



**Universidade Federal de Alagoas - UFAL**  
**Instituto de Matemática - IM**

Programa de Pós-Graduação em Matemática  
em associação com a Universidade Federal da Bahia



**DANIEL DA COSTA SILVA**

**RIGIDEZ DE SEMIESPAÇOS ASSINTOTICAMENTE PLANOS**

Orientador: Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz

**MACEIÓ - AL**

**2024**

Daniel da Costa Silva

## **Rigidez de Semiespaços Assintoticamente Planos**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz

Maceió  
Janeiro de 2024

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

S586r Silva, Daniel da Costa .  
Rigidez de semiespaços assintoticamente planos / Daniel da Costa Silva. –  
2024.  
65 f.

Orientador: Cícero Tiarlos Nogueira Cruz.  
Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.  
Instituto de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal  
da Bahia, 2024.

Bibliografia: f. 62-65.

1. Desigualdades (Matemática). 2. Variedades estáticas com bordo  
(Matemática). 3. Princípios do Máximo. I. Título.

CDU: 51

## Folha de Aprovação

Autor: Daniel da Costa Silva

### Rigidez de Semiespaços Assintoticamente Planos

Tese de Doutorado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia e aprovada em 16 de janeiro de 2024.

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** CICERO TIARLOS NOGUEIRA CRUZ  
Data: 01/02/2024 13:51:20-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz – UFAL (Orientador)

#### Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** ABRAAO MENDES DO REGO GOUVEIA  
Data: 01/02/2024 09:20:34-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Abraão Mendes do Rêgo Gouveia – UFAL (Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** MARCIO HENRIQUE BATISTA DA SILVA  
Data: 31/01/2024 16:58:09-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva – UFAL (Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** MARCOS RANIERI DA SILVA  
Data: 31/01/2024 11:10:46-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva – UFAL (Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** LEANDRO DE FREITAS PESSOA  
Data: 31/01/2024 10:28:14-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa – UFPI (Examinador Externo)

Documento assinado digitalmente  
**gov.br** MARIA DE ANDRADE COSTA E SILVA  
Data: 31/01/2024 09:28:19-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Profª. Dra. Maria de Andrade Costa e Silva – UFS (Examinadora Externa)

Ao meu avô Raimundo, minha madrinha Elizabeth e a minha sogra Dona Francisca (In memoriam).

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, autor e consumidor da minha história, por Ele ter sustentado, cuidado e guiado, pois a Ele toda honra e toda glória, pois essa etapa é uma promessa da qual Ele cumpriu: "Todavia, como está escrito: "Olho nenhum viu, ouvido nenhum ouviu, mente nenhuma imaginou o que Deus preparou para aqueles que o amam."(1 Coríntios 2:9).

Aos professores Abraão Mendes, Márcio Batista, Leandro Pessoa, Marcos Raniere e Maria Andrade por aceitarem participar da banca de defesa de Tese de Doutorado e pelas valiosas sugestões e correções, cujas contribuições enriquecem ainda mais este trabalho.

Ao meu orientador, professor Cícero Tiarlos, a quem tenho grande estima, muito obrigado pela confiança e pelo valioso trabalho de orientação ao longo desses anos de estudo aqui na UFAL. Sempre paciente e presente quando precisei de suas orientações, e por ser um amigo me tranquilizando com seus conselhos. Minha eterna gratidão.

Aos professores Renan Medrado, Márcio Cavalcante e Feliciano Vitório do Instituto de Matemática da UFAL. Também estendo meus agradecimentos a Ana e ao William que sempre me ajudaram.

Aos amigos e colegas que ganhei aqui nesse tempo de UFAL, e um agradecimento especial ao Alexandre, Nemuel e Elaine.

Aos meus pais José Maria e Maria do Socorro pelos seus ensinamentos, conselhos e lições de vida por serem meu porto seguro, por se ajudarem a alcançar meus objetivos. Aos meus irmãos Danilo, Eduardo, Bruno e Danielle que muito me incentivaram e me ajudaram sempre acreditando em mim. Também não poderia de agradecer as minhas cunhadas, cunhados e meus sobrinhos, obrigado por tudo.

A minha avó Teresinha por sempre ter acreditado em mim e a minha tia Maria Bezerra que sempre me ajudou, incentivou, sem vocês certamente não estaria aqui. E a toda minha família por sempre estar comigo, torcendo, orando e pelas palavras de incentivo.

A minha esposa Ana Maria que sabe as provas que tivemos que passar, mais sempre incentivou e caminhou ao meu lado, foi um escudo para mim, que acreditou (por vezes, até mais que eu) que seria possível a conclusão deste trabalho. Obrigado por tudo e te amo.

Aos professores do curso de Matemática da UFPI-CSHNB por permitirem meu afastamento: Cícero, PP, Antônio José, Anísia e Kláudia. Em especial, gostaria de agradecer a meus grandes amigos Alex, João Santos e Bruno Vasconcelos pelas palavras de apoio, incentivo e ajuda.

Aos bons amigos Francisco Gilberto e Helenita que nos acolheram, nos ajudaram e pelas palavras de incentivo e conselhos.

A meu grande amigo Rodinelle Marcolino Batista pela valiosa amizade, por ter acreditado em mim, pelas longas conversas, pelos valiosos conselhos e por sempre me ajudar.

A todos aqueles que torceram e se alegraram com essa conquista meu muito obrigado.

E à pessoa que é minha fonte de inspiração, meu incentivo e meu grande amor, alguém que abriu mão de muitas coisas, mesmo sendo pequena, mas que sempre compreendeu a razão de estarmos aqui. Ela nunca me deixou desistir e representa mais uma promessa que Deus cumpriu em minha vida: minha filha, Débora Bianca. Agradeço por existir e fazer parte da minha jornada.

Combati o bom combate, terminei a corrida,  
gardei a fé.

2 Timóteo 4:7



## RESUMO

Na primeira parte deste trabalho de tese, estudamos uma desigualdade do tipo massa-capacidade aplicada a semiespaços tridimensionais assintoticamente planos, que são completos, suaves e com curvatura escalar não negativa e bordo médio convexo. No caso de igualdade, provamos que a variedade é isométrica ao semiespaço Schwarzschild. Na segunda parte, estudamos as variedades estáticas com bordo, onde destacamos que os potenciais estáticos dessas variedades não alteram o sinal, desde que sejam limitados e se anulem no horizonte. Além disso, deduzimos uma estimativa que relaciona a expansão assintótica e a massa de Hawking modificada. Ocorrendo a igualdade, a variedade é isométrica ao  $\mathbb{R}_+^3$ . Por fim, numa releitura de um resultado de Galloway-Cederbaum (CEDERBAUM; GALLOWAY, 2017), que trata de esferas de fótons, e, sob determinadas hipóteses nas curvaturas Gaussiana e média, demonstramos um resultado no qual uma variedade compacta e estática é isométrica a  $([3m, +\infty) \times \mathbb{S}^2, g)$ , onde  $g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma_{\mathbb{S}^2}$ .

**Palavras-chave:** Fluxo do Inverso da Curvatura Média com Bordo; Capacidade; Variedades Estáticas com Bordo; Estabilidade; CMC.

## ABSTRACT

In the first part of this thesis, we explored a mass-capacity type inequality applied to three-dimensional asymptotically flat half-spaces that are complete, smooth, and have non-negative scalar curvature, along with a convex mean boundary. In the case of equality in this inequality, we demonstrated that the manifold is isometric to the Schwarzschild half-space. In the second part, our focus shifted to static manifolds with boundary, emphasizing that the static potentials of these manifolds do not change sign, provided they are bounded and vanish at the horizon. Additionally, we derived an estimate linking the asymptotic expansion and the modified Hawking mass. In the case of equality, the manifold is isometric to  $\mathbb{R}_+^3$ . Finally, in a reinterpretation of a result by Galloway-Cederbaum (CEDERBAUM; GALLOWAY, 2017) concerning photon spheres, and under certain assumptions on the Gaussian and mean curvatures, we demonstrated a result in which a compact and static manifold is isometric to  $([3m, +\infty) \times \mathbb{S}^2, g)$ , where

$$g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma_{\mathbb{S}^2}.$$

**Keywords:** Inverse Mean Curvature Flow with Boundary; Capacity; Statics Manifolds with Boundary; Stability; CMC.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES . . . . .</b>	<b>16</b>
2.1	Conceitos . . . . .	16
2.2	Primeira e Segunda Variação da Área . . . . .	17
2.3	Princípio do Máximo . . . . .	19
2.4	Semiespaços Assintoticamente Planos . . . . .	20
2.5	Fluxo do Inverso da Curvatura Média para hipersuperfícies com bordo . . . . .	23
2.6	Variedades Estáticas com Bordo . . . . .	28
<b>3</b>	<b>CAPACIDADE DE SUPERFÍCIES EM SEMIESPAÇOS ASSINTOTI- CAMENTE PLANOS . . . . .</b>	<b>31</b>
3.1	Definições e Resultados Auxiliares . . . . .	31
3.2	Capacidade de Superfícies em Semiespaços Assintoticamente Planos . . . . .	35
<b>4</b>	<b>RESULTADOS EM VARIEDADES ESTÁTICAS COM BORDO . . . . .</b>	<b>44</b>
4.1	Potenciais Estáticos em Semiespaços Assintoticamente Planos . . . . .	44
4.2	Sobre rigidez em Semiespaços Assintoticamente Planos e Estáticos . . . . .	53
4.3	Rigidez em variedades Assintoticamente Planas e estáticas . . . . .	59
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>62</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo das desigualdades entre quantidades locais e globais tem suscitado considerável interesse, e entre essas desigualdades destaca-se a desigualdade de Penrose. Um exemplo notável é a versão Riemanniana desta desigualdade para variedades tridimensionais, a qual foi provada por Huisken e Ilmanen (HUISKEN; ILMANEN, 2001). Eles utilizaram o fluxo do inverso da curvatura média (FICM) para estabelecer a prova no caso de horizontes conexos. Bray (BRAY, 2001) também contribuiu ao demonstrar essa desigualdade por meio de um fluxo conforme da métrica. Neste contexto ele emprega desigualdades de massa-capacidade para validar a monotonicidade da massa ADM ao longo do fluxo conforme.

Na demonstração da desigualdade massa-capacidade, Bray empregou o Teorema da Massa Positiva e uma adaptação do argumento de reflexão de (BUNTING; ALAM, 1987a). Posteriormente, Bray e Lee (BRAY; LEE, 2009), também baseando-se no Teorema da Massa Positiva e utilizando um argumento de reflexão que implicitamente envolve uma desigualdade massa-capacidade, conseguiram estabelecer a desigualdade de Penrose Riemanniana para dimensão menor que 8. No entanto, no caso de bordo conexo, apenas para dimensão 3, Bray e Miao (BRAY; MIAO, 2008) recorreram ao FICM para demonstrar uma desigualdade massa-capacidade beneficiando da monotonicidade da massa de Hawking ao longo do FICM em vez do Teorema da Massa Positiva.

**Teorema 1.0.1 ((BRAY; MIAO, 2008))** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana suave e completa com curvatura escalar não negativa e com bordo suave e conexo. Suponha que  $(M^3, g)$  é difeomorfa a  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ , onde  $\Omega$  é um domínio limitado. Então*

$$\text{cap}(\Sigma, g) \leq \left( \frac{|\Sigma|}{16\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma} \right),$$

onde  $\text{cap}(\Sigma, g)$ ,  $|\Sigma|$  e  $H$  denotam a capacidade, a área e a curvatura média de  $\Sigma$ , respectivamente. Vale a igualdade se, e somente se,  $(M^3, g)$  é isométrica a variedade de Schwarzschild espacial.

Note que existe uma formulação geral da definição de capacidade, veja por exemplo (GRIGOR'YAN, 1999).

Utilizando argumentos clássicos e técnicas aplicáveis a dimensões escolhidas, Freire e Schwartz (FREIRE; SCHWARTZ, 2014) demonstraram a desigualdade massa-capacidade para variedades conformemente planas com bordo. Posteriormente, Xiao (XIAO, 2016), ao introduzir

a capacidade  $p$ -harmônica para  $p \in (1, 3)$ , estabeleceu uma desigualdade entre a capacidade  $p$ -harmônica e a área de uma variedade assintoticamente plana tridimensional com curvatura escalar não negativa.

Na primeira parte dessa tese, apresentamos um resultado do tipo massa-capacidade aplicado a semiespaços assintoticamente planos. Antes de estabelecermos nosso resultado, é crucial lembrar algumas definições. Seja  $(M^3, g)$  um semiespaço assintoticamente plano completo e considere  $E$  um domínio suave e limitado em  $M$  tal que  $\Sigma = \tilde{\partial}E$  intersecta  $\partial M$  transversalmente. A capacidade de  $\Sigma$  é definida por

$$\text{cap}(\Sigma, g) = \inf_{\varphi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_M |\nabla \varphi|^2 dv \right\}, \quad (1)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as funções suaves  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\varphi|_{\Sigma} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 1$ .

Seja  $\Sigma$  uma superfície compacta e conexa. Dizemos que  $\Sigma$  tem bordo livre se  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ ,  $\Sigma \cap \partial M = \partial\Sigma$  e  $\Sigma$  intersecta  $\partial M$  ortogonalmente. Dizemos que  $\Sigma$  é fechada, se é compacta sem bordo. Um subconjunto conexo e não compacto  $M_{ext} \subset M$  é dito uma região exterior se  $\tilde{\partial}M_{ext}$  consistir de superfícies mínimas de bordo livre e mínimas fechadas, e se  $M_{ext}$  não contém outras superfícies mínimas de bordo livre ou mínimas fechadas.

Apresentaremos uma versão do Teorema de Bray e Miao [Teorema 2, (BRAY; MIAO, 2008)] para semiespaços assintoticamente planos, empregando o fluxo do inverso fraco da curvatura média com bordo livre, conforme proposto por Marquardt (MARQUARDT, 2017).

**Teorema 1.0.2 (Teorema 3.2.1)** *Seja  $(M^3, g)$  um semiespaço assintoticamente plano, completo, suave com  $R_g \geq 0$  e  $H_g \geq 0$ . Seja  $M_{ext} \subset M$  uma região exterior e suponha que  $\Sigma$  é uma componente conexa de  $\tilde{\partial}M_{ext}$  com bordo livre. Então*

$$\text{cap}(\Sigma, g) \leq \left( \frac{|\Sigma|}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} H^2 dg} \right), \quad (2)$$

onde  $H$  e  $|\Sigma|$  denotam a curvatura média e a área de  $\Sigma$ , respectivamente. Além disso, vale a igualdade se, e somente se,  $(M_{ext}, g)$  é isométrico ao semiespaço Schwarzschild.

A estratégia da prova do teorema acima baseia-se na aplicação do fluxo do inverso da curvatura média com bordo proposto por Marquardt (MARQUARDT, 2017). Nesse contexto, fazemos uso da monotonicidade da massa de Hawking modificada, dada por

$$\tilde{m}_H(\Sigma) = \frac{(2|\Sigma|)^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( 8\pi - \int_{\Sigma} H^2 d\sigma \right),$$

onde  $\Sigma$  é uma superfície em  $M$ .

Na segunda parte da tese, exploraremos as variedades estáticas com bordo que são variedades Riemannianas associadas a existência de uma função suave não trivial  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ , denominada potencial estático, que satisfazem as equações

$$\begin{cases} \nabla_g^2 V - (\Delta_g V)g - V \text{Ric}_g = 0 & \text{em } M, \\ \frac{\partial V}{\partial \nu} g - V \Pi_g = 0 & \text{em } \partial M, \end{cases} \quad (3)$$

onde  $\nu$  é o normal unitário exterior a  $\partial M$ ,  $\Pi_g$  é a segunda forma fundamental de  $\partial M$  com respeito a  $\nu$ ,  $\nabla_g^2$ ,  $\Delta_g$  e  $\text{Ric}_g$  denotam o Hessiano, o Laplaciano e a curvatura de Ricci de  $g$ , respectivamente.

As equações em (3) surgem de maneira intrínseca no problema de prescrição de curvatura e no contexto da Relatividade Geral, visto que tal equação está diretamente associada a espaços-tempo estáticos. Do ponto de vista físico, um espaço-tempo estático é uma variedade Lorentziana  $(\widehat{M}^{n+1}, \hat{g})$  com assinatura  $(-, +, \dots, +)$  que atende à equação de campo de Einstein

$$\text{Ric}_{\hat{g}} - \frac{1}{2} \mathbf{R}_{\hat{g}} \hat{g} + \hat{\Lambda} \hat{g} = 0, \quad (4)$$

onde  $\hat{\Lambda} \in \mathbb{R}$  é uma constante cosmológica.

A primeira solução da equação de campo de Einstein (4) (com  $\hat{\Lambda} = 0$ ) foi obtida por Schwarzschild em 1916, apresentando a métrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2$$

em coordenadas esféricas. Note que a singularidade ocorre em  $r = 2m$ , e além disso a métrica pode ser estendida para  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ . Observe também que o espaço-tempo contém o primeiro exemplo de uma singularidade de buraco negro ( $r = 0$ ), logo o espaço-tempo é esfericamente simétrico e a fatia  $t = 0$  é uma métrica Riemanniana em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  que é uma solução temporalmente simétrica para as restrições do vácuo. Note também que essa fatia do espaço-tempo de Schwarzschild é, de fato, uma variedade Riemanniana completa e quando  $r = 0$  a métrica é assintoticamente plana.

Ao calcular o traço em (4), podemos observar que a curvatura escalar  $\mathbf{R}_{\hat{g}}$  é constante, e a equação (4) pode ser reescrita como

$$\text{Ric}_{\hat{g}} = \Lambda \hat{g}, \quad \Lambda = \frac{2}{n-1} \hat{\Lambda}. \quad (5)$$

Podemos assumir que  $\Lambda = \epsilon n$ , onde  $\epsilon = 0, \pm 1$ . Segue de (ALMARAZ; LIMA, 2022) que se  $X$  for um campo de Killing não nulo em  $\widehat{M}$  e sua distribuição não for integrável, podemos

considerar  $\widehat{M}$  como um espaço-tempo estático. Nesse caso, considerando  $M \hookrightarrow \widehat{M}$ , podemos expressar a métrica Riemanniana  $g$ , da seguinte maneira

$$\hat{g} = -V^2 dt^2 + g, \quad V = \sqrt{\hat{g}(X, X)}. \quad (6)$$

Portanto, a equação de Einstein (5) pode ser escrita como

$$\nabla_g^2 V + \Lambda V g - V \text{Ric}g = 0, \quad \Delta_g V + \Lambda V = 0. \quad (7)$$

Se  $(M, g)$  possuir um bordo  $\Sigma$  (possivelmente não compacto), é fisicamente natural associar a (7) às seguintes equações de bordo

$$\begin{cases} \Pi_g - \lambda \bar{g} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \nu} - \lambda V = 0, \end{cases} \quad (8)$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\Pi_g$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma$  com relação ao normal unitário exterior  $\nu$ , e  $\bar{g}$  é a restrição de  $g$  a  $\Sigma$ .

Observa-se que  $\hat{g}$  satisfaz a equação (4) se, e somente se, é um ponto crítico do funcional de Einstein-Hilbert

$$\hat{g} \mapsto \int_{\widehat{M}} (\mathbf{R}_{\hat{g}} - 2\hat{\Lambda}) d\sigma_{\widehat{M}}$$

definido no espaço de todas as métricas Lorentzianas em  $\widehat{M}^{n+1}$ . Se  $\widehat{M}$  possuir uma fronteira não vazia  $\partial\widehat{M}$ , consideramos o funcional

$$\mathcal{F} : \hat{g} \mapsto \int_{\widehat{M}} (\mathbf{R}_{\hat{g}} - 2\hat{\Lambda}) d\sigma_{\widehat{M}} + 2 \int_{\partial\widehat{M}} (\mathbf{H}_{\hat{g}} - \hat{\lambda}) d\sigma_{\partial\widehat{M}},$$

onde  $\hat{g}$  é tomada sobre o espaço de todas as métricas Lorentzianas em  $\widehat{M}$  com respeito a  $\partial\widehat{M}$ , e  $\mathbf{H}_{\hat{g}}$  é a curvatura média de  $\partial\widehat{M}$ . Portanto, a métrica crítica de  $\mathcal{F}$  são soluções da equação (4) que satisfazem as condições de contorno

$$\Pi_{\bar{g}} = \lambda \hat{g}|_{\partial\widehat{M}}, \quad \lambda = \frac{1}{n-1} \hat{\lambda}.$$

Assim, se  $X$  é um campo de Killing em  $\widehat{M}$ , tangente a  $\partial\widehat{M}$  e com uma distribuição ortogonal integrável, podemos escrever  $\hat{g}$  na forma (6). Portanto,  $(M, g)$  com fronteira não vazia  $\Sigma = \partial M = \partial\widehat{M} \cap M$  satisfaz as equações (7) e (8).

Para o caso em (7) com  $\Lambda = 0$ , a combinação das contribuições de (CORVINO, 2000), (GALLOWAY; MIAO, 2017) e (CARLOTTO et al., 2016a) levam ao teorema a seguir formulado por Huang-Martin-Miao (HUANG et al., 2018), que não apenas fornece outra demonstração da rigidez do Teorema da Massa Positiva para variedades assintoticamente planas com horizonte em

dimensão 3, mas também afirma que, se uma variedade possui horizonte  $\Sigma$  (isto é,  $\Sigma$  é vazio ou é a união disjunta de hipersuperfícies mínimas fechadas,  $M$  não contém outras hipersuperfícies mínimas fechadas e  $\Sigma$  é localmente minimizante de área para  $n \geq 8$ ), então seus potenciais estáticos (quando existem) se anulam no bordo. Vale notar que o teorema mencionado está relacionado com a unicidade de buracos negros estáticos.

**Teorema 1.0.3** (HUANG *et al.*, 2018) *Dado  $n \geq 3$ , seja  $(M, g)$  uma variedade assintoticamente plana com horizonte. Suponha que  $(M, g)$  admite um potencial estático  $V$  solução de*

$$\nabla_g^2 V - (\Delta_g V)g - V \text{Ric}_g = 0.$$

*Então  $V \equiv 0$  em  $\Sigma$ . Como consequência temos que se  $V$  é limitado, então  $V > 0$  ou  $V < 0$  em todo interior de  $M$ .*

Uma pergunta natural que surge é se o resultado anterior é válido no caso de uma variedade possuir um bordo não compacto. A resposta é sim; ou seja, os potenciais estáticos em um semiespaço assintoticamente plano e estático se anulam em seu horizonte e mantêm um sinal definido em seu interior, contanto que esses potenciais estáticos sejam limitados. Temos então nosso resultado:

**Teorema 1.0.4 (Teorema 4.1.2)** *Seja  $(M^n, g)$  um semiespaço assintoticamente plano com horizonte  $\Sigma$ . Suponha que existe uma função suave  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\begin{cases} \nabla_g^2 V - (\Delta_g V)g - V \text{Ric}_g = 0 & \text{em } M, \\ \frac{\partial V}{\partial \nu} g - V \Pi_g = 0 & \text{em } \partial M. \end{cases}$$

*Então  $V \equiv 0$  em  $\Sigma$ . Além disso, se  $V$  é limitado, então  $V > 0$  ou  $V < 0$  no interior de  $M$ .*

Motivado pela definição de massa de Bartnik, Miao (MIAO, 2005a) provou que se  $(M^3, g)$  é uma variedade assintoticamente plana com bordo compacto  $\Sigma$  que é CMC estável, então a massa ADM de  $M$  é limitada em termos da curvatura média e da massa de Hawking de  $\Sigma$ . Nosso próximo resultado estabelece que o resultado acima é válido para o caso de semiespaços assintoticamente planos, mas nesse caso com a limitação sobre uma constante que vêm da expansão assintótica do potencial estático  $V$  que satisfaz as equações (3).

**Teorema 1.0.5 (Teorema 4.2.1)** *Sejam  $(M^3, g)$  um semiespaço assintoticamente plano e estático tal que  $\Sigma = \tilde{\partial}E \subset M$  é uma superfície suave e conexa com bordo livre com respeito a  $\partial M$ , onde  $E$  é um domínio suave e limitado em  $M$ . Suponha que a curvatura média é constante*



$H_\Sigma = C > 0$  e a curvatura Gaussiana de  $\Sigma$  satisfaz  $K_\Sigma \geq \frac{1}{4}C^2$ . Se  $\Sigma$  é CMC estável e minimiza área no sentido de Plateau, então

$$\mathcal{A} \leq 8\sqrt{\frac{8\pi}{C^2|\Sigma|}}\tilde{m}_H(\Sigma),$$

onde  $V$  admite uma expansão assintótica dada por

$$V = 1 - \frac{\mathcal{A}}{|x|} + O(|x|^{-2}), \quad (9)$$

para  $|x|$  suficientemente grande,  $\mathcal{A}$  é uma constante e  $\tilde{m}_H(\Sigma)$  é a massa de Hawking modificada de  $\Sigma$ . Vale a igualdade se, e somente se,  $(M, g)$  é isométrica a  $\mathbb{R}_+^3$ .

Considere o espaço tridimensional de Schwarzschild  $([2m, +\infty) \times \mathbb{S}^2, g)$ , onde

$$g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma_{\mathbb{S}^2},$$

com  $m > 0$  e  $d\sigma_{\mathbb{S}^2}$  representando a métrica usual da esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ . Nestas coordenadas, o horizonte de eventos é descrito pelo cilindro  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_{2m}^2 = \{r = 2m\}$ . A subvariedade  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_{3m}^2 = \{r = 3m\}$  é denominada esfera de fótons, desempenhando um papel relevante no estudo de questões de estabilidade dinâmica no contexto das equações de Einstein.

Em (CEDERBAUM; GALLOWAY, 2017), Cederbaum e Galloway mostraram que se um espaço-tempo possui uma esfera de fótons, então  $m > 0$  e ele é isométrico à região exterior à esfera de fótons no espaço de Schwarzschild.

Fazendo uma releitura do resultado acima para o caso Riemanniano, podemos provar o seguinte resultado:

**Teorema 1.0.6 (Teorema 4.3.1)** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana e estática com bordo  $\Sigma$  não vazio e com potencial estático  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponha que  $0 < K_\Sigma \leq \frac{3}{4}H_\Sigma^2$ . Então  $(M^3, g)$  é isométrica a  $([3m, +\infty) \times \mathbb{S}^2, g)$ , onde  $g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma_{\mathbb{S}^2}$ .*

Esta tese é organizada da seguinte forma: No Capítulo 2 apresentaremos algumas definições e resultados que são de fundamental importância para os demais capítulos. No Capítulo 3, obtemos estimativas para a capacidade e resultados de rigidez em semiespaços assintoticamente planos, nos quais, tanto a curvatura escalar quanto a curvatura média do bordo são não negativa. No Capítulo 4, apresentaremos resultados de rigidez referentes a variedades estáticas com bordo.

## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo, fixaremos a terminologia e a notação a serem usadas, bem como apresentaremos algumas definições e resultados básicos para a compreensão do trabalho.

### 2.1 CONCEITOS

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  com bordo  $\partial M$  não vazio e conexão de Levi-Civita  $\nabla$  tal que contenha uma hipersuperfície compacta propriamente imersa  $i : \Sigma \rightarrow M$ , isto é,  $i(\Sigma) \cap \partial M = i(\partial\Sigma)$ .

Denotaremos por  $\mathbf{R}$  a curvatura de Riemann de  $M$  dada por

$$\mathbf{R}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z,$$

onde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $[\cdot, \cdot]$  é o colchete de Lie. Aqui  $\mathfrak{X}(M)$  denotará o espaço dos campos vetoriais suaves em  $M$ . Também definimos

$$\mathbf{R}(X, Y, Z, W) = g(\mathbf{R}(X, Y)W, Z),$$

para  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ .

Definimos a curvatura de Ricci de  $(M, g)$  em  $p \in M$  na direção de  $v \in T_p M$ , com  $|v| = 1$ , representada por  $\text{Ric}_p(v, v)$ , como sendo

$$\text{Ric}_p(v, v) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{R}_p(v, e_i, v, e_i),$$

onde  $\{e_1, \dots, e_{n-1}, v\} \subset T_p M$  é uma base ortonormal.

A curvatura escalar de  $(M, g)$  em  $p \in M$ , denotado por  $\mathbf{R}_g$ , é definido como sendo

$$\mathbf{R}_g = \sum_{i=1}^n \text{Ric}_p(e_i, e_i),$$

sendo  $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e_n\} \subset T_p M$  uma base ortonormal.

Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície em  $M$ . Denotaremos a conexão induzida em  $\Sigma$  como

$$\nabla_X^\Sigma Y = (\nabla_X Y)^T,$$

onde  $(\cdot)^T$  é a projeção de um vetor no espaço tangente de  $\Sigma$ . A segunda forma fundamental  $A$  de  $\Sigma$  é dada por

$$A_p(X, Y) = (\nabla_X Y)^\perp,$$

para todos  $X, Y \in T_p \Sigma$ , onde  $(\cdot)^\perp$  denota o complemento ortogonal a  $T\Sigma$  com respeito a métrica  $g$ .

O vetor curvatura média de  $\Sigma$  em um ponto  $p \in \Sigma$ , denotado por  $\vec{H}(p)$ , é definido por

$$\vec{H}(p) = \sum_{i=1}^{n-1} A_p(e_i, e_i),$$

tal que  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\} \subset T_p \Sigma$  é uma base ortonormal com respeito a métrica induzida.

Seja  $N$  um campo normal unitário exterior ao longo de  $\Sigma$  em um ponto  $p \in \Sigma$ . A curvatura média de  $\Sigma$  em  $p$  com respeito a  $N$  é definida por

$$H(p) = \left\langle \vec{H}(p), N(p) \right\rangle.$$

Dizemos que  $\Sigma$  é uma hipersuperfície CMC quando possui curvatura média constante. No caso particular em que  $H \equiv 0$ , dizemos que  $\Sigma$  é uma hipersuperfície mínima. Uma hipersuperfície mínima  $\Sigma$  tem bordo livre se  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ ,  $\Sigma \cap \partial M = \partial\Sigma$  e  $\Sigma$  intercepta  $\partial M$  ortogonalmente. E dizemos que  $\Sigma$  é fechada se  $\partial\Sigma = \emptyset$  e  $\Sigma \cap \partial M = \emptyset$ .

Sejam  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , a equação abaixo expressa a relação entre a curvatura do ambiente e sua hipersuperfície  $\Sigma$

**Proposição 2.1.1 (Equação de Gauss)** *Dado  $p \in M$ , temos*

$$R_p(X, Y, Z, W) = (R_\Sigma)_p(X, Y, Z, W) - \langle A_p(X, W), A_p(Y, Z) \rangle + \langle A_p(X, Z), A_p(Y, W) \rangle.$$

Para demonstração veja (CAMINHA, 2014).

A equação de Gauss implica que

$$R_\Sigma = R_g - 2\text{Ric}(N, N) + H^2 - |A|^2, \quad (10)$$

onde  $R_\Sigma$  denota a curvatura escalar de  $\Sigma$ .

## 2.2 PRIMEIRA E SEGUNDA VARIACÃO DA ÁREA

Dada uma hipersuperfície  $\Sigma$  em  $(M, g)$ , denotaremos por  $|\Sigma|$  sua área. Uma variação admissível de  $\Sigma$  é uma aplicação suave  $f : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \rightarrow M$  tal que  $f_t : \Sigma \rightarrow M$  é uma imersão própria em  $(M, g)$  para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  e  $f_0(\Sigma) = \Sigma$ . Denotaremos por  $\{\Sigma_t := f_t(\Sigma)\}$  uma variação de  $\Sigma$ . O campo variacional  $V = \frac{\partial f}{\partial t}$  pode ser decomposto em suas partes normal e tangente em  $\Sigma$  como sendo

$$V = V^T + \rho N,$$

onde  $\rho$  é chamada de função lapso definida em  $\Sigma$  por  $\rho = g(V, N)$ .

É importante estudar as variações da área, visto que seus pontos críticos são forte candidatos a serem localmente minimizantes, assim temos

**Proposição 2.2.1 (Primeira Variação da Área (AMBROZIO, 2015a))** *Temos*

$$\frac{d}{dt} |\Sigma| \Big|_{t=0} = - \int_{\Sigma} H \rho \, d\sigma_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} g(\nu, V) \, d\sigma_{\partial\Sigma},$$

onde  $\nu$  é o vetor conormal unitário exterior a  $\partial\Sigma$  em  $\Sigma$ ,  $d\sigma_{\Sigma}$  e  $d\sigma_{\partial\Sigma}$  são os elementos de área de  $\Sigma$  e  $\partial\Sigma$ , respectivamente.

É possível mostrar usando a Proposição 2.2.1 que  $\Sigma$  é ponto crítico do funcional área em variações admissíveis se, e somente se,  $\Sigma$  é mínima e com bordo livre.

Para o que segue, definimos o operador

$$L_{\Sigma} = \Delta_{\Sigma} + \text{Ric}(N, N) + |A|^2,$$

a qual é chamado de operador de Jacobi de  $\Sigma$ , onde  $\Delta_{\Sigma}$  denota o operador de Laplace-Beltrami de  $\Sigma$ . Veja que este operador é um operador diferencial de segunda ordem.

**Proposição 2.2.2 (Segunda Variação da Área (AMBROZIO, 2015a))** *Suponha que  $\Sigma$  seja mínima com bordo livre. Então*

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} |\Sigma_t| \Big|_{t=0} &= - \int_{\Sigma} L_{\Sigma}(\rho) \rho \, d\sigma_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \nu} - \Pi_g(N, N) \rho \right) \rho \, d\sigma_{\partial\Sigma} \\ &= \int_{\Sigma} [|\nabla_{\Sigma} \rho|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |A|^2) \rho^2] \, d\sigma_{\Sigma} - \int_{\partial\Sigma} \Pi_g(N, N) \rho^2 \, d\sigma_{\partial\Sigma}, \end{aligned}$$

onde  $\Pi_g$  é a segunda forma fundamental de  $\partial M$ .

Dada uma hipersuperfície mínima com bordo livre  $\Sigma$  em  $(M, g)$ , podemos naturalmente associar a segunda variação de área com a seguinte forma quadrática  $Q$  em  $C^{\infty}(M)$ :

$$Q(\phi, \psi) = - \int_{\Sigma} L_{\Sigma}(\phi) \psi \, d\sigma_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \Pi_g(N, N) \phi \right) \psi \, d\sigma_{\partial\Sigma}.$$

**Definição 2.2.1** *Uma hipersuperfície mínima com bordo livre  $\Sigma$  em  $(M, g)$  é dita estável com bordo livre se, e somente se,  $Q(\phi, \phi) \geq 0$ , para todo  $\phi \in C^{\infty}(\Sigma)$ . Caso contrário, dizemos que  $\Sigma$  é instável.*

**Definição 2.2.2** *Dizemos que uma hipersuperfície CMC com bordo livre  $\Sigma$  em  $(M, g)$  é estável CMC se  $Q(\phi, \phi) \geq 0$ , para toda  $\phi \in C^{\infty}(M)$  tal que*

$$\int_{\Sigma} \phi \, d\sigma_{\Sigma} = 0.$$

**Definição 2.2.3** Dizemos que uma hipersuperfície compacta  $\Sigma$  é minimizante de área se ela tiver o menor volume entre todas as hipersuperfícies propriamente imersa em uma vizinhança de  $\Sigma$ , isto equivale a dizer que  $\Sigma$  é mínima com bordo livre e estável.

**Definição 2.2.4** Dizemos que uma hipersuperfície  $\Sigma$  com bordo livre em  $(M, g)$  é minimizante de área no sentido de Plateau se  $Q(\phi, \phi) \geq 0$ , para toda  $\phi \in C^\infty(M)$  tal que  $\phi = 0$  em  $\partial\Sigma$ .

### 2.3 PRINCÍPIO DO MÁXIMO

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado. Consideremos o seguinte operador diferencial linear  $L$  de segunda ordem e o operador diferencial  $B$  de primeira ordem dados por

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad B = \sum_{i=1}^n d_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \gamma \text{ em } \partial\Omega.$$

Consideremos o problema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega \\ Bu = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11)$$

onde  $f \in C(\Omega)$  e  $g \in C(\partial\Omega)$ .

Assuma que (11) é elíptico,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n d_i(x) \nu_i(x) \geq 1, \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

onde  $\nu$  é a normal interior de  $\partial\Omega$ .

Suponhamos que (11) é localmente solúvel, isto é, para cada  $y \in \bar{\Omega}$ , existe um aberto relativo  $W \subset \Omega$  contendo  $y$  tal que para qualquer  $h \in C(\bar{W})$ , existe uma (única) solução  $v \in C^2(W) \cap C(\bar{W})$  do problema

$$\begin{cases} Lv = f & \text{em } W \cap \Omega, \\ Bv = g & \text{em } W \cap \partial\Omega, \\ v = h & \text{em } \partial W \cap \Omega. \end{cases}$$

**Teorema 2.3.1 (Princípio do Máximo)** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado e  $L, M$  operadores diferenciais dados acima tais que  $c(x) \leq 0$  em  $\Omega$  e  $\gamma \leq -\gamma_0$  em  $\partial\Omega$ . Suponha que  $u, v \in C^2(W) \cap C(\bar{W})$  satisfaçam*

$$\begin{cases} Lu = Lv & \text{em } W \cap \Omega, \\ Bu = Bv & \text{em } W \cap \partial\Omega, \\ u \geq v & \text{em } \partial W \cap \Omega, \end{cases}$$

então  $u \equiv v$  em  $W$  ou  $u > v$  em  $W$ .

**Demonstração:** Veja Propriedade (3b) de (LIEBERMAN, 1985).

## 2.4 SEMIESPAÇOS ASSINTOTICAMENTE PLANOS

Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo não compacto  $\partial M$  e dimensão  $n \geq 3$ . Sejam  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$  e  $\bar{B}_1^+(0) = \{x \in \mathbb{R}_+^n; |x| \leq 1\}$ .

**Definição 2.4.1** ((ALMARAZ et al., 2016)) *Dizemos que  $(M^n, g)$  é um semiespaço assintoticamente plano<sup>1</sup> se existem um número  $\tau > 0$ , um conjunto compacto  $K \subset M^n$  e um difeomorfismo  $\psi : M^n \setminus K \rightarrow \mathbb{R}_+^n \setminus \bar{B}_1^+(0)$  tais que vale a seguinte expansão assintótica*

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| + r|g_{ij,k}(x)| + r^2|g_{ij,kl}(x)| = O(r^{-\tau}) \text{ para } r \rightarrow \infty \quad (12)$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um sistema de coordenadas induzido por  $\psi$ ,  $r = |x|$ ,  $g_{ij}$  são os coeficientes de  $g$  com respeito a  $x$ , a vírgula indica derivada parcial. Neste caso dizemos que  $M \setminus K$  é chamado de semifim de  $M$ .

É importante mencionar que o estudos dos semiespaços assintoticamente planos foram iniciados por Escobar (ESCOBAR, 1992) para estudar o Problema de Yamabe para variedades Riemannianas compactas com bordo.

**Exemplo 2.4.1** *O exemplo mais simples de um semiespaço assintoticamente plano é o  $\mathbb{R}_+^n$  dotado da métrica euclidiana.*

**Exemplo 2.4.2** *Outro exemplo importante de semiespaço assintoticamente plano é o semiespaço Schwarzschild que é o conjunto  $M = \{x \in \mathbb{R}_+^n; |x| \geq (\frac{m}{2})^{\frac{4}{n-2}}\}$  dotado da seguinte métrica conforme*

$$g = \left(1 + \frac{m}{2}|x|^{2-n}\right)^{\frac{4}{n-2}} \delta,$$

onde  $\delta$  é a métrica plana e  $m > 0$  é uma constante positiva. Equivalentemente,  $M$  pode ser visto como o dobro de  $[r_0, \infty) \times \mathbb{S}_+^{n-1}$  ao longo de  $\{r_0\} \times \mathbb{S}_+^{n-1}$  com a seguinte métrica:

$$g = \frac{1}{1 - 2mr^{2-n}} dr^2 + r^2 d\sigma_{\mathbb{S}_+^{n-1}}^2 \quad (13)$$

onde  $d\sigma_{\mathbb{S}_+^{n-1}}$  é a métrica canônica do hemisfério unitário  $\mathbb{S}_+^{n-1}$ .

Observamos que é possível mostrar que o semiespaço Schwarzschild é escalar-plano com bordo mínimo. Além disso, podemos mostrar que essa constante  $m$  se relaciona com a massa, cuja definição vem a seguir.

<sup>1</sup> Tais semiespaços assintoticamente planos são também chamados variedades assintoticamente planas com bordo não compacto.

Em (ALMARAZ et al., 2016), Almaraz, Barbosa e de Lima associaram os semiespaços assintoticamente planos a um invariante da geometria assintótica denominado de massa, cuja definição, atribuída à F. C. Marques, é dada por

$$\tilde{m} = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_{S_{r,+}^{n-1}} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \mu^i dS_{r,+}^{n-1} + \int_{S_r^{n-2}} g_{\alpha n} \nu^\alpha dS_r^{n-2} \right\}, \quad (14)$$

onde  $S_{r,+}^{n-1} \subset M$  é um hemisfério coordenado de raio  $r$  com normal unitário exterior  $\mu$  e  $\nu$  é o conormal unitário que aponta para fora em  $S_r^{n-2} = \partial S_{r,+}^{n-1}$ , orientado como o bordo da região limitada por  $\Sigma_r \subset \partial M$ . Eles mostraram que  $\tilde{m}$  é um invariante geométrico bem definido se  $\tau > \frac{n-2}{2}$ , a curvatura escalar  $R_g$  e a curvatura média  $H_g$  são integráveis.

**Exemplo 2.4.3** *No Exemplo 2.4.2, definimos o semiespaço Schwarzschild e é possível mostrar que a massa  $\tilde{m}$  é a metade da massa ADM  $m$  do espaço de Schwarzschild. De fato, em um sistemas de coordenadas onde  $g_{\alpha n} = 0$  ao longo de  $\partial M$  em uma região assintótica, a expressão (14) simplifica para*

$$\tilde{m} = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \mu^i dS_{r,+}^{n-1}.$$

Usando a expressão da métrica  $g = \left(1 + \frac{\tilde{m}}{2}|x|^{2-n}\right)^{\frac{4}{n-2}} \delta$ , temos através de um cálculo direto que  $2\tilde{m} = m$ . Uma outra maneira de mostrar tal fato seria notando que a área do horizonte é dada por  $|\Sigma| = 8\pi m^2$ , já que o raio inicial é igual  $r = 2m$ . Por outro lado, seguiria da igualdade na desigualdade de Penrose, provada em (KOERBER, 2023), que  $|\Sigma| = 32\pi \tilde{m}^2$ .

**Teorema 2.4.1 ((ALMARAZ et al., 2016))** *Se  $(M^n, g)$  é um semiespaço assintoticamente plano com  $3 \leq n \leq 7$ , onde  $\tau > \frac{n-2}{2}$ , tais que  $R_g, H_g \geq 0$ , então  $\tilde{m} \geq 0$ , com a igualdade ocorrendo se, e somente se,  $(M, g)$  é isométrica a  $(\mathbb{R}_+^n, \delta)$ .*

Como consequência, eles obtiveram o seguinte teorema de rigidez para o hemisfério Euclidiano:

**Corolário 2.4.1 ((ALMARAZ et al., 2016))** *Seja  $(M, g)$  como no Teorema 2.4.1 e suponha que existe um compacto  $\Omega \subset M$  tal que  $(M \setminus \Omega, g)$  é isométrico a  $(\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{B}_1^+(0), \delta)$ . Então  $(M, g)$  é isométrica a  $(\mathbb{R}_+^n, \delta)$ .*

O Teorema 2.4.1 foi motivado pelo Teorema da Massa Positiva, o qual desempenha um papel fundamental na geometria diferencial moderna. Provado inicialmente por Schoen e Yau (SCHOEN; YAU, 1979) usando a técnica de superfícies mínimas, esse resultado estabelece que, se uma variedade de dimensão  $3 \leq n \leq 7$  é assintoticamente plana (consulte (BARTNIK,

1986) para uma definição precisa) e possui curvatura escalar não negativa, então a massa ADM é não-negativa, com igualdade somente no caso do espaço Euclidiano. Posteriormente, Witten (WITTEN, 1981) deu uma prova alternativa usando spinors e a equação de Dirac. Além disso, existem artigos que afirmam que este resultado vale para qualquer dimensão.

**Definição 2.4.1** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M$ . Dado  $U \subset M$ , chamamos  $\tilde{\partial}U = \overline{\partial U} \setminus \overline{\partial M}$  o bordo interior de  $U$  e  $\hat{\partial}U = \partial U \cap \partial M$  o bordo exterior de  $U$  (veja Figura 1).*

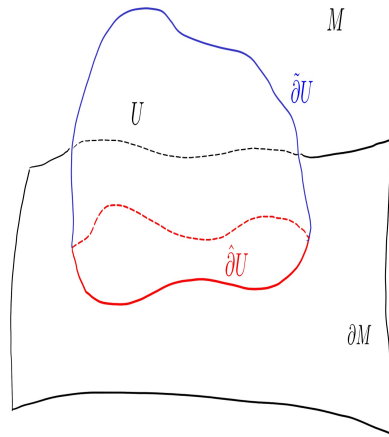


Figura 1 – Bordo interior e Bordo exterior.

**Definição 2.4.2 ((KOERBER, 2023))** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana completa com bordo não compacto  $\partial M$ . Dizemos que  $M_{ext} \subset M$  é uma região exterior se  $M_{ext}$  é não compacto e conexo,  $\tilde{\partial}M_{ext}$  consiste de superfícies mínimas fechadas ou mínimas com bordo livre e se não existem outras superfícies mínimas com bordo livre ou mínimas fechadas em  $M_{ext}$ .*

O próximo resultado nos diz a respeito sobre a topologia de uma região exterior, ou seja, que a região exterior é simplesmente conexa e possui bordo conexo. Seja  $K_1$  o fecho da união de todas as superfícies mínimas fechadas e superfícies com bordo livre imersas e suaves. Observe que  $K_1$  é compacta, pois próxima ao infinito é folheada por hemisférios estritamente médio convexos que intersectam  $\partial M$  transversalmente. Seja  $K$  definida como sendo a união



de  $K_1$  e todas as componentes de  $M \setminus K_1$ . Observe novamente que  $K$  é compacto. Seja  $M'$  o completamento da métrica da componente de  $M \setminus K$ , onde  $K$  é um conjunto compacto.

**Proposição 2.4.1 (Lema 2.3 de (KOERBER, 2023))** *Seja  $(M^3, g)$  um semiespaço assintoticamente plano de curvatura escalar não negativa e bordo médio convexo e conexo. Então,*

- i)  $M'$  é uma região exterior, o qual denotaremos por  $M_{ext}$ ;
- ii)  $\tilde{\partial}M_{ext}$  consiste de um número finito de discos mínimos com bordo livre e esferas mínimas fechadas;
- iii)  $M_{ext}$  é simplesmente conexo, não contém nenhuma outra superfície mínima imersa (bordo livre ou fechada) e possui a topologia de um semiespaço com um número finito de bolas sólidas removidas;
- iv) as componentes fechadas de  $\tilde{\partial}M_{ext}$  minimizam a área em sua classe de homologia enquanto que as componentes com bordo livre minimizam a área em sua classe de homotopia de sua curva de bordo com respeito a  $\tilde{\partial}M_{ext}$ .

## 2.5 FLUXO DO INVERSO DA CURVATURA MÉDIA PARA HIPERSUPERFÍCIES COM BORDO

No contexto fechado, o fluxo do inverso da curvatura média (FICM) foi introduzido por Geroch (GEROCH, 1973) e Jang e Wald (JANG; WALD, 1977) como uma abordagem para provar o Teorema da Massa Positiva. Geroch demonstrou que, desde que o FICM permaneça suave, é possível usá-lo para provar a desigualdade de Penrose Riemanniana e, consequentemente o Teorema da Massa Positiva. Ele observou que a massa de Hawking

$$m_H(\Sigma) = \left( \frac{|\Sigma|}{16\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} H^2 dv \right),$$

converge para a massa ADM, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_H(\Sigma_t) = m_{ADM},$$

se  $\Sigma_t$  converge para uma esfera no infinito, e que  $m_H(\Sigma_t)$  é monótona não decrescente para soluções do FICM. Desta forma, se a superfície inicial para o FICM é uma superfície mínima  $\Sigma_0$ , se  $m_H(\Sigma) \rightarrow m_{ADM}$  e o fluxo permanece suave, então

$$\sqrt{\frac{|\Sigma_0|}{16\pi}} = m_H(\Sigma_0) \leq m_H(\Sigma_t) \rightarrow m_{ADM}.$$

No entanto, infelizmente, o fluxo nem sempre permanece suave. Assim, a ideia principal para provar a desigualdade de Penrose, por Huisken e Ilmanen (HUISKEN; ILMANEN, 2001), foi desenvolver uma formulação fraca para o FICM que existe para todo o tempo e que ainda possa manter  $m_H(\Sigma_t)$  monotóna. Em outras palavras, essa formulação fraca do FICM "salta" justamente nos instantes onde o fluxo não é suave. Eles introduziram uma aproximação em conjuntos de nível e desenvolveram a solução fraca do FICM, onde as superfícies em evolução são representadas como conjuntos de nível de uma função escalar  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  via

$$\Sigma_t = \partial\{x \in M; \varphi(x) < t\}.$$

No contexto de variedades com bordo, o FICM com bordo foi introduzido por Marquardt (MARQUARDT, 2017) baseado nas ideias de (HUISKEN; ILMANEN, 2001), (GERHARDT, 1990) e (URBAS, 1990).

Seja  $\Sigma$  uma variedade suave, compacta e orientável, com um bordo  $\partial\Sigma$  compacto e suave. Suponha que  $x_0 : \Sigma \rightarrow M$  seja uma imersão  $C^{2,\alpha}$  tal que  $\Sigma_0 := x_0(\Sigma)$  tem curvatura média estritamente positiva e é perpendicular a uma hipersuperfície  $S$  sem bordo  $C^{2,\alpha}$  de suporte fixado em  $(M, g)$ , satisfazendo

$$x_0(\partial\Sigma) = x_0(\Sigma) \cap S \text{ e } g(N_0, \nu \circ x_0) = 0 \text{ em } \Sigma, \quad (15)$$

onde  $N_0$  e  $\nu$  são campos vetoriais normais unitários em  $\Sigma$  e  $S$ , respectivamente. Seja  $x : \Sigma \times [0, T] \rightarrow M$  uma solução do FICM para hipersuperfícies com bordo, obedecendo as condições

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{N}{H} & \text{em } \Sigma \times (0, T), \\ x(\partial\Sigma, t) = \Sigma_t \cap S, \quad g(N, \nu \circ x_0) = 0 & \text{em } \partial\Sigma \times (0, T), \\ x(\cdot, 0) = x_0 & \text{em } \Sigma. \end{cases} \quad (16)$$

onde  $H > 0$  é a curvatura média de  $\Sigma$  em  $M$  com respeito a  $N$  e  $\Sigma_t = x(\Sigma, t)$ . Como  $\Sigma$  é ortogonal a  $S$ , então conormal unitário exterior  $\nu$  de  $\partial\Sigma$  coincide com  $N$  ao longo de  $\partial\Sigma$ .

Introduzimos também uma formulação em conjuntos de nível. Seja  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $\Sigma_t = \tilde{\partial}E_t$ , onde  $E_t = \{\varphi < t\}$ . Enquanto a curvatura média de  $\Sigma_t$  for estritamente positiva, a formulação parabólica de (16) é equivalente a

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) = |\nabla \varphi| & \text{em } M_0 = M \setminus \bar{E}_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \hat{\partial}M_0, \\ \varphi = 0 & \text{em } \tilde{\partial}E_0. \end{cases} \quad (17)$$

Tal formulação foi importante para provar uma versão tridimensional da desigualdade de Penrose Riemanniana cuja região assintótica é modelada em um semiespaço (KOERBER,

2023). Recentemente, Eichmair e Koerber (EICHMAIR; KOERBER, 2023) demonstraram essa desigualdade utilizando uma técnica de duplicação para semiespaços assintoticamente planos com horizonte para dimensão  $3 \leq n \leq 7$ .

Usando as ideias de Huisken e Ilmanen, Marquardt desenvolveu o conceito de solução fraca para (17) e provou a existência e unicidade de tais soluções.

Observe que é possível obter uma solução trivial ao definir  $\varphi = 0$  fora de  $E_0$ . Além disso, podemos notar que se  $\varphi$  é uma solução, então  $\varphi_t = \min\{t, \varphi\}$  para todo  $t > 0$  também o é. Entretanto, para evitar esse tipo de soluções, é necessário que os conjuntos de níveis  $\{\varphi < t\}$  sejam pré-compactos. Vale ressaltar que se  $(M, g)$  é uma região exterior de um semiespaço assintoticamente plano é equivalente a exigir que  $\varphi$  seja própria, no sentido de que  $\varphi(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \infty$  (veja (KOERBER, 2023)).

**Definição 2.5.1** *Seja  $\Omega$  um conjunto aberto. Dizemos que  $E$  é uma envoltória minimizante (em  $\Omega$ ) se  $E$  minimiza a área externa em  $\Omega$ , isto é,*

$$|\tilde{\partial}^* E \cap K| \leq |\tilde{\partial}^* F \cap K|$$

onde  $\tilde{\partial}^{*2}$  denota o bordo reduzido, para qualquer  $F$  contendo  $E$  tal que  $F \setminus E \subset\subset \Omega$  e qualquer conjunto compacto  $K$  contendo  $F \setminus E$ . Dizemos que  $E$  é uma envoltória estritamente minimizante (em  $\Omega$ ) se a igualdade implica que  $F \cap \Omega = E \cap \Omega$  q.t.p. .

Observe que a interseção de uma coleção enumerável de envoltórias minimizantes é também uma envoltória minimizante, e o mesmo vale para envoltórias estritamente minimizantes. Denotaremos por  $E'$  a interseção de todas as envoltórias estritamente minimizantes em  $M$  que contém  $E$ . Além disso, se  $\tilde{\partial}E$  tem curvatura média  $H^{\tilde{\partial}E}$ , então foi mostrado que  $\tilde{\partial}E'$  tem curvatura média  $H^{\tilde{\partial}E'}$  e

$$H^{\tilde{\partial}E'} = H^{\tilde{\partial}E} \text{ em } \tilde{\partial}E \cap \tilde{\partial}E' \text{ e } H^{\tilde{\partial}E'} = 0 \text{ em } \partial E' \setminus \partial E. \quad (18)$$

**Observação 2.5.1** *Se  $M_{ext}$  é uma região exterior, então segue da Proposição 2.4.1 que  $E_0$  é uma envoltória estritamente minimizante.*

Os detalhes mais técnicos no FICM com bordo não foram abordados neste trabalho (para mais detalhes aconselhamos (MARQUARDT, 2017) e (KOERBER, 2023)).

A seguir usaremos as seguintes definições:  $E_t = \{\varphi < t\}$ ,  $E_t^+ = \text{int}\{\varphi \leq t\}$ ,  $\Sigma_t = \tilde{\partial}E_t$ ,  $\Sigma_t^+ = \tilde{\partial}E_t^+$ .

<sup>2</sup> Veja Apêndice D, Definição D.4 de (CARAPETIS, 2012).

**Teorema 2.5.1 (FICM com bordo - Lema 3.3 de ((KOERBER, 2023)))** *Sejam  $U \subset M$  um subconjunto aberto de uma variedade de dimensão  $3 \leq n \leq 7$  com bordo,  $E_0 \subset U$  uma envoltória minimizante aberta e  $\Sigma = \tilde{\partial}E_0$ . Suponha que  $\varphi \in C_{loc}^{0,1}(U)$  seja uma solução fraca com dado inicial  $E_0$  e que todos os conjuntos de níveis  $E_t$  são pré-compactos. Seja  $\alpha < \frac{1}{2}$ . Então:*

- a) *A solução fraca é única entre todas as soluções com conjuntos de níveis precompactos.*
- b) *Seja  $t > 0$ . As componentes de ambas  $\Sigma_t$  e  $\Sigma_t^+$  são superfícies de classe  $C^{1,\alpha}$  com bordo livre ou fechadas, com curvatura média e normal unitário exterior dados por*

$$H = |\nabla\varphi| \text{ e } \nu = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \text{ q.t.p., respectivamente.}$$

- c) *As estimativas  $C^{1,\alpha}$  de  $\Sigma_t$  e  $\Sigma_t^+$  dependem de  $|\nabla\varphi|_\infty$ , dos dados  $C^1$  de  $g$ , dos dados  $C^2$  de  $\partial M$ , da distância a  $\partial U$  e da distância a  $\Sigma$ . Se  $\Sigma$  é de classe  $C^{1,\alpha}$ , então a última dependência pode ser substituída pela estimativa  $C^{1,\alpha}$  de  $\Sigma$ .*
- d) *Dado  $t > 0$ , então  $\Sigma_{t'} \rightarrow \Sigma_t$  em  $C^{1,\alpha}$  quando  $t' \nearrow t$  e  $\Sigma_{t'} \rightarrow \Sigma_t$  em  $C^{1,\alpha}$  quando  $t' \searrow t$ . Se  $\Sigma$  é de classe  $C^{1,\alpha}$ , podemos escolher  $t = 0$ .*
- e) *Seja  $t > 0$ .  $E_t$  é uma envoltória minimizante em  $U$  e  $E_t^+$  é uma envoltória estritamente minimizante em  $U$ . Além disso,  $E_t' = E_t^+$  e  $|\Sigma_t| = |\Sigma_t^+|$ .*
- f) *Vale  $|\Sigma_t| = e^t|\Sigma|$ .*
- g) *Se  $\Sigma$  é suave e estritamente médio convexo, então existe um  $\epsilon > 0$  pequeno tal que  $\Sigma_t$  é dado por uma folha do FICM com bordo livre começando em  $\Sigma$  no tempo  $t$ , para  $0 < t < \epsilon$ .*

Observe que o fluxo pode ser descrito da seguinte maneira: se  $\Sigma_0$  é suave, então o fluxo evolui suavemente até que  $\Sigma_t$  deixa de ser uma envoltória minimizante. Quando isso ocorre, o fluxo salta, isto é, quando  $\varphi = t$  em um conjunto de volume positivo, e  $\Sigma_t$  se torna  $\Sigma_t'$  de onde o fluxo continua a evoluir. Note também que a hipótese de  $E_0$  como uma envoltória minimizante não é retritiva, caso contrário,  $E_0$  salta para  $E_0'$  logo no início do fluxo.

**Proposição 2.5.1 (Lema 3.5 de (KOERBER, 2023))** *Seja  $(M^3, g)$  um semiespaço assintoticamente plano e conexo com um semifim e suponha que  $\partial M$  seja conexo. Seja  $\varphi$  uma solução própria fraca do FICM com bordo com condição inicial  $E_0$ . Se  $\Sigma = \tilde{\partial}E_0$  é uma superfície conexa com bordo livre, então  $\Sigma_t$  é uma superfície conexa com bordo livre, para cada  $t$ .*

A seguir apresentamos a definição de massa de Hawking modificada introduzida por Marquardt (MARQUARDT, 2017).

**Definição 2.5.2** *Seja  $(M^3, g)$  um semiespaço assintoticamente plano e completo. Dada uma hipersuperfície  $\Sigma \subset M$ , definimos a massa de Hawking modificada (bordo livre) por*

$$\tilde{m}_H(\Sigma) := \frac{(2|\Sigma|)^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( 8\pi - \int_{\Sigma} H^2 d\sigma_{\Sigma} \right), \quad (19)$$

sendo  $H$  a curvatura média de  $\Sigma$ .

Convém mencionar que Cruz (CRUZ, 2019), ao utilizar o FICM para hipersuperfícies com bordo, demonstrou desigualdades massa-capacidade que envolvem a curvatura média total de hipersuperfícies com bordo em cones convexos e a massa de semiespaços assintoticamente planos.

As proposições a seguir apresentam boas características para a massa da Hawking modificada.

**Proposição 2.5.2 (Corolário 5.11 de (KOERBER, 2023))** *Seja  $(M_{ext}, g)$  uma região exterior cujo bordo consiste de superfícies conexas com bordo livre limitando o conjunto  $E_0 = \{\varphi < 0\}$ . Suponha que  $(M^3, g)$  seja um semiespaço assintoticamente plano satisfazendo  $R_g \geq 0$  e  $H_g \geq 0$ . Seja  $E_t$  uma solução pré-compacta do FICM fraco começando em  $E_0$ . Então  $\tilde{m}_H(\Sigma_t)$  é monótona não decrescente para todo  $t$ . Mais precisamente, temos*

$$\begin{aligned} \tilde{m}_H(\Sigma_{t_1}) &\geq \tilde{m}_H(\Sigma_{t_0}) \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \frac{(2|\Sigma_t|)^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[ 4\pi(1 - \chi(\Sigma_t)) + \int_{\Sigma_t} \left( 2\frac{|\nabla H|^2}{H^2} + \frac{1}{2}|\overset{\circ}{A}|^2 + R_g \right) d\sigma_{\Sigma_t} + \int_{\partial\Sigma_t} H_g d\sigma_{\partial\Sigma_t} \right] dt \end{aligned}$$

para  $0 \leq t_0 < t_1$ , onde  $\chi(\Sigma_t)$  é a característica de Euler de  $\Sigma_t$ .

**Observação 2.5.2** *Pela proposição anterior, se  $\chi(\Sigma_t) \leq 1$  para todo  $t > 0$ , temos que*

$$\tilde{m}_H(\Sigma_{t_1}) \geq \tilde{m}_H(\Sigma_{t_0}),$$

para  $0 \leq t_0 < t_1$ .

**Proposição 2.5.3 (Lema 6.3 de (KOERBER, 2023))** *Sejam  $(M, g)$  um semiespaço assintoticamente plano com um semifim e  $E_t$  uma solução fraca pré-compacta do FICM com bordo livre tal que  $\tilde{\partial}E_t$  é conexo. Então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{m}_H(\Sigma_t) \leq \tilde{m}.$$

**Observação 2.5.3** *Segue de (KOERBER, 2023) que se a região exterior possui mais de uma componente com bordo interior, onde pelo menos uma dessas componentes é uma superfície com bordo livre, então podemos construir um fluxo fraco começando em uma das componentes com bordo livre de maneira que a massa de Hawking modificada ainda permaneça não decrescente.*

## 2.6 VARIEDADES ESTÁTICAS COM BORDO

Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana que admite uma função não nula  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo a seguinte equação:

$$\nabla_g^2 V - (\Delta_g V)g - V \text{Ric}_g = 0. \quad (20)$$

Esta variedade é denominada uma variedade estática e  $V$  é chamada de potencial estático. A equação (20) surge de forma natural em problemas de deformação da curvatura escalar de  $M$  (veja (CORVINO, 2000), (FISCHER; MARSDEN, 1975)), bem como em questões relacionadas à Relatividade Geral, conforme discutido, em (AMBROZIO, 2017) e suas referências. Essa motivação física decorre do fato de que, dado uma solução em (20) em uma variedade tridimensional, é possível construir um espaço-tempo que satisfaça as equações de Einstein no vácuo com constante cosmológica (veja a Introdução para mais detalhes).

Em (CRUZ; VITÓRIO, 2019), Cruz-Vitório abordaram a questão de prescrever a curvatura escalar e a curvatura média de uma variedade Riemanniana com bordo. Em termos mais claros, eles trataram a curvatura escalar em conjunto com a curvatura média como um funcional.

$$g \mapsto (\mathbf{R}_g, \mathbf{H}_g)$$

definida no espaço das métricas Riemanniana em uma variedade  $M$  com bordo não vazio. Temos então a seguinte

**Definição 2.6.1** *Uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  com bordo  $\partial M$  não vazio é uma variedade estática com bordo se existe uma solução suave não trivial  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ , chamada potencial estático, solução de*

$$\begin{cases} \nabla_g^2 V - (\Delta_g V)g - V \text{Ric}_g = 0 & \text{em } M \\ \frac{\partial V}{\partial \nu} g - V \Pi_g = 0 & \text{em } \partial M, \end{cases} \quad (21)$$

onde  $\nu$  é o normal unitário exterior a  $\partial M$ ,  $\Pi_g$  é a segunda forma fundamental de  $\partial M$  com respeito a  $\nu$ ,  $\nabla_g^2$ ,  $\Delta_g$  e  $\text{Ric}_g$  denotam o Hessiano, o Laplaciano e a curvatura de Ricci de  $g$ , respectivamente.

Observe que tomando o traço em (21), obtemos as seguintes equações

$$\nabla_g^2 V = V \left( \text{Ric}_g - \frac{R_g}{n-1} g \right) \text{ e } \Delta_g V + \frac{R_g}{n-1} V = 0 \text{ em } M \quad (22)$$

e

$$V \left( \Pi_g - \frac{H_g}{n-1} g \right) = 0 \text{ e } \frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{H_g}{n-1} V \text{ em } \partial M. \quad (23)$$

A seguir, apresentamos outras propriedades fundamentais para esses espaços.

**Proposição 2.6.1 (Proposição 2.1 de (CRUZ; NUNES, 2023))** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo com potencial estático  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponha  $\Sigma = V^{-1}(0)$  não vazio. Então*

- a)  $\Sigma$  é uma hipersuperfície mergulhada totalmente geodésica em  $M$ . Mais precisamente:
  - a.1) Se  $\Sigma \cap \partial M = \emptyset$ , então  $\Sigma$  é uma hipersuperfície totalmente geodésica contida no  $\text{int } M$ ;
  - a.2) Se  $\Sigma \cap \partial M \neq \emptyset$ , então cada componente conexa  $\Sigma_0$  de  $\Sigma$  tal que  $\Sigma_0 \cap \partial M \neq \emptyset$  é uma hipersuperfície totalmente geodésica com bordo livre de  $M$ . Em particular,  $\partial \Sigma_0$  é uma hipersuperfície totalmente geodésica de  $\partial M$ .
- b)  $|\nabla V|$  é uma constante positiva em cada componente conexa de  $\Sigma$ ;
- c) A curvatura escalar  $R_g$  é constante;
- d)  $\partial M$  é totalmente umbílica e sua curvatura média é constante em cada componente conexa de  $\partial M$ . Em particular, pelo item a.2), se  $\Sigma_0$  é uma componente conexa de  $\Sigma$  tal que  $\Sigma_0 \cap \partial M \neq \emptyset$ , então a curvatura média de  $\partial \Sigma_0$  em  $\Sigma_0$  é constante em cada componente conexa;
- e) Em  $\partial M$  temos que  $\text{Ric}_g(\nu, X) = 0$  para qualquer vetor  $X$  tangente a  $\partial M$ , onde  $\nu$  denota o conormal unitário a  $\partial M$ .

A seguir, apresentamos alguns exemplos de variedades estáticas com bordo.

**Exemplo 2.6.1** *Toda métrica Ricci plana em  $M$  com bordo totalmente geodésico é estática. Além disso, veja que a função potencial é gerada por 1. Tomemos, por exemplo,  $(M, g)$  uma variedade compacta de Calabi-Yau<sup>3</sup>, a qual é Ricci-plana. Neste caso, se  $\tilde{M} = [0, 1] \times M$*

<sup>3</sup> veja (YAU, 2008) para definição precisa.

for equipada com a métrica produto  $\tilde{g} = dt + g$ , teremos uma métrica Ricci plana com bordo totalmente geodésico. Para um exemplo não compacto, consideramos o semiespaço  $\mathbb{R}_+^n$  com a métrica canônica.

**Exemplo 2.6.2** Seja  $B$  a bola Euclidiana unitária em  $\mathbb{R}^n$ . A função  $V$  dada por

$$V(x) = \langle b, x \rangle,$$

onde  $b \in \mathbb{R}^n$ , é um potencial para a equação (21). Em particular, as funções coordenadas  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , satisfazem (21).

**Exemplo 2.6.3** Seja  $\mathbb{S}_+^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1, x_{n+1} \geq 0\}$  o hemisfério de dimensão  $n$  equipada com a métrica canônica. Então as funções coordenadas  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , satisfazem (21). Observe que neste caso, a métrica é Einstein e o bordo  $\partial\mathbb{S}_+^n$  é totalmente geodésico.

**Exemplo 2.6.4 ( Modelo de Poincaré da geometria hiperbólica)** Considere a semibola  $\mathbb{B}_+^n = \{z = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n; |z| \leq 1\}$  munida com a métrica

$$g = \omega(z)^{-2}\delta, \quad \omega(z) = \frac{1 - |z|^2}{2},$$

onde  $\delta$  é a métrica Euclidiana. Então temos os seguintes potenciais estáticos:

$$V_0(z) = \frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2}, \quad V_1(z) = \frac{2x_1}{1 - |z|^2}, \dots, \quad V_{n-1}(z) = \frac{2x_{n-1}}{1 - |z|^2}.$$

**Exemplo 2.6.5** Dado  $m > 0$ , considere o semiespaço Schwarzschild dado no Exemplo 2.4.2. Então a função

$$V(r) = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}},$$

satisfaz (21).



### 3 Capacidade de Superfícies em Semiespaços Assintoticamente Planos

Nosso objetivo nesta seção é obter uma desigualdade tipo massa-capacidade para semiespaços assintoticamente planos. Antes de enunciarmos nossos resultados, é importante relembrar alguns resultados sobre capacidade.

#### 3.1 DEFINIÇÕES E RESULTADOS AUXILIARES

**Definição 3.1.1** *Sejam  $(M^3, g)$  um semiespaço assintoticamente plano completo e  $E$  um domínio suave e limitado em  $M$  tal que  $\Sigma = \tilde{\partial}E$  intersecta  $\partial M$  transversalmente. A capacidade de  $\Sigma$  é definida por*

$$\text{cap}(\Sigma, g) = \inf_{\varphi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_M |\nabla\varphi|^2 d\sigma_M \right\}, \quad (24)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as funções suaves em  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\varphi|_{\Sigma} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 1$ .

**Observação 3.1.1** *Note que o ínfimo é atingido por uma única solução  $\varphi$  de modo que*

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \text{ em } M, \\ \varphi = 0 \text{ em } \Sigma, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ em } \hat{\partial}(M \setminus E), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 1. \end{cases}$$

*Para detalhes da prova de existência e unicidade de  $\varphi$  (veja Proposição 1.4 de (IMPERA et al., 2013)).*

A seguir, apresentaremos uma versão da fórmula da coárea para domínios com bordo.

**Lema 3.1.1** *Seja  $(\Omega, g)$  uma variedade orientada com bordo suave. Seja  $u$  uma função real suave em  $\Omega$  que é não-negativa, então*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dv = \int_0^s \int_{\{u=t\}} |\nabla u| da + \int_0^s \int_S \frac{\partial u}{\partial\nu} dl,$$

onde  $s = \sup u$  em  $\bar{\Omega}$ ,

**Demonstração:** Defina  $f = -\Delta u$ . Multiplicando por  $(u - t)^+$  e integrando por partes, obtemos

$$\int_{\{u>t\}} |\nabla u|^2 dv = \int_{\{u>t\}} f(u - t) da + \int_S \frac{\partial u}{\partial\nu} (u - t) dl,$$

onde  $S = \hat{\partial}(M \setminus \{u \leq t\})$  e  $\nu$  é a normal exterior de  $\partial M$ . Diferenciando com respeito a  $t$ , obtemos

$$-\frac{d}{dt} \int_{\{u>t\}} |\nabla u|^2 da = \int_{\{u>t\}} f da + \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} dl.$$

Integrando esta relação sobre a imagem de  $u$ , isto é, em  $[0, s]$  obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dv = \int_0^s \left( \int_{\{u>t\}} f da \right) dt + \int_0^s \left( \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} dl \right) dt$$

Note que para  $t$  tal que  $|\nabla u| \neq 0$  no conjunto de nível  $\{u = t\}$ , o Teorema de Green implica

$$\int_{\{u>t\}} f da = \int_{\{u=t\}} |\nabla u| da + \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} dl,$$

já que a normal unitária do conjunto de nível  $\{u=t\}$  é dada por  $-\nabla u/|\nabla u|$ . O resultado segue juntando as equações acima. ■

**Definição 3.1.2** *Uma variedade Riemanniana com bordo é dita conformemente plana no infinito, se fora de um conjunto compacto, é a união disjuntas de conjuntos (chamados fins) com curvatura escalar nula e curvatura média do bordo nulo e que são conformes a  $(\mathbb{R}_+^n \setminus \bar{B}_1^+(0), \delta)$  com o fator conforme se aproximando de uma constante positiva no infinito em cada conjunto.*

O resultado a seguir constitui uma aproximação para uma métrica conformemente plana no infinito.

**Exemplo 3.1.1** *O semiespaço Schwarzschild (Exemplo 2.4.2) é conformemente plana no infinito.*

**Lema 3.1.1** *Seja  $(M^n, g)$ ,  $n \geq 3$ , uma variedade Riemanniana assintoticamente plana com bordo tal que  $R_g \geq 0$  e  $H_g \geq 0$ . Então dado  $\epsilon > 0$ , existe uma métrica  $\bar{g}$  com  $R_{\bar{g}} \geq 0$  e  $H_{\bar{g}} \geq 0$  que é conformemente plana no infinito tal que*

$$i) \quad 1 - \epsilon \leq \frac{\bar{g}(v, v)}{g(v, v)} \leq 1 + \epsilon \text{ para todo vetor tangente } v \neq 0 \text{ e para todo ponto em } M;$$

$$ii) \quad |\tilde{m}_{\bar{g}} - \tilde{m}_g| \leq \epsilon.$$

Pela Observação 3.10 de [(ALMARAZ et al., 2016)], se a métrica é conformemente plana, a expressão (14) pode ser simplificada em

$$\tilde{m} = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_{r,+}^{n-1}} (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \mu^i dS_{r,+}^{n-1}.$$

Inspirados nos argumentos de Bray (BRAY, 2001), podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $(M^3, \bar{g})$  é conformemente plana próxima ao infinito, onde  $\bar{g}$  é fornecida pelo Lema 3.1.1.

Seja  $\varphi$  dada pela Observação 3.1.1. Defina os conjuntos de nível de  $\varphi(x)$  como sendo  $\Sigma_s = \{x; \varphi(x) = s\}$ , com  $0 < s < 1$ . Como  $\varphi$  é uma função suave, pelo Teorema de Sard para variedades com bordo (veja (LEE, 2003)), temos que  $\Sigma_s$  é uma superfície suave para q.t.p.  $s$ . Pela fórmula da coárea, obtemos

$$\text{cap}(\Sigma, \bar{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_{\Sigma_t} |\nabla\varphi| \, drds,$$

onde  $\text{cap}(\Sigma, \bar{g})$  é a capacidade dada pela métrica  $\bar{g}$ .

Por outro lado, sabemos que o vetor normal unitário  $N_s$  em  $\Sigma_s$  é dado por  $N_s = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$ , e daí

$$\int_{\Sigma_s} \frac{\partial\varphi}{\partial N_s} \, ds = \int_{\Sigma_s} |\nabla\varphi| \, ds.$$

Dessa forma

$$\text{cap}(\Sigma, \bar{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_{\Sigma_s} |\nabla\varphi| \, drds = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_{\Sigma_s} \frac{\partial\varphi}{\partial N} \, drds.$$

Assim pelo Teorema da Divergência como  $\varphi$  é harmônica e  $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0$ , temos que  $\int_{\Sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial N} \, ds$  é constante para todas as hipersuperfície homóloga a  $\Sigma$ . Portanto

$$\text{cap}(\Sigma, \bar{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial N} \, ds,$$

para qualquer superfície  $\Sigma \subset M^3$ . Como  $(M^3, \bar{g})$  é conformemente plana no infinito e pelas observações acima sabemos que

$$\varphi(x) = 1 - \frac{c}{2|x|} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad (25)$$

para alguma constante  $c > 0$  (veja por exemplo a Seção 5 de (ALMARAZ et al., 2016)).

Portanto, por (25), obtemos

$$\varphi(x) = 1 - \frac{\text{cap}(\Sigma, \bar{g})}{2|x|} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad (26)$$

para hemisférios coordenados suficientemente grandes.

O argumento acima também é válido para múltiplos fins se a função que atinge o ínfimo dada pela Observação 3.1.1 satisfazer também a condição  $\lim_{x \rightarrow \infty_k} \varphi(x) = 0$  para todo  $k \neq 0$ , onde  $\infty_k$  são os pontos do infinito diferentes do fim escolhido.

O seguinte resultado será de grande utilidade para provar nosso principal resultado deste capítulo.

**Lema 3.1.2** *Sejam  $(M^3, g)$  um semiespaço assintoticamente plano e  $\Sigma = \hat{\partial}E \subset M^3$  uma superfície suave, onde  $E$  é um domínio suave e limitado em  $M$ . Seja  $\psi$  uma função não negativa em  $M^3$  tal que*

$$\begin{cases} \psi = 0 \text{ em } \Sigma, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \hat{\partial}(M \setminus E), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = \infty, \end{cases}$$

onde  $\nu$  é o normal unitário que aponta para fora em  $M \setminus E$ . Defina

$$\text{flux}(\psi, t) = \int_{\Sigma_t} |\nabla \psi| d\sigma_{\Sigma_t}.$$

Então

$$\begin{aligned} \text{cap}(\Sigma, g) &\leq \inf_f \int_0^\infty f'(t)^2 \text{flux}(\psi, t, g) dt \\ &= \left( \int_0^\infty \text{flux}(\psi, t, g)^{-1} dt \right)^{-1}, \end{aligned}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as funções suaves  $f : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty)$  tais que  $f(0) = 0$  e  $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ .

**Demonstração:** Pela definição de capacidade, temos que

$$\begin{aligned} \text{cap}(\Sigma, g) &\leq \inf_f \int_M |\nabla(f \circ \psi)|^2 d\sigma_M \\ &= \inf_f \int_0^\infty \int_{\Sigma_t} f'(t)^2 |\nabla \psi|^2 d\sigma_{\Sigma_t} dt, \end{aligned}$$

onde usamos a fórmula da córea.

Por outro lado, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} 1 &= \left( \int_0^\infty f'(t)^2 dt \right)^2 \\ &= \left( \int_0^\infty f'(t)^2 \text{flux}(\psi, t, g)^{\frac{1}{2}} \text{flux}(\psi, t, g)^{-\frac{1}{2}} dt \right)^2 \\ &\leq \left( \int_0^\infty f'(t)^2 \text{flux}(\psi, t, g) dt \right) \left( \int_0^\infty \text{flux}(\psi, t, g)^{-1} dt \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left( \int_0^\infty \text{flux}(\psi, t, g)^{-1} dt \right)^{-1} \leq \int_0^\infty f'(t)^2 \text{flux}(\psi, t, g) dt$$

para toda  $f$ , e vale a igualdade se, e somente se,

$$f(t) = \left( \int_0^\infty \text{flux}(\psi, t, g)^{-1} dt \right)^{-1} \left( \int_0^t \text{flux}(\psi, t, g)^{-1} dt \right),$$

para todo  $t \in [0, \infty]$ . Portanto para esta  $f$ , temos

$$\begin{aligned} \text{cap}(\Sigma, g) &\leq \int_0^\infty f'(t)^2 \text{flux}(\psi, t, g) dt \\ &\leq \left( \int_0^\infty \text{flux}(\psi, t, g)^{-1} dt \right)^{-1}. \end{aligned}$$

■

### 3.2 CAPACIDADE DE SUPERFÍCIES EM SEMIESPAÇOS ASSINTOTICAMENTE PLANOS

Apresentamos a seguir o principal resultado deste capítulo. Nele mostraremos uma estimativa para a capacidade para semiespaços assintoticamente planos.

**Teorema 3.2.1** *Seja  $(M^3, g)$  um semiespaço assintoticamente plano, completo, suave com  $R_g \geq 0$  e  $H_g \geq 0$ . Seja  $M_{ext} \subset M$  uma região exterior e suponha que  $\Sigma$  seja uma componente conexa de  $\tilde{\partial}M_{ext}$  com bordo livre. Então*

$$\text{cap}(\Sigma, g) \leq \left( \frac{|\Sigma|}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma_{\Sigma}} \right), \quad (27)$$

onde  $H$  e  $|\Sigma|$  denotam a curvatura média e a área de  $\Sigma$ , respectivamente. Além disso, vale a igualdade se, e somente se,  $(M_{ext}, g)$  é isométrico ao semiespaço Schwarzschild.

**Demonstração:** Como  $(M_{ext}, g)$  é uma região exterior, é possível que ela possua mais de uma componente de bordo, algumas fechadas e com pelo menos uma com bordo livre. Seja  $\Sigma = \tilde{\partial}E$  essa componente com bordo livre. Considere  $\varphi$  uma solução fraca do FICM com bordo livre com condição inicial  $\Sigma$ . Suponha sem perda de generalidade que  $\Sigma$  seja a única componentes de bordo livre. Caso contrário, evolua  $E_t$  começando de  $\Sigma$  até que toque outras componentes do bordo interior. Em seguida, por um argumento de salto, trocamos  $E_t$  por  $(E_t \cup E)'$ . É importante notar que, para utilizações futuras, isto não decresce a massa de Hawking modificada e podemos reiniciar o fluxo de  $(E_t \cup E)'$  de modo que a massa de Hawking modificada permanece não decrescente. Esse procedimento acontece apenas uma quantidade finita de vezes, pois temos um número finito de componentes de bordos (veja por exemplo a Seção 5 de (KOERBER, 2023) para mais detalhes).

Nós observamos também que é possível mostrar a existência de uma solução fraca própria em semiespaço assintoticamente plano, se  $E_0 \subset M$  é precompacto com interior composto de fechados e superfícies com bordo livre, veja Seção 4 de (KOERBER, 2023), o que é equivalente que os níveis da região exterior sejam precompactos.

Pelo Lema 3.1.2, temos que

$$\text{cap}(\Sigma, g) \leq \inf_f \int_0^\infty f'(t)^2 \text{flux}(\varphi, t, g) dt, \quad (28)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as funções  $f(t)$  satisfazendo  $f(0) = 0$  e  $f(\infty) = 1$ . Pela Observação 2.5.1 e pelo Teorema 2.5.1, temos que

$$\text{flux}(\varphi, t, g) = \int_{\Sigma_t} |\nabla \varphi| d\sigma_{\Sigma_t} = \int_{\Sigma_t} \mathbf{H} d\sigma_{\Sigma_t},$$

onde  $\mathbf{H}$  é a curvatura média fraca de  $\Sigma_t$ .

Segue da Proposição 2.5.1 que  $\Sigma_t$  é uma superfície conexa com bordo livre e portanto  $\chi(\Sigma_t) \leq 1$  para todo  $t > 0$ . Pela Proposição 2.5.2, a massa de Hawking modificada  $\tilde{m}_H(\Sigma_t)$  é não decrescente para  $t \in (0, \infty)$  e

$$\tilde{m}_H(\Sigma^+) = \tilde{m}_H(\Sigma') \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \tilde{m}_H(\Sigma_t).$$

A primeira igualdade é verdade pois  $\Sigma^+ = \Sigma'$  pelo Teorema 2.5.1.

Para cada  $t > 0$ , temos que

$$\int_{\Sigma_t} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma_t} \leq 8\pi - \frac{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}{(2|\Sigma_t|)^{\frac{1}{2}}} \tilde{m}_H(\Sigma').$$

Pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \text{flux}(\varphi, t, g) &= \int_{\Sigma_t} \mathbf{H} d\sigma_{\Sigma_t} \\ &\leq |\Sigma_t|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Sigma_t} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma_t} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\Sigma_t|^{\frac{1}{2}} \left( 8\pi - \frac{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}{(2|\Sigma_t|)^{\frac{1}{2}}} \tilde{m}_H(\Sigma') \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Sabendo que  $|\Sigma_t| = e^t |\Sigma'|$  pelo Teorema 2.5.1, podemos reescrever (29) como

$$\text{flux}(\varphi, t, g) \leq F(|\Sigma'|, m_0, t), \quad (30)$$

onde  $F(|\Sigma'|, m_0, t)$  é uma função que depende de  $|\Sigma'|$ ,  $m_0 = 2\tilde{m}_H(\Sigma')$  (veja Observação 2.4.3) e  $t$ , dada por

$$F(|\Sigma'|, m_0, t) = \left[ e^t |\Sigma'| \left( 8\pi - e^{-\frac{t}{2}} \frac{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}{(2|\Sigma'|)^{\frac{1}{2}}} \frac{m_0}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Assim por (28) e por (30), obtemos,

$$\text{cap}(\Sigma, g) \leq \inf_f \int_0^\infty f'(t)^2 F(|\Sigma'|, m_0, t) dt. \quad (31)$$

Queremos calcular o lado direito de (31), assim considere a métrica do semiespaço Schwarzschild tridimensional dada por

$$g_{m_0} = \frac{1}{1 - \frac{2m_0}{r}} dr^2 + r^2 d\sigma_{\mathbb{S}_+^2}^2.$$

Inicialmente observemos que, se  $m_0 \in (-\infty, 0)$ , então  $g_{m_0}$  está definida em  $(0, \infty) \times \mathbb{S}_+^2$ . Entretanto, se  $m_0 \in [0, \infty)$ , então  $g_{m_0}$  está definida em  $[2m_0, \infty) \times \mathbb{S}_+^2$ . Desta forma pelas condições acima,  $g_{m_0}$  está bem definida em

$$M_{\bar{r}_0} = [\bar{r}_0, \infty) \times \mathbb{S}_+^2,$$

onde  $\bar{r}_0$  satisfaz  $|\Sigma'| = 2\pi\bar{r}_0^2$ . Portanto,  $(M_{\bar{r}_0}, g_{m_0})$  é um semiespaço Schwarzschild cujo bordo interior  $\tilde{\partial}\{r = \bar{r}_0\}$  possui área igual a  $|\Sigma'|$ .

Sabe-se que o FICM em  $(M_{\bar{r}_0}, g_{m_0})$  com condição inicial  $\tilde{\partial}\{r = \bar{r}_0\}$  é dada pela família de hemisférios coordenados

$$S_+(t) = \{r = \bar{r}_0 e^{\frac{1}{2}t}\}, \quad \forall t \in (0, \infty),$$

para o qual a curvatura média é uma constante que depende de  $t$  e  $2\tilde{m}_H(S_t) = m_0$  para todo  $t \in [0, \infty)$ . A solução  $\varphi(x)$  do FICM com bordo é dada explicitamente por  $\varphi(x) = 2 \log \left( \frac{r}{\bar{r}_0} \right)$  para todo  $x \in M_{\bar{r}_0}$ .

O próximo passo é definir uma função  $u = u(r)$  em  $(M_{\bar{r}_0}, g_{m_0})$ , com  $u(\bar{r}_0) = 0$  tal que satisfaça:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } M_{\bar{r}_0}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \hat{\partial}M_{\bar{r}_0}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 1, \end{cases}$$

onde  $\nu$  é o normal exterior a  $\hat{\partial}M_{\bar{r}_0}$ . Para isso, temos dois casos a analisar:

**Caso 1 :  $m_0 \neq 0$  :**

Considere a função

$$w(r) = \sqrt{1 - \frac{2m_0}{r}}. \quad (32)$$

Note

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ em } M_{\bar{r}_0}, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \hat{\partial}M_{\bar{r}_0}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} w(r) = 1, \end{cases}$$

onde  $\nu$  é o normal exterior a  $\tilde{\partial}M_{\bar{r}_0}$ . Definindo

$$u(r) = \frac{w(r) - w(\bar{r}_0)}{1 - w(\bar{r}_0)}, \quad (33)$$

pela fórmula da córea e pela hipótese que  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  em  $\hat{\partial}M_{\bar{r}_0}$ . Observe que a capacidade do nosso modelo  $(\tilde{\partial}M_{\bar{r}_0}, g_{m_0})$  é dado por

$$\text{cap}(\tilde{\partial}M_{\bar{r}_0}, g_{m_0}) = \int_{M_{\bar{r}_0}} |\nabla u|^2 d\sigma_{M_{\bar{r}_0}} = 2\pi \frac{m_0}{1 - w(\bar{r}_0)}. \quad (34)$$

Considere

$$f_0 = u \circ \varphi^{-1}$$

daí temos que

$$f_0(t) = \frac{1}{1 - w(\bar{r}_0)} \left[ \sqrt{1 - \frac{2m_0}{r_0 e^{\frac{t}{2}}}} - w(\bar{r}_0) \right], \quad (35)$$

o qual é motivada pelo modelo e serve para o problema inicial, isto é, o ínfimo no modelo é atingido

$$\inf_f \int_0^\infty f'(t)^2 F(|\Sigma'|, m_0, t) dt = \int_0^\infty f'_0(t)^2 F(|\Sigma'|, m_0, t) dt.$$

Basta então calcular o lado direito da equação acima. Com efeito, como  $|\Sigma'| = 2\pi\bar{r}_0^2$ , segue que

$$F(|\Sigma'|, m_0, t) = 4\pi\bar{r}_0 e^{\frac{t}{2}} \left( 1 - \frac{2m_0}{\bar{r}_0} e^{-\frac{t}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e que

$$f'_0(t)^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{(1 - w(\bar{r}_0))^2} \frac{m_0^2}{\bar{r}_0^2} \left( 1 - \frac{2m_0}{\bar{r}_0} \right)^{-1} e^{-\frac{t}{2}},$$

daí

$$\int_0^\infty f'_0(t)^2 F(|\Sigma'|, m_0, t) dt = \pi \frac{m_0^2}{\bar{r}_0} \frac{1}{(1 - w(\bar{r}_0))^2} \int_0^\infty \left( 1 - \frac{2m_0}{\bar{r}_0} e^{-\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt.$$

Logo, por uma substituição simples

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s (f'_0(t))^2 F(|\Sigma'|, m_0, t) dt = 2\pi \frac{m_0}{1 - w(\bar{r}_0)}$$

e portanto

$$\int_{M_{\bar{r}_0}} |\nabla u|^2 d\sigma_{M_{\bar{r}_0}} = 2\pi \frac{m_0}{1 - w(\bar{r}_0)}. \quad (36)$$

Queremos calcular  $\frac{m_0}{1 - w(\bar{r}_0)}$ , como  $\bar{r}_0 = \left( \frac{|\Sigma'|}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{2m_0}{\bar{r}_0} &= \frac{2}{\bar{r}_0} 2\tilde{m}_H(\Sigma') \\ &= 2 \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{|\Sigma'|^{\frac{1}{2}}} 2 \frac{(2|\Sigma'|)^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left( 8\pi - \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'}, \end{aligned} \quad (37)$$



e por (37), obtemos que

$$1 - w(\bar{r}_0) = 1 - \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{1 - w(\bar{r}_0)} &= \frac{2\tilde{m}_H(\Sigma')}{1 - \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'}}} \\ &= \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'}}} \frac{(|\Sigma'|)^{\frac{1}{2}}}{(8\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'}\right). \end{aligned} \quad (38)$$

Note que

$$1 - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'} = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'}}\right) \left(1 + \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'}}\right), \quad (39)$$

desta forma por (38) e (39), obtemos

$$\frac{m_0}{1 - w(\bar{r}_0)} = \left(\frac{|\Sigma'|}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'}}\right),$$

o que nos leva a

$$\text{cap}(\Sigma, g) \leq \left(\frac{|\Sigma'|}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'}}\right). \quad (40)$$

### Caso 2 : $m_0 = 0$

Neste caso, nosso o modelo  $(M_{\bar{r}_0}, g_{m_0})$  se reduz ao semiespaço euclidiano  $(\mathbb{R}_+^3, g_0)$  excluindo a bola  $B_{\bar{r}_0}^3(0) \cap \mathbb{R}_+^3$ . Assim, definindo

$$u = 1 - \frac{\bar{r}_0}{r},$$

temos que a capacidade do modelo  $(\tilde{\partial}M_{\bar{r}_0}, g_{m_0})$  é constante igual a  $\bar{r}_0$ . Assim consideramos,

$$f_0 = u \circ \varphi^{-1},$$

e temos que

$$f_0(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}}, \quad (41)$$

que também é motivada pelo modelo e serve para o problema inicial, ou seja, atingi o mínimo no modelo

$$\inf_f \int_0^\infty f'(t)^2 F(|\Sigma'|, m_0, t) dt = \int_0^\infty f_0'(t)^2 F(|\Sigma'|, m_0, t) dt.$$

Como no caso anterior temos que  $F(|\Sigma'|, m_0, t) = 4\pi\bar{r}_0 e^{\frac{t}{2}}$  e  $(f_0'(t))^2 = \frac{1}{4}e^{-t}$ , daí

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_0'(t)^2 F(|\Sigma'|, m_0, t) dt &= \int_0^\infty \pi\bar{r}_0 e^{-\frac{t}{2}} dt \\ &= 2\pi\bar{r}_0, \end{aligned}$$

donde

$$\int_{M_{\bar{r}_0}} |\nabla u|^2 d\sigma_{M_{\bar{r}_0}} = 2\pi\bar{r}_0. \quad (42)$$

Como  $m_0 = 0$ , analogamente ao caso anterior, temos que

$$0 = \frac{2m_0}{\bar{r}_0} = 1 - \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'},$$

o que implica

$$1 = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \text{cap}(\Sigma, g) &\leq \bar{r}_0 = \left(\frac{|\Sigma'|}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{|\Sigma'|}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'}}\right). \end{aligned}$$

Logo, em ambos os casos

$$\text{cap}(\Sigma, g) \leq \left(\frac{|\Sigma'|}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma'}}\right). \quad (43)$$

Observe que precisamos trocar  $\Sigma'$  por  $\Sigma$ , note que  $\Sigma'$  é uma superfície com bordo livre  $C^{1,1}$ , conforme resultados de regularidade obtidos em (STERNBERG et al., 1991), (HUISKEN; ILMANEN, 2001) e até o bordo como se pode ver na prova do Lema 5.10 de (KOERBER, 2023). Como esta é uma envoltória estritamente convexa e não aumenta a área interior do bordo, concluímos que

$$|\Sigma'| \leq |\Sigma|. \quad (44)$$

Além do mais, por (18), a curvatura média  $\mathbf{H}'$  de  $\Sigma'$  satisfaz

$$\mathbf{H}' = \begin{cases} 0 & \text{em } \Sigma' \setminus \Sigma, \\ \mathbf{H} \geq 0 & \text{q.t.p. em } \Sigma' \cap \Sigma. \end{cases} \quad (45)$$

Daí,

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma} \geq \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} (\mathbf{H}')^2 d\sigma_{\Sigma'}, \quad (46)$$

assim por (43), (44), (45) e (46), obtemos

$$\text{cap}(\Sigma, g) \leq \left(\frac{|\Sigma|}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma}}\right). \quad (47)$$

Suponha que ocorra a igualdade em (47), então todas as desigualdades anteriores são igualdades. De forma mais precisa,

$$|\Sigma| = |\Sigma'|, \quad \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma'} (\mathbf{H}')^2 d\sigma_{\Sigma'}, \quad \tilde{m}_H(\Sigma_t) = \tilde{m}_H(\Sigma') \quad (48)$$

e

$$\text{cap}(\Sigma, g) = \int_{M^3} |\nabla(f_0 \circ \varphi)|^2 d\sigma_M, \quad (49)$$

onde  $f_0$  é dada por (35) ou (41),  $\varphi$  é solução do FICM com bordo livre em  $(M^3, g)$  com dado inicial  $\Sigma$  e  $t \in (0, \infty)$ . Segue por (48) que  $\Sigma$  é uma envoltória minimizante e

$$\tilde{m}_H(\Sigma_t) = \tilde{m}_H(\Sigma), \text{ para todo } t \in (0, \infty). \quad (50)$$

Além disso,  $u = f_0 \circ \varphi$  é uma função harmônica em  $M^3$  com condição de Neumann em  $\hat{\partial}M$ . Afirmamos que  $\Sigma_t, \Sigma$  não saltam para  $\Sigma'_t, \Sigma'$ , isto é,

$$\Sigma = \Sigma' \text{ e } \Sigma_t = \Sigma'_t, \forall t \in (0, \infty). \quad (51)$$

Suponha, por contradição, que  $\Sigma_t, \Sigma$  saltem, então existe uma região entre  $\Sigma_t$  e  $\Sigma$  tal que  $\varphi = t$ , para algum  $t \geq 0$ . Logo, para todo  $x \in M$ , temos que  $u(x) = f_0(t)$  é constante nessa região. Entretanto pelo Princípio do Máximo para funções harmônicas, teríamos que  $u$  seria constante em  $M$ , o que é uma contradição. Além disso, pelo Lema de Hopf aplicado à região exterior de  $\Sigma_t$  em  $(M^3, g)$  e pelo fato de que  $u$  é constante em  $\Sigma_t$ , como  $\Sigma_t$  é pelo menos  $C^2$ , temos que  $|\nabla u| \neq 0$ . Como a inversa  $f_0^{-1}$  de  $f_0$  existe, segue que  $\varphi = f_0^{-1} \circ u$  é uma função suave em  $M$  e, pela regra da cadeia,  $|\nabla \varphi| \neq 0$ . Assim,  $\Sigma_t$  evolui suavemente com uma velocidade de  $\frac{1}{H}$ .

Observe também que vale a igualdade na Proposição 2.5.2. Como consequência, para cada  $t \geq 0$ , temos que  $\chi(\Sigma_t) = 1$ ,  $R_g = 0$  em  $\Sigma_t$ ,  $H_g = 0$  em  $\partial\Sigma_t$ , cada  $\Sigma_t$  é umbílica e  $H$  é constante em  $\Sigma_t$ .

Fluindo pelo FICM para variedades com bordo, a curvatura média satisfaz a seguinte EDP de evolução (veja equação (34) de (KOERBER, 2023))

$$\begin{cases} -\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\nabla H}{H^2} - \frac{2|\nabla H|^2}{H^3} - \frac{|A|^2}{H} - \frac{\text{Ric}(N, N)}{H} & \text{em } \Sigma_t \\ \frac{\partial H}{\partial \nu} = H\Pi(N, N) & \text{em } \partial\Sigma_t. \end{cases} \quad (52)$$

Daí, como  $H$  é constante em  $\Sigma_t$ , segue da equação de Gauss e (52) que a curvatura Gaussiana é constante em  $\Sigma_t$  e que  $\Pi(N, N) = 0$  em  $\partial\Sigma_t$ . Veja que como  $H_g = k_g + \Pi(N, N)$ , pela condição de bordo livre, então  $k_g = 0$  em  $\partial\Sigma_t$ . Consequentemente, cada  $\Sigma_t$  é um hemisfério.

Como a velocidade normal,  $1/H$ , é constante para cada  $\Sigma_t$ , a métrica em  $M_{ext}$  é da forma

$$g = \frac{1}{H^2} dt^2 + dg_{\Sigma_t}.$$

Definindo  $r = r(t)$ , temos

$$g_{\Sigma_t} = r^2 g_{S^2_+}.$$

Derivando a relação

$$e^t |\Sigma_0| = |\Sigma_t| = 2\pi r^2,$$

obtemos  $dt = 2dr/r$ . Como  $\tilde{m}_H(\Sigma_t) = m_0/2$ , obtemos que

$$H^2 = \frac{4}{r^2} - \frac{8m_0}{r^3}.$$

Portanto

$$g = \frac{dr^2}{1 - 2m_0/r} + r^2 dg_{\mathbb{S}_+^2}.$$

Veja que se  $m_0 = 0$ , então  $M_{ext}$  é isométrico a  $\mathbf{R}_+^3$ , caso contrário, se  $m_0$  é não nulo,  $M_{ext}$  é isométrico ao semiespaço Schwarzschild. ■

Seja  $\Sigma$  um horizonte com bordo livre. Assim, pela definição de horizonte, temos o seguinte

**Corolário 3.2.1** *Sejam  $(M, g)$  um semiespaço assintoticamente plano completo e suave com  $R_g \geq 0$  e  $H_g \geq 0$ . Suponha que  $\Sigma \subset M$  é um horizonte com bordo livre. Então*

$$cap(\Sigma, g) \leq \left(\frac{|\Sigma|}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma_{\Sigma}}\right), \quad (53)$$

onde  $H$  e  $|\Sigma|$  denotam a curvatura média e a área de  $\Sigma$ , respectivamente. Além disso, vale a igualdade se, e somente se,  $(M^3, g)$  é isométrico ao semiespaço Schwarzschild.

Temos a seguinte desigualdade do tipo massa-capacidade para semiespaços assintoticamente planos.

**Corolário 3.2.2** *Sejam  $(M^3, g)$  um semiespaço assintoticamente plano completo e conexo e  $\Sigma = \tilde{\partial}E_0 \subset M$  um superfície suave conexa e com bordo livre com respeito à  $\partial M$ . Suponha que  $(M^3, g)$  satisfaça todas as hipóteses do Teorema 3.2.1. Então*

$$|\tilde{m}_H(\Sigma)| \geq \left[1 - \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma_{\Sigma}}\right] cap(\Sigma, g). \quad (54)$$

Além disso, no caso em que  $\int_{\Sigma} H^2 \neq 8\pi$ , vale a igualdade se, e somente se,  $(M^3, g)$  é isométrico ao semiespaço Schwarzschild.

**Demonstração:**

Pela demonstração do teorema anterior, temos

$$\begin{aligned} cap(\Sigma, g) &\leq \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma_{\Sigma}}} \tilde{m}_H(\Sigma) \\ &\leq \left| \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma_{\Sigma}}} \right| |\tilde{m}_H(\Sigma)|. \end{aligned} \quad (55)$$

Fazendo  $\alpha = \sqrt{\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma}}$ , temos por (55) que

$$\text{cap}(\Sigma, g) \leq \frac{1}{|1 - \alpha|} |\tilde{m}_H(\Sigma)|, \quad (56)$$

logo

$$|\tilde{m}_H(\Sigma)| \geq |1 - \alpha| \text{cap}(\Sigma, g). \quad (57)$$

Como  $\alpha \neq 1$ , o resultado segue do teorema anterior. ■

## 4 Resultados em Variedades Estáticas com bordo

O propósito desta seção é mostrar que se um semiespaço assintoticamente plano possui um horizonte, então seus potenciais estáticos, caso existam, se anulam no horizonte. Além disso, mostramos resultados de rigidez em semiespaços assintoticamente planos e em variedades estáticas com bordo.

### 4.1 POTENCIAIS ESTÁTICOS EM SEMIESPAÇOS ASSINTOTICAMENTE PLANOS

Huang-Martin-Miao (HUANG et al., 2018) provaram que se uma variedade Riemanniana  $M$  assintoticamente plana  $n$  dimensional possui horizonte (isto é,  $\Sigma$  é vazio ou é a união disjunta de hipersuperfícies mínimas fechadas,  $M$  não contém outras hipersuperfícies mínimas fechadas e  $\Sigma$  é localmente minimizante de área para  $n \geq 8$ ), então seus potenciais estáticos (caso existam) se anulam no bordo, ou seja,

**Teorema 4.1.1** (HUANG et al., 2018) *Dado  $n \geq 3$ , seja  $(M^n, g)$  uma variedade assintoticamente plana com horizonte. Suponha que  $(M^n, g)$  admite um potencial estático  $V$  solução da equação*

$$\nabla_g^2 V - (\Delta_g V)g - V \text{Ric}_g = 0.$$

*Então  $V$  se anula em  $\Sigma$ . Além disso, se  $V$  é limitado, então  $V > 0$  ou  $V < 0$  em todo interior de  $M$ .*

Uma pergunta natural é se o resultado acima vale para o nosso contexto. A resposta é sim. Isto é, mostraremos que os potenciais estáticos em um semiespaço assintoticamente plano se anulam no horizonte (Definição 4.1.1) e possuem sinal em seu interior, desde que tais potenciais estáticos sejam limitados.

**Teorema 4.1.2** *Seja  $(M^n, g)$  um semiespaço assintoticamente plano com horizonte  $\Sigma$ . Suponha que  $(M, g)$  admite um potencial estático  $V$  solução de (21). Então  $V = 0$  em  $\Sigma$ . Além disso, se  $V$  é limitado, então  $V > 0$  ou  $V < 0$  em todo o interior de  $M$ .*

Para provar Teorema 4.1.2 iremos mostrar alguns resultados que nos serão úteis. Inicialmente queremos obter uma relação entre hipersuperfícies localmente minimizantes de área e o potencial estático. O resultado a seguir, que é fundamental no nosso trabalho, nos diz que um potencial estático  $V$  sobre uma hipersuperfície mínima, compacta e estável  $\Sigma$  não muda de sinal.

Além disso,  $\Sigma$  é totalmente geodésica. Note também que o resultado abaixo generaliza o Lema 4 de (HUANG et al., 2018) para variedades com bordo não vazio.

**Lema 4.1.1** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  com bordo  $\partial M$  não vazio e estática com potencial estático  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície mínima, compacta, estável, conexa e com bordo livre (com respeito a  $\partial M$ ) em  $M$ . Então:*

*i)  $V > 0$  ou  $V < 0$  em  $\Sigma$ , a menos que  $V$  seja identicamente nula em  $\Sigma$ .*

*ii)  $\Sigma$  é totalmente geodésica.*

**Demonstração:** Como  $\Sigma$  é estável, então para  $\phi \in C^1(\Sigma)$ , temos

$$\int_{\Sigma} [|\nabla_{\Sigma}\phi|^2 - (\text{Ric}_g(N, N) + |A_{\Sigma}|^2)\phi^2] d\sigma_{\Sigma} - \int_{\partial\Sigma} \Pi_g(N, N)\phi^2 d\sigma_{\partial\Sigma} \geq 0. \quad (58)$$

Daí

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \text{Ric}_g(N, N)\phi^2 d\sigma_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} \Pi_g(N, N)\phi^2 d\sigma_{\partial\Sigma} &\leq \int_{\Sigma} (\text{Ric}_g(N, N) + |A_{\Sigma}|^2)\phi^2 d\sigma_{\Sigma} \\ &+ \int_{\partial\Sigma} \Pi_g(N, N)\phi^2 d\sigma_{\partial\Sigma} \\ &\leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}\phi|^2 d\sigma_{\Sigma}, \end{aligned}$$

isto é,

$$- \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}\phi|^2 d\sigma_{\Sigma} + \int_{\Sigma} \text{Ric}_g(N, N)\phi^2 d\sigma_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} \Pi_g(N, N)\phi^2 d\sigma_{\partial\Sigma} \leq 0. \quad (59)$$

Agora, consideremos o seguinte problema de bordo

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma}\phi + \phi\text{Ric}_g(N, N) = \lambda_1\phi & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = \phi\Pi_g(N, N) & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (60)$$

onde  $\lambda_1$  é o primeiro autovalor associado ao problema de bordo associado a (60) e  $\phi \in C^{\infty}(\Sigma)$ .

Segue de (60) que

$$\int_{\Sigma} \lambda_1\phi^2 d\sigma_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \phi\Delta_{\Sigma}\phi d\sigma_{\Sigma} + \int_{\Sigma} \text{Ric}_g(N, N)\phi^2 d\sigma_{\Sigma}. \quad (61)$$

Então de acordo com a identidade de Green, temos

$$\int_{\Sigma} \phi\Delta_{\Sigma}\phi d\sigma_{\Sigma} = - \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}\phi|^2 d\sigma_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} \phi \frac{\partial\phi}{\partial\nu} d\sigma_{\partial\Sigma}, \quad (62)$$

e, por (60), (61) e (62),

$$\int_{\Sigma} \lambda_1\phi^2 d\sigma_{\Sigma} = - \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma}\phi|^2 d\sigma_{\Sigma} + \int_{\Sigma} \text{Ric}_g(N, N)\phi^2 d\sigma_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} \Pi_g(N, N)\phi^2 d\sigma_{\partial\Sigma} \leq 0,$$

por (59). Isto mostra que

$$\int_{\Sigma} \lambda_1 \phi^2 d\sigma_{\Sigma} \leq 0.$$

Portanto, concluímos que  $\lambda_1$  é um autovalor não positivo de (60). Como  $\Sigma$  é mínima, tomando a restrição do potencial estático  $V$  em  $\Sigma$ , temos que  $\Delta_g V = \Delta_{\Sigma} V + \nabla_g^2 V(N, N)$ . Assim pela equação da estaticidade de  $V$  temos que

$$0 = \Delta_{\Sigma} V + \nabla_g^2 V(N, N) - \Delta_g V = \Delta_{\Sigma} V + V Ric_g(N, N),$$

donde obtemos

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma} V + V Ric_g(N, N) = 0 & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial V}{\partial \nu} = V \Pi_g(N, N) & \text{em } \partial \Sigma. \end{cases} \quad (63)$$

Segue de (63) e do fato que  $\lambda_1$  ser uma autovalor não positivo que: ou  $V \equiv 0$  em  $\Sigma$  ou  $V$  é a primeira autofunção com autovalor nulo. Se  $V \equiv 0$ , então, pela Proposição 2.6.1,  $\Sigma = V^{-1}(0)$  é uma hipersuperfície totalmente geodésica com bordo livre. Se  $V$  é a primeira autofunção, então  $V$  não se anula sobre  $\Sigma$ , provando i).

Por outro lado, como  $\Sigma$  é estável, temos

$$- \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} V|^2 d\sigma_{\Sigma} + \int_{\Sigma} (Ric_g(N, N) + |A_{\Sigma}|^2) V^2 d\sigma_{\Sigma} + \int_{\Sigma} V^2 \Pi_g(N, N) d\sigma_{\partial \Sigma} \leq 0. \quad (64)$$

Por (62), (63) e (64), conseguimos

$$\int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2 V^2 d\sigma \leq 0, \quad (65)$$

e como  $V$  é um potencial estático, então  $V$  é uma função não identicamente nula, logo  $|A_{\Sigma}| \equiv 0$ , e portanto  $\Sigma$  é totalmente geodésica, provando ii). ■

O nosso resultado abaixo estabelece uma importante propriedade para variedades estáticas com bordo tendo uma hipersuperfície minimizante de área em seu interior. Tal resultado será crucial para provar um dos principais resultados deste capítulo. Mostraremos que se existe uma superfície mínima estável e com bordo livre, então existe uma vizinhança cilíndrica própria dela.

**Proposição 4.1.1** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M$  não vazio e estática com potencial estático  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $R_g = 0$  e  $H_g = 0$ . Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície conexa, compacta, localmente minimizante de área com bordo livre (com respeito a  $\partial M$ ) em  $M$ . Suponha que  $V$  é não identicamente nula em  $\Sigma$ . Então existem  $\epsilon > 0$ , um subconjunto  $U \subset M$  e um difeomorfismo*

$$\phi : \Sigma \times [0, \epsilon) \rightarrow M \quad (66)$$

tal que



- a) para cada  $t \in [0, \epsilon)$ , a área de  $\Sigma_t = \phi(\Sigma \times \{t\})$  é constante e  $\Sigma_t$  é de bordo livre em  $M$ ;
- b) para cada  $t \in [0, \epsilon)$ ,  $\Sigma_t$  é totalmente geodésica;
- c) para cada  $t \in [0, \epsilon)$ , a curvatura escalar de  $R_{\Sigma_t} = 0$ ,  $V$  é constante em  $\Sigma_t$  e  $H_{\partial\Sigma_t} = 0$ ;
- d) em  $U$  a métrica é Ricci-plana com bordo totalmente geodésico.

**Demonstração:** Pela Proposição 4.1.1, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $V > 0$  sobre  $\Sigma$ . Consideremos a aplicação

$$\phi : \Sigma \times [0, \epsilon) \longrightarrow M,$$

que, com respeito à métrica modificada  $V^{-2}g$  em uma vizinhança de  $\Sigma$  onde  $V > 0$ , é dada pela aplicação exponencial normal, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) &= V(\phi(x, t))N(x, t), \\ \phi(x, 0) &= x. \end{aligned}$$

Além disso,  $\phi(\partial\Sigma, t) \subset \partial M$ . Denotemos  $\Sigma_t = \phi(\Sigma \times \{t\})$  tal que  $\Sigma_0 = \Sigma$ , observe que com esta métrica modificada, as superfícies  $\Sigma_t$  são equidistantes (Veja (AMBROZIO, 2017)).

Seja  $\vec{H}_{\Sigma_t} = -H_{\Sigma_t}N_t$ , onde  $H_{\Sigma_t}$  denota a curvatura média de  $\Sigma_t$  e  $N_t$  denota o normal unitário a  $\Sigma_t$ . É conhecido que (veja por exemplo (GERHARD; ALEXANDER, 1999)),

$$\frac{\partial}{\partial t} H_{\Sigma_t} = -L_{\Sigma_t}V,$$

onde  $L_{\Sigma_t}$  é o operador de Jacobi de  $\Sigma_t$ . Lembre que o Laplaciano  $\Delta_g$  em  $M$  e  $\Delta_{\Sigma_t}$  em  $\Sigma_t$  são relacionados por

$$\Delta_g V = \Delta_{\Sigma_t} V + \langle \nabla V, \vec{H}_{\Sigma_t} \rangle + \nabla_g^2 V(N, N). \quad (67)$$

Assim (67) e (21) implicam que

$$L_{\Sigma_t} V = \langle \nabla V, \vec{H}_{\Sigma_t} \rangle + |A_{\Sigma_t}|^2 V.$$

Então temos

$$\frac{\partial}{\partial t} H_{\Sigma_t} = -\langle \nabla V, \vec{H} \rangle - |A_{\Sigma_t}|^2 V \leq \langle \nabla V, N_t \rangle H_{\Sigma_t}, \quad (68)$$

onde  $A_{\Sigma_t}$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma_t$ . Como  $H_{\Sigma_0} = 0$ , segue da desigualdade de Grönwall que  $H_{\Sigma_t} \leq 0$  para todo  $t \in [0, \epsilon)$ .

Por outro lado, usando a decomposição

$$\nabla V = \nabla_{\Sigma_t} V + \langle \nabla V, N_t \rangle N_t \quad (69)$$

e que  $\nabla_{\partial_t} N_t = -\nabla_{\Sigma_t} V$  (veja por exemplo a Proposição 15 de (AMBROZIO, 2015b)), então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \nu, N_t \rangle &= -\langle \nabla_{\Sigma_t} V, \nu \rangle + \langle N_t, \nabla_{N_t} \nu \rangle V \\ &= V \langle \nabla_{N_t} \nu, N_t \rangle - \langle \nabla V, \nu \rangle + \langle \nabla V, N_t \rangle \langle \nu, N_t \rangle \\ &= V \Pi_g(N_t, N_t) - \frac{\partial V}{\partial \nu} + \langle \nabla V, N_t \rangle \langle \nu, N_t \rangle, \end{aligned}$$

onde  $\nu$  é o campo normal unitário exterior ao longo de  $\partial M$ . Entretanto, por (23), temos que  $\frac{\partial V}{\partial \nu} - V \Pi_g(N_t, N_t) = 0$ , logo temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \nu, N_t \rangle = \langle \nabla V, N_t \rangle \langle \nu, N_t \rangle.$$

Como  $\Sigma$  tem bordo livre, isto é,  $\langle \nu, N_0 \rangle = 0$ , então  $\langle \nu, N_t \rangle = 0$  para todo  $t \in [0, \epsilon)$ , ou seja,  $\Sigma_t$  é de bordo livre, para  $t \in [0, \epsilon)$ .

Temos, pela primeira variação da área, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} |\Sigma_t| - |\Sigma| &= \int_0^t \left[ \int_{\Sigma_s} H_{\Sigma_s} V \, d\sigma_{\Sigma_s} \right] ds + \int_0^t \left[ \int_{\partial \Sigma_s} \langle \nu, N_s \rangle d\sigma_{\partial \Sigma_s} \right] ds \\ &= \int_0^t \left[ \int_{\Sigma_s} H_{\Sigma_s} V \, d\sigma_{\Sigma_s} \right] ds. \end{aligned} \tag{70}$$

Suponha que  $H_{\Sigma_t} < 0$ , para algum  $t \in (0, \epsilon)$ . Então

$$|\Sigma_t| - |\Sigma| \leq \int_0^t \left[ \int_{\Sigma_s} H_{\Sigma_s} V \, d\sigma_{\Sigma_s} \right] ds < 0.$$

Isso implica que  $|\Sigma_t| < |\Sigma|$ , mas isso contradiz a hipótese de que  $\Sigma$  é uma hipersuperfície localmente minimizante de área para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, o que prova a). Além disso por (68) e pelo fato que  $H_{\Sigma_t} \equiv 0$  para  $t \in (0, \epsilon)$ , obtemos que  $A_{\Sigma_t} \equiv 0$ , o que implica  $\Sigma_t$  totalmente geodésica para cada  $t \in [0, \epsilon)$ , o que prova b).

Seja

$$\nabla_{\Sigma_t}^2 V(X, Y) + \mathbf{R}(N_t, X, Y, N_t)V = 0 \tag{71}$$

a primeira variação da segunda forma fundamental, onde  $X, Y$  são tangentes a  $\Sigma_t$  e  $\mathbf{R}$  é o tensor de curvatura de Riemann de  $(M, g)$  (veja (CARLOTTO et al., 2016b)). Como  $\Sigma_t$  é totalmente geodésica,

$$\nabla_{\Sigma_t}^2 V(X, Y) = \nabla^2 V(X, Y) \tag{72}$$

para vetores tangentes  $X, Y$ . Como  $\nabla^2 V = \left( \text{Ric} - \frac{\mathbf{R}_g}{n-1} g \right) V$ , dado que  $\mathbf{R}_g = 0$  e  $V > 0$ , então

$$\nabla^2 V(X, Y) = \text{Ric}(X, Y)V. \tag{73}$$

Por (71), (72) e (73), obtemos

$$\text{Ric}(X, Y) = -\mathbf{R}(N_t, X, Y, N_t), \quad (74)$$

pois  $V > 0$ . Considerando  $\{e_i\}$  um referencial ortogonal em  $\Sigma_t$ , temos por (74) que

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{R}(e_i, X, Y, e_i) \\ &= \mathbf{R}(N_t, X, Y, N_t) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{R}(e_i, X, Y, e_i) \\ &= -\text{Ric}(X, Y) + \text{Ric}_{\Sigma_t}(X, Y), \end{aligned}$$

onde  $\text{Ric}_{\Sigma_t}$  é o tensor de Ricci de  $\Sigma_t$  induzido pela métrica dada acima. Portanto, para  $X, Y$  tangentes a  $\Sigma_t$ ,

$$\text{Ric}(X, Y) = \frac{1}{2} \text{Ric}_{\Sigma_t}(X, Y). \quad (75)$$

Logo, por (73), (74) e (75), temos que

$$\nabla_{\Sigma_t}^2 V = \frac{V}{2} \text{Ric}_{\Sigma_t}, \quad (76)$$

e pela equação de estaticidade

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma_t} V &= \nabla_{\Sigma_t}^2 V - V \text{Ric}_{\Sigma_t} \\ &= \frac{V}{2} \text{Ric}_{\Sigma_t} - V \text{Ric}_{\Sigma_t} \\ &= -\frac{V}{2} \text{Ric}_{\Sigma_t}. \end{aligned} \quad (77)$$

Como estamos supondo  $R_g = 0$ , por (10) e pelo fato de  $\Sigma_t$  ser mínima e totalmente geodésica, temos

$$\text{Ric} = -\frac{1}{2} \mathbf{R}_{\Sigma_t}, \quad (78)$$

onde  $\mathbf{R}_{\Sigma_t}$  denota a curvatura escalar de  $\Sigma_t$ . Por (75) e (78)

$$\text{Ric}_{\Sigma_t} = -\mathbf{R}_{\Sigma_t}$$

e por (77)

$$\Delta_{\Sigma_t} V = \frac{V}{2} \mathbf{R}_{\Sigma_t}. \quad (79)$$

Sabendo que  $\operatorname{div}_{\Sigma_t} (\nabla_{\Sigma_t}^2 V) = d(\Delta_{\Sigma_t} V) + \operatorname{Ric}_{\Sigma_t} (\nabla_{\Sigma_t} V, \cdot)$ , podemos tomar a divergência em (76) e usar o fato que  $\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} dR$  (veja por exemplo (PETERSEN, 2006)), para obtermos

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{div}_{\Sigma_t} (\nabla_{\Sigma_t}^2 V) - \operatorname{div}_{\Sigma_t} \left( \frac{V}{2} \operatorname{Ric}_{\Sigma_t} \right) \\
&= d(\Delta_{\Sigma_t} V) + \operatorname{Ric}_{\Sigma_t} (\nabla_{\Sigma_t} V, \cdot) - \frac{1}{2} \left( V \operatorname{div}_{\Sigma_t} \operatorname{Ric}_{\Sigma_t} + \operatorname{Ric}_{\Sigma_t} (\nabla_{\Sigma_t} V, \cdot) \right) \\
&= \frac{1}{2} d(V \operatorname{Ric}_{\Sigma_t}) + \operatorname{Ric}_{\Sigma_t} (\nabla_{\Sigma_t} V, \cdot) - \frac{1}{4} V dR_{\Sigma_t} - \frac{1}{2} \operatorname{Ric} (\nabla_{\Sigma_t} V, \cdot) \\
&= \frac{1}{4} V dR_{\Sigma_t} + \frac{1}{2} \operatorname{Ric}_{\Sigma_t} dV + V^{-1} \nabla_{\Sigma_t}^2 V (\nabla_{\Sigma_t} V, \cdot) \\
&= \frac{1}{4} d(\operatorname{Ric}_{\Sigma_t} V^2 + 2|\nabla_{\Sigma_t} V|^2).
\end{aligned}$$

Portanto,  $\operatorname{Ric}_{\Sigma_t} V^2 + 2|\nabla_{\Sigma_t} V|^2$  é constante em cada  $\Sigma_t$ . Por (69), temos, em  $\partial\Sigma_t \cap \partial M$ , que

$$\langle \nabla V, \nu \rangle = \langle \nabla_{\Sigma_t} V, \nu \rangle + \langle \nabla V, N_t \rangle \langle N_t, \nu \rangle,$$

logo

$$\frac{\partial^{\Sigma_t} V}{\partial \nu} = \langle \nabla_{\Sigma_t} V, \nu \rangle = 0,$$

visto que, cada  $\Sigma_t$  é de bordo livre. Multiplicando cada membro de (79) por  $V$  e aplicando a identidade acima e a identidade de Green, concluímos que

$$\operatorname{Ric}_{\Sigma_t} V^2 + 2|\nabla_{\Sigma_t} V|^2 = 0.$$

Portanto,  $\operatorname{Ric}_{\Sigma_t} V^2 = -2|\nabla_{\Sigma_t} V|^2 \leq 0$ . Como  $V > 0$ , temos que  $\operatorname{Ric}_{\Sigma_t} \leq 0$  em  $\Sigma_t$ .

Por outro lado, mais uma vez pela identidade de Green e por (79), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_t} \operatorname{Ric}_{\Sigma_t} d\sigma &= \int_{\Sigma_t} 2V^{-1} \Delta_{\Sigma_t} V d\sigma \\
&= -2 \int_{\Sigma_t} \langle \nabla_{\Sigma_t} V^{-1}, \nabla_{\Sigma_t} V \rangle d\sigma + 2 \int_{\partial\Sigma_t} V^{-1} \frac{\partial^{\Sigma_t} V}{\partial \nu} d\sigma_{\partial\Sigma_t} \\
&= \int_{\Sigma_t} 2V^{-2} |\nabla_{\Sigma_t} V|^2 d\sigma \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que  $\operatorname{Ric}_{\Sigma_t} = 0$  em cada  $\Sigma_t$ . Como, por (79),  $\Delta_{\Sigma_t} V = 0$  sobre  $\Sigma_t$ , temos então que

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma_t} V = 0 & \text{em } \Sigma_t \\ \frac{\partial^{\Sigma_t} V}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Sigma_t. \end{cases} \quad (80)$$

Como  $\Sigma_t$  é conexa, nós concluímos que  $V$  é constante em  $\Sigma_t$  para cada  $t \in [0, \epsilon)$ . provando c).

Como  $\nabla_{\Sigma_t}^2 V = 0$  sobre  $\Sigma_t$ ,  $t \in [0, \epsilon)$ , e  $V > 0$ , então  $\operatorname{Ric}_{\Sigma_t} = 0$ . Assim por (75),  $\operatorname{Ric}(X, Y) = 0$  para  $X, Y$  vetores tangentes. Logo pela equação de Codazzi e pela equação de Gauss,  $\operatorname{Ric}(\nu, \nu) = 0$ . Portanto, o tensor de Ricci é nulo em  $U$ .

Além disso, como  $H_g = 0$  por hipótese, temos por (23) que  $\Pi_g V = 0$  em  $\partial M$ , e como  $V$  é constante não nula,  $\Pi_g = 0$  no bordo de  $U$ , Isto é, o bordo de  $U$  é totalmente geodésico. Por outro lado, como  $\Sigma_t$  é de bordo livre para cada  $t \in [0, \epsilon)$ , temos que

$$H_g = H_{\partial\Sigma_t} + \Pi_g(N, N).$$

Portanto,  $H_{\partial\Sigma_t} = 0$  para cada  $t \in [0, \epsilon)$ , provando d). ■

Veremos na próxima proposição uma caracterização para potenciais estáticos limitados nos fins em semiespaços assintoticamente planos.

**Proposição 4.1.2** *Seja  $(M^n, g)$  um semiespaço assintoticamente plano e estático com potencial estático  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Então:*

a) *Existe um vetor real  $(a_1, \dots, a_n)$  tal que*

$$V = \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i + O(|x|^{1-\tau}), & \text{se } \tau < n - 2 \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i + O(\ln |x|), & \text{se } \tau = 1, \end{cases} \quad (81)$$

onde  $\frac{n-2}{2} < \tau \leq n-2$ .

b) *Se  $V$  é limitada, então  $a_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Neste caso,  $V > 0$  ou  $V < 0$  próximo do infinito.*

**Demonstração:** Como  $(M^n, g)$  é um semiespaço assintoticamente plano e estático, temos que  $R_g \equiv 0$  e  $H_g \equiv 0$ . Sendo assim, observe que as equações (21) se escrevem como:

$$\nabla_g^2 V = V \text{Ric}_g \quad \text{e} \quad \Delta_g V = 0 \quad \text{em } M \quad (82)$$

e

$$V \Pi_g = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \partial M. \quad (83)$$

Parte dos próximos calculos são largamente inspiradas na Proposição 3.1 de (MIAO; TAM, 2015) com algumas modificações devido à presença de um bordo não-compacto. Por completude repetiremos estes argumentos, modificando-os quando necessário.

Como em (MIAO; TAM, 2015), temos que

$$|\nabla_g^2 V| = |V \text{Ric}_g| = O(r^{-1-\tau}) \quad (84)$$

onde  $r = |x|$  e  $\frac{n-2}{2} < \tau \leq n-2$ . Observe que  $|\nabla_g V|^2 = \sum_{i=1}^n (V_{;i})^2$ , onde ";" denota a derivada covariante. Além disso, temos que  $\nabla_g |\nabla_g V|^2 = 2(V_{;1}V_{;11}, \dots, V_{;n}V_{;nn})$ . Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e por (84), obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla_g |\nabla_g V|^2|^2 &= 4 \sum_{i=1}^n (V_{;i}V_{;ii})^2 \\ &\leq 4|\nabla_g V|^2 |\nabla_g^2 V|^2 \\ &\leq cr^{-2-2\tau} |\nabla_g V|^2, \end{aligned}$$

onde  $c$  é uma constante. Assim como em (MIAO; TAM, 2015), isto implica que  $|\nabla_g V|^2$  é limitada. Daí

$$|\nabla_g^2 V(\partial_i, \partial_j)| = |V_{;ij} + \Gamma_{ij}^k \partial_k V| = O(r^{-1-\tau}), \quad (85)$$

onde  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $1 \leq i, j, k \leq n$ , são os símbolos de Christoffel.

Afirmamos que para cada  $j$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \partial_j V$  existe e é finito. Com efeito, por (84), temos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} |\nabla_g^2 V(\partial_i, \partial_j)| \leq \lim_{x \rightarrow \infty} kr^{-1-\tau}$  para alguma constante  $k$ , o que mostra que  $\partial_i(\lim_{x \rightarrow \infty} \partial_j V) = 0$ . Logo existem constantes  $a_j = \lim_{x \rightarrow \infty} \partial_j V$  para cada  $j = 1, \dots, n$ .

Assim, definindo  $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ , temos que  $|\nabla_g^2(V - \lambda)(\partial_i, \partial_j)| = |\nabla_g^2 V(\partial_i, \partial_j)| = O(r^{-1-\tau})$  e também que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \partial_j(V - \lambda) = 0$ , isto implica que  $|\partial_j(V - \lambda)| = O(r^{-\tau})$ . Por integração, a expansão (81) segue.

Suponha agora que  $V$  seja limitada. Suponha que  $a_i \neq 0$  para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Como  $V - \sum_{i=1}^n a_i x_i$  tem crescimento inferior a uma função linear, seguiria que  $V$  seria ilimitada. Logo,  $a_i = 0$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . Veja que assim  $|\partial_{x_j} V| = O(r^{-\tau})$  e isto mostra que  $\lim_{x \rightarrow \infty} |\nabla V|^2 = 0$ .

Seja  $\Sigma = V^{-1}(0)$ . De acordo com a Proposição 2.6.1,  $\Sigma$  é a união de componentes conexas fechadas e de bordo livre. Aqui abordaremos apenas o caso em que as componentes conexas de  $\Sigma$  tem bordo livre, visto que o caso fechado foi tratado em (MIAO; TAM, 2015). Suponha ainda, sem perda de generalidade, que  $\Sigma$  é conexa, a qual, pela Proposição 2.6.1, é uma hipersuperfície mergulhada totalmente geodésica. Além disso, como  $|\nabla V|^2$  é uma constante positiva em  $\Sigma$ , temos que  $\Sigma$  é limitada. De fato, se fosse ilimitada, teríamos

$$\lim_{x \rightarrow \infty, x \in \Sigma_0} |\nabla V|^2 = 0.$$

Suponha que exista  $s_0 > 0$  tal que o hemisfério  $\mathbb{S}_+^{n-1}$  de raio  $s$  tenha curvatura média positiva em  $(M, g)$  para todo  $s \geq s_0$ . Como  $\Sigma$  é uma compacta mínima com bordo livre, segue

pelo Teorema 1 de (WHITE, 2010) que  $\Sigma \cap \{|x| > s_0\} = \emptyset$  e pelo Teorema 1.2 de (LI; ZHOU, 2021) que  $\partial\Sigma \cap \partial\{|x| > s_0\} = \emptyset$ . Assim  $V < 0$  ou  $V > 0$  sobre  $\{|x| > s_0\}$ . ■

Precisamos da seguinte definição de horizonte.

**Definição 4.1.1 ((EICHMAIR; KOERBER, 2023))** *Dizemos que um semiespaço assintoticamente plano  $(M^n, g)$  possui um horizonte  $\Sigma \subset M$ , se  $\Sigma$  é uma hipersuperfície mínima compacta não vazia tal que:*

- *As componentes conexas de  $\Sigma$  ou são hipersuperfícies com bordo livre ou são hipersuperfícies fechadas.*
- *$M$  não contém outras hipersuperfícies mínimas com bordo livre ou mínimas fechadas na região exterior  $M_{ext} \subset M$*
- *A hipersuperfície (fechada ou com bordo livre)  $\Sigma$  é localmente minimizante de área, se  $n \geq 8$  (Note que se  $3 \leq n \leq 7$ ,  $\Sigma$  é minimizante de área pelas duas condições anteriores, veja (KOERBER, 2023, Lema 2.3)).*

Com os resultados estabelecidos acima, podemos demonstrar o resultado principal da seção.

**Demonstração do Teorema 4.1.2:** Como  $M$  é um semiespaço assintoticamente plano e estático, temos que  $R_g \equiv 0$  e  $H_g \equiv 0$ . Seja  $\Sigma$  um horizonte, que é uma hipersuperfície mínima compacta e localmente minimizante de área. Suponha, por contradição, que  $V$  não se anula em  $\Sigma$ . Pela Proposição 4.1.1, existem uma vizinhança  $U$  de  $\Sigma$  em  $M$  e existem hipersuperfícies mínimas com bordo livre, o que contradiz o fato que  $M$  não contém tais hipersuperfícies compactas além de  $\Sigma$ . Portanto,  $V$  é nulo em  $\Sigma$ .

Supondo que  $V$  seja limitado, então pela Proposição 4.1.2, temos que  $V > 0$  ou  $V < 0$  próximo ao infinito de  $M$ . Vamos considerar, sem perda de generalidade, que em um semifim temos que  $V > 0$  próximo ao infinito. Tal condição é mantida em todos os outros semifins, pois caso contrário  $V^{-1}(0)$  estaria no interior de  $M$ , a qual seria uma hipersuperfície mínima com bordo livre pela Proposição 2.6.1, que é diferente de  $\Sigma$ . Pra finalizar, pelo Teorema 2.3.1 temos que  $V > 0$  no interior de  $M$ . ■

## 4.2 SOBRE RIGIDEZ EM SEMIESPAÇOS ASSINTOTICAMENTE PLANOS E ESTÁTICOS

A proposição a seguir relaciona o potencial estático  $V$  quando restrito a uma hipersuperfície.

**Proposição 4.2.1** *Sejam  $(M^n, g)$  um semiespaço assintoticamente plano e estático com  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  um potencial estático. Suponha que  $\Sigma$  é uma hipersuperfície compacta com bordo livre com respeito a  $\partial M$ . Então  $V|_{\Sigma}$  satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma} V + H_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial N} + \left( \frac{1}{2} H_{\Sigma}^2 - \frac{1}{2} |A_{\Sigma}|^2 - K_{\Sigma} \right) V = 0 & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial V}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial \Sigma. \end{cases} \quad (86)$$

**Demonstração:**

Como  $(M, g)$  é um semiespaço assintoticamente plano,  $R_g \equiv 0$  e  $H_g \equiv 0$ . Por outro lado, sabemos que as equações (21) são equivalentes a

$$\nabla_g^2 V = V \text{Ric}_g \quad \text{e} \quad \Delta_g V = 0 \quad \text{em } M \quad (87)$$

e

$$V \Pi_g = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \partial M. \quad (88)$$

Além disso, em  $\partial \Sigma \cap \partial M$ ,

$$\langle \nabla V, \nu \rangle = \langle \nabla_{\Sigma} V, \nu \rangle + \langle \nabla V, N \rangle \langle N, \nu \rangle.$$

Logo

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \nu} = \langle \nabla_{\Sigma} V, \nu \rangle,$$

visto que,  $\Sigma$  é de bordo livre. Portanto os demais cálculos seguem do Lema 1 de (MIAO, 2005b), onde denotamos  $\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}$  simplesmente por  $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ . ■

**Lema 4.2.1** *Sejam  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M$  não vazio e  $\Sigma \subset M$  uma hipersuperfície compacta, CMC estável e com bordo livre com respeito a  $\partial M$ . Se  $\Sigma$  minimiza área no sentido de Plateau, então*

$$\int_{\Sigma} [\text{Ric}(N, N) + |A_{\Sigma}|^2] d\sigma_{\Sigma} + \int_{\partial \Sigma} \Pi_g(N, N) d\sigma_{\partial \Sigma} \leq 4\pi(g + \gamma),$$

onde  $g$  é o gênero de  $\Sigma$  e  $\gamma$  é o número de componentes conexas de  $\partial \Sigma$ .

**Demonstração:** Procedendo como (NUNES, 2017), temos por (GABARD, 2006) que existe uma aplicação conforme

$$w : \Sigma \rightarrow \mathbb{D}^2,$$

de grau no máximo  $g + \gamma$ , onde  $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Como  $\mathbb{D}^2$  é conformemente equivalente ao hemisfério unitário  $\mathbb{S}_+^2$ , podemos supor  $w = (w_1, w_2, w_3)$  tal que

$$w : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}_+^2.$$



Além disso, temos que a energia de Dirichlet satisfaz

$$\int_{\Sigma} |\nabla w|^2 d\sigma_{\Sigma} \leq 4\pi(g + \gamma)$$

(veja por exemplo (NUNES, 2017)). Usando o difeomorfismo conforme, podemos supor que  $\int_{\Sigma} w_i d\sigma_{\Sigma} = 0$  para  $i = 1, 2$ , e como  $\Sigma$  minimiza área no sentido de Plateau, temos que

$$\int_{\Sigma} [\text{Ric}(N, N) + |A_{\Sigma}|^2] w_3^2 d\sigma_{\Sigma} \leq 0, \quad (89)$$

onde  $w_3 = 0$  em  $\partial\Sigma$ .

Por outro lado, como por hipótese  $\Sigma$  é CMC estável, então

$$\int_{\Sigma} [\text{Ric}(N, N) + |A_{\Sigma}|^2] \left( \sum_{i=1}^2 w_i^2 \right) d\sigma_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} \Pi_g(N, N) \left( \sum_{i=1}^2 w_i^2 \right) d\sigma_{\partial\Sigma} \leq \sum_{i=1}^2 \int_{\Sigma} |\nabla w_i|^2 d\sigma_{\Sigma}. \quad (90)$$

Somando (89) e (90), e usando o fato que  $\sum_{i=1}^3 w_i^3 = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} [\text{Ric}(N, N) + |A_{\Sigma}|^2] d\sigma_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} \Pi_g(N, N) d\sigma_{\partial\Sigma} &\leq \int_{\Sigma} |\nabla w|^2 d\sigma_{\Sigma} \\ &\leq 4\pi(g + \gamma). \end{aligned}$$

■

**Observação 4.2.1** Seguindo os argumentos de (ALMARAZ et al., 2016), se  $(M^n, g)$  é um semi-espaço assintoticamente plano e  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  é um potencial estático, então  $V$  admite uma expansão assintótica dada por

$$V = 1 - \frac{A}{|x|^{n-2}} + O(|x|^{1-n}), \quad (91)$$

para  $|x|$  suficientemente grande e  $A > 0$  uma constante positiva.

**Teorema 4.2.1** Sejam  $(M^3, g)$  um semiespaço assintoticamente plano e estático tal que  $\Sigma = \tilde{\partial}E \subset M$  é uma superfície suave e conexa com bordo livre com respeito a  $\partial M$ , onde  $E$  é um domínio suave e limitado em  $M$ . Suponha que  $H_{\Sigma} = C > 0$  e  $K_{\Sigma} \geq \frac{1}{4}C^2$ . Se  $\Sigma$  é CMC estável e minimiza área no sentido de Plateau, então

$$A \leq 8\sqrt{\frac{8\pi}{C^2|\Sigma|}} \tilde{m}_H(\Sigma),$$

onde  $A$  é uma constante positiva dada pela Observação 4.2.1 e  $\tilde{m}_H(\Sigma)$  é a massa de Hawking modificada de  $\Sigma$ . Vale a igualdade se, e somente se,  $(M, g)$  é isométrica a  $\mathbb{R}_+^3$ .

**Demonstração:**

Pela Proposição 4.2.1 aplicado  $\Sigma = \tilde{\partial}E$ , temos que

$$-\mathbf{H}_\Sigma \frac{\partial V}{\partial N} = \Delta_\Sigma V + \left( \frac{1}{2} \mathbf{H}_\Sigma^2 - \frac{1}{2} |A_\Sigma|^2 - K_\Sigma \right) V \text{ e } \frac{\partial V}{\partial \nu} = 0. \quad (92)$$

Seja  $p \in \Sigma$  tal que  $V(p) = \min_\Sigma V$ . Afirmamos que  $V(p) > 0$ . Suponha, por contradição, que  $V(p) \leq 0$ . Como  $(M^3, g)$  é um semiespaço assintoticamente plano, então  $\Delta_g V = 0$  e pela expansão assintótica de  $V$ , temos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 1$ , logo  $V(p) = \min_M V$ . Por um lado, pelo Lema de Hofp,  $\frac{\partial V}{\partial N} > 0$  e como, por hipótese,  $\mathbf{H}_\Sigma > 0$ , obtemos que  $\mathbf{H}_\Sigma \frac{\partial V}{\partial N} > 0$ .

Por outro lado, como  $|A_\Sigma|^2 \geq \frac{1}{2} \mathbf{H}_\Sigma^2$ , então  $-\frac{1}{2} |A_\Sigma|^2 \leq -\frac{1}{4} \mathbf{H}_\Sigma^2$ , assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{H}_\Sigma^2 - \frac{1}{2} |A_\Sigma|^2 - K_\Sigma &\leq \frac{1}{2} \mathbf{H}_\Sigma^2 - \frac{1}{4} \mathbf{H}_\Sigma^2 - K_\Sigma \\ &\leq \frac{1}{4} \mathbf{H}_\Sigma^2 - K_\Sigma \leq 0, \end{aligned}$$

onde pela hipótese  $\frac{1}{4} \mathbf{H}_\Sigma^2 \leq K_\Sigma$  e  $\Delta_\Sigma V(p) \geq 0$ , pelo Princípio da máximo. Entretanto pela primeira equação (92), temos que  $\Delta_\Sigma V < 0$ , o que é uma contradição. Portanto,  $\min_\Sigma V > 0$ . De forma análoga, podemos mostrar que  $\min_\Sigma V < 1$ . Assim temos que  $0 < V < 1$  em  $M$ , a menos que  $V \equiv 1$ , que segue pelo Princípio do máximo.

Agora definindo,  $W = \log V$  pela Proposição 4.2.1 temos

$$\begin{cases} \Delta_\Sigma W + |\nabla_\Sigma W|^2 + \mathbf{H}_\Sigma \frac{\partial W}{\partial N} = \frac{1}{2} \left( 2K_\Sigma - \mathbf{H}_\Sigma^2 + |A_\Sigma|^2 \right) & \text{em } \Sigma, \\ \frac{\partial W}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (93)$$

Pela expansão assintótica de  $V$  temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}_\infty^+} \frac{\partial W}{\partial N} d\sigma_{\mathbb{S}_\infty^+} &= \int_{\mathbb{S}_\infty^+} V^{-1} \frac{\partial V}{\partial N} d\sigma_{\mathbb{S}_\infty^+} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r^+} V^{-1} \frac{\partial V}{\partial N} d\sigma_{S_r^+} \\ &= 2\pi \mathcal{A}, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{A}$  é uma constante positiva dada em (91). Como  $\Delta W + |\nabla W|^2 = 0$ , pois  $\Delta V = 0$  em  $M$ , segue que

$$2\pi \mathcal{A} + \int_M |\nabla W|^2 d\sigma_M = \int_\Sigma \frac{\partial W}{\partial N} d\sigma_\Sigma. \quad (94)$$

Por (93), integrando em  $\Sigma$ , obtemos

$$\int_\Sigma \Delta_\Sigma W d\sigma_\Sigma + \int_\Sigma |\nabla_\Sigma W|^2 d\sigma_\Sigma + \mathbf{H}_\Sigma \int_\Sigma \frac{\partial W}{\partial N} d\sigma_\Sigma = \int_\Sigma K_\Sigma d\sigma_\Sigma + \frac{1}{2} \int_\Sigma [|A_\Sigma|^2 - \mathbf{H}_\Sigma] d\sigma_\Sigma. \quad (95)$$

Por um lado, utilizando mais uma vez (93), temos que

$$\int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma} W \, d\sigma_{\Sigma} = \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial W}{\partial \nu} \, d\sigma_{\partial\Sigma} = 0. \quad (96)$$

Note que no lado direito de (95), precisamos calcular  $\int_{\Sigma} K_{\Sigma} \, d\sigma_{\Sigma}$ . Assim, pelo Teorema de Gauss-Bonnet

$$\int_{\Sigma} K_{\Sigma} \, d\sigma_{\Sigma} = 2\pi(2 - 2g - \gamma) - \int_{\partial\Sigma} k_g \, d\sigma_{\partial\Sigma}, \quad (97)$$

onde  $k_g$  é a curvatura geodésica de  $\partial\Sigma$ . Pela hipótese de bordo livre, temos que

$$\mathbf{H}_g = \Pi_g(N, N) + k_g$$

(veja por exemplo (AMBROZIO, 2015b)). Temos, também, pelo fato de  $(M^3, g)$  ser um semiespaço assintoticamente plano e estático que

$$\mathbf{H}_g \equiv 0, \quad \mathbf{R}_g \equiv 0.$$

Além disso, como estamos supondo  $V > 0$ , então  $\Pi_g(N, N) = 0$  pela equação (88). Logo  $k_g = 0$ . Segue pela equação (97), que

$$\int_{\Sigma} K_{\Sigma} \, d\sigma_{\Sigma} = 2\pi(2 - 2g - \gamma). \quad (98)$$

Como, por hipótese,  $K_{\Sigma} > 0$ , então por (98), obtemos  $2 - 2g - \gamma > 0$ , isto é,  $2g + \gamma < 2$ . Concluimos daí que  $g = 0$  e  $\gamma = 1$ . Novamente, por (98)

$$\int_{\Sigma} K_{\Sigma} \, d\sigma_{\Sigma} = 2\pi, \quad (99)$$

e daí por (96) e (99),

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} W|^2 \, d\sigma_{\Sigma} + \mathbf{H}_{\Sigma} \int_M |\nabla W|^2 \, d\sigma_M + 2\pi \mathcal{A} \mathbf{H}_{\Sigma} = 2\pi + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} [|A_{\Sigma}|^2 - \mathbf{H}_{\Sigma}] \, d\sigma_{\Sigma}.$$

Segue do Lema 4.2.1 que

$$\int_{\Sigma} [\text{Ric}(N, N) + |A_{\Sigma}|^2] \, d\sigma_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} \Pi_g(N, N) \, d\sigma_{\partial\Sigma} \leq 4\pi.$$

Por (10)

$$\text{Ric}(N, N) + |A_{\Sigma}|^2 = \frac{1}{2} C^2 + \frac{1}{2} |A_{\Sigma}|^2 - K_{\Sigma},$$

onde  $\mathbf{H}_{\Sigma} = C$ . Assim

$$4\pi \geq \frac{1}{2} \int_{\Sigma} C^2 \, d\sigma_{\Sigma} + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2 \, d\sigma_{\Sigma} - 2\pi,$$

o que implica

$$6\pi - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} C^2 d\sigma_{\Sigma} \geq \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2 d\sigma_{\Sigma}.$$

Portanto

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} W|^2 d\sigma_{\Sigma} + \mathbf{H}_{\Sigma} \int_M |\nabla W|^2 d\sigma_M + 2\pi \mathcal{A} \mathbf{H}_{\Sigma} \leq 8\pi - \int_{\Sigma} C^2 d\sigma_{\Sigma}. \quad (100)$$

Por outro lado, pela definição da massa de Hawking modificada de  $\Sigma$  temos

$$8\pi - \int_{\Sigma} \mathbf{H}^2 d\sigma_{\Sigma} = \frac{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}{(2|\Sigma|)^{\frac{1}{2}}} \tilde{m}_H(\Sigma). \quad (101)$$

Por (100) e (101)

$$\frac{1}{2\pi C} \left[ \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} W|^2 d\sigma_{\Sigma} + \mathbf{H}_{\Sigma} \int_M |\nabla W|^2 d\sigma_M \right] + \mathcal{A} \leq 8 \sqrt{\frac{8\pi}{C^2 |\Sigma|}} \tilde{m}_H(\Sigma), \quad (102)$$

e pela equação (102)

$$\mathcal{A} \leq 8 \sqrt{\frac{8\pi}{C^2 |\Sigma|}} \tilde{m}_H(\Sigma). \quad (103)$$

Se vale a igualdade em (103), então todas as desigualdades tornam-se igualdades. Portanto vale a igualdade em (102), resultando em

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} W|^2 d\sigma_{\Sigma} + \mathbf{H}_{\Sigma} \int_M |\nabla W|^2 d\sigma_M = 0. \quad (104)$$

Isto implica que ambas as integrais são nulas, logo concluímos que  $W$  é constante em  $\Sigma$  e  $W$  é constante em  $M$  e portanto  $V$  é uma constante. Pelas equações (87) e (88), temos que  $M$  é Ricci-plana com bordo totalmente geodésico, logo isométrica a  $\mathbb{R}_+^3$ . ■

**Corolário 4.2.1** *Seja  $(M, g)$  um semiespaço assintoticamente plano e estático tal que  $\Sigma = \tilde{\partial}E \subset M$  é uma superfície suave e com bordo livre, onde  $E \subset M$  é um domínio suave e limitado. Suponha que  $(\Sigma, g|_{\Sigma})$  seja isométrica ao hemisfério coordenado unitário  $\mathbb{S}_+^2 \subset \mathbb{R}_+^3$  e que  $H_{\Sigma} = 2$ . Se  $\Sigma$  é estável CMC e minimiza área no sentido de Plateau, então  $(M^3, g)$  é isométrica a  $\mathbb{R}_+^3 \setminus B_1^+(0)$ .*

**Demonstração:** Pelo teorema anterior se vale a igualdade, então todas as desigualdades se tornam igualdades. Em particular,

$$6\pi - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \mathbf{H}_{\Sigma}^2 d\sigma_{\Sigma} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2 d\sigma_{\Sigma}.$$

Pelas hipótese sobre  $(\Sigma, g|_{\Sigma})$ , temos que

$$\int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2 d\sigma_{\Sigma} = 4\pi.$$

Assim, provamos que  $\Sigma$  é umbílica, logo  $A_{\Sigma} = g|_{\Sigma}$ . Portanto, pelo Teorema 4.2.1, concluímos que  $V \equiv 1$  em  $M$  e, deste modo, o resultado segue. ■

### 4.3 RIGIDEZ EM VARIEDADES ASSINTOTICAMENTE PLANAS E ESTÁTICAS

Considere o espaço de Schwarzschild tridimensional  $([2m, +\infty) \times \mathbb{S}^2, g)$ , onde

$$g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma_{\mathbb{S}^2},$$

com  $m > 0$  e  $d\sigma_{\mathbb{S}^2}$  é a métrica usual da esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ . Observe que  $V(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$  define um potencial estático em  $([2m, +\infty) \times \mathbb{S}^2, g)$ . Definindo  $\Sigma_r = \{r\} \times \mathbb{S}^2$  temos que é uma superfície totalmente umbílica com curvatura média dada por  $\frac{2V(r)}{r}$ . O horizonte de eventos do buraco negro ocorre em  $r = 2m$ , onde as coordenadas estáticas degeneram. E quando  $r = 3m$ ,  $\Sigma_{3m}$  é chamada esfera de fótons. Do ponto de vista físico, a esfera de fótons no espaço de Schwarzschild modela fótons espiralando em torno de um buraco negro a uma distância fixa. Além disso, as esferas de fótons estão relacionadas à existência de imagens relativísticas no contexto de lentes gravitacionais. Para maiores detalhes recomendamos (CLAUDEL et al., 2001), (JAHNS, 2019) e (YAZADJIEV, 2015) para obter mais informações sobre esferas de fótons.

O resultado devido a Cederbaum-Galloway (caso Riemanniano) (CEDERBAUM; GALLOWAY, 2017) será fundamental na demonstração do resultado dessa seção.

**Teorema 4.3.1** *Sejam  $(M^3, g)$  uma variedade Riemanniana suave assintoticamente plana e estática com massa ADM  $m$ , com bordo conexo não vazio  $\Sigma$  e  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  seu potencial estático. Suponha que  $\Sigma$  é uma esfera CMC totalmente umbílica com curvatura escalar não negativa tal que  $R_\Sigma = \frac{3}{2}H_\Sigma^2$ ,  $V$  e  $\frac{\partial V}{\partial \nu}$  são constantes em  $\Sigma$  e satisfazem*

$$2\frac{\partial V}{\partial \nu} = VH_\Sigma \text{ e } (rH_\Sigma)^2 = \frac{4}{3},$$

onde  $r = \sqrt{\frac{|\Sigma|}{4\pi}}$ . Então  $m > 0$  e  $(M^3, g)$  é isométrica a região  $\{r \geq 3m\}$  exterior a esfera de fótons no espaço de Schwarzschild.

A ideia da demonstração do resultado acima é baseado na prova por (BUNTING; ALAM, 1987b), na qual os autores duplicam a variedade  $(M^3, g)$  assintoticamente plana e estática ao longo do bordo do buraco negro  $\bigcup_{i=1}^l \Sigma_i$  para obter uma nova variedade  $(\tilde{M}^3, \tilde{g})$ , que é suave, exceto por um conjunto finito de superfícies de colagem  $\Sigma_i \in C^{1,1}$  e tem duas extremidades assintoticamente planas. Em seguida, eles modificam conformemente a variedade  $(\tilde{M}^3, \tilde{g})$  de modo que a extremidade assintótica original é tal que tem massa ADM nula, e a extremidade duplicada pode ser compactificada para um único ponto. Por construção, a nova variedade

$(\bar{M}^3, \bar{g})$  tem curvatura escalar nula, é geodésicamente completa e é assintoticamente plana com massa ADM nula. Pela afirmação de rigidez do Teorema de Massa Positiva (regularidade fraca), devido a Bartnik, a variedade modificada conformemente  $(\bar{M}^3, \bar{g})$  deve ser isométrica ao espaço Euclidiano. Isto é, a variedade original  $(M^3, g)$  é conformemente plana. Combinando isso com as equações estáticas, segue-se que  $(\mathbb{R} \times M^3, -V^2 dt^2 + g)$  é necessariamente isométrico ao espaço-tempo de Schwarzschild.

Dada uma variedade estática compacto com bordo  $(M^3, g)$  o seguinte resultado nos dá uma estimativa de área para uma componente conexa de  $\partial M$ , onde o potencial estático não nulo  $V$  não muda de sinal.

**Proposição 4.3.1 (Proposição 2.3 de (CRUZ; NUNES, 2023))** *Sejam  $(M^3, g)$  uma variedade compacta e estática com bordo e  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$  seu potencial estático. Seja  $\Sigma_0$  uma componente conexa de  $\partial M$  e suponha que  $V \neq 0$  em  $\Sigma_0$ . Então*

$$\left( \frac{R_g}{2} + \frac{3}{4} H_{\Sigma_0}^2 \right) |\Sigma_0| \leq 2\pi \chi(\Sigma_0),$$

onde  $H_{\Sigma_0}$  denota a curvatura média de  $\Sigma_0$  com respeito ao normal unitário exterior  $\nu$ . Vale a igualdade se, e somente se,

a)  $V$  é constante em  $\Sigma_0$ ;

b)  $\Sigma_0$  tem curvatura Gaussiana  $K_{\Sigma_0} = \frac{R_g}{2} + \frac{3}{4} H_{\Sigma_0}^2$  e  $\text{Ric}(\nu, \nu) = -\frac{H_{\Sigma_0}^2}{2}$  em  $\Sigma_0$ .

Como consequência, temos

**Corolário 4.3.1 (Corolário 2.4 de (CRUZ; NUNES, 2023))** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade compacta e estática com bordo e com potencial estático  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja  $\Sigma_0$  uma componente conexa de  $\partial M$  e suponha que  $V \neq 0$  em  $\Sigma_0$ .*

a) *Se  $R_g = 0$ , então  $\Sigma_0$  é um 2-toro totalmente geodésico ou uma 2-esfera totalmente umbílica;*

b) *Se  $R_g > 0$ , então  $\Sigma_0$  é uma 2-esfera totalmente umbílica.*

Nosso próximo resultado nos diz que sob certas hipóteses na curvatura Gaussiana e média, uma variedade compacta e estática é isométrica a um domínio próprio do Schwarzschild.

**Teorema 4.3.2** *Seja  $(M^3, g)$  uma variedade assintoticamente plana e estática com bordo  $\Sigma$  não vazio e com potencial estático  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponha que  $0 < K_\Sigma \leq \frac{3}{4} H_\Sigma^2$ . Então  $(M^3, g)$  é isométrica a  $([3m, +\infty) \times \mathbb{S}^2, g)$ , com  $g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma_{\mathbb{S}^2}$ .*

**Demonstração:** Sendo  $(M, g)$  assintoticamente plana e estática, segue que  $R_g \equiv 0$ . Pela Proposição 4.3.1, temos

$$\frac{3}{4}H_\Sigma^2|\Sigma| \leq 2\pi\chi(\Sigma). \quad (105)$$

Por outro lado, integrando em  $\Sigma$ , pelo Teorema de Gauss-Bonnet e pela hipótese, obtemos

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(\Sigma) &= \int_\Sigma K_\Sigma d\sigma_\Sigma \\ &\leq \frac{3}{4} \int_\Sigma H_\Sigma^2 \\ &= \frac{3}{4}H_\Sigma^2|\Sigma|. \end{aligned} \quad (106)$$

Portanto por (105) e (106), segue a igualdade. Logo novamente pela Proposição 4.3.1, temos que  $V$  é constante em  $\Sigma$  e  $K_\Sigma = \frac{3}{4}H_\Sigma^2$ . Além disso, como  $\frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{1}{2}H_\Sigma V$ , concluímos que  $\frac{\partial V}{\partial \nu}$  é constante em  $\Sigma$ . Pelo Corolário 4.3.1, temos que  $\Sigma$  é uma esfera totalmente umbilíca. Como  $R_\Sigma = 2K_\Sigma$ , então

$$R_\Sigma = \frac{3}{2}H_\Sigma^2, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{1}{2}H_\Sigma V, \quad (rH_\Sigma)^2 = \frac{4}{3},$$

visto que  $\Sigma$  é uma esfera. Então pelo Teorema 4.3.1, segue o resultado. ■

## REFERÊNCIAS

- ALMARAZ, S.; BARBOSA, E.; LIMA, L. L. de. A positive mass theorem for asymptotically flat manifolds with a non-compact boundary. **Comm. Anal. Geom.**, v. 24, n. 4, p. 673–715, 2016. ISSN 1019-8385. Disponível em: <<https://doi.org/10.4310/CAG.2016.v24.n4.a1>>.
- ALMARAZ, S.; LIMA, L. L. de. Rigidity of non-compact static domains in hyperbolic space via positive mass theorems. **arXiv preprint arXiv:2206.09768**, 2022.
- AMBROZIO, L. On static three-manifolds with positive scalar curvature. **J. Differential Geom.**, v. 107, n. 1, p. 1–45, 2017. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<https://doi.org/10.4310/jdg/1505268028>>.
- AMBROZIO, L. C. Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds. **The Journal of Geometric Analysis**, Springer, v. 25, p. 1001–1017, 2015.
- AMBROZIO, L. C. Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds. **J. Geom. Anal.**, v. 25, n. 2, p. 1001–1017, 2015. ISSN 1050-6926,1559-002X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s12220-013-9453-2>>.
- BARTNIK, R. The mass of an asymptotically flat manifold. **Communications on pure and applied mathematics**, Wiley Online Library, v. 39, n. 5, p. 661–693, 1986.
- BRAY, H.; MIAO, P. On the capacity of surfaces in manifolds with nonnegative scalar curvature. **Invent. Math.**, v. 172, n. 3, p. 459–475, 2008. ISSN 0020-9910. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00222-007-0102-x>>.
- BRAY, H. L. Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. **J. Differential Geom.**, v. 59, n. 2, p. 177–267, 2001. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1090349428>>.
- BRAY, H. L.; LEE, D. A. On the Riemannian Penrose inequality in dimensions less than eight. **Duke Math. J.**, v. 148, n. 1, p. 81–106, 2009. ISSN 0012-7094,1547-7398. Disponível em: <<https://doi.org/10.1215/00127094-2009-020>>.
- BUNTING, G. L.; ALAM, A. K. M. Masood-ul. Nonexistence of multiple black holes in asymptotically Euclidean static vacuum space-time. **Gen. Relativity Gravitation**, v. 19, n. 2, p. 147–154, 1987. ISSN 0001-7701. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00770326>>.
- BUNTING, G. L.; ALAM, A. K. M. Masood-ul. Nonexistence of multiple black holes in asymptotically Euclidean static vacuum space-time. **Gen. Relativity Gravitation**, v. 19, n. 2, p. 147–154, 1987. ISSN 0001-7701,1572-9532. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00770326>>.
- CAMINHA, A. **Tópicos em Geometria Diferencial**. [S.l.]: SBM, Rio de Janeiro, 2014. 424 p. (Coleção Fronteiras da Matemática). ISBN 978-85-8337-026-0.
- CARAPETIS, A. **The Riemannian Penrose Inequality and Inverse Mean Curvature Flow**. Tese (Doutorado) — Honors Thesis, 2012.
- CARLOTTO, A.; CHODOSH, O.; EICHMAIR, M. Effective versions of the positive mass theorem. **Invent. Math.**, v. 206, n. 3, p. 975–1016, 2016. ISSN 0020-9910,1432-1297. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00222-016-0667-3>>.



- CARLOTTO, A.; CHODOSH, O.; EICHMAIR, M. Effective versions of the positive mass theorem. **Invent. Math.**, v. 206, n. 3, p. 975–1016, 2016. ISSN 0020-9910,1432-1297. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00222-016-0667-3>>.
- CEDERBAUM, C.; GALLOWAY, G. J. Uniqueness of photon spheres via positive mass rigidity. **Comm. Anal. Geom.**, v. 25, n. 2, p. 303–320, 2017. ISSN 1019-8385,1944-9992. Disponível em: <<https://doi.org/10.4310/CAG.2017.v25.n2.a2>>.
- CLAUDEL, C.-M.; VIRBHADRA, K. S.; ELLIS, G. F. R. The geometry of photon surfaces. **J. Math. Phys.**, v. 42, n. 2, p. 818–838, 2001. ISSN 0022-2488,1089-7658. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1308507>>.
- CORVINO, J. Scalar curvature deformation and a gluing construction for the Einstein constraint equations. **Comm. Math. Phys.**, v. 214, n. 1, p. 137–189, 2000. ISSN 0010-3616. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/PL00005533>>.
- CRUZ, T. Capacity inequalities and rigidity of cornered/conical manifolds. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 55, n. 2, p. 281–298, 2019. ISSN 0232-704X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10455-018-9626-0>>.
- CRUZ, T.; NUNES, I. On static manifolds satisfying an overdetermined Robin type condition on the boundary. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 151, n. 11, p. 4971–4982, 2023. ISSN 0002-9939,1088-6826. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/proc/16497>>.
- CRUZ, T.; VITÓRIO, F. Prescribing the curvature of Riemannian manifolds with boundary. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 58, n. 4, p. Paper No. 124, 19, 2019. ISSN 0944-2669. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00526-019-1584-2>>.
- EICHMAIR, M.; KOERBER, T. Doubling of asymptotically flat half-spaces and the riemannian penrose inequality. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, p. 1–38, 2023.
- ESCOBAR, J. F. The Yamabe problem on manifolds with boundary. **J. Differential Geom.**, v. 35, n. 1, p. 21–84, 1992. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214447805>>.
- FISCHER, A. E.; MARSDEN, J. E. Deformations of the scalar curvature. **Duke Math. J.**, v. 42, n. 3, p. 519–547, 1975. ISSN 0012-7094. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077311199>>.
- FREIRE, A.; SCHWARTZ, F. Mass-capacity inequalities for conformally flat manifolds with boundary. **Comm. Partial Differential Equations**, v. 39, n. 1, p. 98–119, 2014. ISSN 0360-5302. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03605302.2013.851211>>.
- GABARD, A. Sur la représentation conforme des surfaces de Riemann à bord et une caractérisation des courbes séparantes. **Comment. Math. Helv.**, v. 81, n. 4, p. 945–964, 2006. ISSN 0010-2571,1420-8946. Disponível em: <<https://doi.org/10.4171/CMH/82>>.
- GALLOWAY, G. J.; MIAO, P. Variational and rigidity properties of static potentials. **Comm. Anal. Geom.**, v. 25, n. 1, p. 163–183, 2017. ISSN 1019-8385,1944-9992. Disponível em: <<https://doi.org/10.4310/CAG.2017.v25.n1.a5>>.
- GERHARD, H.; ALEXANDER, P. Geometric evolution equations for hypersurfaces. **Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems: Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Cetraro, Italy, June 15–22, 1996**, Springer, p. 45–84, 1999.

- GERHARDT, C. Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres. **J. Differential Geom.**, v. 32, n. 1, p. 299–314, 1990. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214445048>>.
- GEROCH, R. Energy extraction. **Annals of the New York Academy of Sciences**, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 224, n. 1, p. 108–117, 1973.
- GRIGOR'YAN, A. Isoperimetric inequalities and capacities on riemannian manifolds. In: **The Maz'ya Anniversary Collection: Volume 1: On Maz'ya's work in functional analysis, partial differential equations and applications**. [S.l.]: Springer, 1999. p. 139–153.
- HUANG, L.-H.; MARTIN, D.; MIAO, P. Static potentials and area minimizing hypersurfaces. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 146, n. 6, p. 2647–2661, 2018. ISSN 0002-9939,1088-6826. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/proc/13936>>.
- HUISKEN, G.; ILMANEN, T. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. **J. Differential Geom.**, v. 59, n. 3, p. 353–437, 2001. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1090349447>>.
- IMPERA, D.; PIGOLA, S.; SETTI, A. G. Global maximum principles and divergence theorems on complete manifolds with boundary. **arXiv preprint arXiv:1303.2853**, 2013.
- JAHNS, S. Photon sphere uniqueness in higher-dimensional electrovacuum spacetimes. **Classical Quantum Gravity**, v. 36, n. 23, p. 235019, 24, 2019. ISSN 0264-9381,1361-6382. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab5230>>.
- JANG, P. S.; WALD, R. M. The positive energy conjecture and the cosmic censor hypothesis. **J. Mathematical Phys.**, v. 18, n. 1, p. 41–44, 1977. ISSN 0022-2488. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.523134>>.
- KOERBER, T. The Riemannian Penrose inequality for asymptotically flat manifolds with non-compact boundary. **J. Differential Geom.**, v. 124, n. 2, p. 317–379, 2023. ISSN 0022-040X,1945-743X. Disponível em: <<https://doi.org/10.4310/jdg/1686931603>>.
- LEE, J. M. **Introduction to smooth manifolds**. Springer-Verlag, New York, 2003. v. 218. xviii+628 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 218). ISBN 0-387-95495-3. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-0-387-21752-9>>.
- LI, M. M.-c.; ZHOU, X. A maximum principle for free boundary minimal varieties of arbitrary codimension. **Comm. Anal. Geom.**, v. 29, n. 6, p. 1509–1521, 2021. ISSN 1019-8385,1944-9992. Disponível em: <<https://doi.org/10.4310/CAG.2021.v29.n6.a7>>.
- LIEBERMAN, G. M. The Perron process applied to oblique derivative problems. **Adv. in Math.**, v. 55, n. 2, p. 161–172, 1985. ISSN 0001-8708. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0001-8708\(85\)90019-2](https://doi.org/10.1016/0001-8708(85)90019-2)>.
- MARQUARDT, T. Weak solutions of inverse mean curvature flow for hypersurfaces with boundary. **J. Reine Angew. Math.**, v. 728, p. 237–261, 2017. ISSN 0075-4102. Disponível em: <<https://doi.org/10.1515/crelle-2014-0116>>.
- MIAO, P. A remark on boundary effects in static vacuum initial data sets. **Classical Quantum Gravity**, v. 22, n. 11, p. L53–L59, 2005. ISSN 0264-9381. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/11/L01>>.

MIAO, P. A remark on boundary effects in static vacuum initial data sets. **Classical Quantum Gravity**, v. 22, n. 11, p. L53–L59, 2005. ISSN 0264-9381,1361-6382. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/11/L01>>.

MIAO, P.; TAM, L.-F. Static potentials on asymptotically flat manifolds. **Ann. Henri Poincaré**, v. 16, n. 10, p. 2239–2264, 2015. ISSN 1424-0637,1424-0661. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00023-014-0373-x>>.

NUNES, I. On stable constant mean curvature surfaces with free boundary. **Math. Z.**, v. 287, n. 1-2, p. 473–479, 2017. ISSN 0025-5874,1432-1823. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00209-016-1832-5>>.

PETERSEN, P. **Riemannian geometry**. [S.l.]: Springer, 2006. v. 171.

SCHOEN, R.; YAU, S. T. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. **Comm. Math. Phys.**, v. 65, n. 1, p. 45–76, 1979. ISSN 0010-3616. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103904790>>.

STERNBERG, P.; ZIEMER, W. P.; WILLIAMS, G.  $C^{1,1}$ -regularity of constrained area minimizing hypersurfaces. **J. Differential Equations**, v. 94, n. 1, p. 83–94, 1991. ISSN 0022-0396. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-0396\(91\)90104-H](https://doi.org/10.1016/0022-0396(91)90104-H)>.

URBAS, J. I. E. On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures. **Math. Z.**, v. 205, n. 3, p. 355–372, 1990. ISSN 0025-5874. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02571249>>.

WHITE, B. The maximum principle for minimal varieties of arbitrary codimension. **Comm. Anal. Geom.**, v. 18, n. 3, p. 421–432, 2010. ISSN 1019-8385,1944-9992. Disponível em: <<https://doi.org/10.4310/CAG.2010.v18.n3.a1>>.

WITTEN, E. A new proof of the positive energy theorem. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 80, n. 3, p. 381–402, 1981.

XIAO, J. The  $p$ -harmonic capacity of an asymptotically flat 3-manifold with non-negative scalar curvature. **Ann. Henri Poincaré**, v. 17, n. 8, p. 2265–2283, 2016. ISSN 1424-0637. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00023-016-0475-8>>.

YAU, S.-T. A survey of calabi-yau manifolds. **Surveys in differential geometry**, International Press of Boston, v. 13, n. 1, p. 277–318, 2008.

YAZADJIEV, S. Uniqueness of the static spacetimes with a photon sphere in Einstein-scalar field theory. **Phys. Rev. D**, v. 91, n. 12, p. 123013, 7, 2015. ISSN 1550-7998,1550-2368. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.123013>>.