejam $u, w \in U$ satisfazendo a igualdade acima, então

$$(tu + w) \circ s = t(u \circ s) + (w \circ s) = tu + w,$$

logo $tu + w \in U$ e satisfaz

$$\int_M (tu + w)\varphi dV = t\int_M u\varphi dV + \int_M w\varphi dV = 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} 0 &\leq Q(tu + w, tu + w) \\ &= Q(tu, tu) + 2Q(tu, w) + Q(w, w) \\ &= t^2 Q(u,u) + 2tQ(u,w) + Q(w,w), \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se $Q(u,u)=0$, então

$$0 \leq 2tQ(u,w)+Q(w,w), \forall t \in \mathbb{R}$$

Portanto $0=Q(u,w)=-\int_M wLudV$, para todo $w \in U$. Logo, $Lu=c\varphi$. Note que,

$$\int_M \varphi LudV = \int_M L(\varphi)udV = -\lambda_2 \int_M \varphi udV = 0,$$

onde λ_2 é o segundo autovalor do Operador de Jacobi, e

$$0=\int_M \varphi LudV = \int_M c\varphi^2 dV = c\int_M \varphi^2 dV.$$

Como φ não se anula, segue que $c=0$. Portanto $Lu=c\varphi=0$ em M. □

No nosso argumento usaremos como funções teste as aplicações $\phi_{a,b}$ que são pares e que, sob escolha adequada dos parâmetros $a,b \in \mathbb{R}^{n+2}$ será ortogonal a φ.

Pelos lemas (3) e (4),

$$\begin{aligned}
Q(\phi_{a,b},\phi_{a,b}) &= -\int_M \phi_{a,b}L\phi_{a,b}dV \\
&= -\int_M (-\langle f,a\rangle f + \langle N,a\rangle N + \langle f,b\rangle N)[(n-|A|^2) \\
&\quad (\langle f,a\rangle f + \langle N,a\rangle N) + X]dV \\
&= -\int_M (n-|A|^2)(-\langle f,a\rangle^2 - \langle f,a\rangle f\langle N,a\rangle N + \langle N,a\rangle N\langle f,a\rangle f + \langle N,a\rangle^2 \\
&\quad + \langle f,b\rangle N\langle f,a\rangle f + \langle f,b\rangle\langle N,a\rangle)dV \\
&= \int_M (n-|A|^2)(\langle f,a\rangle^2 - \langle N,a\rangle^2)dV.
\end{aligned}$$

Note que a forma quadrática não depende de b.

Considere a aplicação linear $F:\mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ definida, em $b \in \mathbb{R}^{n+2}$, por

$$F(b)=\int_M \varphi\langle f,b\rangle NdV.$$

Afirmação 2: F é um isomorfismo linear.

Demonstração. Suponha que $b \neq 0$ mas que $F(b)=0$. Tomando

$$\phi=\phi_{0,b}=\langle f,b\rangle N,$$

temos que

$$Q(\phi,\phi)=\int_M (n-|A|^2)(\langle f,0\rangle^2 - \langle N,0\rangle^2)dV = 0,$$

pela afirmação 1, $L\phi = 0$. Por outro lado, por (3)

$$L\phi = (n - |A|^2)(\langle f, 0\rangle + \langle N, 0\rangle + X = X.$$

$L\phi$ é um certo campo vetorial tangente X ao longo de M. Logo,

$$0 = L\phi = X = 2A^2 0^T - 2.0^T - 2Ab^T = Ab^T.$$

Desse modo, dado $Z \in \mathcal{X}(M)$,

$$\begin{aligned} Z\langle N, b\rangle &= \left\langle \overline{\nabla}_Z N, b\right\rangle \\ &= \left\langle -AZ, b^T\right\rangle \\ &= \left\langle Z, -Ab^T\right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

portanto $\langle N, b\rangle$ é constante. Como N é uma função ímpar, então $\langle N, b\rangle = 0$. O Hessiano da função linear $u = \langle f, b\rangle$ é dado por

$$Hess\ u = -u\langle \cdot, \cdot\rangle + \langle N, b\rangle \langle A, \cdot\rangle = u\langle \cdot, \cdot\rangle$$

Se $u \neq 0$, pelo **teorema de Obata** (3) M é isométrica a uma esfera unitária. Seja B a segunda forma fundamental de M e $k_1, \cdots, k_n$ as curvaturas principais de M. Pela equação de Gauss

$$\begin{aligned} K(e_i, e_j) &= \overline{K}(e_i, e_j) = k_i k_j, \forall\ i, j = 1, \cdots, n \\ 0 &= k_i k_j, \forall\ i, j = 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

Então existe no máximo um $k_j \neq 0$. Como

$$H = \sum_{j=1}^{n} k_j = 0 \Longrightarrow k_1 = \cdots = k_n = 0,$$

desse modo, M é totalmente geodésica em $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Então M é uma hipersuperfície linear no espaço projetivo ou uma esfera totalmente geodésica cobrindo duas vezes uma hipersuperfície linear. O primeiro caso não ocorre, pois o espaço projetivo é um-lado, o segundo caso também não ocorre, pois essa imersão eleva-se a esfera $(n+1)$-dimensional. Contradição.

Se $u \equiv 0$, então M é a interseção da esfera unitária com o hiperplano $b^\perp$ passando pela origem, contradição.

Portanto, $F(b) = 0$ se, e somente se, $b = 0$, logo F é injetiva. Pelo teorema do núcleo e da imagem, F é sobrejetora. Concluímos então que F é isomorfismo linear. $\square$

Note que

$$\int_M \phi_{a,b}\varphi dV = -\int_M \langle f,a\rangle f\varphi dV + \int_M \langle N,a\rangle N\varphi dV + \int_M \langle f,a\rangle N\varphi dV.$$

Para a dado, existe um único b tal que

$$F(b) = \int_M \langle f,a\rangle N\varphi dV = \int_M \langle f,a\rangle f\varphi dV - \int_M \langle N,a\rangle N\varphi dV.$$

isso implica que $\int_M \phi_{a,b}\cdot\varphi dV = 0 \overset{\text{Af. 1}}{\Longrightarrow} Q(\phi_{a,b},\phi_{a,b}) \geq 0.$

Portanto,

$$Q(\phi_{a,b},\phi_{a,b}) = \int_M (n-|A|^2)(\langle f,a\rangle^2 - \langle N,a\rangle^2)dV \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}^{n+2},$$

isto é, considere $a = \{e_1,\cdots,e_{n+2}\}$ se $Q(\phi_i,\phi_i)=0$, para todo i então $L\phi_{e_i}=0$. Logo

$$0 = L\phi_{e_i} = (n-|A|^2)(\langle f,a\rangle^2 - \langle N,a\rangle^2) + X \Longrightarrow \begin{cases} (n-|A|^2)\langle f,e_i\rangle = 0 \\ (n-|A|^2)\langle N,e_i\rangle = 0 \\ X = 0. \end{cases}$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n+2}(n-|A|^2)^2\langle f,e_i\rangle^2 \\ &= (n-|A|^2)^2\sum_{i=1}^{n+2}\langle f,e_i\rangle^2 \\ &= (n-|A|^2)^2|f|^2 \\ &= (n-|A|^2)^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$(n-|A|^2) = 0 \Longrightarrow n = |A|^2.$$

Pelo teorema de **Chern- do Carmo- Kobayashi** [3], M é localmente congruente a uma hipersuperfície mínima de Clifford.

Temos então que M é congruente a hipersuperfície mínima de Clifford $\mathbb{S}^{n_1}(R_1)\times\mathbb{S}^{n_2}(R_2)$, com $n_1R_1 = n_2R_2$, ou a uma cobertura finita não trivial dela. O segundo caso só é possível se n_1 ou n_2 forem iguais a 1, o que não ocorre pois $Ind\ M = 1$. Portanto M é congruente a uma hipersuperfície de Cliffod. □

Se $\overline{M} = \mathbb{RP}^{n+1}$ e M dois-lados, então o volume preservar a estabilidade é o mesmo que

$$-\int_M u(\Delta u + |A|^2 + n)u)dV \geq 0,$$

para qualquer função suave $u \in M$ com média 0. Como consequência, em [10] os domínios isoperimétricos em $\mathbb{RP}^3$ são encontrados.

Teorema 5. *As únicas hiperfícies mínimas compactas dois-lados que são estáveis em termos de preservação de volume no espaço projetivo real* $\mathbb{RP}^{n+1}$ *são as esferas totalmente geodésicas e as hipersuperfícies mínimas de Clifford.*

Demonstração. Seja M hipersuperfície mínima compacta dois-lados e preserva volume estável, então M tem ou 0 ou 1 autovalor negativo, logo $\Delta + |A|^2 + n$ tem índice 0 ou 1. Como $|A|^2 + n > 0$, ele não pode ter índice 0, logo M tem índice 1. Pelo teorema (4) M é uma hipersuperfície mínima de Clifford ou uma esfera totalmente geodésica. $\square$

Referências

[1] BARBOSA, J. L.; CARMO, M. DO; ESCHENBURG, J. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds. Em: Manfredo P. do Carmo – Selected Papers. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. p. 291–306.

[2] BATISTA, M.; MARTINS, M. B. Minimal hypersurfaces with low index in the real projective space. Nonlinear analysis, theory, methods and applications, v. 218, n. 112776, p. 112776, 2022.

[3] CHERN, S. S.; CARMO, M. DO; KOBAYASHI, S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. Em: Manfredo P. do Carmo – Selected Papers. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. p. 47–63.

[4] DO CARMO, M.; Riemannian Geometry. Tradução: Francis Flaherty. 4. ed. Basileia, Switzerland: Birkhauser Verlag AG, 1991.

[5] DO CARMO, M.; RITORÉ, M.; ROS, A. Compact minimal hypersurfaces with index one in the real projective space. Em: Manfredo P. do Carmo – Selected Papers. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. p. 407–414.

[6] KLINGENBERG, Wilhelm P. A. Riemannian Geometry. Berlin; New York: Walter De Gruyter Inc, 1982.

[7] MUNKRES, J. R. Topology: A First Course, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[8] LIMA, E. L. Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Matemática, 1987.

[9] OBATA, M. Certain conditions for a Riemanian manifold to be isometric with a sphere, J. Math. Soc. Japan 14(1962), 333-340.

[10] RITORÉ, M.; ROS, A. Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric problem in three space forms. Commentarii mathematici Helvetici, v. 67, n. 1, p. 293–305, 1992.

[11] ROS, A. Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem. Journal of differential geometry, v. 27, n. 2, p. 215–220, 1988.

[12] SAKAI, T. Riemannian Geometry. Tradução: Takashi Sakai. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 1996.

[13] SIMONS, J. Minimal Varieties in Riemannian Manifolds. Annals of mathematics, v. 88, n. 1, p. 62, 1968.