UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CARLOS ALBERTO SANTOS BARBOSA

PARABOLICIDADE, ESPAÇOS DE FUNÇÕES HARMÔNICAS E TOPOLOGIA NO INFINITO DE UMA VARIEDADE COMPLETA

Maceió-AL

Abril de 2021

CARLOS ALBERTO SANTOS BARBOSA

PARABOLICIDADE, ESPAÇOS DE FUNÇÕES HARMÔNICAS E TOPOLOGIA NO INFINITO DE UMA VARIEDADE COMPLETA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Marcos Ranieri da Silva

Maceió-AL

Abril de 2021

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

B238p Barbosa, Carlos Alberto Santos.
Parabolicidade, espaços de funções harmônicas e topologia no infinito de uma variedade completa / Carlos Alberto Santos Barbosa. - 2021.
78 f.

Orientador: Marcos Ranieri da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 77-78.

1. Funções harmônicas. 2. Topologia no infinito (Topologia das variedades). 3. Parabolicidade. I. Título.

CDU: 515.16

Folha de Aprovação

AUTOR: CARLOS ALBERTO SANTOS BARBOSA

Parabolicidade, espaços de funções harmônicas e topologia no infinito de uma variedade completa

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-MAT) da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 16 de Abril de 2021.

Marcos Ranieri da Silva

Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva - UFAL (Orientador)

Banca Examinadora:

Marcio Silva Santos

Prof. Dr. Márcio Silva Santos - UFPB (Examinador Externo)

Prof. Dr. Feliciano M. Aguiar Vitório - UFAL (Examinador Interno)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo imenso amor e maravilhosa graça. À Ele toda honra e glória.

À minha família, em especial, aos meus pais, Miriam e Acácio, pelo amor e dedicação e que sempre estiveram ao meu lado me apoiando ao longo de toda a minha trajetória.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva pelos ensinamentos, compreensão e paciência durante esse período e, principalmente, por aceitar conduzir esse trabalho comigo.

Aos professores membros da banca, Prof. Dr. Feliciano M. Aguiar Vitório e Prof. Dr. Márcio Silva Santos, pelos pertinentes apontamentos que engrandeceram esse estudo.

A todos os meus professores do mestrado do PPGMAT-UFAL pela excelência da qualidade técnica e profissionalismo de cada um. Em especial, aos professores Marcos Petrúcio e Márcio Cavalcante.

À professora Adriana de Oliveira e Ismael Weber por todo amor, carinho e apoio durante essa jornada.

Às minhas irmãs Camila Barbosa e Cássia Barbosa, pela paciência nos momentos estressantes e pela assistência emocional.

Aos meus amigos Renan Oliveira, Taynah Machado, Raissa Rodrigues, Cleudo Oliveira, Danilo Souza, Rodrigo Costa, Manuel Vinícius, Ana Letícia e Mayara Teixeira pela amizade e companherismo e pela ajuda com o computador e assistência com o LaTeX.

Aos funcionários do PPGMAT-UFAL pela dedicação e profissionalismo, em especial, à Ana Maria Santos por toda assistência e orientações durante o mestrado.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é investigar a relação intrínseca entre determinados espaços de funções harmônicas em uma variedade completa e sua topologia no infinito. Assumindo limites apropriados sobre a curvatura de Ricci, obtemos estimativas para as soluções das equações de Laplace e do calor. Esta teoria tem importantes aplicações à geometria e topologia de variedades, algumas das quais são apresentadas aqui. Em uma variedade com mais de um fim, construímos um espaço de funções harmônicas com propriedades notáveis. Por sua vez, estimar a dimensão desse espaço por meio de considerações geométricas nos ajudará a entender a topologia no infinito da variedade. Mais especificamente, mostraremos uma generalização do celebrado Teorema de decomposição de Cheeger-Gromoll.

Palavras-chaves: Funções harmônicas, Topologia no infinito, Parabolicidade, Resultados de rigidez.

ABSTRACT

The aim of this work is to investigate the intrinsic relationship between certain spaces of harmonic functions on a complete manifold and their topology in the infinite. Assuming appropriate bounds on the Ricci curvature, we obtain estimates for the solutions of the Laplace and heat equations. This theory has important applications to geometry and topology of manifolds, some of which are presented here. In a manifold with more than one end, we have built a space of harmonic functions with remarkable properties. In turn, estimating the dimension of this space through geometric considerations will help us to understand the topology in the infinite of the manifold. More specifically, we will show a generalization of the celebrated Cheeger-Gromoll Splitting theorem.

Keywords: Harmonic functions, Topology at infinity, Parabolicity, Rigidity results.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudaremos propriedades de soluções para as equações de Laplace e de calor, que por sua vez, nos darão mais informações sobre a geometria e a topologia da variedade subjacente, assumindo algumas informações apropriadas sobre a curvatura. Como exemplo, usaremos funções harmônicas para contar o número de fins de variedades abertas e ver as aplicações de resultados de rigidez para variedades com mais de um fim. Para tanto, escrevemos seguindo (LI, 2012).

A construção de funções harmônicas definidas em uma variedade M estendendo as funções de barreira definidas em todos os fins de M, foi provada primeiramente por (LI; TAM, 1992) para variedades com curvatura seccional não-negativa. Posteriormente, ambos deram uma construção para variedades completas arbitrárias. Por outro lado, (SUNG; TAM; WANG, 2000) apresentaram a construção de uma maneira mais sistemática.

Esse trabalho está dividido em cinco capítulos. No primeiro capítulo apresentamos alguns operadores diferenciais em variedades, especialmente o operador Laplaciano, bem como resultados da geometria de comparação que é uma ferramenta crucial na análise geométrica, onde apresentamos a fórmula de Bochner, o teorema de comparação do Laplaciano e a estimativa de comparação de volume de Bishop-Gromov.

No segundo capítulo apresentamos uma prova da estimativa do gradiente, com a técnica aprimorada por (MUNTEANU, 2012) para funções harmônicas positivas, que será uma ferramenta frequentemente utilizada no decorrer do texto para estabelecermos limitações como funções barreira.

No terceiro capítulo usamos as estimativas de gradiente e de Harnack para estimar as funções de Green e o núcleo de calor e introduzimos a noção parabolicidade em variedades, obtendo propriedades e caracterizações desses conceitos.

No quarto capítulo estudamos variedades com topologia não trivial no infinito para construir alguns espaços de funções harmônicas que têm propriedades notáveis, tendo como foco o trabalho de (SUNG; TAM; WANG, 2000). A saber, os espaços de funções harmônicas se comportam de maneira diferente no infinito da variedade, que nos permite contar o número de fins.

Finalmente, no quinto capítulo apresentamos aplicações dessa teoria para resultados de rigidez em variedades com mais de um fim, onde temos alguns dos resultados apresentados por (LI; WANG et al., 2002).

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos operadores diferenciais em variedades, alguns resultados de geometria de comparação, especialmente o Laplaciano da função distância e o teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov, bem como algumas estimativa de gradiente para funções harmônicas, e finalizando com noções de função de Green e núcleo de calor. Aqui assumimos que o leitor está familiarizado com tópicos de geometria Riemanniana, a saber: variedades diferenciáveis, conexões afins e Riemanniana, geodésicas e curvaturas. Para mais detalhes ver (CARMO, 2011).

2.1 Operadores diferenciais em variedades

A derivação covariante de tensores permite estendar às variedades Riemannianas certos operadores diferenciais de uso frequente no $\mathbb{R}^n$, como o gradiente, o divergente, o hessiano e o laplaciano. Nessa seção são discutidos esses operadores diferenciais, seguindo (CARMO, 1971). Em tudo o que segue, M^n denota uma variedade Riemanniana n-dimensional com métrica $g = \langle ., . \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇.

Frequentemente usaremos o índice e a convenção de soma introduzida por Einstein, isto é, dado um espaço vetorial V, como o espaço tangente de uma variedade, usamos subscritos para vetores em V. Assim, uma base em V é denotada por $v_1, ..., v_n$. Dado um vetor $v \in V$ podemos então escrevê-lo como uma combinação linear dos vetores da base da seguinte forma

$$v = \sum_i \alpha^i v_i = \alpha^i v_i = [\, v_1 \quad ... \quad v_n \,][\, \alpha^1 \quad ... \quad \alpha^n \,]^T.$$

Aqui usamos sobrescritos nos coeficientes e, em seguida, somamos automaticamente os indicadores que se repetem como sub e sobrescritos. Outros detalhes sobre essa convenção podem ser vistos em (PETERSEN; AXLER; RIBET, 2006). Posteriormente usaremos as identidades de Ricci para comutar as derivadas covariantes em variedades. Por exemplo,

$$f_{ijk} = f_{ikj} + R_{jkpi} f_p,$$

onde

$$R_{jkpi} = \mathrm{Rm}(e_j, e_k, e_p, e_i)$$

é o tensor curvatura de Riemann. Em particular,

$$f_{iji} = f_{iij} + R_{jp} f_p$$

onde

$$R_{jp} = \sum_j R_{jipi}$$

é a curvatura de Ricci de (M,g).

Definição 2.1 *(Referencial local móvel) Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in U \subset M$ onde U é uma vizinhança de p. Definimos os campos $e_1, ..., e_n \in \mathfrak{X}(M)$, de modo que em cada $q \in U$, os vetores $\{e_i(q), i = 1, ..., n\}$ formam uma base de T_qM. Dizemos, neste caso, que $\{e_i, i = 1, ..., n\}$ é um referencial móvel em U. Se $e_1, ..., e_n \in \mathfrak{X}(M)$ formam uma base ortonormal de T_qM para cada $q \in U$, então dizemos que $\{e_i, i = 1, ..., n\}$ é um referencial local ortonormal. Se para $p \in U \subset M$ $\nabla_{e_i} e_j = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n$ dizemos que $\{e_i, i = 1, ..., n\}$ é um referencial geodésico em p.*

Definição 2.2 *Seja f:$M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O **gradiente** de f é o campo vetorial suave ∇f, definido sobre M por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = \nabla_X f = X(f) = df(X) \tag{2.1}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 2.1 *Se $f, h : M^n \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então*
$(a)\nabla(f + h) = \nabla f + \nabla h$
$(b)\nabla(fh) = h\nabla f + f\nabla h$

Prova. Dado X um campo suave sobre M, temos

$$\begin{aligned}\langle \nabla(f + h), X \rangle &= X(f + h) = X(f) + X(h)\\ &= \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla h, X \rangle\\ &= \langle \nabla f + \nabla h, X \rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \nabla(fh), X \rangle &= X(fh) = hX(f) + fX(h)\\ &= \langle h\nabla f, X \rangle + \langle f\nabla h, X \rangle\\ &= \langle h\nabla f + f\nabla h, X \rangle.\end{aligned}$$

□

Proposição 2.2 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, seja γ:$(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então*

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\bigg|_{t=0}. \tag{2.2}$$

Em particular, se p é ponto de máximo ou mínimo local para f, então $\nabla f(p) = 0$.

Prova. Seja X uma extensão local de γ'. Logo,

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = (X(f))(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\bigg|_{t=0}.$$

Para a segunda parte, suponhamos que p é ponto de mínimo local para f. Então existe $U \subset M$ vizinhança aberta de p tal que $f(p) \leq f(q)$ para todo $q \in U$. Se $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ como dado no enunciado da proposição, então $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ tem um mínimo local em 0. Disso decorre que

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\bigg|_{t=0} = 0.$$

E como a relação acima é válida para todo $v \in T_pM$, segue que $\nabla f(p) = 0$. O caso em que p é ponto de máximo local para f é análogo.

$\square$

Proposição 2.3 *Se $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada, com campos coordenados $\partial_1, ..., \partial_n$, então o gradiente de f é dado em U por*

$$\nabla f = g^{kl} f_l \partial_k. \tag{2.3}$$

Em particular,

$$|\nabla f|^2 = g^{kl} f_k f_l. \tag{2.4}$$

Prova. Se $\nabla f = a_k \partial_k$, então

$$f_l = \frac{\partial f}{\partial x_l} = \langle \nabla f, \partial_l \rangle = a_j \langle \partial_j, \partial_l \rangle = a_j g_{jl},$$

de maneira que

$$g^{kl} f_l = a_j g^{kl} g_{jl} = a_j \delta_{kj} = a_k.$$

Isso prova a primeira parte. Agora, a norma do gradiente é dado por

$$\begin{aligned}
|\nabla f|^2 &= \left\langle g^{kl} f_l \partial_k, g^{mj} f_j \partial_m \right\rangle \\
&= g^{kl} g^{mj} g_{km} f_l f_j \\
&= g^{kl} \delta_{jk} f_l f_j \\
&= g^{kl} f_l f_j.
\end{aligned}$$

$\square$

Definição 2.3 *Seja X um campo vetorial suave em M^n. O* ***divergente*** *de X é a função suave* div $X : M^n \to \mathbb{R}$, *dada para $p \in M$ por*

$$(\mathrm{div} X)(p) = tr\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}, \tag{2.5}$$

onde $v \in T_pM$ e tr *denota o traço do operador linear entre chaves.*

Proposição 2.4 *Seja X um campo suave em M^n e $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ em U, então*

$$\mathrm{div} X = e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle. \tag{2.6}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, então temos em p que

$$\mathrm{div} X = e_i(a_i). \tag{2.7}$$

Prova. A primeira parte segue imediatamente da definição de divergente de um campo vetorial. Além disso, pela definição de referencial geodésico, a segunda parcela da expressão em (2.6) é nula, o que implica a segunda parte.

□

Proposição 2.5 *Se X,Y são campos vetoriais suaves em M^n e $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*
$(a)\mathrm{div}(X + Y) = \mathrm{div} X + \mathrm{div} Y.$
$(b)\mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div} X + \langle \nabla f, X \rangle.$

Prova. O item (a) é imediato em virtude da Proposição 2.1. Quanto a (b), usando a definição de divergente, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(fX) &= \langle \nabla_{e_i}(fX), e_i \rangle = \langle e_i(f)X + f\nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \langle e_i(f)e_i, X \rangle + f\langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \langle \nabla f, X \rangle + f\mathrm{div} X. \end{aligned}$$

□

Lema 2.1 *Seja X um campo vetorial sobre M^n e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\partial_1, ..., \partial_n$. Se X for dado em U por $X = a_i \partial_i$, então a divergência de X é dada em U por*

$$\mathrm{div} X = \nabla_{\partial_i} a_i + a_i \Gamma_{ij}^{j}, \tag{2.8}$$

onde os Γ_{ij}^{j} são os símbolos de Christoffel da métrica de M em U.

Prova. Notemos primeiro que

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} X &= \nabla_{\partial_i}(a_k \partial_k) = (\nabla_{\partial_i} a_k)\partial_k + a_k \nabla_{\partial_i} \partial_k \\ &= (\nabla_{\partial_i} a_k)\partial_k + a_k \Gamma_{ik}^{j} \partial_j = (\nabla_{\partial_i} a_k)\partial x_i \partial_k + a_j \Gamma_{ij}^{k} \partial_k \\ &= \left(\nabla_{\partial_i} a_k + a_j \Gamma_{ij}^{k}\right) \partial_k. \end{aligned}$$

Logo, como o traço do operador linear é o traço da matriz que o representa em qualquer base, segue que

$$\begin{aligned}\mathrm{div}X &= \nabla_{\partial_i} a_i + \sum_j a_j \Gamma^i_{ij} = \nabla_{\partial_i} a_i + a_j \Gamma^i_{ij} \\ &= \nabla_{\partial_i} a_i + a_i \Gamma^j_{ji} = \nabla_{\partial_i} a_i + a_i \sum_j \Gamma^j_{ij}.\end{aligned}$$

□

Proposição 2.6 *Seja X um campo vetorial sobre M^n e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\partial_1, ..., \partial_n$. Se X for dado em U por $X = a_i \partial_i$, então a divergência de X é dada em U por*

$$\mathrm{div}X = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \sqrt{g}), \tag{2.9}$$

onde $g = \det(g_{ij})$.

Prova. Primeiro vamos analisar o segundo somatório na expressão do Lema 2.1:

$$\begin{aligned}\Gamma^j_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) g^{kj} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{kj} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{kj}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{jk} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{kj}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj}.\end{aligned}$$

Afirmamos agora que

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{jk} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Para isso, considere que $(G^k)_i$ é a matriz obtida de $G = (g_{ij})$, derivando as entradas de sua k-ésima coluna na direção de ∂_i. Como $g = \det G$ é uma função linear de cada uma de suas colunas, temos

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_i} = \det(G^{-1}) \det((G^k)_i) = \det(G^{-1}(G^k)_i).$$

Como $G^{-1}G = \mathrm{Id}$ temos que os elementos da k-ésima coluna de $G^{-1}(G^k)_i$ que denotamos por A_{lk} são dados por $A_{lk} = g^{lj} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}$. Portanto, pelo teorema de Laplace, temos que

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_i} = \det(G^{-1}(G^k)_i) = A_{kk} = g^{kj} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}.$$

Esse resultado juntamente com o Lema 2.1 fornece

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}X &= \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i \sum_j \Gamma_{ij}^j = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{a_i}{2g}\frac{\partial g}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{a_i}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_i}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i\sqrt{g}).
\end{aligned}
$$

□

Definição 2.4 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O* ***Laplaciano*** *de f é a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f). \tag{2.10}$$

Corolário 2.1 *Se $f : M^n \to \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então*

$$\Delta(\phi \circ f) = (\phi'' \circ f)|\nabla f|^2 + (\phi' \circ f)\Delta f. \tag{2.11}$$

Prova. Pela definição do Laplaciano e das propriedades do gradiente e do divergente, temos

$$
\begin{aligned}
\Delta(\phi \circ f) &= \mathrm{div}(\nabla(\phi \circ f)) = \mathrm{div}((\phi' \circ f)\nabla f) \\
&= \langle (\phi'' \circ f), \nabla f\rangle + (\phi' \circ f)\mathrm{div}(\nabla f) \\
&= \langle (\phi'' \circ f)\nabla f, \nabla f\rangle + (\phi' \circ f)\Delta f.
\end{aligned}
$$

□

Proposição 2.7 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave e $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M$. Então*

$$\Delta f = e_i\left(e_i(f)\right) - \left(\nabla_{e_i} e_i\right) f. \tag{2.12}$$

Prova. De fato, note que $\nabla f = e_i(f)e_i$ em U. Portanto, usando a definição do Laplaciano junto com a proposição 2.4 obtemos

$$\Delta f = e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f\rangle = e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)f.$$

□

Proposição 2.8 *Dadas $f, h : M^n \to \mathbb{R}$ funções suaves, tem-se*

$$\Delta(fh) = h\Delta f + f\Delta h + 2\langle \nabla f, \nabla h\rangle. \tag{2.13}$$

Prova. Segue das Proposições 2.1 e 2.5 que

$$\begin{aligned}\Delta(fh) &= \operatorname{div}(\nabla(fh)) = \operatorname{div}(h\nabla f + f\nabla h) \\ &= h\Delta f + f\Delta h + 2\langle \nabla f, \nabla h\rangle.\end{aligned}$$

□

Proposição 2.9 *Se $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada com campos coordenados $\partial_1, ..., \partial_n$, então o Laplaciano de f é dada em U por*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}\sqrt{g}f_j\right). \tag{2.14}$$

Prova. Seja $\nabla f = a_i\partial_i$, com $a_i = g^{ij}f_j$. Segue de (2.9) que

$$\begin{aligned}\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i\sqrt{g}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}\sqrt{g}f_j\right).\end{aligned}$$

□

Definição 2.5 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O **Hessiano** de f é o campo de operadores lineares, tal que $(\text{Hess}f)_p : T_pM \to T_pM$, definido por*

$$(\text{Hess}f)_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Proposição 2.10 *Se $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $p \in M$, então $(\text{Hess}f)_p : T_pM \to T_pM$ é um operador linear auto-adjunto e satisfaz $\operatorname{tr}(\text{Hess}f) = \Delta f$.*

Prova. Basta provar a igualdade em cada $p \in M$. Portanto, dado $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial móvel $\{e_1, ..., e_n\}$, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\text{Hess}f)_p &= \langle (\text{Hess}f)_p(e_i), e_i\rangle = \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle_p \\ &= \operatorname{div}(\nabla f)(p) = \Delta f(p).\end{aligned}$$

□

2.2 Geometria de comparação

Nesta seção, inicialmente são discutidos resultados chaves da geometria de comparação entre variedades o Teorema de comparação do Laplaciano e a estimativa de comparação de volume de Bishop-Gromov. Esses resultados são vistos, por exemplo, em (GALLOT; HULIN;

LAFONTAINE, 1990) e (PETERSEN; AXLER; RIBET, 2006). Entretanto, seguiremos pela notação de (LI, 2012). No segundo momento é exposto o princípio variacional para funções harmônicas, o princípio do máximo e o Lema de Hopf que são os resultados auxiliares no decorrer do texto.

Para o teorema a seguir, se $T : V \to V$ é um operador linear auto-adjunto em um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno, denotamos $|T|^2 = \mathrm{tr}(T^2)$, o quadrado da norma de Hilbert-Schmidt de T. Com isso, sendo $e_1, ..., e_n$ uma base ortonormal de V, segue que

$$|T|^2 = \langle T^2(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} |T(e_i)|^2. \tag{2.15}$$

Teorema 2.1 *(Fórmula de Bochner) Se M^n é uma variedade Riemanniana e $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle\nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + |\mathrm{Hess} f|^2. \tag{2.16}$$

Prova. Fixado $p \in M$ e dado $\{e_i\}_i$ um referencial móvel em uma vizinhança $U \subset M$ de p, geodésico em p. Então, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2}(\mathrm{Hess}|\nabla f|^2)(e_i, e_i)\\
&= \frac{1}{2}e_i(e_i\langle\nabla f, \nabla f\rangle) = e_i\langle\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle\\
&= \langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle + |\nabla_{e_i}\nabla f|^2\\
&= \langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla f\rangle + |\mathrm{Hess} f|^2,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

onde utilizamos (2.15) na última igualdade. Agora, para $X \in \mathfrak{X}(M)$ temos que

$$\langle R(X, e_i)\nabla f, e_i\rangle = \langle\nabla_X\nabla_{e_i}\nabla f - \nabla_{e_i}\nabla_X\nabla f - \nabla_{[X,e_i]}\nabla f, e_i\rangle. \tag{2.18}$$

Como o referencial é geodésico em p, temos que $(\nabla_X e_i)(p) = 0$, e daí

$$\langle\nabla_X\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle = X\langle\nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle = X(\Delta f) = \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle \tag{2.19}$$

em p. Utilizando novamente que o referencial é geodésico, juntamente com o fato de $(\mathrm{Hess} f)_p$ ser um operador auto-adjunto, obtemos sucessivamente em p que

$$\begin{aligned}
&\langle\nabla_{e_i}\nabla_X\nabla f + \nabla_{[X,e_i]}\nabla f, e_i\rangle =\\
&= e_i\langle\nabla_X\nabla f, e_i\rangle - \langle\nabla_X\nabla f, \nabla_{e_i}e_i\rangle + \langle\nabla_{e_i}\nabla f, [X, e_i]\rangle\\
&= e_i\langle\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle + \langle\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_X e_i - \nabla_{e_i}X\rangle\\
&= \langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle + \langle\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i}X\rangle - \langle\nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i}X\rangle\\
&= \langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Com isso, substituindo (2.19) e (2.20) em (2.18), segue que

$$\langle R(X, e_i)\nabla f, e_i\rangle = \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle - \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle,$$

ou ainda

$$\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f, X\rangle = \mathrm{Ric}(X, \nabla f) + \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle.$$

Fazendo $X = \nabla f$ na última relação e substituindo o resultado em (2.7) obtemos a expressão da fórmula de Bochner.

$\square$

Agora vamos comparar o elemento de área de volume com o elemento de área de uma variedade que tem curvatura constante igual a K. Para tanto usaremos a primeira e segunda fórmulas variacionais para área no caso em que dada uma hipersuperfície orientada N de uma variedade orientada M e restringimos a variação a ser dada pelas hipersuperfícies que são uma constante distante de N. O campo vetorial variacional é dado por e_m com $\nabla_{e_m}e_m = 0$. Esta situação é particularmente útil para controlar o crescimento do volume das bolas geodésicas de raio r.

Então definindo dA_t o elemento de área, com respeito à métrica induzida, da deformação N_t com $N_0 = N$, para t suficientemente próximo à 0 podemos escrever $dA_t = J(x,t)dA_0$. Com respeito ao sistema de coordenadas normal $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, a função $J(x,t)$ é dada por

$$J(x,t) = \frac{\sqrt{g(x,t)}}{\sqrt{g(x,0)}}$$

com $g(x,t) = \det(g_{ij}(x,t))$. Nesse caso, se escrevermos $\overrightarrow{H} = He_m$, a primeira fórmula variacional para o elemento de área é

$$\frac{\partial J}{\partial t}(x,0) = H(x)J(x,0),$$

e a segunda fórmula variacional pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 J}{\partial t^2}(x,0) &= -\sum_{i,j=1}^{m-1} h_{ij}(x)J(x,0)\\ &= -R(e_m, e_m)(x)J(x,0) + H^2(x)J(x,0).\end{aligned}$$

Teorema 2.2 *Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional, e $p \in M$ um ponto fixado. Assuma que $\mathrm{Ric} \geq (n-1)K(r(p,x))$ para alguma função K dependendo apenas da distância a p. Se $J(\theta, r)d\theta$ é o elemento de área de $\partial B_p(r)$ e $\overline{J}(r)$ é a solução da EDO*

$$\overline{J}'' = \frac{n-2}{n-1}(\overline{J}')^2\overline{J}^{-1} - (n-1)K\overline{J}$$

com condições iniciais

$$\overline{J}(r) \sim r^{n-1}$$
$$\overline{J}'(r) \sim (n-1)r^{n-2},$$

quando $r \to 0$*, então dentro do cut-locus de p a função* $J(\theta, r)/\overline{J}(r)$ *é uma função não-crescente em r. Além disso, se* $\overline{H}(r) = \overline{J'}/\overline{J}$*, então* $H(\theta, r) \leq \overline{H}(r)$ *quando* (θ, r) *está dentro do cut-locus de* p*.*

Prova. Pela primeira e segunda fórmulas variacionais, se $x = (\theta, r)$ não pertence ao cut-locus de p, temos

$$J'(\theta, r) = \frac{\partial J}{\partial r}(\theta, r) = H(\theta, r)J(\theta, r) \tag{2.21}$$

e

$$\begin{aligned} J''(\theta, r) &= \frac{\partial^2 J}{\partial r^2}(\theta, r) \\ &= -\sum_{i,j=1}^{m-1} h_{ij}^2(\theta, r)J(\theta, r) - R_{rr}(\theta, r)J(\theta, r) + H^2(\theta, r)J(\theta, r), \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde $R_{rr} = R(\partial/\partial r, \partial/\partial r)$,$H(\theta, r)$, e $(h_{ij}(\theta, r))$ denotam a curvatura de Ricci na direção radial, a curvatura média e a segunda forma fundamental de $\partial B_p(r)$ no ponto $x = (\theta, r)$ com respeito ao vetor normal unitário $\partial/\partial r$, respectivamente.

Definindo $f = J^{1/(n-1)}$, (2.21) e (2.22) podem ser escritos como

$$f' = \frac{1}{n-1}Hf \quad \text{e} \quad f'' \leq \frac{-1}{n-1}R_{rr}f \leq -Kf.$$

As condições iniciais tornam-se $f(\theta, 0) = 0$ e $f'(\theta, 0) = 1$. Seja $\overline{f} = \overline{J}^{1/(n-1)}$ a função correspondente definida usando $\overline{J}$. A função $\overline{f}$ satisfaz

$$\overline{f''} = -K\overline{f}, \quad \overline{f}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \overline{f'}(0) = 1.$$

Observe que quando K é uma constante, a função $\overline{f} > 0$ para $r \in (0, \infty)$ quando $K \leq 0$, e para $r \in (0, \pi/\sqrt{K})$ quando $K > 0$. Em geral, $\overline{f} > 0$ em um intervalo $(0, a)$ para algum $a > 0$. Com esses valores de r podemos definir

$$F(\theta, r) = \frac{f(\theta, r)}{\overline{f}(r)}.$$

Logo,

$$F' = \overline{f}^{-2}(f'\overline{f} - f\overline{f'})$$

e

$$\begin{aligned} F'' &= \overline{f}^{-1}f'' - 2\overline{f}^{-2}f'\overline{f'} - \overline{f}^{-2}f\overline{f''} + 2\overline{f}^{-3}f(\overline{f'})^2 \\ &\leq -2\overline{f}^{-1}\overline{f'}F', \end{aligned}$$

consequentemente

$$(\overline{f}^2F')' = \overline{f}^2(F'' + 2\overline{f}^{-1}\overline{f}'F') \leq 0.$$

Integrando de ε a r obtemos

$$\begin{aligned} F'(r) &\leq F'(\varepsilon)\overline{f}^2(\varepsilon)\overline{f}^{-2}(r) \\ &= (\overline{f}(\varepsilon)f'(\varepsilon) - f(\varepsilon)\overline{f'}(\varepsilon))\overline{f}^{-2}(r). \end{aligned}$$

Fazendo $r \to 0$, as condições iniciais de f e $\overline{f}$ implicam que $F'(r) \leq 0$. Ou seja, $F = J(\theta, r)/\overline{J}(\theta, r)$ é uma função não-crescente em r. Em particular, de $F' \leq 0$ segue que $\overline{f}f' - \overline{f'}f \leq 0$, implicando que $H(\theta, r) \leq \overline{H}(r)$.

□

Resolvendo a EDO do Teorema 2.2 obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.2 *Sob as hipóteses do Teorema 2.2, se K é uma constante, então*

$$H \leq \begin{cases} (n-1)\sqrt{K}\cot(\sqrt{K}r) & \textit{para } K > 0 \\ (n-1)r^{-1} & \textit{para } K = 0 \\ (n-1)\sqrt{-K}\coth(\sqrt{-K}r) & \textit{para } K < 0 \end{cases}.$$

e $J(\theta, r)/\overline{J}(r)$ é uma função não decrescente em r, onde

$$\overline{J}(r) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{K}}\right)^{n-1} \sin^{n-1}\left(\sqrt{K}r\right) & \textit{para } K > 0 \\ r^{n-1} & \textit{para } K = 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{-K}}\right)^{n-1} \sinh^{n-1}\left(\sqrt{-K}r\right) & \textit{para } K < 0 \end{cases}.$$

Agora vamos dar o seguinte resultado que compara o Laplaciano da variedade M com o Laplaciano da função distância de uma variedade com curvatura seccional constante igual a K.

Teorema 2.3 *Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente por* $\mathrm{Ric} \geq (n-1)K$ *para alguma constante K. Então o Laplaciano da função distância satisfaz*

$$\Delta r(x) \leq \begin{cases} (n-1)\sqrt{K}\cot(\sqrt{K}r) & \textit{para } K > 0 \\ (n-1)r^{-1} & \textit{para } K = 0 \\ (n-1)\sqrt{-K}\coth(\sqrt{-K}r) & \textit{para } K < 0 \end{cases}.$$

no sentido de distribuição.

Prova. Para uma função suave f, seja $x \in M$ um ponto tal que $\nabla f(x) \neq 0$. Então, localmente a superfície de nível N de f através do ponto x é uma hipersuperfície suave. Seja $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ um referencial ortonormal tangente a N, e seja e_n o vetor unitário normal a N. O Laplaciano de f em x é definido por

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \sum_{i=1}^{n-1}(e_ie_i - \nabla_{e_i}e_i)f(x) + (e_ne_n - \nabla_{e_n}e_n)f(x)\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(e_ie_i - (\nabla_{e_i}e_i)^t)f(x) - \sum_{i=1}^{n-1}(\nabla_{e_i}e_i)^n f(x) + (e_ne_n - \nabla_{e_n}e_n)f(x)\\ &= \Delta_N f(x) + \overrightarrow{H} f(x) + (e_ne_n - \nabla_{e_n}e_n)f(x)\\ &= \overrightarrow{H} f(x) + (e_ne_n - \nabla_{e_n}e_n)f(x),\end{aligned}$$

onde Δ_N denota o Laplaciano de N com respeito à métrica induzida e $\overrightarrow{H}$ denota o vetor curvatura média de N. Se tomarmos $f = r$, então para um ponto x que não está no cut-locus de p, temos $N = \partial B_p(r)$. Além disso, o vetor normal unitário $e_n = \partial/\partial r$. Consequentemente, temos

$$\Delta r(x) = H(x),$$

onde $H(x)$ é a curvatura média de $\partial B_p(r)$ com respeito à $\partial/\partial r$. Portanto, de acordo com o Corolário 2.2 o teorema é verdadeiro para os pontos que não estão no cut-locus de p. Usando a mesma notação como no Teorema 2.2, vamos denotar

$$\overline{H}(r) = \begin{cases}(n-1)\sqrt{K}\cot(\sqrt{K}r) & \text{para } K > 0\\ (n-1)r^{-1} & \text{para } K = 0\\ (n-1)\sqrt{-K}\coth(\sqrt{-K}r) & \text{para } K < 0\end{cases}.$$

Para mostrar que Δr tem a estimativa desejada, é suficiente mostrar que para qualquer função suave ϕ não-negativa com suporte compacto temos

$$\int_M (\Delta\phi)r \leq \int_M \phi\overline{H}(r).$$

Em termos de coordenadas polares em p, podemos escrever

$$\int_M \phi\overline{H}(r) = \int_0^\infty \int_{C(r)} \phi\overline{H}(r)J(\theta, r)d\theta dr.$$

Por outro lado, para cada $\theta \in S_p(M)$ na esfera tangente unitária, se considerarmos $R(\theta)$ o máximo valor de $r > 0$ tal que a geodésica $\gamma(s) = \exp_p(s\theta)$ minimiza até $s = r$, então pelo Teorema de Fubini podemos escrever

$$\int_0^\infty \int_{C(r)} \phi\overline{H}(r)J(\theta, r)d\theta dr = \int_{S_p(M)} \int_0^{R(\theta)} \phi\overline{H}(r)J(\theta, r)drd\theta$$

Contudo, para $r < R(\theta)$, temos

$$\overline{H}(r)J(\theta, r) \geq H(\theta, r)J(\theta, r) = \frac{\partial}{\partial r}J(\theta, r).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_M \phi \overline{H}(r) &\geq \int_{S_p(M)} \int_0^{R(\theta)} \phi \frac{\partial J}{\partial r} dr d\theta \\ &= -\int_{S_p(M)} \int_0^{R(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial r} J dr d\theta + \int_{S_p(M)} [\phi J]_0^{R(\theta)} d\theta \\ &= -\int_M \frac{\partial \phi}{\partial r} + \int_{S_p(M)} \phi(\theta, R(\theta)) J(\theta, R(\theta)) \\ &\geq -\int_M \langle \nabla \phi, \nabla r \rangle,\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que tanto ϕ quanto J são não-negativas e $J(\theta, 0) = 0$. Por outro lado, como r é Lipschitz, concluimos que

$$-\int_M \langle \nabla \phi, \nabla r \rangle = \int_M (\Delta \phi) r,$$

que prova o teorema.

$\square$

Agora mostramos o teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov, cuja demonstração pode ser encontrada em (CHAVEL, 2006).

Teorema 2.4 *(Bishop-Gromov) Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente por* $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)K$ *para alguma constante* $K > 0$. *Então*

$$\frac{V(x,R)}{V(x,r)} \leq \frac{\sinh^{n-1}\left(\sqrt{K}R\right)}{\sinh^{n-1}\left(\sqrt{K}r\right)}, \tag{2.23}$$

para todo $x \in M$ *e* $r < R$, *onde* $V(x,r) = \mathrm{Vol}\,(B(x,r))$ *denota o volume da bola geodésica de raio r centrada em* $x \in M$.

Finalizamos essa seção com alguns resultados auxiliares da teoria de equações diferenciais parciais como o princípio de Dirichlet, o princípio do máximo e o Lema de Hopf. Os resultados e demonstrações podem ser vistas em (EVANS, 1998).

Teorema 2.5 *(Princípio de Dirichlet). Assuma que* $u \in C^2(\overline{M})$ *é solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ em } M \\ \quad u = g \text{ em } \partial M \end{cases} \tag{2.24}$$

Então,

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w], \tag{2.25}$$

onde

$$I[w] := \int_M \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf dx$$
$$\mathcal{A} := \{w \in C^2(\overline{M}) \,|\, w = g \text{ em } \partial M\}.$$

Corolário 2.3 *Assuma que u é uma função harmônica definida em M com $u = g$ em ∂M. Então, para qualquer função suave w com a mesma condição de fronteira tem-se*

$$\int_M |\nabla u|^2 \leq \int_M |\nabla w|^2.$$

Isso segue imediatamente do Princípio de Dirichlet tomando $f = 0$.

No que segue vamos considerar que L é um operador linear de 2ª ordem dado pela expressão

$$Lu := \sum_{ij=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

onde $u \in C^2(U)$ e os coeficientes $a^{ij}, b^i, c : U \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e U é um aberto limitado. Além disso, que L é um operador diferencial uniformemente elíptico. Seguiremos alguns resultados fundamentais sobre a teoria elíptica.

Teorema 2.6 *(Princípio do máximo fraco) Assuma $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ e $c = 0$ em U. Se $Lu \leq 0$, então $\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u$. Se $Lu \geq 0$, então $\min_{\overline{U}} u = \min_{\partial U} u$.*

Lema 2.2 *(Lema de Hopf) Assuma $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ e $c = 0$ em U. Suponha ainda que $Lu \leq 0$ em U e existe um ponto $x_0 \in \partial U$ tal que $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in U$. Assuma finalmente que U satisfaz a condição em x_0 no interior de uma bola; isto é, existe uma bola $B \subset U$ com $x_0 \in \partial B$. Então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν é a normal unitária externa a B em x_0. Além disso, se $c \geq 0$ em U a mesma conclusão é válida para $u(x_0) \geq 0$.

Teorema 2.7 *(Princípio do máximo forte) Assuma $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ e $c = 0$ em U. Suponha também que U é conexo, aberto e limitado. Se $Lu \leq 0$ em U e u atinge seu máximo sobre $\overline{U}$ em um ponto interior, então u é constante em U. Similarmente, se $Lu \geq 0$ em U e u atinge seu mínimo sobre $\overline{U}$ em um ponto interior, então u é constante em U.*

3 A ESTIMATIVA DO GRADIENTE

Nesse capítulo apresentamos a estimativa de gradiente de Yau para funções harmônicas e da estimativa de Li-Yau para a equação do calor. A técnica foi desenvolvida em (YAU, 1975), e posteriormente localizada em (CHENG; YAU, 1975) e aprimorada em (LI; WANG et al., 2002) e, mais recentemente por (MUNTEANU, 2012). Seguimos a técnica aprimorada por (MUNTEANU, 2012).

3.1 A estimativa de Cheng-Yau

Teorema 3.1 *Seja (M, g) uma variedade completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente por $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)K$, para alguma constante $K > 0$. Suponha que $u > 0$ é uma função harmônica definida em $B(p, 2R)$. Então existe $C_1(n)$ e uma constante universal C_2 tais que*

$$|\nabla \ln u(p)| \leq (n-1)\sqrt{K} + \frac{C_1(n)}{R} e^{-C_2\sqrt{K}R}.$$

Prova. Normalizando a métrica se necessário, podemos assumir $K = 1$. Aplicamos a fórmula de Bochner a $v = \ln u$. Como

$$\nabla v = \nabla \ln u = \frac{\nabla u}{u} \Rightarrow \Delta v = \frac{\Delta u}{u} - \frac{|\nabla u|^2}{u^2} = -\frac{|\nabla u|^2}{u^2} = -|\nabla v|^2.$$

Temos então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\nabla v|^2 &= |\nabla^2 v|^2 + \langle \nabla(\Delta v), \nabla v\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla v, \nabla v) \\ &\geq |\nabla^2 v|^2 - \langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\rangle - (n-1)|\nabla v|^2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde na segunda linha usamos a limitação inferior da curvatura de Ricci.

Estimamos o termo Hessiano da seguinte forma. Assuma que $\nabla v \neq 0$ em $x \in M$. Então, podemos tomar $e_1 = \frac{\nabla v}{|\nabla v|}$ em uma vizinhança de x e $\{e_a\}_{a\geq 2}$ tal que $\{e_1, e_a\}_{a\geq 2}$ forme uma base ortonormal. Nessa notação temos

$$v_{11} = \nabla_{e_1}\nabla_{e_1} v = \frac{1}{|\nabla v|^2} v_{ij} v_i v_j = \frac{1}{2|\nabla v|^2}\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\rangle, \tag{3.2}$$

e

$$v_{1i} = \nabla_{e_i}\nabla_{e_1} v = \frac{1}{|\nabla v|} v_{ij} v_j = |\nabla v|_i. \tag{3.3}$$

Note que temos

$$|\nabla^2 v|^2 = \sum_i |v_{ij}|^2 = |v_{11}|^2 + 2\sum_a |v_{1a}|^2 + \sum_{a,b} |v_{ab}|^2. \tag{3.4}$$

Como

$$\begin{aligned}\sum_{a,b}|v_{ab}|^2 \geq \sum_a |v_{aa}|^2 \geq \frac{1}{n-1}\left|\sum_a v_{aa}\right|^2 &= \frac{1}{n-1}(\Delta v - v_{11})^2\\ &= \frac{1}{n-1}(|\nabla v|^2 + v_{11})^2\\ &= \frac{1}{n-1}|\nabla v|^4 + \frac{2}{n-1}v_{11}|\nabla v|^2 + \frac{1}{n-1}|v_{11}|^2,\end{aligned}$$

segue por (3.4) que

$$\begin{aligned}|\nabla^2 v|^2 &\geq \frac{n}{n-1}|v_{11}|^2 + 2\sum_a |v_{1a}|^2 + \frac{2}{n-1}v_{11}|\nabla v|^2 + \frac{1}{n-1}|\nabla v|^4\\ &\geq \frac{n}{n-1}|v_{1i}|^2 + \frac{2}{n-1}v_{11}|\nabla v|^2 + \frac{1}{n-1}|\nabla v|^4.\end{aligned}$$

Usando (3.2) e (3.3), obtemos

$$|\nabla^2 v|^2 \geq \frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla v||^2 + \frac{1}{n-1}\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\right\rangle + \frac{1}{n-1}|\nabla v|^4.$$

Isso vale para qualquer ponto x para o qual $|\nabla v|(x) \neq 0$. Contudo, pela continuidade obtemos isso em todos os pontos em M. Colocando isso em (3.1) implica

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\nabla v|^2 \geq &\frac{n}{4(n-1)}|\nabla v|^{-2}\big|\nabla|\nabla v|^2\big|^2 + \frac{1}{n-1}|\nabla v|^4\\ &-\frac{n-2}{n-1}\langle\nabla|\nabla v|^2, \nabla v\rangle - (n-1)|\nabla v|^2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Para uma função-corte ϕ a ser especificada posteriormente, seja

$$G = \phi^2|\nabla v|^2. \tag{3.6}$$

Por (3.5), segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta G \geq &\frac{n}{4(n-1)}\phi^4 G^{-1}|\nabla(\phi^{-2}G)|^2 + \frac{1}{n-1}\phi^{-2}G^2\\ &-\frac{n-2}{n-1}\phi^2\langle\nabla(\phi^{-2}G), \nabla v\rangle - (n-1)G\\ &+\frac{1}{2}\phi^{-2}(\Delta\phi^2)G + \langle\nabla\phi^2, \nabla(\phi^{-2}G)\rangle.\end{aligned} \tag{3.7}$$

No ponto de máximo x_0 de G temos que $\nabla G = 0$ e $\Delta G \leq 0$. Segue-se por (3.7) que em x_0

$$\begin{aligned}0 \geq &\frac{1}{n-1}G^2 - (n-1)\phi^2 G + \frac{n}{n-1}|\nabla\phi^2|G + \frac{2(n-2)}{n-1}\phi\langle\nabla\phi, \nabla v\rangle G\\ &+\frac{1}{2}(\Delta\phi^2)G - 4|\nabla\phi|^2 G.\end{aligned}$$

Como $\phi\langle\nabla\phi,\nabla v\rangle \geq \phi|\nabla\phi||\nabla v| = |\nabla\phi|G^{\frac{1}{2}}$, inferimos na desigualdade acima que

$$\begin{aligned}0 \geq & G^2-(n-1)\phi^2 G-(3n-4)|\nabla\phi|^2 G\\ &+\frac{1}{2}(n-1)(\Delta\phi^2)G-2(n-2)|\nabla\phi|G^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Isso pode ser reescrito na forma

$$-(n-1)\phi\Delta\phi+(2n-3)|\nabla\phi|^2+(n-1)^2\phi^2+2(n-2)|\nabla\phi|G^{\frac{1}{2}} \geq G. \tag{3.8}$$

Agora provamos o resultado escolhendo ϕ cuidadosamente. Primeiro tomamos uma função-corte $\phi=\phi(r)$ na reta real que é suave, tal que $\phi=1$ para $0\leq r\leq R$ e $\phi=0$ para $r>2R$. Além disso, tendo em vista a escolha da função-corte a seguir em (3.12), de maneira análoga, podemos assumir que

$$-\frac{C}{R}\leq\phi'\leq 0 \quad \text{e} \quad |\phi''|\leq\frac{C}{R^2}, \tag{3.9}$$

para uma constante universal C. Obtemos uma função em M definindo $\phi(x)=\phi(r(x))$, onde $r(x)=r(p,x)$ é a distância em M. Pelo Teorema de comparação do Laplaciano (vide Teorema 2.3) e usando que $\coth r\leq(1+1/r)$, temos

$$\Delta r\leq(n-1)\left(1+\frac{1}{r}\right) \tag{3.10}$$

no sentido fraco. Além disso, $|\nabla r|=1$. Consequentemente, (3.9) e (3.10) implicam que

$$\Delta\phi=\phi'\Delta r+\phi''|\nabla r|^2\geq-\frac{c(n)}{R}.$$

Colocando isso em (3.8), concluimos que

$$G\leq(n-1)^2+\frac{C(n)}{R}(1+\sqrt{G}).$$

Pela definição da função $G=\phi^2|\nabla v|^2$, isso prova que

$$\sup_{B_p(R)}|\nabla\ln u|^2\leq(n-1)^2+\frac{C(n)}{R}.$$

Certamente isso prova o teorema de $R\leq C(n)$. No que segue, vamos assumir que $R>C(n)$ e melhoramos a estimativa escolhendo uma função-corte diferente. Note que, em particular, isso implica

$$|\nabla\ln u|\leq n \text{ em } B(p,R). \tag{3.11}$$

Considere $\phi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$\phi(r)=\begin{cases}1 & \text{, para } r=0\\ 1-e^{\alpha\left(R-\frac{R^2}{r}\right)} & \text{, para } 0<r\leq R\\ 0 & \text{, para } r>R.\end{cases} \tag{3.12}$$

onde α é uma constante universal que será definida posteriormente. Calculando diretamente para $r < R$,

$$\phi'(r) = -\alpha \frac{R^2}{r^2} e^{\alpha\left(R-\frac{R^2}{r}\right)}.$$

Derivando obtemos a segunda derivada da ϕ dada por

$$\phi''(r) = \left(2\alpha \frac{R^2}{r^3} - \alpha^2 \frac{R^4}{r^4}\right) e^{\alpha\left(R-\frac{R^2}{r}\right)},$$

com $\phi'(0) = \phi''(0) = 0$. Considerando a função $\theta : [0, R] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\theta(r) = \frac{R^2}{r^2} e^{\alpha\left(R-\frac{R^2}{r}\right)},$$

vemos que

$$\theta'(r) = \left(\alpha \frac{R^4}{r^4} - 2\frac{R^2}{r^3}\right) e^{\alpha\left(R-\frac{R^2}{r}\right)}.$$

Então, assumindo $R > \frac{2}{\alpha}$ segue que $\theta' > 0$, ou seja, θ é crescente em $[0, R]$. Consequentemente, $\theta(r) \leq \theta(R) = 1$. Provamos, portanto que

$$|\nabla \phi| \leq \alpha. \tag{3.13}$$

Além disso, usando o teorema de comparação do Laplaciano, temos que

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= -\phi'\Delta r - \phi'' \\ &\leq \left(\alpha(n-1)\frac{R^2}{r^2}\left(1+\frac{1}{r}\right) + \left(-2\alpha\frac{R^2}{r^3} + \alpha^2\frac{R^4}{r^4}\right)\right) e^{\alpha\left(R-\frac{R^2}{r}\right)} \\ &= \alpha\left((n-1)\frac{R^2}{r^2} + (n-3)\frac{R^2}{r^3} + \alpha\frac{R^4}{r^4}\right) e^{\alpha\left(R-\frac{R^2}{r}\right)}. \end{aligned}$$

Consequentemente, como $0 \leq \phi \leq 1$ obtemos da expressão acima

$$-\phi\Delta\phi \leq \alpha\left((n-1)\frac{R^2}{r^2} + (n-3)\frac{R^2}{r^3} + \alpha\frac{R^4}{r^4}\right) e^{\alpha\left(R-\frac{R^2}{r}\right)}. \tag{3.14}$$

Colocando (3.11) e (3.13) em (3.8), segue que em x_0

$$\begin{aligned} G &\leq -(n-1)\phi\Delta\phi + (2n-3)|\nabla\phi|^2 + (n-1)^2\phi^2 + 2(n-2)|\nabla\phi|G^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (n-1)^2\phi - (n-1)\phi\Delta\phi + (2n-3)\alpha|\nabla\phi| + 2n(n-2)|\nabla\phi|. \end{aligned}$$

Por (3.14), isso implica

$$\begin{aligned} G \leq &(n-1)^2\left(1 - e^{\alpha\left(R-\frac{R^2}{r}\right)}\right) \\ &+ \Big\{\alpha\left(2n(n-2) + (2n-3)\alpha + (n-1)^2\right)\frac{R^2}{r^2} \\ &+ \alpha(n-1)(n-3)\frac{R^2}{r^3} + (n-1)\alpha^2\frac{R^4}{r^4}\Big\} e^{\alpha\left(R-\frac{R^2}{r}\right)}. \end{aligned}$$

Podemos simplificar essa expressão acima usando que

$$\frac{R^2}{r^2} \leq \frac{R^4}{r^4}, \quad \frac{R^2}{r^3} \leq \frac{R^4}{r^4},$$

e além disso, para $\alpha \leq 2/3$, temos

$$2n(n-2) + (3n-4)\alpha + (n-1)^2 + (n-1)(n-3) \leq 4(n-1)^2.$$

Resulta que em x_0 temos:

$$G \leq (n-1)^2 + (n-1)^2 \left(4\alpha \frac{R^4}{r^4} - 1\right) e^{\alpha\left(R - \frac{R^2}{r}\right)}. \tag{3.15}$$

Vamos denotar agora $\chi : [0, R] \to \mathbb{R}$ por

$$\chi(r) = \left(4\alpha \frac{R^4}{r^4} - 1\right) e^{\alpha\left(R - \frac{R^2}{r}\right)}.$$

Queremos encontrar o valor máximo de χ em $[0, R]$, por (3.15), isto irá implicar a estimativa desejada para $|\nabla \ln u|(p)$.
É fácil ver que $\chi(r) \leq 0$ se $r \geq (4\alpha)^{\frac{1}{4}} R$. Então, podemos assumir que $r < (4\alpha)^{\frac{1}{4}} R$. Note que

$$\chi(r) = \left(4\alpha \frac{R^4}{r^4} - 1\right) e^{\alpha\left(R - \frac{R^2}{r}\right)} \leq 4\alpha \frac{R^4}{r^4} e^{\alpha\left(R - \frac{R^2}{r}\right)} = 4\alpha\omega(r),$$

e a função ω é crescente em $[0, R]$ para r. Portanto, para qualquer $r < (4\alpha)^{\frac{1}{4}} R$, temos

$$\begin{aligned}
\chi(r) &\leq 4\alpha\omega(r) \\
&\leq 4\alpha\omega\left((4\alpha)^{1/2} R\right) \\
&= e^{-\alpha((4\alpha)^{-1/4} - 1)R} \\
&= e^{-C_2 R}.
\end{aligned}$$

Note que α pode ser um número escolhido que não depende de n, e então C_2 é independente de n também.
Finalmente, segue agora por (3.11) e (3.15)

$$\begin{aligned}
|\nabla \ln u|^2(p) &\leq G(x_0) \\
&\leq (n-1)^2 + (n-1)^2 e^{-C_2 R},
\end{aligned}$$

que prova o teorema.

□

Agora observamos o seguinte. Suponha que (M, g) tem curvatura de Ricci limitada inferiormente por $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)K$, para alguma constante $K > 0$ e $u > 0$ é uma função harmônica definida em $B(p, 2\overline{R})$, para algum $\overline{R} > 0$. Então existe $C_1(n)$ e uma constante universal C_2 tais que

$$\sup_{B(p,\overline{R})} |\nabla \ln u| \leq (n-1)\sqrt{K} + \frac{C_1(n)}{\overline{R}} e^{-C_2\sqrt{K}\,\overline{R}}. \tag{3.16}$$

De fato, isso segue aplicando o Teorema 3.1 com $R = \frac{1}{2}\overline{R}$ em $B(x, \overline{R})$, para todo $x \in B(p, \overline{R})$. Além disso, integrando essa estimativa do gradiente ao longo de geodésicas minimizantes obtemos a desigualdade de Harnack.

Corolário 3.1 *Seja (M, g) uma variedade completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente por $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)K$,para alguma constante $K > 0$. Suponha que $u > 0$ é uma função harmônica definida em $B(p, 2R)$. Então existe $C_1(n)$ e uma constante universal C_2 tais que*

$$|\ln u(x) - \ln u(p)| \leq (n-1)\sqrt{K}R + C_1(n)e^{-C_2\sqrt{K}R},$$

para todo $x \in B(p, R)$.

Prova. Seja γ uma geodésica minimizante de p a x com velocidade unitária, onde $\gamma(0) = p$ e $\gamma(r) = x$, com $r \leq R$. A estimativa (3.16) implica que

$$\begin{aligned} \left|\frac{d}{dt}(\ln u)(\gamma(t))\right| &= \left|\langle \nabla \ln u, \frac{d\gamma}{dt}\rangle\right|(\gamma(t)) \\ &\leq |\nabla \ln u|(\gamma(t)) \\ &\leq (n-1)\sqrt{K} + \frac{C_1(n)}{R}e^{-C_2\sqrt{K}R}. \end{aligned}$$

Integrando de $t = 0$ a $t = R$ obtemos

$$|\ln u(x) - \ln u(p)| \leq (n-1)\sqrt{K}R + C_1(n)e^{-C_2\sqrt{K}R},$$

Isso prova o resultado.

□

O Teorema 3.1 depende crucialmente da clássica fórmula de Bochner junto com a desigualdade de Kato em que usamos $|\nabla|\nabla u||^2 \leq |\nabla^2 u|^2$. O resultado seguinte estuda o caso da igualdade na estimativa do Teorema 3.1, e foi detalhada por (LI; WANG, 2006).

Proposição 3.1 *Para uma função harmônica u em (M, g) com $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)$ temos a desigualdade diferencial tipo Bochner*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 \geq \frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla u||^2 - (n-1)|\nabla u|^2.$$

A igualdade vale se e somente se M se divide como um produto torcido ("warped product") $M = \mathbb{R} \times N$ para alguma variedade n-dimensional N, onde a métrica é

$$ds_M^2 = dt^2 + \eta^2(t)ds_N^2,$$

onde

$$\eta(t) = ae^t + be^{-t}$$

para algum $a, b \geq 0$.

Prova. Similarmente à prova do teorema 3.1, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 &= |\nabla^2 u|^2 + \langle \nabla(\Delta u), \nabla u\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u)\\ &\geq |\nabla^2 u|^2 - (n-1)|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

Assuma que $\nabla u \neq 0$ em $x \in M$ e tome $e_1 = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ em uma vizinhança de x e $\{e_a\}_{a\geq 2}$ tal que $\{e_1, e_a\}$ forme uma base ortonormal. Temos

$$\begin{aligned}|\nabla^2 u|^2 &= |u_{11}|^2 + 2\sum_a |u_{1a}|^2 + \sum_{a,b}|u_{ab}|^2 \qquad (3.17)\\ &\geq |u_{11}|^2 + 2\sum_a |u_{1a}|^2 + \frac{1}{n-1}\left|\sum_a u_{aa}\right|^2\\ &= \frac{n}{n-1}|u_{11}|^2 + 2\sum_a |u_{1a}|^2\\ &\geq \frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla u||^2.\end{aligned}$$

Por continuidade, (3.17) vale também para pontos onde $\nabla u = 0$. Isso implica a desigualdade diferencial de Bochner. Se a igualdade ocorre, temos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = \frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla u||^2 - (n-1)|\nabla u|^2. \qquad (3.18)$$

Além disso, (3.17) deve ser uma igualdade também. Então a igualdade deve ocorrer na desigualdade de Cauchy usada em (3.17). Isso implica que

$$\begin{aligned}u_{ab} &= \mu\delta_{ab} \qquad (3.19)\\ u_{1a} &= 0\\ u_{11} &= -(n-1)\mu,\end{aligned}$$

para $a, b = 2, 3, ..., n$, onde μ é alguma função em M. A última identidade segue porque $\Delta u = 0$. Seja

$$\Sigma(t) = \{x \in M \,:\, u(x) = t\}.$$

Então, em um ponto regular de u temos que e_1 é ortogonal a $\Sigma(t)$ e e_a é tangente a $\Sigma(t)$. O fato que $u_{1a} = 0$ significa que $\langle \nabla|\nabla u|, e_a\rangle = 0$. Consequentemente, $|\nabla u|$ é constante ao longo de $\Sigma(t)$ para qualquer conjunto de nível de u. Por continuidade, isto deve ser verdadeiro para todos os conjuntos de nível também.

Para um valor regular t_0 de u defina o grupo a um parâmetro de difeomorfismos $(\phi_t)_{t\geq 0}$ por

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_t}{dt} &= \frac{\nabla u}{|\nabla u|}(\phi_t) \qquad (3.20)\\ \phi_0 &= \mathrm{Id} \text{ em } \Sigma(t_0).\end{aligned}$$

Sabemos pela observação acima que $|\nabla u|$ depende apenas de t, como é constante em $\Sigma(t)$. Para um $x \in \Sigma(t_0)$ definimos $f(t) = |\nabla u|(\phi_t(x_0))$, e vamos obter uma desigualdade diferencial para $f(t)$. Temos por (3.19) que

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\langle \nabla |\nabla u|, \nabla u \rangle}{|\nabla u|} \\ &= -(n-1)\mu. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Além disso, para qualquer função w temos

$$\begin{aligned} \Delta w &= w_{11} + w_{aa} \\ &= w_{11} + \Delta_{\Sigma(t)} w + H w_1, \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde $\Delta_{\Sigma(t)}$ é o Laplaciano em $\Sigma(t)$ e H é a curvatura média de $\Sigma(t)$. Temos por (3.19)

$$\begin{aligned} H &= \langle \nabla_{e_a} e_1, e_a \rangle \\ &= \frac{1}{|\nabla u|} u_{aa} \\ &= \frac{(n-1)\mu}{|\nabla u|} \\ &= -\frac{f'}{f}, \end{aligned}$$

onde na última linha usamos (3.21). Quando $w = f(t)$, obtemos por (3.22) que

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_{11} + H f_1 \\ &= f'' - \frac{(f')^2}{f}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Por outro lado, por (3.18) obtemos

$$|\nabla u| \Delta |\nabla u| = \frac{1}{n-1} |\nabla |\nabla u||^2 - (n-1)|\nabla u|^2,$$

que significa

$$f \Delta f = \frac{1}{n-1} (f')^2 - (n-1) f^2.$$

Combinando com (3.23) concluimos que

$$f f'' - \frac{n}{n-1} (f')^2 + (n-1) f^2 = 0. \tag{3.24}$$

Simplificamos essa EDO denotando $h = f^{-\frac{1}{n-1}}$, que está bem definida próximo ao conjunto de nível regular $\Sigma(t_0)$. Então (3.24) implica em $h'' + h = 0$, cuja solução geral é dada por

$$h(t) = A e^t + B e^{-t}.$$

Concluimos que

$$f(t) = |\nabla u|(\phi_t(x_0)) = \frac{1}{(A e^t + B e^{-t})^{n-1}}. \tag{3.25}$$

Note que $|\nabla u|$ depende apenas de t, logo A e B não dependem de $x_0 \in \Sigma(t_0)$, mas são constantes em M.

Em particular, (3.25) implica que $|\nabla u| \neq 0$ em M. Usando ϕ_t definida em (3.20) isso implica que todos os conjuntos de nível de u são difeomorfos, consequentemente M é difeomorfo a $\mathbb{R} \times N$, onde $N = \Sigma(t_0)$, para algum t_0 fixo. Para ver a estrutura de produto torcido, tomamos $\{e_a\}_{a\geq 2}$ ortonormal em $\Sigma(t_0)$ e considere $e_a(t) = d\phi_t(e_a)$. Então temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g_{ab}(t) &= \frac{d}{dt}\langle e_a(t), e_b(t)\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{d}{dt}} e_a(t), e_b(t)\right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{d}{dt}} e_b(t), e_a(t)\right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{e_a(t)}\frac{d\phi}{dt}, e_b(t)\right\rangle + \left\langle \nabla_{e_b(t)}\frac{d\phi}{dt}, e_a(t)\right\rangle\end{aligned}$$

Consequentemente, por (3.19) isso implica que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g_{ab}(t) &= 2\frac{u_{ab}}{|\nabla u|} \\ &= \frac{2\mu}{|\nabla u|}\delta_{ab} \\ &= -\frac{2}{n-1}\frac{f'(t)}{f(t)}\delta_{ab}.\end{aligned}$$

Integrando em t obtemos

$$g_{ab}(t) = (Ae^t + Be^{-t})^2\delta_{ab},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Isso prova o resultado.

$\square$

Observação 3.1 *Em uma variedade com* $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)$ *temos, para qualquer função harmônica u e qualquer* $\alpha > 0$*,*

$$\Delta|\nabla u|^\alpha \geq -(n-1)\alpha|\nabla u|^\alpha + \alpha\left(\alpha - \frac{n-2}{n-1}\right)|\nabla|\nabla u||^2|\nabla u|^{\alpha-2}.$$

Isso segue da Proposição 3.1 estimando $\Delta|\nabla u|$ *e usando* $\Delta h^\alpha = \alpha h^{\alpha-1}\Delta h + \alpha(\alpha-1)|\nabla h|^2$.

3.2 A estimativa de Li-Yau

Agora apresentamos um análogo parabólico do Teorema 3.1, cujos resultados e demonstrações podem ser vistas em (LI; YAU et al., 1986). Em conformidade com os resultados que são apresentados nos capítulos seguintes, tratamos o caso $K = 0$, isto é, curvatura de Ricci não-negativa.

Teorema 3.2 *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não-negativa. Seja* $u > 0$ *uma solução da equação do calor*

$$(\partial_t - \Delta)u = 0.$$

Então temos a seguinte estimativa

$$|\nabla \ln u|^2 - (\ln u)_t \leq \frac{n}{2t},$$

para todo $t > 0$.

Corolário 3.2 *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não-negativa. Seja* $u > 0$ *uma solução da equação do calor*

$$(\partial_t - \Delta)u = 0.$$

Então temos a estimativa de Harnack

$$u(x, t_1) \leq \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{r^2(x,y)}{4(t_2 - t_1)}} u(y, t_2),$$

para todo $x, y \in M$ *e* $0 < t_1 < t_2$.

4 ESTIMATIVAS PARA SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Neste capítulo consideramos (M, g) uma variedade Riemanniana não-compacta e completa. A seguir, algumas propriedades básicas das equações de calor e de Laplace, que serão usadas nas seções subsequentes. Nos referimos a (EVANS, 1998), (GRIGORYAN, 2009) e (LI, 2012) para provas desses resultados fundamentais.

4.1 Núcleo do calor e função de Green

Definição 4.1 *Seja M uma variedade com ou sem fronteira. Dizemos que $H(x, y, t)$ é um núcleo do calor se ele é positivo, simétrico nas variáveis x e y, e satisfaz a equação do calor com a função delta como condição inicial, isto é,*

$$\begin{aligned} (\Delta_x - \partial_t)H(x, y, t) &= 0 \\ \lim_{t \to 0} H(x, y, t) &= \delta(x, y). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Numa variedade compacta com fronteira (Ω, g) podemos definir similarmente o núcleo de calor de Dirichlet, que tem a propriedade adicional de ser nulo na fronteira de Ω. Pela teoria parabólica padrão, qualquer variedade compacta com fronteira admite um núcleo de calor de Dirichlet. Esse núcleo satisfaz $H_\Omega(x, y, t) \geq 0$ em Ω, e sua integral

$$\int_\Omega H_\Omega(x, y, t)dx \leq 1,$$

para todo $y \in \Omega$ e $t > 0$.

Definição 4.2 *Uma sequência $\{\Omega_i\}_i$ de subconjuntos compactos em Ω é dito ser uma exaustão compacta de Ω se $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ e $\Omega_i \subseteq \mathrm{int}\Omega_{i+1}$, para cada $i = \{1, 2, ...\}$.*

O núcleo de calor de Dirichlet é monótono crescente em Ω,

$$H_{\Omega_1}(x, y, t) \leq H_{\Omega_2}(x, y, t)$$

para todo $x, y \in \Omega_1$, se $\Omega_1 \subset \Omega_2$. O limite para uma exaustão compacta $\{\Omega_i\}_i$ de M é o núcleo de calor H em M

$$\lim_{i \to \infty} H_{\Omega_i}(x, y, t) = H(x, y, t) \tag{4.2}$$

localmente de maneira uniforme. Esse é chamado o **núcleo de calor mínimo** simétrico em M. Esse núcleo é positivo, simétrico nas variáveis x e y, e é L^1-integrável,

$$\int_M H(x, y, t) \leq 1. \tag{4.3}$$

Proposição 4.1 *Seja H o núcleo de calor em M e u_0 uma função contínua com suporte compacto em M. Então*

$$u(x,t) = \int_M H(x,y,t)u_0(y)dy$$

é uma solução de

$$(\Delta - \partial_t)u(x,t) = 0$$
$$u(x,0) = u_0(x).$$

Além disso, pelo princípio de Duhamel

$$u(x,t) = -\int_0^t \int_M H(x,y,t-s)\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial s}\right)u(y,s)dyds,$$

para qualquer função $u(x,t)$ com suporte compacto em M e tal que $u(x,0) = 0$.

Observação 4.1 *Uma propriedade útil do núcleo de calor é a propriedade de semigrupo, que diz que*

$$H(x,y,t+s) = \int_M H(x,z,t)H(y,z,s)dz. \tag{4.4}$$

Definição 4.3 *A função de Green em uma variedade (M,g) completa não-compacta é uma função $G(x,y)$ que satisfaz*

$$\Delta_x G(x,y) = -\delta(x,y) \text{ em } M. \tag{4.5}$$

Observação 4.2 *Em variedades compactas com fronteira (Ω, g), uma função de Green G_Ω satisfazendo as condições de fronteira de Dirichlet, sempre existe e é única* (LI, 2012). *Além disso, G_Ω é positiva e simétrica e pode ser obtida pelo núcleo de calor de Dirichlet por*

$$G_\Omega(x,y) = \int_0^\infty H_\Omega(x,y,t)dt.$$

Um teorema segundo (MALGRANGE, 1956) diz que toda variedade completa admite uma função de Green. Posteriormente, (LI; TAM, 1987) deram uma prova construtiva deste resultado, que tem o benefício adicional de

$$\sup_{y \in M \setminus B(p,2R)} \sup_{x \in B(p,R)} |G(p,y) - G(x,y)| < \infty, \tag{4.6}$$

para todo $p \in M$ e qualquer $R > 0$.

Existem variedades completas que admitem função de Green positiva e variedades completas que não admitem função de Green positiva. Logo, podemos dividir as variedades completas em duas classes que serão tratadas a seguir.

Definição 4.4 *Uma variedade (M, g) que admite uma função de Green positiva é dita não-parabólica, caso contrário é dita parabólica.*

Como exemplo, temos que o $(\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2)$ é uma variedade parabólica, visto que a função de Green de $(\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2)$ é

$$G_{\mathbb{R}^2}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y|,$$

que não tem um sinal fixo na variedade. Por outro lado, para $n \geq 3$, a função de Green de $(\mathbb{R}^n, dx_1^2 + ... + dx_n^2)$ é

$$G_{\mathbb{R}^n}(x, y) = \frac{C(n)}{|x - y|^{n-2}},$$

que é positiva e, neste caso, $(\mathbb{R}^n, dx_1^2 + ... + dx_n^2)$ é não-parabólica.

Agora apresentamos um critério bem útil para decidir quando uma variedade é não-parabólica ou parabólica. Seguiremos (LI, 2012) para provar tal critério. Como preparação, relembramos o seguinte resultado de convergência.

Lema 4.1 *Seja (M, g) uma variedade completa não-compacta e Ω um subconjunto aberto e conexo de M. Assuma que $\{u_i\}_i$ é uma sequência de funções harmônicas positivas em Ω e que existe um ponto $q \in \Omega$ e uma constante $C > 0$ tal que $0 < u_i(q) \leq C$. Então existe uma subsequência de $\{u_i\}_i$ que converge uniformemente nos subconjuntos compactos de Ω para uma função harmônica $u > 0$.*

Prova. Como Ω é aberto e $q \in \Omega$, existe $B(q, r) \subset \Omega$. Aplicando o Corolário 3.1 à $u_i > 0$ em $B(q, r)$ obtemos que

$$0 < u_i \leq C_1 \text{ em } B\left(q, \frac{r}{2}\right), \tag{4.7}$$

para alguma constante C_1 que independe de i. Além disso, pelo Teorema 3.1 e por (4.7), temos que $|\nabla u_i| \leq C_2$ em $B(q, \frac{r}{2})$. Visto que Ω é conexo, podemos obter estimativas similares para qualquer subconjunto compacto K em Ω. Pelo teorema de Arzela-Ascoli, isso implica que uma subsequência de $\{u_i\}_i$ converge em $C^{0,1}$ nos subconjuntos compactos para uma função $u > 0$ que é uma solução fraca. Pela teoria elíptica padrão, u é de fato harmônica e suave.

Teorema 4.1 *Seja (M, g) uma variedade completa não-compacta. Para $p \in M$ fixado e $R_i \to \infty$, considere a sequência de funções harmônicas $\{u_i\}_i$ definida por*

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= 0 \textit{ em } B(p, R_i) \setminus B(p, 1) \\ u_i &= 0 \textit{ em } \partial B(p, R_i) \\ u_i &= 1 \textit{ em } \partial B(p, 1). \end{aligned}$$

Então uma subsequência de $\{u_i\}_i$ converge uniformemente nos subconjuntos compactos de $M \setminus B(p, 1)$ para uma função harmônica $u : M \setminus B(p, 1) \to (0, 1]$, tal que $u = 1$ em $\partial B(p, 1)$.

A variedade é não-parabólica se u não é identicamente 1 em M e parabólica se u é identicamente 1 em M.

Prova. Pelo princípio do máximo, $0 \leq u_i \leq 1$ em $B(p, R_i) \setminus B(p, 1)$. O Lema anterior implica que uma subsequência de $\{u_i\}_i$ converge. Vamos assumir que o limite u não é constante, e provemos que (M, g) é não-parabólica. Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ em } M \setminus B(p,1) \\ u &= 1 \text{ em } \partial B(p,1) \\ \lim_{x\to\infty} \inf u(x) &= 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

De fato, suponha

$$a = \lim_{x\to\infty} \inf u(x) > 0,$$

então pelo princípio do máximo, $1 \geq u > a$ em $B \setminus B(p, 1)$. Então $v = \frac{u-a}{a}$ tem as propriedades requeridas.

Para uma exaustão compacta Ω_i de M, denote com G_i a função de Green de Ω_i que satisfaz as condições de fronteira de Dirichlet em $\partial\Omega_i$. Fixe $R > 0$ e assuma que i_0 é grande o suficiente tal que $B(p, R) \subset \Omega_i$ para todo $i > i_0$.
Para $q \in B(p, \frac{R}{2})$, note que

$$G_{i+1}(q, x) > G_i(q, x) = 0 \text{ para todo } x \in \partial\Omega_i.$$

Além disso, tanto $G_i(q, .)$ e $G_{i+1}(q, .)$ são harmônicas e satisfazem o mesmo comportamento assintótico em torno do pólo q. Pelo princípio do máximo, obtemos que $G_i(q, x) < G_{i+1}(q, x)$ para todo $x \in \Omega_i$. Considere

$$A_i = \max_{x\in\partial B(p,R)} G_i(q, x). \tag{4.9}$$

Afirmamos que $\{A_i\}_i$ deve ser uniformemente limitada em i. Vamos assumir o contrário, que $\{A_i\}_i$ é ilimitada. Construiremos duas funções barreira, uma em $\Omega_i \setminus B(p, R)$ e a outra em $B(p, R)$.

Primeiro, afirmamos que existe $v > 0$ em $M \setminus B(p, R)$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \text{ em } M \setminus B(p,R) \\ v &= 1 \text{ em } \partial B(p,R) \\ \lim_{x\to\infty} \inf v(x) &= 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

De fato, v pode ser construída por um processo de exaustão, resolvendo $\Delta v_i = 0$ em $B(p, R_i) \setminus B(p, R)$ com condições de fronteira $v_i = 1$ em $\partial B(p, R)$ e $v = 0$ em $\partial B(p, R_i)$. Visto que

$$\frac{u}{\inf_{\partial B(p,R)} u}$$

é também harmônica, positiva em $\partial B(p,R_i)$ e é maior que 1 em $\partial B(p,R)$, o princípio do máximo implica que
$$v_i \leq \frac{u}{\inf_{\partial B(p,R)} u} \text{ em } B(p,R_i) \setminus B(p,R).$$
Consequentemente, por (4.8) a função limite v irá satisfazer (4.10). Agora a função $w = A_i v$ é harmônica em $\Omega_i \setminus B(p,R)$ e satisfaz $w > 0$ em $\partial\Omega_i$, e $w = A_i$ em $\partial B(p,R)$. Obtemos pelo princípio do máximo que

$$G_i(q,x) \leq A_i v(x) \text{ para todo } x \in \Omega_i \setminus B(p,R). \tag{4.11}$$

Agora denotemos por G_R a função de Green de $B(p,R)$. Como por (4.9) temos $G_i(q,x) \leq A_i$ para $x \in \partial B(p,R)$, o princípio do máximo implica que

$$G_i(q,x) \leq G_R(q,x) + A_i,$$

para todo $x \in B(p,R) \setminus \{q\}$. Consequentemente, obtemos

$$\frac{1}{A_i} G_i(q,x) \leq \frac{1}{A_i} G_R(q,x) + 1, \text{ para todo } x \in B(p,R) \setminus \{q\}, \tag{4.12}$$
$$\frac{1}{A_i} G_i(q,x) \leq v(x), \text{ para todo } x \in \Omega_i \setminus B(p,R).$$

Como, por hipótese, $\{A_i\}_i$ é ilimitada, a expressão acima implica que $\{\frac{1}{A_i} G_i(q,x)\}_i$ converge para uma função harmônica limitada em $M \setminus \{q\}$, que pelo teorema de singularidade removível, pode ser extendida à uma função harmônica limitada H em M que satisfaz

$$\begin{aligned} H &\leq 1 \text{ em } B(p,R) \\ H &\leq v \text{ em } M \setminus B(p,R) \\ \max_{\partial B(p,R)} H &= 1. \end{aligned}$$

Note que $v \leq 1$ em $M \setminus B(p,R)$, que mostra que $H \leq 1$ em M e seu máximo é atingido em $\partial B(p,R)$. Logo, pelo princípio do máximo forte, $H = 1$ em M. Isso contradiz o fato que $\inf H = 0$ por (4.10). A contradição mostra que, de fato, $\{A_i\}_i$ é limitada. Pelo princípio do máximo, sabemos que

$$G_i(q,x) \leq A_i v(x) \text{ para todo } x \in \Omega_i \setminus B(p,R).$$

Como A_i é uniformemente limitada em i, isso implica uma estimativa uniforme para G_i, para qualquer $q \in B(p, \frac{R}{2})$. Pelo Lema 4.1 isso implica que existe uma função de Green positiva em M. Logo, provamos que se u não é constante, então (M,g) é não-parabólica. Para provar a volta, assuma que (M,g) é não-parabólica e provemos que u não é constante. Visto que

$$\frac{G(p,x)}{\inf_{y \in \partial B(p,1)} G(p,y)}$$

é harmônica em $M \setminus B(p,1)$, positiva em $\partial B(p,R_i)$ e ≥ 1 em $\partial B(p,1)$, concluimos pelo princípio do máximo que

$$u_i(x) \leq \frac{G(p,x)}{\inf_{y\in\partial B(p,1)} G(p,y)} \text{ para todo } x \in B(p,R_i) \setminus B(p,1). \tag{4.13}$$

Tomando o limite em i, obtemos a mesma desigualdade para u em $M \setminus B(p,1)$. Isso prova que u não é constante.

□

Concluímos essa seção com uma propriedade muito útil de variedades parabólicas.

Corolário 4.1 *Seja (M,g) uma variedade completa que é parabólica. Então toda função sub-harmônica em M que é limitada superiormente deve ser constante.*

Prova. Assuma por contradição que existe uma função sub-harmônica não constante w que é limitada superiormente em M. Seja

$$A = \sup_M w < \infty.$$

Como w é sub-harmônica, pelo Princípio do Máximo, w atinge seu máximo no infinito. Consequentemente, a função

$$v = A - w$$

é super-harmônica, positiva em M, e

$$\lim_{x\to\infty} \inf v(x) = 0. \tag{4.14}$$

Considere a sequência $\{u_i\}_i$ definida no Teorema 4.1. Como

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{v}{\inf_{\partial B(p,1)} v} - u_i\right) &\leq 0 \,\text{em}\, B(p,R_i) \setminus B(p,R_1) \\ \frac{v}{\inf_{\partial B(p,1)} v} - u_i &> 0 \,\text{em}\, \partial B(p,1) \\ \frac{v}{\inf_{\partial B(p,1)} v} - u_i &> 0 \,\text{em}\, \partial B(p,R_i) \end{aligned}$$

obtemos pelo princípio do máximo que

$$u_i \leq \frac{v}{\inf_{\partial B(p,1)} v} \,\text{em}\, B(p,R_i) \setminus B(p,R_1).$$

Tomando o limite em i, temos que u satisfaz a mesma estimativa. Por (4.14) segue que u é não constante, consequentemente M é não-parabólica. Isso é uma contradição, pois assumimos que M é parabólica.

□

Como aplicação, temos um teorema segundo (HUBER, 1958) que diz que superfícies completas, não-compactas com curvatura seccional não-negativa, são parabólicas. Portanto, temos que funções sub-harmônicas definidas nessas superfícies, em vista do Corolário 4.1, são constantes.

Agora apresentamos algumas estimativas básicas para o núcleo do calor e a função de Green que serão aplicadas nos capítulos seguintes.

4.2 Estimativas para o núcleo do calor

Começamos com uma observação devido à estimativa de Harnack.

Observação 4.3 *Notemos que o Corolário 3.2 é aplicável à H, embora o núcleo do calor não seja suave em t=0.*

De fato, H tem a mesma assíntota quando $t \to 0$ como o núcleo do calor Euclidiano. O núcleo do calor Euclidiano satisfaz

$$t(|\nabla \ln H|^2 - (\ln H)_t) = \frac{n}{2}.$$

Consequentemente, o argumento do princípio do máximo no Teorema 3.2 pode ser aplicado a H também. Em ordem, para aplicar a estimativa de Harnack, primeiro provamos uma estimativa integral geral, seguindo (DAVIES, 1989).

Lema 4.2 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa e B_1,B_2 dois conjuntos compactos em M. Denote com V_1,V_2 seus volumes e $r(B_1, B_2)$ a distância entre eles. Então*

$$\int_{B_1}\int_{B_2} H(x,y,t)dxdy \leq \sqrt{V_1V_2}e^{-\frac{r^2(B_1,B_2)}{4t}}.$$

Prova. Começamos com uma solução $f(x,t)$ da equação do calor, que tem suporte compacto em M. Seja B um conjunto compacto em M e $r(x, B)$ a distância a B. Como $|\nabla r| = 1$, é fácil ver que a função

$$g(x) = \frac{r^2(x,B)}{4(t+\varepsilon)} \tag{4.15}$$

Satisfaz

$$g_t = -|\nabla g|^2$$

para todo $\varepsilon > 0$. Aqui tomamos $\varepsilon > 0$ para evitar problemas em $t = 0$, mas eventualmente faremos $\varepsilon \to 0$. Note que

$$(e^g f)_{x_i} = e^g g_{x_i} f + e^g f_{x_i} = (f g_{x_i} + f_{x_i})e^g \Rightarrow \nabla(e^g f) = (f\nabla g + \nabla f)e^g.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
|\nabla(e^g f)|^2 &= |f\nabla g + \nabla f|^2 e^{2g} \\
&= \langle f\nabla g + \nabla f, f\nabla g + \nabla f\rangle e^{2g} \\
&= (f^2|\nabla g|^2 + |\nabla f|^2 + 2f\langle \nabla f, \nabla g\rangle)e^{2g}.
\end{aligned}
$$

Integrando por partes o último termo, temos

$$
\begin{aligned}
2\int_M f\langle \nabla f, \nabla g\rangle e^{2g} &= \frac{1}{2}\int_M \langle \nabla f^2, \nabla e^{2g}\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\int_M e^{2g}\Delta f^2 \\
&= -\frac{1}{2}\int_M 2e^{2g}(f\Delta f + |\nabla f|^2) \\
&= -\int_M e^{2g}(f\Delta f + |\nabla f|^2).
\end{aligned}
$$

Consequentemente, temos

$$
0 \leq \int_M |\nabla(e^g f)|^2 = \int_M (f^2|\nabla g|^2 + |\nabla f|^2 + 2f\langle \nabla f, \nabla g\rangle)e^{2g} = \int_M (f^2|\nabla g|^2 - f\Delta f)e^{2g}.
$$

Como f é solução da equação do calor, então $\Delta f = f_t$, e como $|\nabla g|^2 = -g_t$, isso implica

$$
0 \leq -\int_M (f^2 g_t + f f_t)e^{2g} = -\frac{1}{2}\int_M [f^2(2g_t e^{2g}) + (2ff_t)e^{2g}] = -\frac{1}{2}\int_M (f^2 e^{2g})_t.
$$

Consequentemente, integrando de 0 a t

$$
\int_M f^2(x,t)e^{2g(x,t)}dx \leq \int_M f^2(x,0)e^{2g(x,0)}dx, \tag{4.16}
$$

para qualquer f que tem suporte compacto em M e satisfaz a equação do calor. Consideremos

$$
f(x,t) = \int_B H(x,y,t)dy. \tag{4.17}
$$

Claramente f verifica a equação do calor, no entanto não tem suporte compacto. Nesse sentido, notamos que

$$
f(x,t) = \lim_{i\to\infty} f_i(x,t),
$$

onde

$$
f_i(x,t) = \int_B H_i(x,y,t)dy
$$

e H_i é o núcleo de calor de Dirichlet por uma exaustão compacta Ω_i de M. Podemos usar (4.16) em f_i para obter que

$$
\int_M {f_i}^2(x,t)e^{2g(x,t)}dx \leq \int_M {f_i}^2(x,0)e^{2g(x,0)}dx. \tag{4.18}
$$

Como $f_i(x,0)=\chi_B(x)$, segue que

$$\int_M {f_i}^2(x,0)e^{2g(x,0)}dx = \int_M \chi_B(x)e^{\frac{r^2(x,B)}{2\varepsilon}}dx = V(B)$$

usando a definição de g em (4.15). Logo, fazendo $i\to\infty$ em (4.18) obtemos

$$\int_M f^2(x,t)e^{2g(x,t)}dx \leq V(B).$$

Além disso, como a estimativa independe de ε, fazemos $\varepsilon\to 0$ e concluimos que

$$\int_M f^2(x,t)e^{\frac{r^2(x,B)}{2t}}dx \leq V(B), \tag{4.19}$$

onde $f(x,t)=\int_B H(x,y,t)dy$. Usamos essa estimativa para

$$f_1(x,t)=\int_{B_1} H(x,y,t)dy \quad \text{e} \quad f_2(x,t)=\int_{B_2} H(x,y,t)dy.$$

A propriedade de semi-grupo de H diz que

$$H(x,z,2t)=\int_M H(x,y,t)H(x,z,t)dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{B_1}\int_{B_2} H(y,z,2t)dydz &= \int_{B_1}\int_{B_2}\int_M H(x,y,t)H(x,z,t)dxdydz \\ &= \int_M \left(\int_{B_1} H(x,y,t)dy\right)\left(\int_{B_2} H(x,z,t)dz\right)dx \\ &= \int_M f_1(x)f_2(x)dx.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Junto com a desigualdade triangular

$$\frac{1}{8}r^2(B_1,B_2) \leq \frac{1}{4}r^2(x,B_1)+\frac{1}{4}r^2(x,B_2)$$

temos

$$\begin{aligned}e^{\frac{r^2(B_1,B_2)}{8t}}\int_M f_1(x)f_2(x)dx &\leq \int_M \left(f_1(x)e^{\frac{1}{4}r^2(x,B_1)}\right)\left(f_2(x)e^{\frac{1}{4}r^2(x,B_2)}\right)dx \\ &\leq \left[\int_M \left(f_1(x)e^{\frac{1}{4}r^2(x,B_1)}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_M \left(f_2(x)e^{\frac{1}{4}r^2(x,B_2)}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{V_1}\sqrt{V_2} \\ &= \sqrt{V_1V_2}.\end{aligned}$$

Juntando essa informação com a igualdade em (4.20), temos

$$e^{\frac{r^2(B_1,B_2)}{8t}}\int_{B_1}\int_{B_2} H(y,z,2t)dydz = e^{\frac{r^2(B_1,B_2)}{8t}}\int_M f_1(x)f_2(x)dx \leq \sqrt{V_1V_2}.$$

Logo,

$$\int_{B_1}\int_{B_2} H(y,z,2t)dydz \leq \sqrt{V_1V_2}e^{-\frac{r^2(B_1,B_2)}{8t}}.$$

$\square$

Teorema 4.2 *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não-negativa. Então para qualquer* $\varepsilon > 0$ *existe* $C(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$H(x, y, t) \leq \frac{C(\varepsilon)}{\sqrt{V(x, \sqrt{t})V(y, \sqrt{t})}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(1+\varepsilon)t}},$$

para todo $x, y \in M$ *e* $t > 0$.

Prova. A desigualdade de Harnack Corolário 3.2 visto também na Observação 4.3, implicam que

$$H(x, y, t) \leq c(\delta)H(z, y, (1 + \delta)t)e^{\frac{r^2(x,z)}{4\delta t}}$$

para qualquer $\delta > 0$. De fato, basta tomar $t_1 = t$ e $t_2 = (1+\delta)t$ e $(t_2/t_1)^{(n/2)} = c(\delta)$. Integramos isso em z sobre $B(x, \sqrt{t})$ e obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,\sqrt{t})} H(x, y, t)dz &\leq c(\delta) \int_{B(x,\sqrt{t})} H(z, y, (1 + \delta)t)e^{\frac{r^2(x,z)}{4\delta t}} dz \\
H(x, y, t)V(x, \sqrt{t}) &\leq c(\delta) \int_{B(x,\sqrt{t})} H(z, y, (1 + \delta)t)e^{\frac{r^2(x,z)}{4\delta t}} dz \\
H(x, y, t) &\leq \frac{c(\delta)}{V(x, \sqrt{t})} \int_{B(x,\sqrt{t})} H(z, y, (1 + \delta)t)e^{\frac{r^2(x,z)}{4\delta t}} dz \\
&\leq \frac{c(\delta)}{V(x, \sqrt{t})} \int_{B(x,\sqrt{t})} H(z, y, (1 + \delta)t)e^{\frac{t}{4\delta t}} dz \\
&\leq \frac{e^{\frac{1}{4\delta}} c(\delta)}{V(x, \sqrt{t})} \int_{B(x,\sqrt{t})} H(z, y, (1 + \delta)t)dz.
\end{aligned}$$

Logo,

$$H(x, y, t) \leq \frac{C(\delta)}{V(x, \sqrt{t})} \int_{B(x,\sqrt{t})} H(z, y, (1 + \delta)t)dz. \tag{4.21}$$

Analogamente para a variável y obtemos que

$$H(z, y, (1 + \delta)t) \leq \frac{C(\delta)}{V(y, \sqrt{t})} \int_{B(y,\sqrt{t})} H(z, u, (1 + 2\delta)t)du.$$

Junto com (4.21) isso implica

$$H(x, y, t) \leq \frac{C(\delta)}{V(x, \sqrt{t})V(y, \sqrt{t}))} \int_{B(x,\sqrt{t})} \int_{B(y,\sqrt{t})} H(z, u, (1 + 2\delta)t)dudz.$$

Usando o Lema 4.2 concluimos que

$$\int_{B(x,\sqrt{t})} \int_{B(y,\sqrt{t})} H(z, u, (1 + 2\delta)t)dudz \leq \sqrt{V(x, \sqrt{t})V(y, \sqrt{y})} e^{-\frac{r^2(B(x,\sqrt{t}),B(y,\sqrt{t}))}{4(1+2\delta)t}}$$

e, portanto

$$H(x,y,t) \le \frac{C(\delta)}{V(x,\sqrt{t}V(y,\sqrt{t}))}\sqrt{V(x,\sqrt{t})V(y,\sqrt{y})}e^{-\frac{r^2(B(x,\sqrt{t}),B(y,\sqrt{t}))}{4(1+2\delta)t}}$$
$$H(x,y,t) \le \frac{C(\delta)}{\sqrt{V(x,\sqrt{t})V(y,\sqrt{y})}}e^{-\frac{r^2(B(x,\sqrt{t}),B(y,\sqrt{t}))}{4(1+2\delta)t}}.$$

Para finalizar a prova é suficiente mostrar que

$$r(x,y) \le r(B(x,\sqrt{t}),B(y,\sqrt{t})) + C\sqrt{t}, \tag{4.22}$$

para todo $x, y \in M$. Isso é óbvio se $r(x,y) \le 2\sqrt{t}$. Se $r(x,y) > 2\sqrt{t}$, então (4.22) segue imediatamente da desigualdade triangular. Isso prova o teorema.

□

Para fins de instrução, apresentamos apenas a prova para (M,g) com $Ric \ge 0$. A seguinte afirmação mais geral é verdadeira.

Teorema 4.3 *Seja (M,g) uma variedade completa com $\mathrm{Ric} \ge -(n-1)K$ em $B(p,2R)$. Temos a estimativa*

$$H(x,y,t) \le \frac{C(\varepsilon)}{\sqrt{V(x,\sqrt{t})V(y,\sqrt{t})}}e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(1+\varepsilon)t}+C_2\sqrt{\frac{1}{R^2}+K}\sqrt{t}},$$

para todo $x, y \in B(p,R)$ e todo $0 \le t \le \frac{R^2}{4}$.

Note que para $R \to \infty$ e $K = 0$, recaimos no Teorema 4.2. Como uma aplicação da estimativa do núcleo de calor, obtemos a desigualdade do valor médio para funções subharmônicas.

Teorema 4.4 *Seja (M,g) uma variedade completa com $\mathrm{Ric} \ge -(n-1)K$. Assuma que v é uma função positiva satisfazendo $\Delta v \ge -Av$ em $B(p,2R_0)$. Então existe uma constante $C(A,n,K,R_0)$ tal que*

$$v^2(p) \le \frac{C(A,n,K,R_0)}{V(p,R_0)}\int_{B(p,R_0)} v^2.$$

Prova. Defina

$$w(x,s) = e^{-As}v(x), \tag{4.23}$$

que satisfaz

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial s}\right)w(x,s) = (\Delta v + Av)e^{-As} \ge 0. \tag{4.24}$$

Em seguida, fixamos

$$R = \frac{R_0}{2}, \quad t = \frac{R^2}{4} \quad e \quad \tau = \frac{R^2}{16}. \tag{4.25}$$

Considere a função

$$u(x,s)=\phi^2(x)\psi(s)w^2(x,s),$$

onde ϕ é uma função suave como em (3.9) que satisfaz $\phi=1$ em $B(p,R)$, $\phi=0$ em $M\setminus B(p,2R)$ com as condições

$$\Delta\phi\geq-\frac{C}{R}\quad e\quad |\nabla\phi|\leq\frac{C}{R}, \tag{4.26}$$

e $\psi(s)$ é uma função suave que satisfaz $\psi(s)=0$ para $0\leq s\leq\tau$,$\psi(s)=1$ para $2\tau<s<t$ e

$$0\leq\partial_s\psi\leq\frac{c}{\tau}.$$

Pela Proposição 4.1 temos

$$u(p,t)=-\int_0^t\int_M H(x,y,t-s)\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial s}\right)u(y,s)dyds. \tag{4.27}$$

Usando (4.26) e (4.24), calculamos

$$\begin{aligned}\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial s}\right)u(y,s)&=\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial s}\right)(\phi^2(x)\psi(s)w^2(x,s))\\&=(\Delta\phi^2)\psi w^2+\phi^2\psi(\Delta w^2)+2\psi\langle\nabla\psi^2,\nabla w^2\rangle-\phi^2\frac{\partial\psi}{\partial s}w^2-\phi^2\psi\frac{\partial}{\partial s}(w^2)\\&=(\Delta\phi^2)\psi w^2+\phi^2\psi\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial s}\right)w^2+2\psi\langle\nabla\psi^2,\nabla w^2\rangle-\phi^2w^2\frac{\partial\psi}{\partial s},\end{aligned}$$

e estimamos os seguintes termos

$$\begin{aligned}&(\Delta\phi^2)=2(|\nabla\phi|^2+\phi\Delta\phi)\geq\phi\Delta\phi\geq-\frac{C}{R}\phi\\&\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial s}\right)w^2=2(|\nabla w|^2+w\Delta w)-2w\frac{\partial}{\partial s}w=2|\nabla w|^2+2w\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial s}\right)w\geq2|\nabla w|^2\\&\langle\nabla\phi^2,\nabla w^2\rangle=\langle2\phi\nabla\phi,2w\nabla w\rangle=4\phi w\langle\nabla\phi,\nabla w\rangle\geq-4\phi w|\nabla\phi||\nabla w|\geq-\frac{C}{2R}\phi w|\nabla w|.\end{aligned}$$

Com isso,

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial s}\right)u(y,s)\geq-\frac{C}{R}\phi\psi w^2+2\phi^2\psi|\nabla w|^2-\frac{C}{R}\phi\psi w|\nabla w|-\phi^2w^2\frac{\partial\psi}{\partial s}.$$

Além disso, usamos o fato que

$$\frac{C}{R}\phi\psi w|\nabla w|\leq2\phi^2\psi|\nabla w|^2+\frac{C}{R^2}\phi\psi w^2.$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned}\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial s}\right)u(y,s)&\geq-\frac{C}{R}\phi\psi w^2-\frac{C}{R^2}\phi\psi w^2-\phi^2w^2\frac{\partial\psi}{\partial s}\\&=-\frac{C}{R}\left(1+\frac{1}{R}\right)\phi\psi w^2-\phi^2w^2\frac{\partial\psi}{\partial s}.\end{aligned}$$

Combinando com (4.27), isso fornece

$$\begin{aligned}
w^2(p,t) &= -\int_0^t \int_M H(x,y,t-s)\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial s}\right) u(y,s)dyds \\
&\leq \int_0^t \int_M H(x,y,t-s)\left[\frac{C}{R}\left(1+\frac{1}{R}\right)\phi\psi w^2(y,s) + \phi^2 w^2(y,s)\frac{\partial \psi}{\partial s}\right] dyds \\
&= \int_0^t \int_M H(x,y,t-s)\left[\frac{C}{R}\left(1+\frac{1}{R}\right)\phi\psi + \phi^2\frac{\partial \psi}{\partial s}\right] w^2(y,s)dyds \\
&\leq \int_0^t \int_M H(x,y,t-s)\left[\frac{C}{R}\left(1+\frac{1}{R}\right)\phi\psi + \frac{c}{\tau}\phi^2\right] w^2(y,s)dyds.
\end{aligned}$$

Usando a caracterização das funções ϕ e ψ temos que

$$\begin{aligned}
w^2(p,t) \leq & \frac{C}{R}\left(1+\frac{1}{R}\right)\int_\tau^t \int_{B(p,2R)\setminus B(p,R)} H(p,y,t-s)w^2(y,s)dyds \\
& + \frac{c}{\tau}\int_\tau^{2\tau}\int_{B(p,2R)} H(p,y,t-s)w^2(y,s)dyds.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Nosso objetivo agora é expressar o lado direito como uma integral de w^2 com uma constante dependendo explicitamente de R. Para simplificar a notação, denotaremos com C tais constantes, com compreensão implícita de sua dependência de n, K e R.

A estimativa do núcleo de calor no Teorema 4.3 fornece

$$H(p,y,t-s) \leq \frac{C_1}{\sqrt{V(p,\sqrt{t-s})V(y,\sqrt{t-s})}} e^{-C_2\frac{r^2(p,y)}{t-s}}$$

para qualquer $y \in B(p,2R)$. Visto que $\sqrt{t-s} < R$, aplicamos a estimativa de comparação de volume de Bishop-Gromov (vide Teorema 2.4) para obter

$$\frac{V(p,R)}{V(p,\sqrt{t-s})} \leq \frac{\sinh^{n-1}(\sqrt{K}R)}{\sinh^{n-1}(\sqrt{K}\sqrt{t-s})} \leq \frac{C}{(t-s)^{n/2}}.$$

E similarmente estimamos para $V(y,\sqrt{t-s})$ de modo que obtemos

$$H(p,y,t-s) \leq \frac{C_1}{V^2(p,R)(t-s)^n} e^{-C_2\frac{r^2(p,y)}{t-s}} \tag{4.29}$$

Para aplicar isso à primeira integral em (4.28) usamos que para

$$\frac{R^2}{4} = t \geq t-s \geq 0 \quad e \quad y \in B(p,2R)\setminus B(p,R),$$

temos

$$H(p,y,t-s) \leq \frac{C}{V(p,R)}. \tag{4.30}$$

Similarmente, (4.29) e (4.25) implicam que para

$$2\tau \leq s \leq \tau = \frac{1}{4}t \quad e \quad y \in B(p,2R)$$

temos

$$H(p,y,t-s) \leq \frac{C}{V(p,R)}. \tag{4.31}$$

Colocando (4.30) e (4.31) em (4.28), obtemos

$$w^2(p,t) \leq \frac{C}{V(p,R)}\left[\int_\tau^t \int_{B(p,2R)\setminus B(p,R)} w^2(y,s)dyds + \int_\tau^{2\tau}\int_{B(p,2R)} w^2(y,s)dyds\right]$$
$$w^2(p,t) \leq \frac{C}{V(p,R)}\int_\tau^t \int_{B(p,2R)} w^2(y,s)dyds.$$

Por (4.23) e (4.25), concluimos que

$$\begin{aligned} e^{-2At}v^2(p) &\leq \frac{C}{V(p,R)}\int_\tau^t \int_{B(p,2R)} e^{-2As}v^2(y)dyds \\ &= \frac{C}{V(p,R)}\left[-\frac{1}{2A}e^{-2As}\right]_\tau^t \int_{B(p,2R)} v^2(y)dy \\ &= \frac{C}{V(p,R)}[e^{-2At}(e^{2A(t-\tau)}-1)]\int_{B(p,2R)} v^2(y)dy. \end{aligned}$$

Logo,

$$v^2(p) \leq \frac{Ce^{\frac{1}{4}AR^2}}{V(p,R)}\int_{B(p,2R)} v^2(y)dy.$$

Pelo teorema de comparação de volume, temos

$$\frac{V(p,R_0)}{V(p,R)} \leq \frac{\sinh^{n-1}(\sqrt{K}R_0)}{\sinh^{n-1}(\sqrt{K}R)} \Rightarrow \frac{1}{V(p,R)} \leq \frac{C(n,K,R_0)}{V(p,R_0)}.$$

Portanto,

$$v^2(p) \leq \frac{C(A,n,K,R_0)}{V(p,R_0)}\int_{B(p,R_0)} v^2(x)dx.$$

□

Corolário 4.2 *Seja (M,g) completa e não-compacta com curvatura de Ricci não-negativa. Então*

$$H(x,y,t) \leq \frac{C(\varepsilon)}{V(x,\sqrt{t})}e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(1+\varepsilon)t}},$$

para todo $x, y \in M$ e $t > 0$.

Prova. De acordo com o Teorema 4.2

$$H(x,y,t) \leq \frac{C(\delta)}{\sqrt{V(x,\sqrt{t})V(y,\sqrt{t})}}e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(1+\delta)t}}. \tag{4.32}$$

O teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov implica que

$$\frac{V(y,R)}{V(y,\sqrt{t})} \leq \left(\frac{R}{\sqrt{t}}\right)^n \tag{4.33}$$

para qualquer $R > \sqrt{t}$. Se $r(x,y) \leq \sqrt{t}$, então tomamos $R = 2\sqrt{t}$ e usamos que $V(y,R) \geq V(x,\sqrt{t})$. Logo, segue-se que

$$\frac{V(x,\sqrt{t})}{V(y,\sqrt{t})} \leq \frac{V(y,R)}{V(y,\sqrt{t})} \leq \left(\frac{R}{\sqrt{t}}\right)^n = 2^n = C(n)$$

que por (4.32) fornece

$$H(x,y,t) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(1+\delta)t}}, \text{ para todo } t \geq r^2(x,y). \tag{4.34}$$

Agora se $r(x,y) > \sqrt{t}$, então tomamos $R = 2r(x,y)$ e obtemos por (4.33) que

$$\frac{V(x,\sqrt{t})}{V(y,\sqrt{t})} \leq \frac{V(y,2r(x,y))}{V(y,\sqrt{t})} \leq \left(\frac{2r(x,y)}{\sqrt{t}}\right)^n.$$

Por (4.32) obtemos

$$\begin{aligned} H(x,y,t) &\leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(1+\delta)t}} \left(\frac{2r(x,y)}{\sqrt{t}}\right) \\ &\leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4(1+\delta)t}} \end{aligned} \tag{4.35}$$

para todo $t < r^2(x,y)$. Por (4.34) e (4.35) obtemos o resultado.

□

4.3 Estimativas para a função de Green

Nessa seção vamos dar algumas caracterizações geométricas de parabolicidade usando determinadas hipóteses geométricas, em especial, a limitação da curvatura de Ricci.

Relembramos que uma variedade completa é dita não-parabólica se ela admite uma função de Green simétrica e positiva. Primeiro, apresentamos uma estimativa para variedades com curvatura de Ricci não-negativa, seguindo (LI; YAU et al., 1986).

Teorema 4.5 *Seja (M,g) uma variedade completa com curvatura de Ricci não-negativa. Então M é não-parabólica se e somente se*

$$\int_1^\infty \frac{tdt}{V(x,t)} < \infty, \textit{para todo } x \in M.$$

Além disso, neste caso

$$G(x,y) \leq c\int_{r(x,y)}^\infty \frac{tdt}{V(x,t)}.$$

Prova. Pelo Corolário 4.2, tomando $\varepsilon = 1$ temos

$$H(x,y,t) \leq \frac{C}{V(x,\sqrt{t})} e^{-\frac{r^2(x,y)}{8t}}, \text{ para todo } t > 0.$$

Isso implica imediatamente que

$$\int_{r^2(x,y)}^{\infty} H(x,y,t)dt \leq C \int_{r^2(x,y)}^{\infty} \frac{e^{-\frac{r^2(x,y)}{8t}}}{V(x,\sqrt{t})}dt \leq C \int_{r^2(x,y)}^{\infty} \frac{dt}{V(x,\sqrt{t})}. \tag{4.36}$$

Além disso, temos

$$\int_0^{r^2(x,y)} H(x,y,t)dt \leq C \int_0^{r^2(x,y)} \frac{1}{V(x,\sqrt{t})} e^{-\frac{r^2(x,y)}{8t}} dt.$$

Fazendo a substituição $t = r^4(x,y)/s$ e ajustando os limites de integração, obtemos

$$\int_0^{r^2(x,y)} H(x,y,t)dt \leq C \int_{r^2(x,y)}^{\infty} \frac{1}{V\left(x, \frac{r^2(x,y)}{\sqrt{s}}\right)} e^{-\frac{s}{8r^2(x,y)}} \frac{r^4(x,y)}{s^2} ds. \tag{4.37}$$

A comparação de volume de Bishop-Gromov implica para $s \geq r^2(x,y)$ que

$$\frac{V(x,\sqrt{s})}{V\left(x, \frac{r^2(x,y)}{\sqrt{s}}\right)} \leq \left(\frac{\sqrt{s}}{\frac{r^2(x,y)}{\sqrt{s}}}\right)^n = \left(\frac{s}{r^2(x,y)}\right)^n.$$

Consequentemente, por (4.37) obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{r^2(x,y)} H(x,y,t)dt &\leq C \int_{r^2(x,y)}^{\infty} \frac{1}{V(x,\sqrt{s})} e^{-\frac{s}{8r^2(x,y)}} \left(\frac{s}{r^2(x,y)}\right)^n \frac{r^4(x,y)}{s^2} ds \\ &= C \int_{r^2(x,y)}^{\infty} \frac{1}{V(x,\sqrt{s})} e^{-\frac{s}{8r^2(x,y)}} \left(\frac{s}{r^2(x,y)}\right)^{n-2} ds \\ &\leq C \int_{r^2(x,y)}^{\infty} \frac{ds}{V(x,\sqrt{s})}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Por (4.36) e (4.38) concluimos que

$$H(x,y,t) \leq C \int_{r^2(x,y)}^{\infty} \frac{1}{V(x,\sqrt{s})} ds = C \int_{r(x,y)}^{\infty} \frac{tdt}{V(x,t)}.$$

Como

$$G(x,y) = \int_0^{\infty} H(x,y,t)dy$$

isso implica o resultado.

$\square$

Agora apresentamos uma estimativa para variedades com espectro positivo, seguindo (MUNTEANU; SUNG; WANG, 2021).

Definição 4.5 *Seja (M,g) uma variedade. Definimos o espectro inferior de (M,g) por*

$$\lambda_1(\Delta) = \inf_{\phi \in C_0^{\infty}(M)} \frac{\int_M |\nabla \phi|^2}{\int_M \phi^2} \geq 0. \tag{4.39}$$

Dizemos que M tem espectro positivo se $\lambda_1(\Delta) > 0$.

Para mais detalhes sobre essa caracterização do espectro inferior do Laplaciano, ver (GRIGORYAN, 2009).

Proposição 4.2 *Seja (M, g) uma variedade completa e não-compacta, e $\lambda_1(\Delta) > 0$, então M é não-parabólica.*

Prova. Considere a sequência $\{u_i\}_i$ definida no Teorema 4.1. Estenda u_i à 0 em $M \setminus B(p, R_i)$ e $u_i = 1$ em $B(p, 1)$ e denotemos a função resultante com ϕ_i. Aplicando a definição de $\lambda_1(\Delta)$, dada em (4.39), em ϕ_i temos

$$\lambda_1(\Delta) \int_M {\phi_i}^2 \leq \int_M |\nabla \phi_i|^2.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\Delta) \int_{B(p,R_i)} {\phi_i}^2 &\leq \int_{B(p,R_i)\setminus B(p,1)} |\nabla u_i|^2 \\
&= -\int_{B(p,R_i)\setminus B(p,1)} u_i \Delta u_i - \int_{\partial B(p,1)} u_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu} \\
&= -\int_{\partial B(p,1)} u_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu},
\end{aligned}$$

onde $(\partial/\partial\nu)$ é a derivada normal exterior de $\partial B(p, 1)$. Se $u_i \to 1$, isso produz uma contradição para $\lambda_1(\Delta) > 0$. Pelo Lema 4.1, $\{u_i\}_i$ converge para uma função harmônica não-constante u sobre $M \setminus B(p, 1)$, que pelo Teorema 4.1 implica que (M, g) é não-parabólica.

□

Segundo (WANG, 1997) qualquer variedade com curvatura de Ricci não-negativa, tem espectro inferior zero, isto é, seu espectro deve ser $[0, \infty)$. Por outro lado, qualquer variedade simplesmente conexa com curvatura seccional negativa $\mathrm{Sect}(M) \leq -K$ tem espectro inferior $\lambda_1(\Delta) \geq (n-1)^2 K/4$ (MCKEAN, 1970).

Geralmente, a função de Green numa variedade com espectro positivo não converge para zero no infinito ao longo de todas as sequências possíveis. Consequentemente, a estimativa como no Teorema 4.5 não é possível nesse contexto. Portanto, estamos interessados em estimativa integrais, que são mais fracas. Seguindo (MUNTEANU; SUNG; WANG, 2021), apresentamos uma estimativa integral forte definida para a função de Green.

Teorema 4.6 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana com espectro positivo $\lambda_1(\Delta) > 0$, tal que $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)K$ para alguma constante $K \geq 0$. Então existe $C > 0$ tal que para qualquer $p, x \in M$ e qualquer $r > 0$,*

$$\frac{1}{C} r \leq \int_{B(p,r)} G(x, y) dy \leq C(r + 1).$$

Prova. Primeiro vamos estabelecer a limitação superior. É suficiente provar o resultado para $x \in B(p,r)$. De fato, considere a função

$$\Phi(x) = \int_{B(p,r)} G(x,y)dy.$$

Afirmamos que o valor máximo de Φ em $M \setminus B(p,r)$ deve ocorrer na $\partial B(p,r)$. Isso porque $G(x,y)$ é o limite de $G_i(x,y)$ que é a função de Green de Dirichlet (ver discussão na Definição 4.1 e Observação 4.2) de uma exaustão compacta Ω_i de M. Então, se considerarmos

$$\Phi_i(x) = \int_{B(p,r)} G_i(x,y)dy,$$

temos que $\Phi_i \to \Phi$ quando $i \to \infty$. Contudo, pelo princípio do máximo, o valor máximo de $\Phi_i(x)$ em $\Omega \setminus B(p,r)$ é atingido em $\partial B(p,r)$. Portanto, o mesmo é válido para Φ. Notemos que

$$e^{\lambda_1(\Delta)t} H(x,x,t) \text{ é não-crescente em } t > 0. \tag{4.40}$$

De fato, pela propriedade de semigrupo temos que

$$H(x,x,2t) = \int_M H^2(x,y,t)dy.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(x,x,2t) &= \frac{d}{dt}\int_M H^2(x,y,t)dy \\
&= 2\int_M H(x,y,t)\Delta_y H(x,y,t)dy \\
&= -2\int_M |\nabla_y H|^2(x,y,t)dy \\
&\leq -2\lambda_1(\Delta)\int_M H^2(x,y,t)dy \\
&= -2\lambda_1(\Delta)H(x,x,2t).
\end{aligned}$$

Isso implica (4.40). Note que na quarta linha usamos a definição de $\lambda_1(\Delta)$. Como H não tem suporte compacto, alguns cuidados são necessários aqui. Mas, analogamente, como na prova do Lema 4.2, pode-se contornar isso aproximando H com núcleos de calor de Dirichlet por uma exaustão compacta. Portanto, integrando (4.40) em t obtemos

$$H(x,x,t) \leq e^{-\lambda_1(\Delta)(t-1)} H(x,x,1), \tag{4.41}$$

para todo $t \geq 1$. Usando a propriedade de semigrupo e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
H(x,y,2t) &= \int_M H(x,z,t)H(y,z,t)dz \\
&\leq \left(\int_M H^2(x,z,t)dz\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M H^2(y,z,t)dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= H(x,x,2t)^{\frac{1}{2}} H(y,y,2t)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Junto com (4.41), isso prova que

$$H(x,y,t) \leq e^{-\lambda_1(\Delta)(t-1)} H(x,x,1)^{\frac{1}{2}} H(y,y,1)^{\frac{1}{2}} \tag{4.42}$$

para todo $x, y \in M$ e todo $t \geq 1$.

Pelo Teorema 4.3 temos para todo $x \in M$

$$H(x,x,1) \leq \frac{C}{V(x,1)}. \tag{4.43}$$

Contudo, pelo teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov (vide Teorema 2.4), para qualquer $x \in B(p,r)$,

$$\frac{V(p,r)}{V(x,1)} \leq \frac{V(x,2r)}{V(x,1)} \leq e^{Cr}.$$

Consequentemente, se ambos $x, y \in B(p,r)$, então temos de (4.43) que

$$H(x,x,1)^{\frac{1}{2}} H(y,y,1)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{e^{Cr}}{V(p,r)}.$$

Colocando isso em (4.42) concluimos que

$$H(x,y,t) \leq \frac{Ce^{-\lambda_1(\Delta)t+Cr}}{V(p,r)}$$

para todo $x, y \in B(p,r)$ e $t \geq 1$. Isso implica imediatamente que para algum $C_1 > 0$, temos que

$$\int_{B(p,r)} H(x,y,t)dy \leq C_1 e^{-\lambda_1(\Delta)t+C_1 r} \tag{4.44}$$

para algum $x \in B(p,r)$ e $t \geq 1$. Em particular, para $t \geq A$ com

$$A = \max\left\{1, \frac{2C_1 r}{\lambda_1(\Delta)}\right\}, \tag{4.45}$$

o primeiro tem

$$\int_{B(p,r)} H(x,y,t)dy \leq Ce^{-\frac{1}{2}\lambda_1(\Delta)t}$$

para todo $x \in B(p,r)$. Integramos essa desigualdade de $t = A$ a $t = \infty$ e usamos o Teorema de Fubini para concluir que

$$\int_{B(p,r)} \left(\int_A^\infty H(x,y,t) \right) dy \leq C \tag{4.46}$$

para qualquer $x \in M$. Por outro lado, o núcleo de calor mínimo satisfaz

$$\int_M H(x,y,t)dy \leq 1$$

para qualquer $x \in M$. O que implica

$$\int_{B(p,r)} \left(\int_0^A H(x,y,t)dt \right) dy = \int_0^A \left(\int_{B(p,r)} H(x,y,t)dy \right) dt \leq A.$$

Tendo em vista a escolha de A em (4.45) concluimos que

$$\int_{B(p,r)} \left(\int_0^A H(x,y,t)dt \right) dy \leq Cr \tag{4.47}$$

para todo $x \in B(p,r)$. Combinando (4.46) e (4.47), obtemos que

$$\int_{B(p,r)} \left(\int_0^\infty H(x,y,t)dt \right) dy \leq C(r+1)$$

para todo $x \in B(p,r)$. Como

$$G(x,y) = \int_0^\infty H(x,y,t)dt,$$

isso mostra que

$$\int_{B(p,r)} G(x,y)dy \leq C(r+1).$$

Agora provemos a limitação inferior no Teorema 4.6. Para qualquer $0 < \varepsilon < t$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B(x,t)\setminus B(x,\varepsilon)} \Delta_y G(x,y)dy \\ &= \int_{\partial B(x,t)} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\xi)dA(\xi) - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,\xi)dA(\xi) \end{aligned}$$

onde ν é a normal unitária de $\partial B(x,t)$ com respeito à ds^2. Usando o comportamento assintótico de G perto de seu pólo, obtemos

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial G}{\partial r}(x,\xi)dA(\xi) = -1$$

para qualquer $\varepsilon > 0$. Logo,

$$1 = -\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial G}{\partial r}(x,\xi)dA(\xi) \leq \int_{\partial B(x,\varepsilon)} |\nabla G|(x,\xi)dA(\xi)$$

para qualquer $t > 0$. Combinando com a estimativa do gradiente que

$$|\nabla G| \leq CG(x,y)$$

para $y \in M \setminus B(x,1)$, onde o gradiente é tomado na variável y, concluimos

$$\int_{\partial B(x,t)} G(x,\xi)dA(\xi) \geq \frac{1}{C}$$

para todo $t \geq 1$. Agora a fórmula de co-área fornece

$$\int_{B(x,r)\setminus B(x,1)} G(x,y)dy = \int_1^r \int_{\partial B(x,t)} G(x,\xi)dA(\xi)dt \geq \frac{1}{C}(r-1).$$

Isso prova o teorema.

$\square$

5 ESPAÇOS DE FUNÇÕES HARMÔNICAS E TOPOLOGIA NO INFINITO

Neste capítulo definimos primeiro os fins parabólicos e não-parabólicos de uma variedade completa e não-compacta, e usamos essas noções para construir funções harmônicas associadas a estes fins, com comportamento assintótico particular no infinito. Origina-se nos trabalhos de (NAKAI, 1962), (SARIO; NOSHIRO, 1966), (RODIN B. SARIO, 1968), (SARIO; NAKAI, 1970) e foi sistematicamente estudado por (LI; TAM, 1992). Seguimos um argumento mais recente segundo (SUNG; TAM; WANG, 2000).

Definição 5.1 *Dada uma variedade completa e não-compacta M, um fim E em relação à um subconjunto compacto $\Omega \subset$ M é uma componente conexa ilimitada de $M \setminus \Omega$.*

Motivado pelo Teorema 4.1, dado um fim *E* de *M*, consideramos a sequência $\{u_i\}_i$ definida por

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= 0 \text{ em } E(p,R_i) \setminus E(p,R_0); \\ u_i &= 0 \text{ em } \partial E(p,R_i); \\ u_i &= 1 \text{ em } \partial E(p,R_0). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Aqui denotamos com

$$E(p,r) = E \cap B(p,r);$$

$$\partial E(p,r) = E \cap \partial B(p,r),$$

e R_0 é tomado suficientemente grande tal que $\partial E(p,R_0)$ esteja bem definida. O princípio do máximo implica que $0 \leq u_i \leq 1$ em $E(p,R_i) \setminus E(p,R_0)$ e pelo Lema 1.2 uma subsequência de $\{u_i\}_i$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de $E \setminus E(p,R_0)$. Além disso, o limite independe da subsequência.

Definição 5.2 *Dizemos que E é um fim parabólico se uma subsequência de $\{u_i\}_i$ converge para u=1 em $E \setminus E(p,R_0)$.Caso contrário, é denominado não-parabólico.*

Um fim não-parabólico admite uma função harmônica limitada não-constante e positiva, que é uma ferramenta bastante útil. À primeira vista, um fim parabólico parece não ter essa informação, porque a função harmônica limite definida em (5.1) é constante. No entanto, o próximo resultado diz que não é esse o caso.

Proposição 5.1 *Seja E um fim parabólico de (M,g). Existe uma função harmônica não-negativa v:E $\to [0,\infty)$ tal que v=0 em $\partial E(R_0)$ e*

$$\lim_{x \to E(\infty)} v(x) = \infty.$$

Prova. Para a sequência $\{u_i\}_i$ definida em (5.1), temos que $u_i \to 1$ uniformemente em subconjuntos compactos. Fixe algum $R_1 > R_0$ e seja

$$C_i = \frac{1}{1 - \min_{\partial E(p,R_1)} u_i}. \tag{5.2}$$

Note que $\{u_i\} < 1$ para $x \in \partial E(p, R_1)$ pelo princípio do máximo forte. Logo, C_i está bem definido. Como $\{u_i\} \to 1$ em $\partial E(R_1)$, segue que $C_i \to \infty$. Definimos a sequência $\{v_i\}_i$ de funções harmônicas por

$$v_i = C_i(1 - u_i).$$

Claramente $\{v_i\}_i$ resolve o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta v_i &= 0 \text{ em } E(p, R_i) \setminus E(p, R_0) \\ v_i &= C_i \text{ em } \partial E(p, R_i) \\ u_i &= 0 \text{ em } \partial E(p, R_0). \end{aligned}$$

Além disso, por (5.2)

$$\max_{\partial E(p,R_i)} v_i \leq 1,$$

aplicamos o Lema 4.1 para obter uma subsequência de $\{v_i\}_i$ converge para uma função harmônica $v \geq 0$ tal que $v = 0$ em $\partial E(R_0)$. Estendendo v a zero em $M \setminus E$, obtemos uma função sub-harmônica em M. Logo, pelo Corolário 4.1 temos que v é ilimitada superiormente em E. Isso prova o resultado.

Observação 5.1 *Se um fim E é não-parabólico, ele admite uma função harmônica positiva $0 \leq u \leq 1$ tal que u=1 em ∂E. Tal função pode não ser única em geral, mas aquela construída em (5.1) é mínima. Isso significa que se v é uma função harmônica positiva em E tal que v=1 em ∂E, então v $\geq u$ em E.*

Vale ressaltar que não temos uma descrição geométrica geral de quando um fim é parabólico ou não. Contudo, alguns resultados parciais estão disponíveis. O resultado a seguir usa a hipótese de um fim ter volume finito.

Proposição 5.2 *Se E é um fim de M com volume finito, então E é parabólico.*

Prova. Assuma, por contradição, que E é não-parabólico e considere a função harmônica não-constante u definida em E. Pelo Teorema de Stokes temos que

$$0 = \int_{E(p,R)\setminus E(p,R_0)} \Delta u = \int_{\partial E(p,R)} \frac{\partial u}{\partial r} - \int_{\partial E(p,R_0)} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Portanto,

$$\int_{\partial E(p,R)} \frac{\partial u}{\partial r} = \int_{\partial E(p,R_0)} \frac{\partial u}{\partial r}$$

Consequentemente, isso prova que $\int_{\partial E(p,R)} \frac{\partial u}{\partial r}$ é constante em R. Denotemos esse valor por

$$A = \int_{\partial E(p,R_0)} \frac{\partial u}{\partial r} = \int_{\partial E(p,R)} \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{5.3}$$

Para qualquer $R > R_0$ considere

$$1 = \max_{\partial E(p,R_0)} u \text{ e } a = \min_{\partial E(p,R)} u.$$

Notemos que pelo princípio do máximo e o lema de Hopf,

$$a < 1 \text{ e } A < 0. \tag{5.4}$$

Definimos a função harmônica w em $E(p,R) \setminus E(p,R_0)$ com condições de fronteira

$$\begin{aligned} w &= 1 \text{ em } \partial E(p,R_0) \\ w &= a \text{ em } \partial E(p,R). \end{aligned}$$

Claramente, $u \geq w$ nas duas componentes de fronteira. Então pelo princípio do máximo implica que $u \geq w$ em $E(p,R) \setminus E(p,R_0)$. O Lema de Hopf implica que

$$\frac{\partial}{\partial r}(u - w) \geq 0 \text{ em } \partial E(p,R_0).$$

Consequentemente temos que

$$\int_{\partial E(p,R_0)} \frac{\partial w}{\partial r} \leq \int_{\partial E(p,R_0)} \frac{\partial u}{\partial r} = A. \tag{5.5}$$

Como w é harmônica, temos que $\Delta w^2 = 2|\nabla w|^2$. Consequentemente, pelo Teorema de Stokes,

$$\begin{aligned} \int_{E(p,R)\setminus E(p,R_0)} |\nabla w|^2 &= \frac{1}{2} \int_{E(p,R)\setminus E(p,R_0)} \Delta w^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\partial E(p,R)} 2w \frac{\partial w}{\partial r} - \int_{\partial E(p,R_0)} 2w \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ &= a \int_{\partial E(p,R)} \frac{\partial w}{\partial r} - \int_{\partial E(p,R_0)} \frac{\partial w}{\partial r} \\ &= (1-a) \left(- \int_{\partial E(p,R_0)} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ &\geq (1-a)(-A). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Pelo princípio variacional para funções harmônicas (vide Corolário 2.3), para qualquer ρ que tem as mesmas condições de fronteira que w temos

$$\int_{E(p,R)\setminus E(p,R_0)} |\nabla w|^2 \leq \int_{E(p,R)\setminus E(p,R_0)} |\nabla \rho|^2. \tag{5.7}$$

Escolhemos ρ da seguinte forma

$$\rho(x) = \frac{R - r(p,x)}{R - R_0}(1-a) + a.$$

Observe que, de fato, quando $r = R_0$ temos $\rho(x) = 1$ e quando $r = R$ temos $\rho(x) = a$. Além disso, obtemos que

$$\nabla\rho(x) = \frac{1-a}{R-R_0}\nabla r(p,x), |\nabla r| = 1$$

$$\int_{E(p,R)\setminus E(p,R_0)} |\nabla\rho|^2 = \frac{(1-a)^2}{(R-R_0)^2} V\left(E(p,R)\setminus E(p,R_0)\right).$$

Como, por hipótese, E tem volume finito, (5.7) implica que

$$\int_{E(p,R)\setminus E(p,R_0)} |\nabla w|^2 \leq \frac{C}{R^2}.$$

Juntando com (5.6) concluimos que

$$(1-a)(-A) \leq \int_{E(p,R)\setminus E(p,R_0)} |\nabla w|^2 \leq \frac{C}{R^2}$$

$$(1-a)(-A) \leq \frac{C}{R^2}.$$

Como R é arbitrário, isso contradiz (5.4).

$\square$

É importante observar que se todos os fins de (M,g) tem volume finito, então M tem volume finito e, portanto, M é uma variedade parabólica.

Além desse resultado que associa a hipótese do fim ter volume finito, temos também uma boa caracterização dos fins parabólicos e não-parabólicos quando (M,g) tem espectro positivo. O teorema a seguir, sob essa hipótese, pode ser visto como a recíproca da Proposição 5.2.

Teorema 5.1 *Assuma que (M,g) tem espectro positivo do Laplaciano, $\lambda_1(\Delta) > 0$. Então um fim E é parabólico se e somente se E tem volume finito.*

Prova. De acordo com a Proposição 5.2, é suficiente provar que se E é parabólico, então tem volume finito. Considere a sequência $\{u_i\}_i$ definida em (5.1) e uma função-corte

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{em } E(p,R_0) \\ r(x) - R_0 & \text{em } E(p,R_0+1)\setminus E(p,R_0) \\ 1 & \text{em } E\setminus E(p,R_0+1) \end{cases}. \tag{5.8}$$

A função $\psi^2 u_i$ tem suporte compacto em $E(p,R_i)\setminus E(p,R_0)$, consequentemente

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Delta)\int_M (\psi u_i)^2 &\leq \int_M |\nabla(\psi u_i)|^2 \\ &= \int_M \left(|\nabla\psi|^2 {u_i}^2 + \psi^2|\nabla u_i|^2 + \frac{1}{2}\langle\nabla\psi^2, \nabla {u_i}^2\rangle\right). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Integrando por partes o último termo e usando que u_i é harmônica, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_M \langle \nabla\psi^2, \nabla {u_i}^2\rangle = -\frac{1}{2}\int_M \psi^2 \Delta {u_i}^2 = -\frac{1}{2}\int_M \psi^2(2u_i\Delta u_i + 2|\nabla u_i|^2) = -\int_M \psi^2|\nabla u_i|^2.$$

Consequentemente (5.9) implica que

$$\begin{aligned}\lambda_1(\Delta)\int_M (\psi u_i)^2 &\leq \int_M \left(|\nabla\psi|^2 {u_i}^2 + \psi^2|\nabla u_i|^2 - \psi^2|\nabla u_i|^2\right)\\ &\leq \int_M |\nabla\psi|^2 {u_i}^2\\ &\leq V\left(E(p, R_0+1)\setminus E(p,R_0)\right),\end{aligned}$$

onde a última linha segue da definição de ψ. Em particular, como $\psi = 1$ em $E \setminus E(p, R_0 + 1)$ obtemos

$$\lambda_1(\Delta)\int_{E\setminus E(p,R_0+1)} {u_i}^2 \leq \mathrm{Vol}\left(E(p,R_0+1)\setminus E(p,R_0)\right).$$

Por conseguinte,

$$\int_{E\setminus E(p,R_0+1)} {u_i}^2 \leq \frac{\mathrm{Vol}\left(E(p,R_0+1)\setminus E(p,R_0)\right)}{\lambda_1(\Delta)}. \tag{5.10}$$

Quando $i \to \infty$ a sequência $u_i \to 1$ uniformemente nos subconjuntos compactos de E, pois E é parabólico. Portanto, (5.10) implica que

$$\mathrm{Vol}\left(E\setminus E(p,R_0+1)\right) \leq \frac{\mathrm{Vol}\left(E(p,R_0+1)\setminus E(p,R_0)\right)}{\lambda_1(\Delta)}.$$

Isso prova o resultado, pois E tem volume finito. □

O resultado a seguir nos dá propriedades das funções de Green definidas em um fim de uma variedade não-parabólica.

Proposição 5.3 *Seja (M, g) uma variedade não-parabólica. Então ao longo de qualquer fim não-parabólico E existe uma sequência $x_i \to \infty$ tal que $G(p, x_i) \to 0$. Ao longo de qualquer fim parabólico F de M, as funções de Green têm um limite inferior positivo.*

Prova. Lembremos que se E é um fim não-parabólico, então existe uma função harmônica $0 < u \leq 1$ definida em E tal que

$$u = 1 \text{ em } \partial E \tag{5.11}$$
$$\liminf_E u = 0.$$

Seja $\{B(p, R_i)\}$ uma exaustão compacta de M e seja $G_i(p, x)$ as funções de Green de $B(p, R_i)$ satisfazendo as condições de fronteira de Dirichlet. Seja R_0 grande o suficiente tal que $\partial E \subset$

$B(p, R_0)$. Sabemos que $G_i \to G$ uniformemente nos subconjuntos compactos de M, consequentemente existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \partial B(p,R_0)} G_i(p, x) \leq C.$$

A função

$$w(x) = C.u(x) - G_i(p, x)$$

é harmônica em $E(R_i) \setminus E(R_0)$, e satisfaz as condições de fronteira

$$w(x) = C - G_i(p, x) > 0 \text{ em } \partial E(R_0)$$
$$w(x) = C.u(x) > 0 \text{ em } \partial E(R_i).$$

Pelo princípio do máximo, isso implica que $w(x) > 0$ em $E(R_i) \setminus E(R_0)$. Tomando o limite em i concluímos que

$$G(p, x) \leq C.u(x) \text{ em } E \tag{5.12}$$

Por (5.11), isso prova que existe uma sequência $x_i \to \infty$ ao longo de E tal que $G(p, x_i) \to 0$. Considere agora um fim parabólico F e seja v_i uma sequência definida por

$$\Delta v_i = 0 \text{ em } F(p, R_i) \setminus F(p, R_0) \tag{5.13}$$
$$v_i = 0 \text{ em } \partial F(p, R_i)$$
$$v_i = 1 \text{ em } \partial F(p, R_0)$$

Então existe $C > 0$ tal que

$$\inf_{x \in \partial B(p,R_0)} G(p, x) \geq \frac{1}{C}. \tag{5.14}$$

A função

$$w(x) = v_i(x) - CG(p, x)$$

é harmônica em $F(R_i) \setminus F(R_0)$, e satisfaz as condições de fronteira

$$w(x) = 1 - CG(p, x) \leq 0 \text{ em } \partial F(R_0)$$
$$w(x) = -CG(p, x) < 0 \text{ em } \partial F(R_i).$$

Pelo princípio do máximo, temos que $w(x) \leq 0$ em $F(R_i) \setminus F(R_0)$. Tomando o limite em i, concluimos que

$$CG(p, x) \geq 1 \text{ em } F,$$

pois v_i converge uniformemente para $v = 1$ no fim parabólico F. Isso prova que G é uniformemente limitada inferiormente por uma constante positiva no fim parabólico F.

□

Em geral, as funções harmônicas definidas ao longo de um fim podem não se estender a toda a variedade. Nosso objetivo é mostrar que é possível "colá-los" se M tiver mais que um fim. Nesse caso, construiremos funções harmônicas definidas em M que em cada fim sejam assintoticamente próximas à função harmônica local definida pelo respectivo fim.

Teorema 5.2 *Seja M uma variedade completa não-compacta que é não-parabólica. Assuma que η é uma função harmônica definida em $M \setminus B(p, R_0)$, que é suave até a fronteira de $B(p, R_0)$. Existe uma função harmônica w definida em M e uma constante $C > 0$ tal que*

$$|w - \eta|(x) \leq CG(p, x). \tag{5.15}$$

Além disso, $w - \eta$ tem energia de Dirichlet finita e

$$\liminf_{x\to\infty} \eta(x) \leq w \leq \limsup_{x\to\infty} \eta(x).$$

Prova. Seja ϕ uma função suave não-negativa tal que $\phi = 0$ em $B(p, R_0)$ e $\phi = 1$ em $M \setminus B(p, 2R_0)$. Defina a função

$$w(x) = \phi(x)\eta(x) + \int_M G(x, y)\Delta(\phi\eta)(y)dy. \tag{5.16}$$

Como $\phi = 1$ em $M \setminus B(p, 2R_0)$ e $\Delta\eta = 0$ em $M \setminus B(p, R_0)$, temos que

$$\Delta(\phi\eta) = \phi\Delta\eta + 2\langle\nabla\phi, \nabla\eta\rangle + \eta\Delta\phi = 0 \text{ em } M \setminus B(p, 2R_0).$$

Consequentemente a integral em (5.16) está bem definida. Além disso, pela definição de G, sabemos que

$$\Delta \int_M G(x, y)\Delta(\phi\eta)(y)dy = -\Delta(\phi\eta)(x),$$

que implica que $\Delta w = 0$ em M.

Agora mostraremos a desigualdade em (5.15). Para $x \in M \setminus B(p, 2R_0)$ temos que $\phi(x)\eta(x) = \eta(x)$. Consequentemente

$$\begin{aligned} |w - \eta|(x) &= \left| \int_{B(p,2R_0)} G(x, y)\Delta(\phi\eta)(y)dy \right| \\ &\leq \sup_{y\in B(p,2R_0)} G(x, y) \int_{B(p,2R_0)} |\Delta(\phi\eta)|(y)dy \\ &\leq C \sup_{y\in B(p,2R_0)} G(x, y). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Finalmente, como $G(x, .)$ é harmônica em $B(p, 2R_0)$, quando $x \in M \setminus B(p, 3R_0)$ podemos aplicar a estimativa do gradiente do Corolário 3.1 para obter

$$\sup_{y\in B(p,2R_0)} G(x, y) \leq CG(x, p).$$

Como G é simétrica, usando (5.17) concluímos que

$$|w - \eta|(x) \leq CG(p, x). \tag{5.18}$$

Para provar que $w - \eta$ tem energia finita, considere $\{B(p, R_i)\}_i$ uma exaustão compacta de M e $\{v_i\}_i$ a sequência de funções harmônicas que satisfaz as condições de fronteira

$$\begin{aligned} v_i &= w - \eta \text{ em } \partial B(p, 2R_0) \\ v_i &= 0 \text{ em } \partial B(p, R_i). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Afirmamos que uma subsequência de $\{v_i\}_i$ converge uniformemente nos subconjuntos compactos de M para $w-\eta$. De fato, assim como em (4.13) obtemos que

$$|v|(x) \leq CG(p,x) \text{ para todo } x \in M \setminus B(p,2R_0).$$

Por (5.18) isso prova que a função

$$\sigma(x) = v(x) - (w-\eta)(x)$$

é harmônica em $M \setminus B(p,2R_0)$ e satisfaz

$$\begin{gathered}\sigma = 0 \text{ em } \partial B(p,2R_0) \\ |\sigma|(x) \leq CG(p,x) \text{ em } M \setminus B(p,2R_0).\end{gathered} \tag{5.20}$$

Por (5.12) temos que $G(p,x) \leq C.u(x)$ em $M \setminus B(p,2R_0)$, onde u é a função harmônica mínima que satisfaz $u = 1$ em $\partial B(p,2R_0)$. Então (5.20) implica que

$$\begin{gathered}\sigma = 0 \text{ em } \partial B(p,2R_0) \\ |\sigma|(x) < C.u(x) \text{ em } M \setminus B(p,2R_0).\end{gathered}$$

Com isso, a função ω definida por

$$\omega(x) = u(x) - \frac{1}{C}\sigma(x)$$

é harmônica em $M \setminus B(p,2R_0)$ e satisfaz

$$\begin{gathered}\omega(x) = u(x) = 1 \text{ em } \partial B(p,2R_0) \\ \omega > 0 \text{ em } M \setminus B(p,2R_0).\end{gathered}$$

Pela Observação 5.1 temos que $\omega \geq u$, que significa que $\sigma \leq 0$ em $M \setminus B(p,2R_0)$. O mesmo argumento aplicado a $-\sigma$ implica que $\sigma \geq 0$ em $M \setminus B(p,2R_0)$. Daí concluimos que $\sigma = 0$, o que prova que uma subsequência de $\{v_i\}_i$ converge uniformemente nos subconjuntos compactos de M para $w-\eta$. Além disso, por (5.19) temos

$$\begin{aligned}\int_{B(p,R_i)\setminus B(p,2R_0)} |\nabla v_i|^2 &= \int_{B(p,R_i)\setminus B(p,2R_0)} v_i \Delta v_i + \int_{\partial B(p,R_i)} v_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu} - \int_{\partial B(p,2R_0)} v_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu} \\ &= -\int_{\partial B(p,2R_0)} v_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu},\end{aligned}$$

onde usamos que v_i é harmônica e $v_i = 0$ em $\partial B(p,R_i)$. Como v_i converge uniformemente para $w-\eta$ nos subconjuntos compactos, isso prova que $w-\eta$ tem energia finita. Por fim, provemos que

$$\liminf_{x\to\infty} \eta(x) \leq w \leq \limsup_{x\to\infty} \eta(x). \tag{5.21}$$

Considere $\{B(p,R_i)\}_i$ uma exaustão compacta de M e G_i as funções de Green de $B(p,R_i)$ que satisfaz as condições de fronteira de Dirichlet. As funções

$$w_i(x) = \phi(x)\eta(x) + \int_M G_i(x,y)\Delta(\phi\eta)(y)dy$$

são harmônicas em $B(p, R_i)$ e satisfazem $w_i = \eta$ em $\partial B(p, R_i)$. Pelo princípio do máximo,

$$\inf_{\partial B(p,R_i)} \eta \leq w_i \leq \sup_{\partial B(p,R_i)} \eta.$$

Como $w_i \to w$ uniformemente nos subconjuntos compactos, concluimos que (5.21) é válido. De fato, devemos ter a desigualdade estrita como em (5.21) pela razão do princípio do máximo forte. Isso prova o teorema.

$\square$

O Teorema 5.2 é muito utilizado no nosso contexto, pois ter mais que um fim nos permite construir funções harmônicas em cada fim com comportamento assintótico prescrito, que então colamos usando esse teorema.

Teorema 5.3 *Seja M uma variedade completa não-compacta que é não-parabólica. Assuma que M tem mais que um fim. Então existem espaços de funções harmônicas V e W tal que* $\mathrm{dim}V$ *é igual ao número de fins não-parabólicos de M e* $\mathrm{dim}W$ *é igual ao número de fins parabólicos de M. As funções em V são limitadas e tem energia finita, e as funções em W são limitadas por um lado em cada fim.*

Prova. Suponha primeiro que M tem mais que um fim não-parabólico. Seja E um fim não-parabólico de M. Como M tem mais que um fim não-parabólico, então $M \setminus E$ também é não-parabólico. Defina a função

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 \text{ em } E \\ 0 \text{ em } M \setminus E. \end{cases}$$

A função η é harmônica em $M \setminus B(p, R_0)$ para algum R_0 suficientemente grande. Consequentemente, o Teorema 5.2 implica que existe uma função harmônica w em M satisfazendo

$$|w - \eta|(x) \leq CG(p, x) \tag{5.22}$$

para todo $x \in M$. Em particular, w é limitada. O Teorema 5.2 implica que $0 < w < 1$ e a Proposição 5.3 implica que $w(x_i) \to 1$ para alguma sequência $x_i \to \infty$ em E e $w(y_i) \to 0$ para alguma sequência $y_i \to \infty$ em $M \setminus E$. Além disso, w tem energia finita pelo Teorema 5.2.

Se $E_1, ..., E_k$ são fins não-parabólicos de M, repetimos o processo e obtemos funções harmônicas correspondentes $w_1, ..., w_k$ satisfazendo (5.22). Pela Proposição 5.3 e por (5.22) sabemos que $w_i \to 1$ ao longo de uma sequência em E_i e para cada $j \neq i$, $w_i \to 0$ ao longo de uma sequência em E_j. Logo, $\{w_i\}_i$ é linearmente independente. Isso prova a primeira parte do teorema.

Assumimos agora que F é um fim parabólico, e consequentemente $M \setminus F$ é não-parabólico. Considere a função harmônica v definida em F pela Proposição 5.1. Seja

$$\eta(x) = \begin{cases} v(x) \text{ em } F \\ 0 \text{ em } M \setminus F. \end{cases}$$

Pelo Teorema 5.2 existe uma função harmônica w em M tal que

$$|w - \eta|(x) \leq CG(p, x).$$

Em particular, isso implica que

$$\lim_{x \to F(\infty)} \sup w(x) = \infty,$$

e w é limitada em $M \setminus F$.

Se $F_1, ..., F_k$ são fins parabólicos de M, a construção acima fornece funções harmônicas $w_1, ..., w_k$. Cada uma dessas funções são ilimitadas em F_k e limitadas em $M \setminus F_k$. Logo, elas são linearmente independentes. Isso prova o teorema.

□

O resultado a seguir nos fornece informações adicionais sobre as funções harmônicas construídas no Teorema 5.3.

Teorema 5.4 *Seja (M, g) uma variedade completa com espectro positivo $\lambda_1(\Delta) > 0$. Suponha que M tem mais que um fim. Então qualquer função harmônica w definida pelo Teorema 5.3 satisfaz*

$$\frac{1}{C} R \leq \int_{B(p,R)} |\nabla w| \leq CR,$$

para todo $R \geq 1$.

Prova. Primeiro vamos provar a limitação superior. Discutimos aqui dois casos. Primeiro assumimos que M tem pelo menos dois fins não-parabólicos. Nesse caso, a função harmônica w fornecida pelo Teorema 5.3 é limitada e de energia finita. Pelo Teorema 4.6 temos

$$\int_{B(p,R) \setminus B(p,R_0)} G(p, x) dx \leq CR.$$

Por (5.22) obtemos

$$\int_{B(p,R) \setminus B(p,R_0)} |w - \eta|(x) dx \leq CR. \tag{5.23}$$

Como $0 \leq \eta \leq 1$ em cada fim de M, isso implica $0 < w < 1$ em M por (5.21). Seja E um fim onde $\eta = 0$. Então (5.23) fornece

$$\int_{B(p,R) \setminus B(p,R_0)} w(x) dx \leq CR. \tag{5.24}$$

Pelo teorema 3.1 aplicado à função positiva w temos $|\nabla w| \leq Cw$ em $E(p,R) \setminus E(p,R_0)$ que implica agora

$$\int_{E(p,R)\setminus E(p,R_0)} |\nabla w| \leq C \int_{E(p,R)\setminus E(p,R_0)} w(x)dx \leq C \int_{B(p,R)\setminus B(p,R_0)} w(x)dx \leq cR. \quad (5.25)$$

Isso implica o resultado em E. No fim $M \setminus E$ onde $\eta = 1$, aplicamos esse argumento para $1 - w > 0$. Isso prova o resultado nesse caso.

Agora assumimos que M tem pelo menos um fim parabólico F e seja $E = M \setminus F$ que deve ser não-parabólico. Seja w a função harmônica positiva fornecida pelo teorema 5.3. Por (5.25) é suficiente provar que

$$\int_{F(p,R)\setminus F(p,R_0)} |\nabla w| \leq cR. \quad (5.26)$$

Considere a função a função-corte ϕ no fim F tal que $\phi = 1$ em $F(p,R)$, $\phi = 0$ em $F \setminus F(p,2R)$ e $|\nabla\phi| \leq C/R$. Para $t > t_0$, considere

$$\Sigma(t) = \{x \in M \,:\, w(x) = t\}.$$

Tomando t_0 suficientemente grande, segue-se que $\Sigma(t) \subset F$, pois w é limitada no fim E. Como w é harmônica, pela fórmula de co-área obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0<w<t} \phi\Delta w \quad (5.27)\\ &= -\int_{t_0<w<t} \langle\nabla\phi, \nabla w\rangle + \int_{\Sigma(t)} \phi\frac{\partial w}{\partial\nu} - \int_{\Sigma(t_0)} \phi\frac{\partial w}{\partial\nu}. \end{aligned}$$

Aqui $\frac{\partial}{\partial\nu} = \frac{\nabla w}{|\nabla w|}$ é a normal unitária à Σ. Pelo teorema 3.1 temos $|\nabla w| \leq Cw$, que implica

$$\begin{aligned} \left|\int_{t_0<w<t} \langle\nabla\phi, \nabla w\rangle\right| \leq \int_{t_0<w<t} |\langle\nabla\phi, \nabla w\rangle| &\leq \int_{t_0<w<t} |\nabla\phi||\nabla w| \\ &\leq \frac{C}{R}\int_{t_0<w<t} |\nabla w| \\ &\leq \frac{C}{R}\int_{t_0<w<t} w \\ &= \frac{C}{R} t\mathrm{Vol}(F) \\ &\leq \frac{C}{R} t, \end{aligned}$$

onde na última linha usamos o teorema 5.1 que F tem volume finito. Note que pelo mesmo argumento,

$$\left|\int_{\Sigma(t)} \frac{\partial w}{\partial\nu}\right| < \infty \text{ para todo } t.$$

Consequentemente, fazendo $R \to \infty$ em (5.27) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma(t)} \frac{\partial w}{\partial\nu} - \int_{\Sigma(t_0)} \frac{\partial w}{\partial\nu} \\ 0 &= \int_{\Sigma(t)} |\nabla w| - \int_{\Sigma(t_0)} |\nabla w|. \end{aligned}$$

Isso prova que existe uma constante $A > 0$ tal que $\int_{\Sigma(t)} |\nabla w| = A$ para todo $t \geq t_0$. Considere

$$\alpha = \min_{F(p,R)\backslash F(p,R_0)} w$$
$$\beta = \min_{F(p,R)\backslash F(p,R_0)} w.$$

Pelo Teorema 3.1 temos

$$\beta \leq ce^{(n-1)R}. \tag{5.28}$$

Para finalizar a prova usamos a desigualdade inversa de Poincaré. Definimos uma função-corte

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 \text{ em } \alpha < t < \beta \\ \frac{\ln(2\beta) - \ln t}{\ln 2} \text{ em } \beta < t < 2\beta \\ \frac{\ln t - \ln(\alpha/2)}{\ln 2} \text{ em } \alpha/2 < t < \alpha \\ 1 \text{ em } t > 2\beta \text{ ou } t < \alpha/2. \end{cases} \tag{5.29}$$

Considere ϕ como uma função-corte no fim F tomando $\phi(x) = \phi(w(x))$. Pela definição de $\lambda_1(\Delta)$ temos

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Delta) \int_{F(p,R)} w &\leq \lambda_1(\Delta) \int_{\alpha < w < \beta} w \\ &\leq \lambda_1(\Delta) \int_F \left(\phi w^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &\leq \int_M \left|\nabla\left(\phi w^{\frac{1}{2}}\right)\right|^2. \end{aligned}$$

Contudo, temos

$$\left|\nabla\left(\phi w^{\frac{1}{2}}\right)\right|^2 = w|\nabla\phi|^2 + \phi^2 w^{-1}|\nabla w|^2 + \frac{1}{2}\langle \nabla w, \nabla \phi^2\rangle.$$

Como w é harmônica sabemos que

$$\int_M \langle \nabla w, \nabla\phi^2\rangle = \int_M \phi^2 \Delta w = 0.$$

Logo, isso implica

$$\lambda_1(\Delta) \int_{F(p,R)} w \leq \int_M w|\nabla\phi|^2 + \int_M \phi^2 w^{-1}|\nabla w|^2. \tag{5.30}$$

Certamente, por (5.29), existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\int_M w|\nabla\phi|^2 \leq c \int_{\frac{\alpha}{2} < w < 2\beta} w^{-1}|\nabla w|^2$$

Como isso também é verdade para $\int_M \phi^2 w^{-1}|\nabla w|^2$, concluimos por (5.30) que

$$\lambda_1(\Delta) \int_{F(p,R)} w \leq c \int_{\frac{\alpha}{2} < w < 2\beta} w^{-1}|\nabla w|^2. \tag{5.31}$$

Contudo, a fórmula de co-área e (5.28) implicam que

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\alpha}{2}<w<2\beta} w^{-1}|\nabla w|^2 &= \int_{\frac{\alpha}{2}<w<2\beta}\left(\int_{\Sigma(t)} w^{-1}|\nabla w|\right)dt\\ &= \int_{\frac{\alpha}{2}<w<2\beta}\frac{1}{t}\left(\int_{\Sigma(t)}|\nabla w|\right)dt\\ &= A\int_{\frac{\alpha}{2}}^{2\beta}\frac{1}{t}dt\\ &= A\ln\frac{4\beta}{\alpha}\\ &\le CR.\end{aligned}$$

Por (5.31) isso prova que

$$\int_{F(p,R)} w \le CR. \tag{5.32}$$

Consequentemente, (5.26) segue-se aplicando o Teorema 3.1. Isso prova a estimativa da limitação superior para qualquer função harmônica w definida pela Teorema 5.3. A limitação inferior segue pela fórmula de co-área.

Vamos considerar o caso quando w é fornecida por um fim parabólico F, ou seja, w é positiva em M e ilimitada em F. Logo, temos para todo $r > R_0$

$$\begin{aligned}0 &= \int_{F(p,r)\setminus F(p,R_0)}\Delta w\\ &= \int_{\partial F(p,r)}\frac{\partial w}{\partial r} - \int_{\partial F(p,R_0)}\frac{\partial w}{\partial r}.\end{aligned}$$

Denotando

$$A = \int_{\partial F(p,R_0)}\frac{\partial w}{\partial r},$$

isso mostra que

$$|A| = \left|\int_{\partial F(p,R_0)}\frac{\partial w}{\partial r}\right| \le \int_{\partial F(p,R_0)}|\nabla w|.$$

Integrando em r, isso prova que

$$\int_{F(p,R)}|\nabla w| \le |A|R.$$

Para finalizar a prova vamos checar que $A \neq 0$. Assuma por contradição que $A = 0$. Então para T suficientemente grande, o conjunto de nível $\Sigma(t) = \{w = T\}$ não deve intersectar $\partial F(p, R_0)$. Aplicando a fórmula de co-área obtemos

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\{w<T\}\setminus F(p,R_0)}\Delta w\\ &= \int_{\Sigma(T)}|\nabla w| - \int_{\partial F(p,R_0)}\frac{\partial w}{\partial r}\\ &= \int_{\Sigma(T)}|\nabla w|.\end{aligned}$$

Isso prova que w é constante, que é uma contradição. O caso quando w vem de dois fins não-parabólicos é similar. Isso prova o teorema.

$\square$

Agora abordamos o mesmo problema para variedades parabólicas. Usando (4.6), podemos desenvolver resultados semelhantes aos dos Teoremas 5.2 e 5.3. O seguinte é paralelo ao Teorema 5.2.

Teorema 5.5 *Seja M uma variedade completa, não-compacta e parabólica. Assuma que η é uma função harmônica definida em $M \setminus B(p, R_0)$, que é suave até a fronteira de $B(p, R_0)$. Assuma adicionalmente que*

$$\int_{\partial B(p,R_0)} \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0.$$

Então existe uma função harmônica w definida em M e uma constante positiva $C > 0$ tal que

$$|w - \eta|(x) \leq C \text{ em } M \setminus B(p, R_0). \tag{5.33}$$

Além disso, $w - \eta$ tem energia de Dirichlet finita.

Prova. Seja ϕ uma função suave não-negativa tal que $\phi = 0$ em $B(p, R_0)$ e $\phi = 1$ em $M \setminus B(p, 2R_0)$ e defina a função

$$w(x) = \phi(x)\eta(x) + \int_M G(x, y)\Delta(\phi\eta)(y)dy.$$

Procedendo como no Teorema 5.2, segue-se que

$$\Delta w = 0 \text{ em } M.$$

Agora mostramos a desigualdade em (5.33). Note que como $\Delta \eta = 0$ em $M \setminus B(p, R_0)$, obtemos que

$$\int_{\partial B(p,R)} \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0 \text{ para todo } R \geq R_0.$$

Para $x \in M \setminus B(p, 3R_0)$ temos que $\phi(x)\eta(x) = \eta(x)$ e, consequentemente

$$\begin{aligned}
|w - \eta|(x) &= \left| \int_{B(p,3R_0)} G(x, y)\Delta(\phi\eta)(y)dy \right| \\
&\leq \left| \int_{B(p,3R_0)} (G(x, y) - G(p, y))\Delta(\phi\eta)(y)dy \right| + |G(p, y)| \left| \int_{B(p,3R_0)} \Delta(\phi\eta)(y)dy \right| \\
&= \left| \int_{B(p,3R_0)} (G(x, y) - G(p, y))\Delta(\phi\eta)(y)dy \right|.
\end{aligned}$$

Com isso, obtemos que

$$\begin{aligned}|w-\eta| &\leq \sup_{y\in B(p,3R_0)} |G(x,y)-G(p,y)| \int_{B(p,3R_0)} |\Delta(\phi\eta)|(y)dy \\ &\leq C \sup_{y\in B(p,3R_0)} |G(x,y)-G(p,y)|\end{aligned}$$

para todo $x \in M \setminus B(p,3R_0)$. De acordo com (4.6) o lado direito é uniformemente limitado sempre que $x \in M \setminus B(p,6R_0)$, o que prova (5.33).

□

Usando este resultado, podemos construir funções harmônicas que contam o número de fins das variedades parabólicas.

Teorema 5.6 *Seja M uma variedade completa, não-compacta e parabólica. Assuma que M tem mais que um fim. Então existe um espaço de funções harmônicas V tal que* $\dim V$ *é igual ao número de fins de M. As funções em V são limitadas ou superiormente ou inferiormente quando restritas a um fim.*

Prova. Fixe $\{E_1, E_2, ...\}$ fins de M com respeito à $B(p,R_0)$. Como M é parabólica, então E_i são todos parabólicos. Consequentemente, pela Proposição 5.1 existe uma função harmônica positiva η_i em E_i. Podemos normalizar η_i tal que

$$\int_{\partial B(p,R_0)\cap E_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial r} = 1. \tag{5.34}$$

Defina

$$\eta(x) = \begin{cases} \eta_1(x) \text{ para } x \in E_1 \\ \eta_2(x) \text{ para } x \in E_2 \\ \quad 0 \quad \text{para } x \in M \setminus (E_1 \cup E_2). \end{cases}$$

Por (5.34) temos que

$$\int_{\partial B(p,R_0)} \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0.$$

Consequentemente, o Teorema 5.5 implica a existência de uma função harmônica w em M tal que

$$|w-\eta|(x) \leq C \text{ em } M \setminus B(p,R_0).$$

Note que w é ilimitada em $M \setminus (E_1 \cup E_2)$ e é limitada por um lado em E_1 e em E_2. Consequentemente, as funções construídas desta maneira, variando $E_2, E_3, ...$, são todas linearmente independentes. Isso prova o resultado.

□

6 RESULTADOS DE RIGIDEZ

Neste capítulo utilizamos os resultados anteriores para compreender a estrutura no infinito de variedades completas e não-compactas. Para contar o número de fins de uma variedade usamos um resultado de (LI, 1980).

Teorema 6.1 *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana n-dimensional, e suponha que $\mathcal{H}$ é um espaço de funções harmônicas definidas em $B(p,R_0) \subset M$ com dimensão finita. Então existe f $\in \mathcal{H}$ tal que*

$$(dim\mathcal{H} - 1)\int_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2 \leq nV(p,R_0) \sup_{B(p,R_0)} |\nabla f|$$

Prova. Considere

$$\overline{\mathcal{H}} = \{X \in \Gamma(TM) : X = \nabla f \text{ para alguma } f \in \mathcal{H}\}$$

e estimamos a dim $\overline{\mathcal{H}}$. Para algum $x \in B(p,R_0)$ fixo considere o subespaço vetorial

$$\overline{\mathcal{H}}_x = \{X \in \mathcal{H} : X(x) = 0\}.$$

Note que

$$\dim\overline{\mathcal{H}} \leq \dim\overline{\mathcal{H}}_x + n. \tag{6.1}$$

De fato, suponha que existem $X_1, ..., X_n \in \overline{\mathcal{H}}$ tal que $X_i(x) \neq 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Então para algum $X_{n+1} \in \overline{\mathcal{H}}$ existem $a_1, ..., a_{n+1}$ tal que

$$a_1X_1(x) + ... + a_{n+1}X_{n+1}(x) = 0,$$

pois $\dim T_xM = n$. Consequentemente,

$$a_1X_1 + ... + a_{n+1}X_{n+1} \in \overline{\mathcal{H}}_x,$$

que prova (6.1). Agora, seja $N = \dim\overline{\mathcal{H}}$. Definimos o produto interno em $\overline{\mathcal{H}}$ por

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = \int_{B(p,R_0)} \langle X, Y\rangle$$

$$\|X\|^2 = \langle\langle X, X\rangle\rangle.$$

Para $x \in B(p,R_0)$, considere uma base ortonormal $\{X_i\}_i$ de $(\overline{\mathcal{H}}_x, \langle\langle,\rangle\rangle)$ e defina

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} |X_i|^2(x). \tag{6.2}$$

Note que u em (6.2) está bem definida e independe da base ortonormal $\{X_i\}_i$. Na verdade, u é simplesmente o traço da forma bilinear $\langle\langle,\rangle\rangle$ com respeito a g. Consequentemente, podemos assumir que os primeiros k vetores $X_1, ..., X_k \in \overline{\mathcal{H}}_x$, onde $k \geq N - n$. Notemos que

$$u(x) = \sum_{i=k+1}^{N} |X_i|^2(x). \tag{6.3}$$

Note que para cada $i = k+1, ..., N$, como $\|X_i\| = 1$,

$$|X_i|^2(x) \leq \sup_{B(p,R_0)} |X_i|^2 \leq \sup_{X\in\overline{\mathcal{H}}_x, \|X\|=1} \sup_{B(p,R_0)} |X|^2.$$

Portanto, (6.3) fornece

$$u(x) \leq (N-k) \sup_{X\in\overline{\mathcal{H}}_x, \|X\|=1} \sup_{B(p,R_0)} |X|^2 \leq n \sup_{X\in\overline{\mathcal{H}}_x, \|X\|=1} \sup_{B(p,R_0)} |X|^2. \tag{6.4}$$

Integrando sobre $B(p, R_0)$ e usando (6.2) e que $\{X_i\}_i$ é uma base ortonormal de $(\overline{\mathcal{H}}_x, \langle\langle,\rangle\rangle)$ obtemos

$$\int_{B(p,R_0)} u = \sum_{i=1}^{N} \|X_i\|^2 = N.$$

Agora, (6.4) implica que

$$N \leq nV(p, R_0) \sup_{X\in\overline{\mathcal{H}}_x, \|X\|=1} \sup_{B(p,R_0)} |X|^2.$$

Consequentemente existe $f \in \mathcal{H}$ tal que

$$N \int_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2 \leq nV(p, R_0) \sup_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2.$$

Lembremos que

$$N = \dim\overline{\mathcal{H}} = \dim\{X \in \Gamma(TM) : X = \nabla f \text{ para alguma } f \in \overline{\mathcal{H}}\}$$

Note que se uma combinação linear de funções harmônicas tem gradiente zero, então deve ser constante. Consequentemente,

$$\dim\mathcal{H} \leq \dim\overline{\mathcal{H}} + 1.$$

Isso prova o resultado, pois segue que

$$(\dim\mathcal{H} - 1) \int_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2 \leq N \int_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2 \leq nV(p, R_0) \sup_{B(p,R_0)} |\nabla f|.$$

□

Corolário 6.1 *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana n-dimensional com curvatura de Ricci limitada inferiormente por* $\mathrm{Ric} \geq -(n-1)K$*, e suponha que* $\mathcal{H}$ *é um espaço de funções harmônicas definidas em* $B(p, 2R_0) \subset M$*. Assuma que existe* $A > 0$ *tal que*

$$\int_{B(p,2R_0)} |\nabla f|^2 \leq A \int_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2,$$

para toda $f \in \mathcal{H}$*. Então* $\mathcal{H}$ *tem dimensão finita e* $\dim\mathcal{H}$ *é limitada superiormente por uma constante que depende apenas de* R_0*, A, K e n.*

Prova. Seja $\overline{\mathcal{H}}$ algum subespaço de dimensão finita de $\mathcal{H}$. De acordo com o Teorema 6.1 existe $f \in \overline{\mathcal{H}}$ tal que

$$(\dim\overline{\mathcal{H}} - 1)\int_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2 \leq nV(p,R_0) \sup_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2. \tag{6.5}$$

Pela Observação 3.1 temos

$$\Delta|\nabla f| \geq -(n-1)K|\nabla f| \text{ em } M.$$

Consequentemente, a desigualdade do valor médio do Teorema 4.4 implica que

$$|\nabla f|^2(x) \leq \frac{C(n,K)}{V(x,R_0)} \int_{B(x,R_0)} |\nabla f|^2,$$

para todo $x \in B(p,R_0)$. Consequentemente, isso fornece

$$\sup_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2 \leq \frac{C(n,K)}{V(x,R_0)} \int_{B(p,2R_0)} |\nabla f|^2.$$

A comparação de volume implica que

$$\frac{V(p,R_0)}{V(x,R_0)} \leq \frac{V(x,2R_0)}{V(x,R_0)} \leq \frac{\sinh^{n-1}\left(\sqrt{K}2R_0\right)}{\sinh^{n-1}\left(\sqrt{K}R_0\right)} \leq e^{(n-1)\sqrt{K}R_0} = C(n,K,R_0)$$

$$\therefore \frac{1}{V(x,R_0)} \leq \frac{C(n,K,R_0)}{V(p,R_0)}$$

Consequentemente, concluimos que

$$\sup_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2 \leq \frac{C(n,K,R_0)}{V(p,R_0)} \int_{B(p,2R_0)} |\nabla f|^2 \tag{6.6}$$

Por hipótese,

$$\int_{B(p,2R_0)} |\nabla f|^2 \leq A \int_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2.$$

Colocando isso em (6.6) obtemos

$$\sup_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2 \leq \frac{C(n,K,R_0)A}{V(p,R_0)} \int_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2.$$

Por (6.5) temos

$$\begin{aligned}
(\dim\overline{\mathcal{H}} - 1)\int_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2 &\leq nV(p,R_0) \sup_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2 \\
&\leq nV(p,R_0)\frac{C(n,K,R_0)A}{V(p,R_0)} \int_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2 \\
&\leq nC(n,K,R_0)A \int_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2.
\end{aligned}$$

Isso prova que $\dim\overline{\mathcal{H}} \leq 1 + C(n,K,R_0)A$. Como $\overline{\mathcal{H}}$ é um subespaço arbitrário de dimensão finita de $\mathcal{H}$, isso prova que $\dim\mathcal{H} \leq 1 + C(n,K,R_0)A$.

$\square$

Agora apresentamos um resultado de rigidez para variedades com curvatura de Ricci não-negativa, provado por (LI; TAM, 1992).

Teorema 6.2 *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não-negativa em $M \backslash B(p, R_0)$. Então M tem uma quantidade finita de fins, dependendo apenas de n, R_0 e a limitação inferior da curvatura de Ricci em $B(p, R_0)$. Se, além disso, a curvatura de Ricci é não-negativa em toda parte, então ou M tem um fim ou se divide isometricamente como $M = \mathbb{R} \times P$, para alguma variedade compacta P com curvatura de Ricci não-negativa.*

Prova. Seja N o número de fins de M. Pelo Teorema 5.3 e Teorema 5.6, podemos associar um espaço $\mathcal{H}$ de funções harmônicas com comportamento assintótico prescrito no infinito de cada fim de M. Se o fim for não-parabólico, essas funções são limitadas nesse fim. Caso contrário, se o fim for parabólico, as funções harmônicas são unilateralmente limitadas nesse fim. Em ambos os casos, uma função harmônica neste espaço é limitada ou superiormente ou inferiormente em qualquer fim dado.

Seja $f \in \mathcal{H}$ uma função harmônica e E um fim fixo. Adicionando uma constante e alterando o sinal de f se necessário, podemos assumir que $f > 0$ em E. A estimativa do gradiente em $B(x, \frac{r(x)}{4})$ implica que

$$|\nabla f| \leq \frac{C_0}{r(x)} f \text{ em } E, \tag{6.7}$$

para todo $x \in E \setminus B(p, 2R_0)$. De acordo com a Fórmula de Bochner (vide Teorema 2.1) e a Observação 3.1,

$$\Delta |\nabla f| \geq 0 \text{ em } E \setminus E(p, 2R_0).$$

O fato que $|\nabla f|$ é sub-harmônica significa que seu supremo é atingido ou no infinito ou na $\partial E(p, 2R_0)$. Afirmamos que

$$\sup_{E \backslash E(p, 2R_0)} |\nabla f| = \max_{\partial E(p, 2R_0)} |\nabla f|. \tag{6.8}$$

Se E é um fim não-parabólico, a equação acima é válida, pois f é limitada e (6.7) implica que $|\nabla f| \to 0$ no infinito de E. Quando E é parabólico, o argumento é mais complicado. A ideia é usar f para construir uma função barreira para $|\nabla f|$. Como f é harmônica, temos que

$$\Delta \left(|\nabla f| - \frac{C_0}{R} f \right) \geq 0 \text{ em } E(p, R) \setminus E(p, 2R_0),$$

onde C_0 é a constante que aparece em (6.7). A função $G = |\nabla f| - \frac{C_0}{R} f$ atinge seu máximo na fronteira de $E(p, R) \setminus E(p, 2R_0)$. Por (6.7), temos que $G \leq 0$ em $\partial E(p, R)$. Consequentemente, obtemos

$$G \leq \max \{0, \max_{\partial E(p, 2R_0)} G\} \text{ em } E(p, R) \setminus E(p, 2R_0).$$

Como $f > 0$ em E, temos em particular que

$$|\nabla f| - \frac{C_0}{R} f \leq |\nabla f| \leq \max_{\partial E(p,2R_0)} |\nabla f| \text{ em } E(p,R) \setminus E(p,2R_0).$$

Para $x \in E$ fixo, tomamos R suficientemente grande e obtemos

$$|\nabla f|(x) - \frac{C_0}{R} f(x) \leq \max_{\partial E(p,2R_0)} |\nabla f|.$$

Fazendo $R \to \infty$ isso prova (6.8).
Visto que essa conclusão independe da constante adicionada à f e também da possível mudança de sinal de f, isso prova que, de fato,

$$\sup_{M \setminus B(p,R_0)} |\nabla f| = \max_{\partial B(p,R_0)} |\nabla f| \tag{6.9}$$

Como consequência, temos

$$\begin{aligned} \int_{B(p,4R_0)} |\nabla f|^2 &\leq V(p,4R_0) \sup_{B(p,4R_0)} |\nabla f|^2 \\ &\leq V(p,4R_0) \sup_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Pela Observação 3.1 temos

$$\Delta |\nabla f| \geq -(n-1)K|\nabla f| \geq -C|\nabla f|,$$

onde C é a limitação inferior da curvatura de Ricci em $B(p,R_0)$. Aplicando a desigualdade do valor médio como em (6.6) temos

$$\sup_{B(p,R_0)} |\nabla f|^2 \leq \frac{C(n)}{V(p,R_0)} \int_{B(p,2R_0)} |\nabla f|^2.$$

Juntamente com (6.10) e a comparação de volume obtemos

$$\int_{B(p,4R_0)} |\nabla f|^2 \leq V(p,4R_0) \frac{C(n)}{V(p,R_0)} \int_{B(p,2R_0)} |\nabla f|^2$$

$$\frac{V(p,4R_0)}{V(p,R_0)} \leq C(n,R_0)$$

$$\int_{B(p,4R_0)} |\nabla f|^2 \leq C(n,R_0) \int_{B(p,2R_0)} |\nabla f|^2.$$

Pelo Corolário 6.1, isso prova a primeira parte do teorema. Além disso, a segunda parte do teorema é uma versão fraca do resultado de decomposição de (CHEEGER; GROMOLL, 1971).

$\square$

Agora vamos mostrar um resultado notável obtido por (LI; WANG et al., 2002), que pode ser considerado uma versão do teorema de decomposição de Cheeger-Gromoll, onde este último garante que uma variedade Riemanniana completa n-dimensional, com curvatura de Ricci não-negativa, que possui uma linha, pode ser decomposta isometricamente num produto Riemanniano de uma variedade $(n-1)$-dimensional com o conjunto dos reais. Algo similar foi tratado na Proposição 3.1.

Teorema 6.3 *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci limitada inferiormente por*

$$\mathrm{Ric} \geq -(n-1)$$

Então o espectro inferior do Laplaciano satisfaz

$$\lambda_1(\Delta) \leq \frac{(n-1)^2}{4}. \tag{6.11}$$

Se

$$\lambda_1(\Delta) = \frac{(n-1)^2}{4},$$

e M tem mais que um fim, então M se divide como um warped product de uma reta real com uma variedade compacta $M = \mathbb{R} \times P$.

Prova. Vamos provar primeiramente a limitação superior, que é chamada estimativa de Cheng. Podemos assumir que $\lambda_1(\Delta) > 0$. A Proposição 4.2 implica que (M,g) é não-parabólica e, consequentemente admite uma função de Green positiva G. A seguir, o ponto base não é importante, então denotaremos por $G(x) = G(p,x)$. A função G é positiva e harmônica em $M \setminus B(p,1)$. Pela definição do $\lambda_1(\Delta)$, dada em (4.39), temos

$$\lambda_1(\Delta) \int_M (\phi G^{\frac{1}{2}})^2 \leq \int_M |\nabla(\phi G^{\frac{1}{2}})|^2$$

para alguma função ϕ com suporte compacto em $M \setminus B(p,1)$ tal que $\phi = 1$ em $B(p,R)$ e $\phi = 0$ em $M \setminus B(p,2R)$, com $|\nabla \phi| \leq \frac{c}{R}$. Consequentemente, como

$$|\nabla(\phi G^{\frac{1}{2}})|^2 = |G^{\frac{1}{2}} \nabla \phi + \frac{1}{2} \phi G^{-\frac{1}{2}} \nabla G|^2 = |\nabla \phi|^2 G + \frac{1}{4} G^{-1} |\nabla G|^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \langle \nabla G, \nabla \phi^2 \rangle$$

obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Delta) \int_M (\phi G^{\frac{1}{2}})^2 &\leq \int_M |\nabla \phi|^2 G + \frac{1}{4} \int_M G^{-1} |\nabla G|^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \int_M \langle \nabla G, \nabla \phi^2 \rangle \\ &= \int_M |\nabla \phi|^2 G + \frac{1}{4} \int_M G^{-1} |\nabla G|^2 \phi^2 - \int_M \phi^2 \Delta G \\ &= \int_M |\nabla \phi|^2 G + \frac{1}{4} \int_M G^{-1} |\nabla G|^2 \phi^2 \end{aligned} \tag{6.12}$$

onde usamos que G é harmônica no suporte da ϕ. A estimativa do gradiente do Teorema 3.1 implica que

$$|\nabla \ln G|(y) \leq (n-1) + C_1 e^{-C_2 r(y)}$$

onde $r(y) = r(p, y)$. Visto que

$$|\nabla \ln G|(x) = \frac{|\nabla G|}{G}(x) = G^{-1}|\nabla G|(x),$$

isso implica que

$$G^{-2}|\nabla G|^2(x) \leq (n-1)^2 + e^{-Cr(x)}.$$

Por conseguinte, temos

$$G^{-1}|\nabla G|^2(x) \leq (n-1)^2 G(x) + e^{-Cr(x)}G(x) \tag{6.13}$$

O Teorema 4.6 implica que

$$\int_M |\nabla \phi|^2 G \leq \frac{c^2}{R^2}\int_{B(p,2R)\setminus B(p,R)} G \leq \frac{c^2}{R^2}(C(2R+1) - C(R+1)) = \frac{C}{R}.$$

Por outro lado,

$$\int_M e^{-Cr(x)}G(x) \leq C.$$

Consequentemente por (6.12) e (6.13), temos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\Delta)\int_M (\phi G^{\frac{1}{2}})^2 &\leq \int_M |\nabla\phi|^2 G + \frac{1}{4}\int_M G^{-1}|\nabla G|^2\phi^2 \\
&\leq \frac{C}{R} + \frac{1}{4}\int_M [(n-1)^2 G(x) + e^{-Cr(x)}G(x)]\phi^2. \\
&\leq \frac{C}{R} + \frac{(n-1)^2}{4}\int_M G\phi^2 + \frac{1}{4}\int_M e^{-Cr(x)}G\phi^2
\end{aligned}$$

Por conseguinte, temos

$$\begin{aligned}
\left(\lambda_1(\Delta) - \frac{(n-1)^2}{4}\right)\int_M G\phi^2 &\leq \frac{C}{R} + \frac{1}{4}\int_M e^{-Cr(x)}G\phi^2 \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

onde C é uma constante independente de R. Como pelo Teorema 4.6

$$\int_{B(p,R)} G \geq \frac{1}{C}R,$$

isso prova que

$$\lambda_1(\Delta) - \frac{(n-1)^2}{4} \leq 0,$$

provando (6.11). Vamos assumir agora que M tem o máximo espectro inferior,

$$\lambda_1(\Delta) = \frac{(n-1)^2}{4}$$

e pelo menos dois fins. Como $\lambda_1(\Delta) > 0$, sabemos que M é não-parabólica. Seja E um fim não-parabólico de M e seja $F = M \setminus E$. Temos as seguintes situações. Primeiro, iremos assumir que F é também um fim não-parabólico. Neste caso, pela Proposição 5.3 e pelo Teorema 5.3, existe uma função harmônica w em M com energia finita tal que

$$\limsup_F w = 1$$
$$\liminf_E w = 0$$

Pela Observação 3.1 sabemos que para

$$h = |\nabla w|^{\frac{n-2}{n-1}},$$

vale o seguinte

$$\Delta h = \Delta|\nabla w|^{\frac{n-2}{n-1}} \geq -(n-1)\frac{(n-2)}{(n-1)}|\nabla w|^{\frac{n-2}{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\left(\frac{n-2}{n-1} - \frac{n-2}{n-1}\right)|\nabla|\nabla w||^2|\nabla w|^{\frac{-n}{n-1}}.$$

Note que a segunda parcela da expressão acima se anula, e a primeira parcela pode ser escrita em função de h na forma

$$\Delta h \geq -(n-2)h. \tag{6.14}$$

Agora aplicamos a definição de $\lambda_1(\Delta)$ (4.39) à $h\phi$, onde ϕ é uma função-corte com suporte compacto tal que $\phi = 1$ em $B(p,R)$, $\phi = 0$ em $M \setminus B(p,2R)$ e $|\nabla\phi| \leq \frac{C}{R}$. Isso implica que

$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)^2}{4}\int_M (\phi h)^2 &\leq \int_M |\nabla(\phi h)|^2 \\
&= \int_M h^2|\nabla\phi|^2 + \int_M \phi^2|\nabla h|^2 + \frac{1}{2}\int_M \langle\nabla h^2, \nabla\phi^2\rangle \\
&= \int_M h^2|\nabla\phi|^2 + \int_M \phi^2|\nabla h|^2 - \frac{1}{2}\int_M \phi^2\Delta h^2 \\
&= \int_M h^2|\nabla\phi|^2 + \int_M \phi^2|\nabla h|^2 - \frac{1}{2}\int_M \phi^2(2h\Delta h + 2|\nabla h|^2) \\
&\leq \int_M h^2|\nabla\phi|^2 + (n-2)\int_M \phi^2 h^2
\end{aligned}$$

onde usamos (6.14). Isso implica

$$\left(\frac{(n-1)^2}{4} - (n-2)\right)\int_M (\phi h)^2 \leq \int_M h^2|\nabla\phi|^2 \leq \frac{c^2}{R^2}\int_{B(p,R)\setminus B(p,\frac{R}{2})} h^2. \tag{6.15}$$

Usando o Teorema 5.4 sabemos que

$$\frac{c^2}{R^2}\int_{B(p,R)\setminus B(p,\frac{R}{2})} h^2 = \frac{c^2}{R^2}\int_{B(p,R)\setminus B(p,\frac{R}{2})} |\nabla w|^{\frac{2(n-2)}{n-1}} \leq \frac{C}{R}$$

Na última linha usamos que $\frac{2(n-2)}{n-1} \geq 1$ e $|\nabla w| \leq c$ pelo Teorema 3.1. Se $n > 3$ isso produz uma contradição à (6.15) fazendo $R \to \infty$. Se $n = 3$, então

$$\frac{(n-1)^2}{4} - (n-2) = 0$$

e (6.15) implica que todas as desigualdades usadas em (6.14) devem ser igualdades. Logo, pela Proposição 3.1, M se divide isometricamente como um *warped product*.

Isso resolve o caso quando M admite pelo menos dois fins não-parabólicos. O caso remanescente é quando M tem um fim não-parabólico E e $F = M \setminus E$ é um fim parabólico. Neste caso, existe uma função harmônica positiva $w > 0$ tal que

$$\liminf_E w = 0$$
$$\limsup_F w = \infty$$

Para uma função-corte ϕ como acima temos, procedendo como em (6.12), que

$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)^2}{4}\int_M \left(w^{\frac{1}{2}}\phi\right)^2 &\leq \int_M \left|\nabla\left(w^{\frac{1}{2}}\phi\right)\right|^2 \\
&= \int_M \left(\phi^2\left|\nabla w^{\frac{1}{2}}\right|^2 + w|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}\langle\nabla w, \nabla\phi^2\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\int_M \phi^2 w^{-1}|\nabla w|^2 + \int_M w|\nabla\phi|^2.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Afirmamos que

$$\int_M w|\nabla\phi|^2 \leq \frac{C}{R}. \tag{6.17}$$

De fato, por (5.24) em E e (5.32) em F obtemos

$$\int_M w|\nabla\phi|^2 \leq \frac{c^2}{R^2}\left(\int_{E(p,R)\setminus E(p,\frac{R}{2})} w + \int_{F(p,R)\setminus F(p,\frac{R}{2})} w\right) \leq \frac{c^2}{R^2}(CR + CR) = \frac{C}{R}.$$

Pela estimativa do gradiente (vide Teorema 3.1) sabemos que

$$|\nabla \ln w| = \frac{|\nabla w|}{w} = w^{-1}|\nabla w| \leq (n-1) \Rightarrow w^{-2}|\nabla w|^2 \leq (n-1)^2.$$

Logo,

$$w^{-1}|\nabla w|^2 \leq (n-1)^2 w. \tag{6.18}$$

Colocando (6.18) e (6.17) em (6.16) e fazendo $R \to \infty$ concluímos que a igualdade deve valer na estimativa do gradiente. Com efeito, temos

$$\frac{(n-1)^2}{4}\int_M \left(w^{\frac{1}{2}}\phi\right)^2 \leq \frac{1}{4}\int_M \phi^2 w^{-1}|\nabla w|^2 + \int_M w|\nabla\phi|^2.$$

Substituindo as estimativas dos termos à direita da desigualdade,

$$\frac{(n-1)^2}{4}\int_M \left(w^{\frac{1}{2}}\phi\right)^2 \leq \frac{(n-1)^2}{4}\int_M \phi^2 w + \frac{C}{R}.$$

Pela Proposição 3.1, segue o resultado que M se divide como um produto *warped*.

7 CONCLUSÃO

Ao término desse estudo em variedades completas e não-compactas foi possível observar e mostrar relações entre a topologia e a geometria da variedade. Partindo da função de Green, caracterizamos analiticamente a parabolicidade em uma variedade completa. É conhecido que não é possível caracterizar apenas geometricamente essa definição. Por outro lado, usando determinadas hipóteses geométricas, como a limitação inferior da curvatura de Ricci e hipóteses sobre a limitação do espectro inferior da variedade, foi possível obter um bom retrato da relação entre a geometria e a parabolicidade de uma determinada variedade.

No tocante à topologia no infinito, embora não tenhamos uma descrição geométrica geral para quando os fins são parabólicos ou não-parabólicos, as hipóteses de limitação da curvatura de Ricci, volume finito e espectro do Laplaciano da variedade nos deram resultados parciais importantes como o Teorema 4.5 e a Proposição 4.2. Além disso, graças à esses resultados foi possível associar a cada um dos fins da variedade uma função harmônica limitada, pelo menos, unilateralmente em cada fim. E com isso, construímos espaços de funções harmônicas cuja dimensão contava o número de fins parabólicos e não-parabólicos.

Por último, uma versão do resultado de ‘spliting’ de Cheeger-Gromoll para variedades Riemannianas com curvatura de Ricci limitada inferiormente, onde a estimativa de Cheng, induz a condição da variedade com mais de um fim se dividir isometricamente como produto warped de uma linha real com uma variedade compacta.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. P. D. *Formas diferenciais e aplicações*. [S.l.]: IMPA, 1971.

CARMO, M. P. do. *Geometria riemanniana*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011.

CHAVEL, I. *Riemannian geometry: a modern introduction*. [S.l.]: Cambridge university press, 2006. v. 98.

CHEEGER, J.; GROMOLL, D. The splitting theorem for manifolds of nonnegative ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, Lehigh University, v. 6, n. 1, p. 119–128, 1971.

CHENG, S. Y.; YAU, S. T. Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applications. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Wiley Online Library, v. 28, n. 3, p. 333–354, 1975.

DAVIES, E. B. *Heat kernels and spectral theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1989.

EVANS, L. C. Partial differential equations. *Graduate studies in mathematics*, Rhode Island, USA, v. 19, n. 2, 1998.

GALLOT, S.; HULIN, D.; LAFONTAINE, J. *Riemannian geometry*. [S.l.]: Springer, 1990. v. 2.

GRIGORYAN, A. *Heat kernel and analysis on manifolds*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2009. v. 47.

HUBER, A. On subharmonic functions and differential geometry in the large. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Springer, v. 32, n. 1, p. 13–72, 1958.

LI, P. On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact riemannian manifold. In: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. [S.l.: s.n.], 1980. v. 13, n. 4, p. 451–468.

LI, P. *Geometric analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. v. 134.

LI, P.; TAM, L. F. Symmetric Green's functions on complete manifolds. *American Journal of Mathematics*, JSTOR, v. 109, n. 6, p. 1129–1154, 1987.

LI, P.; TAM, L. F. Harmonic functions and the structure of complete manifolds. *Journal of Differential Geometry*, Lehigh University, v. 35, n. 2, p. 359–383, 1992.

LI, P.; WANG, J. Weighted Poincaré inequality and rigidity of complete manifolds. In: ELSEVIER. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. [S.l.], 2006. v. 39, n. 6, p. 921–982.

LI, P.; WANG, J. et al. Complete manifolds with positive spectrum, ii. *Journal of Differential Geometry*, Lehigh University, v. 62, n. 1, p. 143–162, 2002.

LI, P.; YAU, S. T. et al. On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. *Acta Mathematica*, Citeseer, v. 156, p. 153–201, 1986.

MALGRANGE, B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. In: *Annales de l'institut Fourier*. [S.l.: s.n.], 1956. v. 6, p. 271–355.

MCKEAN, H. P. An upper bound to the spectrum of Δ on a manifold of negative curvature. *Journal of Differential Geometry*, Lehigh University, v. 4, n. 3, p. 359–366, 1970.

MUNTEANU, O. On the gradient estimate of Cheng and Yau. *Proceedings of the American Mathematical Society*, JSTOR, p. 1437–1443, 2012.

MUNTEANU, O.; SUNG, C. J. A.; WANG, J. Weighted Poincare inequality and the Poisson equation. *Transactions of the American Mathematical Society, v. 374, n. 3, p. 2167-2199*, 2021.

NAKAI, M. On Evans potential. *Proceedings of the Japan Academy*, The Japan Academy, v. 38, n. 9, p. 624–629, 1962.

PETERSEN, P.; AXLER, S.; RIBET, K. *Riemannian geometry*. [S.l.]: Springer, 2006. v. 171.

RODIN B. SARIO, L. *Principal functions*. [S.l.]: D. Van Nostrand Company, INC., Princeton, 1968.

SARIO, L.; NAKAI, M. Classification theory of riemann surfaces. Springer, 1970.

SARIO, L.; NOSHIRO, K. Value distribution theory. Springer, 1966.

SUNG, C. J.; TAM, L. F.; WANG, J. Spaces of harmonic functions. *Journal of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 61, n. 3, p. 789–806, 2000.

WANG, J. The spectrum of the laplacian on a manifold of nonnegative ricci curvature. *Mathematical Research Letters*, International Press of Boston, v. 4, n. 4, p. 473–479, 1997.

YAU, S. T. Harmonic functions on complete riemannian manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Wiley Online Library, v. 28, n. 2, p. 201–228, 1975.