

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Estimativas de índice para hipersuperfícies mínimas com
fronteira livre

Manuel Vinicius Ribeiro Lopes Lima

MACEIÓ - AL
MARÇO DE 2021

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Estimativas de índice para hipersuperfícies mínimas com
fronteira livre

por

Manuel Vinicius Ribeiro Lopes Lima

sob a orientação do

Prof. Dr. Abraão Mendes do Rêgo Gouveia

MACEIÓ - AL
MARÇO DE 2021

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

L732e	Lima, Manuel Vinicius Ribeiro Lopes. Estimativas de índice para hipersuperfícies mínimas com fronteira livre / Manuel Vinicius Ribeiro Lopes Lima. - 2021. 57 f. : il. Orientador: Abraão Mendes do Rêgo Gouveia. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2021. Bibliografia: f. 55-57. 1. Superfícies com fronteira livre (Geometria diferencial). 2. Morse, Teoria de. 3. Grupos de homologia. 4. Formas diferenciais. I. Título. CDU: 515.142.21
-------	---

Estimativas de índice para hipersuperfícies mínimas com fronteira livre

por

Manuel Vinicius Ribeiro Lopes Lima ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada em 19 de Março de 2021.

Banca Examinadora:

Abraão Mendes

Prof. Dr. Abraão Mendes do Rêgo Gouveia (UFAL)
(Orientador)

Marcos Petrúcio de A. Cavalcante

Prof. (Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante (UFAL)
(Examinador Interno)

Darlan Ferreira de Oliveira

Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira (UEFS)
(Examinador Externo)

¹O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que sempre me deu saúde, força e coragem a cada dia para seguir em frente.

À minha família, em especial aos meus pais Abílio e Celia por terem me dado uma boa educação e por sempre apoiarem meus estudos, ao meu irmão Guilherme por todo companheirismo e ajuda em todos os momentos, e à minha namorada Iranilda por todo carinho, amor e paciência durante esta passagem. Sem vocês isto não seria possível.

Ao meu orientador Prof. Abraão Mendes pelo apoio e dedicação durante o desenvolvimento deste trabalho, pelas conversas e encontros que renderam bons ensinamentos para minha carreira profissional e pessoal.

Aos professores Marcos Petrúcio e Darlan Ferreira por aceitarem participar da banca e pelas valiosas sugestões.

Aos meus amigos da pós-graduação, pelos momentos juntos durante estes dois anos de estudo, em especial aos meus amigos Allan Kennedy, Carlos Henrique, Deivid Santos e Rodrigo Costa pelas “resenhas” e momentos de descontração.

Ao meu amigo Felipe por toda ajuda durante os primeiros meses em Maceió. Deixo aqui minha gratidão.

À CAPES pelo apoio financeiro durante estes dois anos.

Isto é uma ordem: sê firme e corajoso. Não te atemorizes, não tenhas medo, porque o Senhor está contigo em qualquer parte para onde fores (Josué 1.9)

Resumo

Nesta dissertação, apresentaremos alguns resultados sobre estimativas para o índice de uma hipersuperfície mínima com fronteira livre propriamente mergulhada em um domínio estritamente convexo em média do espaço Euclidiano. As estimativas descritas neste trabalho foram obtidas por L. Ambrozio, A. Carlotto e B. Sharp em [2], onde eles demonstraram, dentre outras coisas, que o índice de uma hipersuperfície mínima com as propriedades descritas acima é limitado por baixo por uma função linear da dimensão do seu primeiro grupo de homologia relativa. Em ambientes tridimensionais, o índice de uma superfície mínima com fronteira livre é limitado por baixo por uma função linear do gênero e do número de componentes conexas da fronteira da superfície.

Palavras-chave: Superfícies com fronteira livre, Índice de Morse, Grupos de homologia, Formas diferenciais.

Abstract

In this dissertation, we present some results on index estimates for properly embedded free boundary minimal hypersurfaces in strictly mean convex domains of Euclidean space. The estimates described in this work were obtained by L. Ambrozio, A. Carlotto and B. Sharp in [2], in which they showed that the index of a minimal hypersurface with the properties described above is bounded from below by a linear function of the dimension of its first relative homology group. In three-dimensional ambients, the index of a free boundary minimal surface is bounded from below by a linear function of its genus and the number of boundary components.

Keywords: Free boundary surfaces, Morse index, Homology groups, Differential forms.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	6
1.1 Variedades Diferenciáveis	6
1.1.1 Espaços Tangentes	8
1.1.2 Métricas Riemannianas	10
1.2 Formas Diferenciais	11
1.2.1 O Operador de Laplace sobre Formas	15
1.2.2 Representando as Classes de Cohomologia por Formas Harmônicas .	19
1.3 Conexões Afins	23
1.3.1 A Conexão de Levi-Civita	24
1.4 O Método de Bochner	27
1.5 A Segunda Forma Fundamental	28
1.5.1 Curvatura de Subvariedades	29
1.5.2 Fórmula da Primeira Variação do Volume	30
2 Resultados Essenciais	33
2.1 O Índice de Hipersuperfícies Mínimas com Fronteira Livre	33
2.2 Teoria de Hodge para Variedades com Fronteira	35
2.3 Funções Testes Baseadas em Coordenadas de 2-Formas Harmônicas	39
3 Resultados Principais	42
3.1 Estimativas para o Índice de Hipersuperfícies Mínimas com Fronteira Livre	42
3.2 Exemplos	52
3.2.1 Exemplos i e ii	53
3.2.2 Exemplos iii e iv	53

Introdução

Hipersuperfícies mínimas com fronteira livre se tornou um tópico na área de geometria diferencial muito estudado nos anos recentes. Como exemplo, podemos destacar o estudo sobre a relação entre as propriedades geométricas e topológicas de tais variedades, que classicamente é feito para variedades fechadas.

Este estudo pode ser realizado a partir do índice de uma hipersuperfície mínima M (fechada ou não), que denota o número de autovalores negativos do operador de Jacobi $\mathcal{L}_M$. O índice também indica o número de direções cujas variações decrescem área. Em muitas situações, o índice de uma hipersuperfície mínima controla a sua topologia, como veremos neste trabalho, chegando a controlar até mesmo a geometria da hipersuperfície. Neste trabalho, descreveremos a topologia de uma variedade com fronteira através de seus grupos de homologia com coeficientes reais.

A. Ros em [22], Teorema 17, provou que o índice de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ é limitado por baixo por uma função linear do seu gênero. A. Savo em [24] também obteve estimativas para o índice de uma hipersuperfície mínima da esfera em termos de sua topologia, onde ele fez comparações entre o índice e o gênero, no caso de superfícies, e o índice e o primeiro número de Betti, em dimensões maiores. Existem vários trabalhos nos quais foram obtidos resultados de comparação entre o índice e o primeiro número de Betti de hipersuperfícies mínimas imersas em variedades ambientes; veja, por exemplo, [1], [14] e [17].

Um exemplo muito interessante de estimativa para o índice foi feito por G. Smith e D. Zhou em [28], eles mostraram que o índice do catenoide crítico mínimo com fronteira livre na bola unitária do $\mathbb{R}^3$ é igual a 4. Também, os mesmos autores juntamente com A. Stern e H. Tran obtiveram em [27] o seguinte teorema para o catenoide crítico n -dimensional:

Teorema (Smith *et al.*). *Para todo n , seja $I(n)$ o índice do catenoide crítico n -dimensional. Então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(I(n))}{\sqrt{n} \log \sqrt{n}} = 1.$$

Neste trabalho, estamos interessados em hipersuperfícies mínimas compactas com fronteira livre.

Sobre o caso fechado, existem inúmeros trabalhos como, por exemplo, o clássico artigo

escrito por R. Schoen e S.-T. Yau [25], onde eles provaram que uma superfície mínima, fechada e orientável de índice zero mergulhada em uma variedade tridimensional com curvatura escalar positiva deve ser necessariamente uma 2-esfera. O. Chodosh, D. Ketover e D. Máximo [7] fizeram um estudo sobre sequências de hipersuperfícies mínimas com índice uniformemente limitado, onde eles provaram, dentre outros resultados, que o conjunto das superfícies mínimas, fechadas e mergulhadas com índice uniformemente limitado contém apenas sequências de superfícies com área e gênero uniformemente limitados. Outros resultados importantes sobre o caso fechado podem ser encontrados nos trabalhos de L. Ambrozio, A. Carlotto e B. Sharp [1] e [3], C. Gorodski, R. Mendes e M. Radeschi [14], D. Impera e M. Rimoldi [17] e A. Savo [24].

Alguns dos trabalhos citados acima são respostas parciais para a conjectura devida a R. Schoen, F. Marques e A. Neves. Esta conjectura afirma o seguinte:

Conjectura 1 (Schoen, Marques-Neves). *Seja (Ω^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana fechada com curvatura de Ricci positiva. Existe uma constante positiva C tal que, para toda hipersuperfície mínima fechada M^n mergulhada em (Ω^{n+1}, g) , vale a seguinte desigualdade:*

$$\text{ind}(M) \geq C b_1(M),$$

onde $\text{ind}(M)$ denota o índice de M e $b_1(M)$ denota o primeiro número de Betti de M .

Além dessa conjectura, F. Marques e A. Neves fizeram a seguinte conjectura:

Conjectura 2 (Marques-Neves). *Seja (Ω^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana fechada com curvatura de Ricci positiva. Existe uma constante positiva C tal que, para toda hipersuperfície mínima fechada M^n mergulhada em (Ω^{n+1}, g) , vale a seguinte desigualdade:*

$$\text{ind}(M) \geq C \left(\sum_{i=0}^n b_i(M) \right),$$

onde $b_i(M)$ é o i -ésimo número de Betti de M .

Também existe trabalhos sobre estimativa para o índice no caso em que a variedade tem curvatura média constante (CMC), veja por exemplo os trabalhos de M. Cavalcante e D. Oliveira [5] e [6].

Esta dissertação foi baseada principalmente no artigo [2], que tem por título *Index estimates for free boundary minimal hypersurfaces*, o qual foi escrito por L. Ambrozio, A. Carlotto e B. Sharp e publicado em 2018 na revista *Mathematische Annalen*.

O objetivo principal aqui é exibir os detalhes das demonstrações dos resultados obtidos em [2]. Dentre outras coisas, apresentaremos resultados de comparação entre o índice de uma hipersuperfície mínima com fronteira livre e a dimensão do seu primeiro grupo de homologia relativa. O primeiro resultado que queremos demonstrar é o seguinte:

Teorema 1 (Teorema 3.1.2). *Seja Ω^{n+1} um domínio estritamente convexo em média do espaço Euclidiano $(n+1)$ -dimensional, $n \geq 2$. Seja M^n uma hipersuperfície compacta, orientável, mínima com fronteira livre em Ω^{n+1} . Então,*

$$\text{ind}(M) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}).$$

Quando a hipersuperfície está propriamente mergulhada em um domínio estritamente bi-convexo, podemos demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 2 (Teorema 3.1.4). *Seja Ω^{n+1} um domínio estritamente bi-convexo do espaço Euclidiano $(n+1)$ -dimensional, $n \geq 2$. Seja M^n uma hipersuperfície compacta, orientável, mínima com fronteira livre em Ω^{n+1} . Então,*

$$\text{ind}(M) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_{n-1}(M, \partial M; \mathbb{R}).$$

Apresentaremos também que o índice de uma superfície mínima com fronteira livre imersa em um domínio convexo em média do espaço Euclidiano tridimensional é limitado por baixo por uma função linear do gênero e do número de componentes conexas da fronteira da superfície. Mais precisamente, demonstraremos o seguinte teorema:

Teorema 3 (Teorema 3.1.6). *Seja Ω^3 um domínio convexo em média do espaço Euclidiano tridimensional. Seja M^2 uma superfície compacta, orientável, mínima com fronteira livre em Ω^3 de gênero g e cuja fronteira ∂M possui r componentes conexas. Então,*

$$\text{ind}(M) \geq \frac{1}{3}(2g + r - 1).$$

Vale ressaltar que o resultado do teorema acima também foi obtido simultaneamente por P. Sargent em [23], porém de maneira independente e utilizando outros métodos.

Outro resultado importante que será demonstrado, no caso em que a hipersuperfície está mergulhada em um ambiente mais geral, é o seguinte:

Teorema 4 (Teorema 3.1.8). *Seja (Ω^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana com fronteira isometricamente mergulhada em algum espaço Euclidiano $\mathbb{R}^d$. Seja M^n uma hipersuperfície compacta, orientável, mínima com fronteira livre em (Ω^{n+1}, g) . Assuma que para todo campo vetorial não-nulo X em M^n vale*

$$\begin{aligned} & \int_M \left[\text{tr}_M \left(\text{Rm}^\Omega(\cdot, X, \cdot, X) \right) + \text{Ric}^\Omega(N, N)|X|^2 \right] dM + \int_{\partial M} H^{\partial\Omega} |X|^2 dS > \\ & \int_M \left[(|\text{II}^\Omega(\cdot, X)|^2 - |\text{II}^\Omega(X, N)|^2) + (|\text{II}^\Omega(\cdot, N)|^2 - |\text{II}^\Omega(N, N)|^2)|X|^2 \right] dM, \end{aligned}$$

onde Rm^Ω denota o tensor curvatura de Riemann de (Ω^{n+1}, g) , II^Ω é a segunda forma fundamental de Ω^{n+1} em $\mathbb{R}^d$, $\text{II}^{\partial\Omega}$ denota a segunda forma fundamental de $\partial\Omega$ em (Ω^{n+1}, g)

e N é um campo vetorial normal unitário sobre M^n em (Ω^{n+1}, g) . Então, temos que

$$\text{ind}(M) \geq \frac{2}{d(d-1)} \dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}).$$

Outros resultados provenientes dos teoremas citados acima também estão presentes nesta dissertação.

O trabalho está dividido em três capítulos. No capítulo 1 introduzimos alguns temas que serão necessários para um bom entendimento dos capítulos posteriores. Nele apresentamos algumas definições e resultados úteis sobre formas diferenciais, conexões afins e a segunda forma fundamental.

No capítulo 2 definimos o índice de uma hipersuperfície mínima com fronteira livre e apresentamos resultados que serão de extrema importância para as demonstrações dos teoremas principais.

Finalmente, no capítulo 3, apresentaremos as demonstrações dos resultados principais desta dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedades Diferenciáveis

Um *espaço topológico* é um conjunto M com uma família $\mathcal{O}$ de subconjuntos de M que satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow \Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{O}$,
- 2) $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{O} \Rightarrow \cup_{\alpha \in \Lambda} \Omega_\alpha \in \mathcal{O}$, isto para qualquer conjunto de índices Λ ,
- 3) $\emptyset, M \in \mathcal{O}$.

Os conjuntos pertencentes a $\mathcal{O}$ são chamados de *abertos*. Dados um ponto $p \in M$ e um subconjunto $V \subseteq M$, dizemos que V é uma *vizinhança* de p se existe um conjunto aberto $\Omega \in \mathcal{O}$ tal que $p \in \Omega \subseteq V$. Um espaço topológico M é dito ser de *Hausdorff* se para quaisquer pontos $p_1, p_2 \in M$, com $p_1 \neq p_2$, existem conjuntos abertos $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{O}$ tais que $p_1 \in \Omega_1$, $p_2 \in \Omega_2$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Definição 1.1.1. Uma família $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de subconjuntos de M é uma *cobertura* de M se $M = \cup_{\alpha \in \Lambda} \Omega_\alpha$.

Uma cobertura $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ é *aberta* se Ω_α é um conjunto aberto para cada $\alpha \in \Lambda$. Uma cobertura $(\Omega'_\beta)_{\beta \in \Lambda'}$ é dita ser um *refinamento* de uma cobertura $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ se para cada Ω'_β em $(\Omega'_\beta)_{\beta \in \Lambda'}$ existe um Ω_α em $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ tal que $\Omega'_\beta \subseteq \Omega_\alpha$. Uma cobertura $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de M é dita ser *localmente finita* se cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança que intersecta apenas uma quantidade finita de conjuntos em $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$.

Definição 1.1.2. Um espaço topológico é *paracompacto* se toda cobertura aberta possui um refinamento aberto localmente finito. Ou seja, para cada cobertura aberta $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ existe uma cobertura aberta localmente finita $(\Omega'_\beta)_{\beta \in \Lambda'}$ tal que

$$\forall \beta \in \Lambda', \exists \alpha \in \Lambda; \Omega'_\beta \subseteq \Omega_\alpha.$$

Uma aplicação entre espaços topológicos é *contínua* se a pré-imagem de qualquer conjunto aberto é um conjunto aberto. Se uma aplicação bijetiva é contínua, assim como sua inversa, então dizemos que ela é um *homeomorfismo*.

Definição 1.1.3. Uma *variedade* M de *dimensão* n é um espaço topológico de Hausdorff paracompacto tal que todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança aberta U que é homeomorfa a um subconjunto aberto Ω do $\mathbb{R}^n$. Tal homeomorfismo, denotado por

$$x : U \rightarrow \Omega,$$

é chamado de *carta coordenada*.

Um *atlas* é uma família $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ de cartas na qual U_α constitui uma cobertura aberta de M . Note que um ponto $p \in U_\alpha$ é determinado por $x_\alpha(p)$. Omitindo o índice α , as componentes de $x(p) \in \mathbb{R}^n$ são chamadas de *coordenadas locais* de p .

Definição 1.1.4. Dizemos que um atlas $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ em uma variedade M é *diferenciável* se todas as *transições de cartas*

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

são diferenciáveis de classe C^∞ sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

De agora em diante, todo atlas será diferenciável por hipótese.

Dizemos que dois atlas são *compatíveis* se a união deles é ainda um atlas. Em geral, uma carta é dita ser *compatível* com um atlas se a adição da carta ao atlas é ainda um atlas. Dizemos que um atlas é *maximal* se qualquer carta compatível com ele pertence a ele.

Um atlas maximal (diferenciável) é chamado de *estrutura diferenciável*. Uma variedade de dimensão n com uma estrutura diferenciável é chamada de *variedade diferenciável* de dimensão n .

Definição 1.1.5. Um atlas em uma variedade diferenciável está *orientado* se toda transição de carta tem determinante Jacobiano positivo. Uma variedade diferenciável é dita ser *orientável* se ela possui um atlas orientado.

Definição 1.1.6. Uma aplicação $h : M \rightarrow M'$ entre duas variedades diferenciáveis M e M' com cartas $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ e $\{U'_\alpha, x'_\alpha\}$ é *diferenciável* se todas as aplicações $x'_\beta \circ h \circ x_\alpha^{-1}$ são diferenciáveis de classe C^∞ onde definidas. Tal aplicação é um *difeomorfismo* se é um homeomorfismo diferenciável cuja inversa também é diferenciável.

Para propósitos de diferenciação, uma variedade diferenciável tem localmente a estrutura do espaço Euclidiano. Assim, a diferenciabilidade de uma aplicação pode ser testada em coordenadas locais. O fato de as transições de cartas serem difeomorfismos garante que esta noção de diferenciabilidade não depende da escolha das cartas.

1.1.1 Espaços Tangentes

Sejam $x = (x^1, \dots, x^n)$ as coordenadas Euclidianas do $\mathbb{R}^n$, Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \Omega$. Definimos o *espaço tangente* de Ω no ponto x_0 , denotado por $T_{x_0}\Omega$, como sendo o espaço $\{x_0\} \times E$, onde E é o espaço vetorial de dimensão n gerado pela base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$. Aqui, $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ são as derivadas parciais no ponto x_0 .

Dados subconjuntos abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ e uma aplicação diferenciável

$$F : \Omega \rightarrow \Omega',$$

definimos a *derivada* $dF(x_0)$ para $x_0 \in \Omega$ como a aplicação linear induzida entre os espaços tangentes

$$\begin{aligned} dF(x_0) : T_{x_0}\Omega &\rightarrow T_{F(x_0)}\Omega', \\ v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} &\mapsto v^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial}{\partial F^j}, \end{aligned}$$

onde acima estamos usando a notação de Einstein.

Defina $T\Omega = \Omega \times E \cong \Omega \times \mathbb{R}^n$. Assim, $T\Omega$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, em particular, $T\Omega$ é uma variedade diferenciável.

A tripla $(T\Omega, \pi, \Omega)$, onde

$$\begin{aligned} \pi : T\Omega &\rightarrow \Omega, \\ (x, v) &\mapsto x, \end{aligned}$$

é chamada de *fibrado tangente* de Ω . $T\Omega$ é chamado de *espaço total* do fibrado tangente. Analogamente, definimos

$$\begin{aligned} dF : T\Omega &\rightarrow T\Omega', \\ \left(x, v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) &\mapsto \left(F(x), v^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x) \frac{\partial}{\partial F^j}\right). \end{aligned}$$

Se, em particular, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, nós temos

$$df(x)(v) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \in T_{f(x)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

para $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x\Omega$.

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e $p \in M$. Queremos definir o espaço tangente de M no ponto p . Seja $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta com $p \in U$ e U aberto em M . Dizemos que o espaço tangente $T_p M$ é *representado* na carta x por $T_{x(p)}x(U)$. Considere outra carta $x' : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $p \in U'$ e U' aberto em M . Defina $\Omega := x(U)$ e $\Omega' := x'(U')$. Então a transição de carta

$$x' \circ x^{-1} : x(U \cap U') \rightarrow x'(U \cap U')$$

induz um isomorfismo entre espaços vetoriais

$$L := d(x' \circ x^{-1})(x(p)) : T_{x(p)}\Omega \rightarrow T_{x'(p)}\Omega'.$$

Neste caso, dizemos que os vetores $v \in T_{x(p)}\Omega$ e $L(v) \in T_{x'(p)}\Omega'$ *representam* o mesmo vetor tangente em T_pM . Assim, um vetor tangente em T_pM é dado pela família de seus representantes em cartas coordenadas. Isto pode ser motivado da seguinte forma: seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Queremos definir $df(p)$ como uma aplicação linear de T_pM em $\mathbb{R}$. Dado um vetor $w \in T_pM$ *representado* por $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_{x(p)}x(U)$ na carta x , dizemos que

$$df(p)(w)$$

é *representado* por

$$d(f \circ x^{-1})(x(p))(v)$$

nesta mesma carta. Observe que, pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} d(f \circ x^{-1})(x(p))(v) &= d(f \circ x'^{-1} \circ x' \circ x^{-1})(x(p))(v) \\ &= d(f \circ x'^{-1})(x'(p)) \circ d(x' \circ x^{-1})(x(p))(v) \\ &= d(f \circ x'^{-1})(x'(p))(L(v)), \end{aligned}$$

ou seja, $df(p)(w)$ é representado por $d(f \circ x'^{-1})(x'(p))(L(v))$ na carta x' , onde $L(v)$ é a representação de w nesta mesma carta.

Levando em conta as considerações feitas até aqui, vamos apresentar uma definição formal para espaço tangente de uma variedade diferenciável.

Definição 1.1.7. Sejam M uma variedade diferenciável e $p \in M$. No conjunto

$$M_p = \{(x, v); x : U \rightarrow \Omega \text{ é uma carta com } p \in U \text{ e } v \in T_{x(p)}\Omega\}$$

escrevemos $(x, v) \sim (y, w)$ para dizer que $w = d(y \circ x^{-1})(x(p))(v)$. Não é difícil verificar que $\sim$ é uma relação de equivalência em M_p . O conjunto $M_p/\sim$ de todas as classes de equivalência de $\sim$ é chamado de *espaço tangente* de M em p , o qual é denotado por T_pM .

O espaço tangente T_pM carrega naturalmente uma estrutura de um espaço vetorial, onde a classe de equivalência de $\lambda_1(x, v_1) + \lambda_2(x, v_2)$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, é a classe de $(x, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$, por definição.

Considere o conjunto $TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM$ e a projeção π definida por

$$\begin{aligned} \pi : TM &\rightarrow M, \\ (p, w) &\mapsto \pi(p, w) = p. \end{aligned}$$

É possível demonstrar que TM tem uma estrutura de variedade diferenciável orientável

de dimensão $2n$ tal que $\pi : TM \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável (ver [20], página 57, Lema 3.12).

Definição 1.1.8. A tripla (TM, π, M) é chamada de *fibrado tangente* de M . TM é chamado de *espaço total* do fibrado tangente.

Definição 1.1.9. Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação entre duas variedades diferenciáveis M e N . Dizemos que F é uma *aplicação diferenciável* se suas representações em cartas coordenadas $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y : V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$y \circ F \circ x^{-1} : x(U \cap F^{-1}(V)) \rightarrow y(V),$$

são diferenciáveis.

Uma aplicação diferenciável $F : M \rightarrow N$ é chamada de *imersão* se, para cada $p \in M$,

$$dF : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

é injetiva. Em particular, $\dim M \leq \dim N$. Se uma imersão F aplica M homeomorficamente sobre sua imagem $F(M) \subset N$, então F é um *mergulho*. Neste caso, dizemos que $F(M)$ é uma *subvariedade diferenciável* de N .

1.1.2 Métricas Riemannianas

Uma métrica Riemanniana permite definir várias noções geométricas em uma variedade diferenciável, como ângulo, comprimento, área, etc.

Definição 1.1.10. Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é dada por um produto interno $g(p)$ em cada espaço tangente $T_p M$ que depende suavemente do ponto base $p \in M$. Uma variedade diferenciável equipada com uma métrica Riemanniana é chamada de *variedade Riemanniana*.

Dado um sistema de coordenadas locais $x = (x^1, \dots, x^n)$, uma métrica Riemanniana g é representada, neste sistema de coordenadas, por uma matriz simétrica positiva definida

$$(g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n},$$

onde os coeficientes dependem suavemente de x .

Considere dois vetores tangentes $v, w \in T_p M$ com representações coordenadas dadas por $(v^1, \dots, v^n)$ e $(w^1, \dots, w^n)$, i.e. $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $w = w^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. O produto interno entre v e w é dado por

$$\langle v, w \rangle = g_{ij}(x(p)) v^i w^j.$$

Em particular, $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$. Da mesma forma, o comprimento do vetor v é dado por

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

O fator de volume $\sqrt{g}$ é dado por

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

o qual é usado na integração de funções contínuas $f : M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_M f \, d\text{Vol},$$

onde $d\text{Vol}$ é a forma de volume dada em coordenadas por $d\text{Vol} = \sqrt{g(x)} dx^1 \cdots dx^n$.

É importante saber que toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana (veja [9], Capítulo 1).

Definição 1.1.11. Uma *isometria* entre duas variedades Riemannianas M e N é um difeomorfismo $F : M \rightarrow N$ que satisfaz

$$\langle v, w \rangle_p = \langle dF(p)(v), dF(p)(w) \rangle_{F(p)}$$

para quaisquer $p \in M$ e $v, w \in T_p M$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{F(p)}$ denotam os produtos internos em $T_p M$ e $T_{F(p)} N$, respectivamente.

Uma aplicação diferenciável $F : M \rightarrow N$ é uma *isometria local* se para cada $p \in M$ existe uma vizinhança aberta U de p em M tal que $F|_U : U \rightarrow F(U)$ é uma isometria, onde $F(U)$ é aberto em N .

Seja M uma subvariedade de uma variedade diferenciável N . Uma métrica Riemanniana sobre N induz de maneira natural uma métrica Riemanniana sobre M pela restrição da métrica ao subespaço $T_p M$ de $T_p N$ para cada $p \in M$. O subespaço $T_p^\perp M$ de $T_p N$ definido por

$$T_p^\perp M = \{v \in T_p N; \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in T_p M\}$$

é chamado de *complemento ortogonal* de $T_p M$ em $T_p N$. Neste caso, podemos escrever $T_p N = T_p M \oplus T_p^\perp M$ para cada $p \in M$.

1.2 Formas Diferenciais

Definição 1.2.1. Um *fibrado vetorial diferenciável de posto n* consiste de um espaço total E , uma base M e uma projeção diferenciável $\pi : E \rightarrow M$, onde E e M são variedades diferenciáveis. Além disso, para cada $x \in M$, o conjunto $E_x := \pi^{-1}(x)$, chamado de *fibra*, carrega uma estrutura de um espaço vetorial real n -dimensional e satisfaz a seguinte

propriedade: para cada $x \in M$, existe uma vizinhança aberta U de x em M e um difeomorfismo

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

tal que, para cada $y \in U$,

$$\varphi_y := \varphi|_{E_y} : E_y \rightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais. O par (φ, U) é chamado de *carta do fibrado*.

O fibrado vetorial $M \times \mathbb{R}^n$ é chamado de *fibrado trivial* de posto n sobre M .

Definição 1.2.2. Seja (E, π, M) um fibrado vetorial. Uma *seção* de E é uma aplicação diferenciável $s : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = \text{id}_M$. O espaço das seções de E é denotado por $\Gamma(E)$.

O fibrado tangente TM é um exemplo de fibrado vetorial. As seções de TM são exatamente os campos de vetores sobre M .

Definição 1.2.3. Sejam (E_1, π_1, M) e (E_2, π_2, M) fibrados vetoriais sobre M . O *produto Cartesiano* entre E_1 e E_2 é um fibrado vetorial com fibra $E_{1,x} \times E_{2,x}$ e carta do fibrado dada por $(\varphi \times \psi, U \cap V)$, onde (φ, U) e (ψ, V) são cartas dos fibrados E_1 e E_2 , respectivamente, e

$$(\varphi \times \psi)(x, (v, w)) := (\varphi(x, v), \psi(x, w)), \quad v \in E_{1,x}, w \in E_{2,x}.$$

Assim, o *fibrado produto* é simplesmente o fibrado cujas fibras sobre $x \in M$ são exatamente os produtos das fibras de E_1 e E_2 sobre x .

Sejam V e W espaços vetoriais reais de dimensões m e n , respectivamente, com bases $(e_1, \dots, e_m)$ e $(f_1, \dots, f_n)$. O *produto tensorial* $V \otimes W$ de V por W é o espaço vetorial de dimensão mn gerado pela base $(e_i \otimes f_j)$.

Definição 1.2.4. Sejam M uma variedade diferenciável e $x \in M$. O espaço vetorial dual do espaço tangente $T_x M$ é chamado de *espaço cotangente* de M no ponto x e é denotado por $T_x^* M$. O fibrado vetorial sobre M cujas fibras são dadas pelos espaços cotangentes de M é chamado de *fibrado cotangente* de M e é denotado por $T^* M$. Os elementos de $T^* M$ são chamados de *vetores cotangentes* e as seções de $T^* M$ são chamadas de *1-formas*.

Definição 1.2.5. Um *tensor covariante de ordem p* em uma variedade diferenciável M é uma seção do fibrado

$$\underbrace{T^* M \otimes \dots \otimes T^* M}_{p \text{ vezes}},$$

cujas fibras são dadas por

$$\underbrace{T_x^* M \otimes \dots \otimes T_x^* M}_{p \text{ vezes}}.$$

Em um sistema de coordenadas $x = (x^1, \dots, x^n)$, podemos escrever um tensor covariante T de ordem p como

$$T = T_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p},$$

onde $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ é a base dual da base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$. Acima, $dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p}$ denota a aplicação p -linear sobre $T_x M$ que satisfaz

$$dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_p} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_p}} \right) = \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_p}^{j_p}.$$

Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é um exemplo de uma seção de $T^*M \otimes T^*M$, ou seja, um exemplo de tensor covariante de ordem 2. De fato, em um sistema de coordenadas $x = (x^1, \dots, x^n)$, podemos escrever

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Considere o conjunto

$$\Lambda^p(T_x^*M) := \underbrace{T_x^*M \wedge \dots \wedge T_x^*M}_{p \text{ vezes}} \text{ (produto exterior).}$$

Cada elemento ω de $\Lambda^p(T_x^*M)$ pode ser escrito como

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

onde os coeficientes $\omega_{i_1 \dots i_p}$ são anti-simétricos, ou seja, a permutação de dois índices quaisquer altera o sinal de $\omega_{i_1 \dots i_p}$. Em particular, para $p = 2$,

$$\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j,$$

onde $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

O fibrado vetorial sobre M cujas fibras são dadas por $\Lambda^p(T_x^*M)$, $x \in M$, é denotado por $\Lambda^p(M)$.

Definição 1.2.6. O espaço das seções de $\Lambda^p(M)$ é denotado por $\Omega^p(M)$. Os elementos de $\Omega^p(M)$ são chamados de p -formas.

Definição 1.2.7. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . A *derivada exterior* $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$, $p = 0, 1, \dots, n$, é definida por

$$d(\omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

no sistema de coordenadas locais $x = (x^1, \dots, x^n)$.

Proposição 1.2.8. d está bem definida.

Demonstração. Poder ser encontrada em [18], Corolário 2.1.2. $\square$

Lema 1.2.9. *Se $\omega \in \Omega^p(M)$ e $\vartheta \in \Omega^q(M)$, então $d(\omega \wedge \vartheta) = d\omega \wedge \vartheta + (-1)^p \omega \wedge d\vartheta$ e $d^2\omega = (d \circ d)(\omega) = 0$.*

Demonstração. Sejam ω e ϑ dadas por

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

$$\vartheta = \vartheta_{j_1 \dots j_q} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \vartheta) &= d(\omega_{i_1 \dots i_p} \vartheta_{j_1 \dots j_q} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}) \\ &= \frac{\partial(\omega_{i_1 \dots i_p} \vartheta_{j_1 \dots j_q})}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \\ &= \vartheta_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial(\omega_{i_1 \dots i_p})}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \\ &\quad + \omega_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial(\vartheta_{j_1 \dots j_q})}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \\ &= d\omega \wedge \vartheta + (-1)^p \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge \frac{\partial(\vartheta_{j_1 \dots j_q})}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \\ &= d\omega \wedge \vartheta + (-1)^p \omega \wedge d\vartheta. \end{aligned}$$

Para provar a segunda parte, é suficiente checar para formas do tipo

$$\omega(x) = f(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

em que f é uma função diferenciável. Neste caso,

$$\begin{aligned} d \circ d(\omega(x)) &= d \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} dx^j \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= 0, \end{aligned}$$

uma vez que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} \quad \text{e} \quad dx^j \wedge dx^k = -dx^k \wedge dx^j.$$

$\square$

Teorema 1.2.10 (Teorema de Stokes). *Sejam M uma variedade diferenciável orientada n -dimensional com fronteira e ω uma $(n-1)$ -forma com suporte compacto em M . Então*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Demonstração. Pode ser encontrada em [20], Capítulo 10. □

Os isomorfismos existentes entre os espaços $\Omega^1(M)$ e $\Gamma(TM)$, induzidos pela métrica da variedade Riemanniana M são

$$\begin{aligned} \sharp : \Omega^1(M) &\rightarrow \Gamma(TM) & \flat : \Gamma(TM) &\rightarrow \Omega^1(M) \\ \omega &\mapsto \omega^\sharp & \text{e} & & X &\mapsto X^\flat \end{aligned}$$

definidos por

$$\langle \omega^\sharp, Y \rangle = \omega(Y) \quad \text{e} \quad X^\flat(Y) = \langle X, Y \rangle$$

para todo $Y \in \Gamma(TM)$. Os operadores $\sharp$ e $\flat$ são conhecidos como *isomorfismos musicais*.

1.2.1 O Operador de Laplace sobre Formas

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno. Definimos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^p(V) \times \Lambda^p(V) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle). \quad (1.1)$$

Se $e_1, \dots, e_n$ é uma base ortonormal de V , então $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, forma uma base ortonormal de $\Lambda^p(V)$.

Uma *orientação* em V é obtida distinguindo-se uma base β de V como *positiva*. Outra base γ de V será *positiva* (resp. *negativa*) se a matriz de mudança da base β para a base γ tiver determinante positivo (resp. negativo).

Fixada uma orientação em V e uma base ortonormal $e_1, \dots, e_n$ de V , definimos o operador linear *estrela*

$$* : \Lambda^p(V) \rightarrow \Lambda^{n-p}(V), \quad p = 0, 1, \dots, n,$$

por

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-p}},$$

onde $j_1, \dots, j_{n-p}$ são selecionados de tal forma que $e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-p}}$ seja uma base positiva de V . Em particular, se $e_1, \dots, e_n$ é uma base ortonormal positiva, então

$$*(1) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \quad (1.2)$$

$$*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = 1. \quad (1.3)$$

É possível demonstrar que $*$ está bem definida e não depende da base ortonormal escolhida (ver [18], Seção 3.3).

Lema 1.2.11. *Dados $\omega, \vartheta \in \Lambda^p(V)$, nós temos*

$$\langle \omega, \vartheta \rangle = *(\omega \wedge * \vartheta).$$

Demonstração. É suficiente demonstrarmos as identidades acima para elementos de uma base ortonormal de $\Lambda^p(V)$. Escreva $\omega = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$, $\vartheta = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}$ e

$$* \vartheta = e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-p}},$$

onde $e_1, \dots, e_n$ é uma base ortonormal positiva de V .

Se $\{i_1, \dots, i_p\} \neq \{j_1, \dots, j_p\}$, então $k_l \in \{i_1, \dots, i_p\}$ para algum $k_l \in \{k_1, \dots, k_{n-p}\}$. Assim, $\omega \wedge * \vartheta = 0$. Portanto, $\langle \omega, \vartheta \rangle = 0 = *(\omega \wedge * \vartheta)$.

Podemos então supor que $\omega = \vartheta = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}$. Assim,

$$\begin{aligned} *(\omega \wedge * \vartheta) &= *(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p} \wedge *(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p})) \\ &= (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p} \wedge e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-p}}) \\ &= 1 \text{ por (1.3)} \\ &= \det(\langle e_{j_r}, e_{j_s} \rangle) \text{ com } j_r, j_s \in \{j_1, \dots, j_p\} \\ &= \langle \omega, \vartheta \rangle \text{ por (1.1).} \end{aligned}$$

□

Lema 1.2.12. *O operador estrela satisfaz $** = (-1)^{p(n-p)} : \Lambda^p(V) \rightarrow \Lambda^p(V)$.*

Demonstração. Seja $\omega = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$, onde $e_1, \dots, e_n$ é uma base ortonormal de V . Por definição,

$$* \omega = *(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-p}},$$

onde $e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-p}}$ é uma base ortonormal positiva de V . Portanto,

$$* * \omega = *(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-p}}) = \epsilon e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} = \epsilon \omega,$$

onde $\epsilon = 1$ ou $\epsilon = -1$ dependendo se a base ortonormal $e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-p}}, e_{i_1}, \dots, e_{i_p}$ é positiva ou negativa, respectivamente. Por outro lado, segue do lema anterior que

$$\begin{aligned} 1 &= \langle * \omega, * \omega \rangle = *(* \omega \wedge * * \omega) = *(* \omega \wedge \epsilon \omega) \\ &= \epsilon (-1)^{p(n-p)} *(\omega \wedge * \omega) = \epsilon (-1)^{p(n-p)} \langle \omega, \omega \rangle \\ &= \epsilon (-1)^{p(n-p)}. \end{aligned}$$

Portanto, $\epsilon = (-1)^{p(n-p)}$, o que garante $* * \omega = (-1)^{p(n-p)} \omega$. O caso geral segue por linearidade. □

Lema 1.2.13. *Seja $v_1, \dots, v_n$ uma base positiva qualquer de V . Então*

$$*(1) = \frac{1}{\sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}} v_1 \wedge \dots \wedge v_n.$$

Demonstração. Seja $e_1, \dots, e_n$ uma base ortonormal positiva. Sabemos que

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)} e_1 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Portanto, segue de (1.2) que

$$*(1) = e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \frac{1}{\sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}} v_1 \wedge \dots \wedge v_n,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Seja M uma variedade Riemanniana orientada de dimensão n . Podemos então fixar uma orientação em cada um dos espaços tangentes $T_x M$, assim como nos espaços cotangentes $T_x^* M$.

Uma vez que M carrega uma estrutura Riemanniana, podemos definir um produto interno em $T_x^* M$ tal que

$$\langle dx^i, dx^j \rangle = g^{ij}(x),$$

onde $(g^{ij}(x)) := (g_{ij}(x))^{-1}$. Assim, obtemos um operador estrela

$$* : \Lambda^p(T_x^* M) \rightarrow \Lambda^{n-p}(T_x^* M)$$

para cada $x \in M$, ou seja, um operador $* : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{n-p}(M)$ que preserva o ponto base.

Como a métrica em $T_x^* M$ é dada por $g^{ij}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}$, segue do Lema 1.2.13 que, em coordenadas locais, nós temos

$$*(1) = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

A expressão acima é chamada de *forma de volume*. Em particular,

$$\text{Vol}(M) := \int_M *(1).$$

Seja $\Omega_c^p(M)$ o espaço das p -formas com suporte compacto. Definimos o produto interno L^2 em $\Omega_c^p(M)$ por

$$(\alpha, \beta) = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle * (1),$$

$\alpha, \beta \in \Omega_c^p(M)$. A norma L^2 em $\Omega_c^p(M)$ é definida por

$$\|\alpha\| = (\alpha, \alpha)^{1/2}.$$

Segue do Lema 1.2.11 que $(\alpha, \beta) = \int_M (\alpha \wedge * \beta)$.

Podemos estender o produto interno $(\cdot, \cdot)$ a $L^2(\Omega^p(M))$, o qual permanece bilinear e positivo definido pois, como de costume, na definição de L^2 , as funções que diferem apenas em um conjunto de medida nula são identificadas.

Vamos assumir agora a hipótese de que M é fechada (compacta sem bordo).

Definição 1.2.14. Seja d^* o *operador adjunto formal* de d em $\bigoplus_{p=0}^n \Omega^p(M)$ com respeito a $(\cdot, \cdot)$. Isto significa que para $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$ e $\beta \in \Omega^p(M)$,

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^* \beta).$$

Portanto, d^* aplica $\Omega^p(M)$ em $\Omega^{p-1}(M)$.

Lema 1.2.15. O operador $d^* : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$ satisfaz

$$d^* = (-1)^{n(p+1)+1} * d *.$$

Demonstração. Sejam $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$ e $\beta \in \Omega^p(M)$. Observe que

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge * \beta) &= d\alpha \wedge * \beta + (-1)^{p-1} \alpha \wedge d * \beta \\ &= d\alpha \wedge * \beta + (-1)^{p-1} (-1)^{(p-1)(n-p+1)} \alpha \wedge * (d * \beta) \text{ pelo Lema 1.2.12} \\ &= d\alpha \wedge * \beta - (-1)^{n(p+1)+1} \alpha \wedge (* d * \beta), \end{aligned}$$

onde acima nós usamos que $d * \beta \in \Omega^{n-p+1}(M)$ e $(p-1)(n-p+2) \equiv n(p+1) + 2 \pmod{2}$. Portanto, segue do Teorema de Stokes que

$$\begin{aligned} (d\alpha, \beta) &= \int_M d\alpha \wedge * \beta \\ &= \int_M d(\alpha \wedge * \beta) + (-1)^{n(p+1)+1} \int_M \alpha \wedge (* d * \beta) \\ &= (\alpha, (-1)^{n(p+1)+1} * d * \beta). \end{aligned}$$

Como isto vale para todo $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$, segue da definição que $d^* \beta = (-1)^{n(p+1)+1} * d * \beta$, como queríamos demonstrar. $\square$

Definição 1.2.16. O *operador de Laplace-Beltrami* em $\Omega^p(M)$ é definido por

$$\Delta = dd^* + d^*d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M)$$

para $1 \leq p \leq n$. Para $p = 0$, definimos $\Delta = d^*d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^0(M)$. Dizemos que

$\omega \in \Omega^p(M)$ é harmônica se $\Delta\omega = 0$.

Corolário 1.2.17. O operador Δ é formalmente autoadjunto, ou seja,

$$(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta)$$

para $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$.

Demonstração. Se $1 \leq p \leq n$, segue das definições de Δ, d^* e $(\cdot, \cdot)$ que

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha, \beta) &= (dd^*\alpha, \beta) + (d^*d\alpha, \beta) \\ &= (d^*\alpha, d^*\beta) + (d\alpha, d\beta) \\ &= (\alpha, dd^*\beta) + (\alpha, d^*d\beta) \\ &= (\alpha, \Delta\beta). \end{aligned}$$

Analogamente, se $p = 0$, segue que

$$(\Delta\alpha, \beta) = (d^*d\alpha, \beta) = (d\alpha, d\beta) = (\alpha, d^*d\beta) = (\alpha, \Delta\beta).$$

□

Lema 1.2.18. Δ é não-negativo, ou seja, $(\Delta\alpha, \alpha) \geq 0$ para toda $\alpha \in \Omega^p(M)$. Além disso, α é harmônica se, e somente se, $d\alpha = 0$ e $d^*\alpha = 0$ para $1 \leq p \leq n$ ou $d\alpha = 0$ para $p = 0$.

Demonstração. Basta observar que

$$(\Delta\alpha, \alpha) = (dd^*\alpha, \alpha) + (d^*d\alpha, \alpha) = (d^*\alpha, d^*\alpha) + (d\alpha, d\alpha) = \|d^*\alpha\|^2 + \|d\alpha\|^2 \geq 0$$

no caso em que $1 \leq p \leq n$ e que

$$(\Delta\alpha, \alpha) = (d^*d\alpha, \alpha) = (d\alpha, d\alpha) = \|d\alpha\|^2 \geq 0$$

no caso em que $p = 0$.

□

Corolário 1.2.19. Em uma variedade Riemanniana fechada conexa, toda função harmônica é constante.

Proposição 1.2.20. $\Delta^* = *\Delta$.

Demonstração. Veja [10], Proposição 3.1.

□

1.2.2 Representando as Classes de Cohomologia por Formas Harmônicas

Primeiramente vamos apresentar a definição dos grupos de cohomologia de de Rham. Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que uma p -forma $\alpha \in \Omega^p(M)$ é fechada se

$d\alpha = 0$ e *exata* se existe $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$ tal que $d\eta = \alpha$. Por definição, a única 0-forma (função) exata é a 0-forma identicamente nula.

Segue do Lema 1.2.9 que toda forma exata é fechada. Dizemos que duas formas fechadas $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ são *cohomólogas* se $\alpha - \beta$ é exata. Esta propriedade determina uma relação de equivalência no espaço das formas fechadas em $\Omega^p(M)$ de tal maneira que o conjunto das respectivas classes de equivalência é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, o qual é chamado de *p-ésimo grupo de cohomologia de de Rham de M* e é denotado por

$$H_{dR}^p(M, \mathbb{R}),$$

que usualmente denotaremos apenas por $H^p(M)$. Mais precisamente, se $Z^p(M)$ e $B^p(M)$ denotam os subespaços de $\Omega^p(M)$ formados pelas p -formas fechadas e pelas p -formas exatas, respectivamente, segue que $B^p(M) \subset Z^p(M)$ e

$$H_{dR}^p(M; \mathbb{R}) := Z^p(M)/B^p(M).$$

Teorema 1.2.21 (Hodge). *Seja M uma variedade Riemanniana fechada de dimensão n . Então toda classe de cohomologia em $H^p(M)$, $0 \leq p \leq n$, contém precisamente uma p -forma harmônica.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [30], Capítulo 6. □

Usando o teorema anterior, juntamente com alguns resultados auxiliares de Análise, é possível demonstrar o seguinte resultado (veja [18], Seção 3.4):

Corolário 1.2.22. *Seja M uma variedade diferenciável fechada de dimensão n . Então cada grupo de cohomologia de de Rham $H^p(M)$, $0 \leq p \leq n$, tem dimensão finita.*

Como antes, considere uma variedade diferenciável fechada e orientada M de dimensão n . Definimos uma aplicação bilinear

$$H_{dR}^p(M, \mathbb{R}) \times H_{dR}^{n-p}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta. \tag{1.4}$$

Precisamos demonstrar que $\int_M \omega \wedge \eta$ depende apenas das classes $[\omega]$ e $[\eta]$ de ω e η , respectivamente. De fato, se ω' e ω são cohomólogas, então existe uma $(p-1)$ -forma α

com $\omega' = \omega + d\alpha$ e

$$\begin{aligned}
 ([\omega'], [\eta]) &= \int_M \omega' \wedge \eta = \int_M (\omega + d\alpha) \wedge \eta \\
 &= \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d(\alpha \wedge \eta) - (-1)^p \omega \wedge d\eta \\
 &= \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d(\alpha \wedge \eta) \text{ uma vez que } \eta \text{ é fechada} \\
 &= \int_M \omega \wedge \eta \text{ pelo Teorema de Stokes.}
 \end{aligned}$$

Portanto (1.4) depende apenas da classe de cohomologia de ω e, da mesma forma, depende apenas da classe de cohomologia de η .

Lema 1.2.23. *Sejam V e W espaços vetoriais reais de dimensão finita e $Q : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear não-degenerada,¹ então*

$$\begin{aligned}
 V &\rightarrow W^* \\
 v &\mapsto Q(v, \cdot)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 W &\rightarrow V^* \\
 w &\mapsto Q(\cdot, w)
 \end{aligned}$$

são isomorfismos lineares.

Demonstração. Como Q é uma forma bilinear, as aplicações $v \mapsto Q(v, \cdot)$ e $w \mapsto Q(\cdot, w)$ são lineares. Dados $u, v \in V$ com $u \neq v$, como Q é não-degenerada, existe $w_0 \in W$ tal que $Q(u - v, w_0) \neq 0$, ou seja, $Q(u, w_0) \neq Q(v, w_0)$. Portanto, a aplicação $v \mapsto Q(v, \cdot)$ é injetiva. Assim, $\dim V \leq \dim W^* = \dim W$.

Analogamente, usando a aplicação $w \mapsto Q(\cdot, w)$, temos que $\dim W \leq \dim V$. Portanto, $\dim V = \dim W$.

Concluimos então que, por V e W terem a mesma dimensão finita e as duas aplicações serem injetivas, $v \mapsto Q(v, \cdot)$ e $w \mapsto Q(\cdot, w)$ são isomorfismos lineares. $\square$

Teorema 1.2.24 (Poincaré). *Seja M uma variedade diferenciável fechada e orientada de dimensão n . Os espaços vetoriais $H_{dR}^p(M, \mathbb{R})$ e $(H_{dR}^{n-p}(M, \mathbb{R}))^*$ são linearmente isomorfos.*

Demonstração. De acordo com o lema anterior, basta demonstrar que a aplicação (1.4) é não-degenerada. Para isso, dada uma classe de cohomologia não-nula $[\omega] \in H_{dR}^p(M, \mathbb{R})$, devemos encontrar uma classe de cohomologia $[\eta] \in H_{dR}^{n-p}(M, \mathbb{R})$ tal que $\int_M \omega \wedge \eta \neq 0$.

¹Isto significa que dados $v \in V \setminus \{0\}$ e $w \in W \setminus \{0\}$, existem $v_0 \in V$ e $w_0 \in W$ tais que $Q(v, w_0) \neq 0$ e $Q(v_0, w) \neq 0$.

Pelo Teorema de Hodge, podemos assumir que ω é a representante harmônica de $[\omega]$. Como $[\omega] \neq 0$, segue que $\omega \neq 0$. Além disso, segue da Proposição 1.2.20 que $*\omega$ também é harmônica e, em particular, fechada. Assim, $*\omega$ representa a classe de cohomologia $[\omega] \in H_{dR}^{n-p}(M, \mathbb{R})$ e satisfaz

$$\int_M \omega \wedge *\omega = \|\omega\|^2 > 0,$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Definição 1.2.25. O p -ésimo grupo de homologia $H_p(M, \mathbb{R})$ de uma variedade diferenciável fechada M é definido como sendo $(H_{dR}^p(M, \mathbb{R}))^*$. O p -ésimo número de Betti de M é definido por

$$b_p(M) = \dim H^p(M, \mathbb{R}).$$

A partir da definição acima, o Teorema 1.2.24 pode ser resumido por

$$H_p(M, \mathbb{R}) \cong H_{dR}^{n-p}(M, \mathbb{R}).$$

Esta afirmação é chamada de *dualidade de Poincaré*.

Corolário 1.2.26. Seja M uma variedade diferenciável fechada e orientada de dimensão n . Então

$$H_{dR}^n(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

e

$$b_p(M) = b_{n-p}(M) \quad \text{para } 0 \leq p \leq n.$$

Demonstração. Como M é conexa, segue do Corolário 1.2.19 juntamente com o Teorema 1.2.21 que $H_{dR}^0(M, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, tendo em vista que $H_{dR}^0(M, \mathbb{R})$ pode ser visto como o conjunto das funções diferenciáveis f sobre M tais que $df = 0$. Portanto, segue do Teorema 1.2.24 que

$$H_{dR}^n(M, \mathbb{R}) \cong (H_{dR}^0(M, \mathbb{R}))^* \cong \mathbb{R}.$$

A partir do Teorema 1.2.24 também obtemos que

$$b_p(M) = \dim H^p(M, \mathbb{R}) = \dim H^{n-p}(M, \mathbb{R}) = b_{n-p}(M).$$

$\square$

O espaço das p -formas harmônicas sobre uma variedade Riemanniana M será denotado por $\mathcal{H}^p(M)$.

Definição 1.2.27. Dado X um campo vetorial sobre M , o *produto interior*

$$\iota_X : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$$

é uma aplicação que manda uma p -forma ω em uma $(p-1)$ -forma $\iota_X \omega$ definida pela propriedade que

$$(\iota_X \omega)(X_1, \dots, X_{p-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{p-1})$$

para quaisquer campos de vetores $X_1, \dots, X_{p-1}$.

Em uma variedade diferenciável M com fronteira não-vazia, a condição de que uma p -forma α satisfaz $\Delta\alpha = 0$ se, e somente se, $d\alpha = 0$ e $d^*\alpha = 0$ não é mais verdadeira. Portanto, em uma variedade com fronteira não-vazia, dizemos que uma p -forma α é *harmônica* se α é fechada e *cofechada* ($d^*\alpha = 0$).

Seja M uma variedade Riemanniana com fronteira não-vazia. Uma p -forma α é *normal na fronteira* quando $\nu^\flat \wedge \alpha = 0$ sobre ∂M e é *tangente na fronteira* quando $i_\nu \alpha = 0$ sobre ∂M , onde ν é o vetor conormal unitário de ∂M que aponta para fora de M .

Definimos o espaço das p -formas harmônicas (fechadas e cofechadas) que são normais na fronteira por

$$\mathcal{H}_T^p(M, g) = \{\alpha \in \Omega^p(M); d\alpha = 0, d^*\alpha = 0 \text{ em } M \text{ e } \nu^\flat \wedge \alpha = 0 \text{ em } \partial M\},$$

e das que são tangentes na fronteira por

$$\mathcal{H}_N^p(M, g) = \{\alpha \in \Omega^p(M); d\alpha = 0, d^*\alpha = 0 \text{ em } M \text{ e } i_\nu \alpha = 0 \text{ em } \partial M\}.$$

1.3 Conexões Afins

Definição 1.3.1. Sejam M uma variedade diferenciável e E um fibrado vetorial sobre M . Uma *conexão (afim)* sobre E é uma aplicação bilinear $D : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ tal que

$$\begin{aligned} D(fX, \sigma) &= fD(X, \sigma), \\ D(X, f\sigma) &= X(f)\sigma + fD(X, \sigma), \end{aligned}$$

para todos $f \in C^\infty(M)$, $X \in \Gamma(TM)$ e $\sigma \in \Gamma(E)$. Em geral, denotamos $D(X, \sigma)$ por $D_X \sigma$.

A primeira equação acima nos diz que $(D_X \sigma)_x$, $x \in M$, depende apenas de σ e de X_x . A segunda equação é chamada de *Regra de Leibniz*.

Sejam $x_0 \in M$ e U uma vizinhança de x_0 tal que em U estão definidas uma carta para M e uma carta do fibrado para E . Desta forma, obtemos campos de vetores coordenados $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ e, através da identificação

$$E|_U \cong U \times \mathbb{R}^m \quad (m = \text{dimensão da fibra de } E),$$

uma base do $\mathbb{R}^m$ fornece uma base $\mu_1, \dots, \mu_m$ das seções de $E|_U$. Para uma conexão D ,

definimos os *símbolos de Christoffel* Γ_{ij}^k ($i = 1, \dots, n, j, k = 1, \dots, m$) por

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mu_j =: \Gamma_{ij}^k \mu_k.$$

Uma conexão sobre o fibrado tangente TM será denotada por ∇ . Os símbolos de Christoffel da conexão ∇ na base coordenada $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ são dados por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Definição 1.3.2. Dizemos que uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é *compatível com a métrica* se para quaisquer $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, temos

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

Definição 1.3.3. Uma conexão ∇ sobre TM é *simétrica* se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todos $X, Y \in \Gamma(TM)$, onde $[X, Y] = XY - YX$ é o colchete de Lie.

Definição 1.3.4. Uma conexão ∇ sobre TM é dita ser *plana* se cada ponto em M possui uma vizinhança U com um sistema local de coordenadas, $x = (x^1, \dots, x^n)$, para o qual os campos de vetores coordenados $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ são paralelos, ou seja,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0$$

para todos $i, j = 1, \dots, n$.

1.3.1 A Conexão de Levi-Civita

Seja M uma variedade Riemanniana com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposição 1.3.5. *Em cada variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.*

Demonstração. Veja [9]. □

Definição 1.3.6. A conexão ∇ determinada pela proposição acima é chamada de *conexão de Levi-Civita* de M .

Daqui em diante, ∇ sempre denotará a conexão de Levi-Civita.

Definição 1.3.7. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Definimos o *gradiente* de f como sendo o campo de vetores ∇f sobre M tal que

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f) = df(X)$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$.

Proposição 1.3.8. *Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal definido em um aberto $U \subset M$. Então, em U , nós temos*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i.$$

Demonstração. Seja $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ um campo em U . Segue que

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{i=1}^n a_i e_i(f) \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{j=1}^n e_j(f) e_j \right\rangle \\ &= \left\langle X, \sum_{j=1}^n e_j(f) e_j \right\rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i.$$

□

Definição 1.3.9. Seja X um campo de vetores sobre uma variedade Riemanniana M . A *divergência* de X no ponto $x \in M$ é definida por

$$(\operatorname{div} X)(x) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle,$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_x M$ é uma base ortonormal.

Observe que $(\operatorname{div} X)(x)$ é o traço da aplicação linear $y \mapsto (\nabla_y X)_x$, $y \in T_x M$. Portanto, $(\operatorname{div} X)(x)$ não depende da base ortonormal escolhida $\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_x M$.

Segue diretamente da definição que, dados $X, Y \in \Gamma(TM)$, nós temos

$$\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y.$$

Outra propriedade menos imediata é que

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + \langle \nabla f, X \rangle.$$

De fato, dado $x \in M$, considere uma vizinhança U de x em M e um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ sobre U . Segue da Regra de Leibniz juntamente com a proposição anterior

que, em U ,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(fX) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(fX), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n (e_i(f) \langle X, e_i \rangle + f \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle) \\ &= \langle \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i, X \rangle + f \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle = \langle \nabla f, X \rangle + f \operatorname{div}(X),\end{aligned}$$

como desejado.

Definição 1.3.10. O *tensor curvatura de Riemann* R de uma variedade Riemanniana M é a correspondência que a cada par $(X, Y) \in \Gamma(TM) \times \Gamma(TM)$ associa a aplicação

$$R(X, Y) : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

definida por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Segue diretamente das propriedades de ∇ que R é linear em cada uma de suas entradas.

Proposição 1.3.11. *Dados $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$, nós temos*

- i) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$;
- ii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$;
- iii) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$;
- iv) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$.

Demonstração. Veja [18]. □

Segue das propriedades acima que

$$\begin{aligned}\langle R(fX, Y)Z, W \rangle &= \langle R(Z, W)(fX), Y \rangle = -\langle R(Z, W)Y, fX \rangle \\ &= -f \langle R(Z, W)Y, X \rangle = f \langle R(X, Y)Z, W \rangle.\end{aligned}$$

Como isto vale para todo $W \in \Gamma(TM)$, nós temos

$$R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z.$$

Analogamente,

$$R(X, fY)Z = R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z.$$

Isto significa que $(R(X, Y)Z)_x$, $x \in M$, depende apenas de X_x, Y_x e Z_x , o que justifica o uso da palavra ‘tensor’ para definir R .

Definição 1.3.12. Sejam M uma variedade Riemanniana e $x \in M$. A *curvatura seccional* de M no ponto x com respeito ao plano gerado por dois vetores linearmente independentes $X, Y \in T_x M$ é definida por

$$K(X \wedge Y) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle \frac{1}{|X \wedge Y|^2},$$

onde $|X \wedge Y|^2 = \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2$.

É possível demonstrar que $K(X \wedge Y)$ depende apenas do plano gerado por X e Y , ou seja, se $\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$ gera o mesmo plano que $\{X, Y\}$, então $K(X \wedge Y) = K(\tilde{X} \wedge \tilde{Y})$ (ver [9]).

Definição 1.3.13. A *curvatura de Ricci* de M no ponto x na direção de $X \in T_x M$ é definida por

$$\text{Ric}(X, X) = g^{ij} \left\langle R \left(X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, X \right\rangle.$$

Observe que $\text{Ric}(X, X) = g^{ij} \left\langle R \left(X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, X \right\rangle = -g^{ij} \left\langle R \left(X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) X, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$, ou seja, $\text{Ric}(X, X)$ é o traço da aplicação linear $y \mapsto -R(X, y)X$, $y \in T_x M$. Portanto, se $\|X\| = 1$, temos que a curvatura de Ricci $\text{Ric}(X, X)$ é a soma de $n - 1$ curvaturas seccionais com respeito a $n - 1$ planos que contém X . De fato, se $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = X\}$ é uma base ortonormal de $T_x M$, então

$$\text{Ric}(X, X) = - \sum_{i=1}^n \langle R(X, e_i)X, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(X, e_i)e_i, X \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} K(X \wedge e_i),$$

como desejado.

1.4 O Método de Bochner

Lema 1.4.1. *Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal local sobre M com co-referencial dual $\{\eta^1, \dots, \eta^n\}$. Dada uma 1-forma η sobre M , nós temos*

$$-\Delta \langle \eta, \eta \rangle = -2 \langle \Delta \eta, \eta \rangle + 2 \langle \nabla_{e_i} \eta, \nabla_{e_i} \eta \rangle - 2 \langle \eta, \eta^i \wedge \iota_{e_j} R(e_i, e_j) \eta \rangle,$$

onde $\iota_{e_j} : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$ denota o produto interior por e_j .

Demonstração. Veja [18]. □

Teorema 1.4.2. *Usando a notação do lema anterior, dada uma 1-forma η sobre M , nós temos*

$$-\Delta \langle \eta, \eta \rangle = -2 \langle \Delta \eta, \eta \rangle + 2 |\nabla \eta|^2 + 2 \text{Ric}(\eta, \eta),$$

onde $|\nabla \eta|^2 := \langle \nabla_{e_i} \eta, \nabla_{e_i} \eta \rangle$ e, escrevendo $\eta = f_i \eta^i$,

$$\text{Ric}(\eta, \eta) := \text{Ric}(f_i e_i, f_j e_j) = f_i f_j \text{Ric}(e_i, e_j).$$

Demonstração. Veja [18]. □

Corolário 1.4.3. *Se ω é uma 1-forma harmônica sobre M , então*

$$-\Delta\langle\omega,\omega\rangle=2|\nabla\omega|^2+2\operatorname{Ric}(\omega,\omega).$$

1.5 A Segunda Forma Fundamental

Seja M uma subvariedade de uma variedade Riemanniana N . Sabemos que M se torna uma variedade Riemanniana quando restringimos a métrica de N a cada um dos subespaços T_xM de T_xN , $x \in M$. Queremos então descrever a conexão de Levi-Civita ∇^M de M em função da conexão de Levi-Civita ∇^N de N .

Se X e Y são campos locais de vetores em M e $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ são extensões locais de X e Y a N , respectivamente, definimos

$$\nabla_X^M Y = (\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y})^\top,$$

onde $^\top : T_xN \rightarrow T_xM$ denota a projeção ortogonal de T_xN sobre T_xM , $x \in M$. Podemos verificar sem maiores dificuldades que $\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{Y}$ depende apenas dos valores de $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ ao longo de M , ou seja, de X e Y . Logo, $\nabla_X^M Y$ está bem definida. Além disso, ∇^M é simétrica e compatível com a métrica de M induzida por N . Portanto, ∇^M é a conexão de Levi-Civita de M .

Seja $\nu(x)$ um campo de vetores definido em uma vizinhança de $x_0 \in M \subset N$ que é ortogonal a M , ou seja,

$$\langle \nu(x), X \rangle = 0 \quad \text{para todo } X \in T_xM.$$

De outro modo, $\nu(x) \in T_xM^\perp$ para cada x .

Proposição 1.5.1. $(\nabla_X^N \nu)^\top(x)$ depende apenas dos valores de X e ν no ponto x .

Demonstração. Sejam f e h funções diferenciáveis com valores reais definidas em uma vizinhança de x . Segue que

$$(\nabla_{fX}^N h\nu)^\top(x) = (fX(h)(x)\nu(x))^\top + f(x)h(x)(\nabla_X^N \nu)^\top(x) = f(x)h(x)(\nabla_X^N \nu)^\top(x),$$

tendo vez que $\nu(x) \in T_xM^\perp$. Portanto, se $f(x) = 0$ ou $h(x) = 0$, então $(\nabla_{fX}^N h\nu)^\top(x) = 0$, o que demonstra que $(\nabla_{fX}^N h\nu)^\top(x)$ depende apenas dos valores dos campos $Y = fX$ e $\eta = h\nu$ no ponto x , como queríamos demonstrar. □

Definição 1.5.2. O *segundo tensor fundamental* de M em N no ponto $x \in M$ é a aplicação

$$S : T_xM \times T_xM^\perp \rightarrow T_xM$$

definida por $S(X, \nu) = (\nabla_X^N \nu)^\top$.

Lema 1.5.3. Dado $\nu \in T_x M^\perp$, a forma bilinear $\ell_\nu : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\ell_\nu(X, Y) = \langle S(X, \nu), Y \rangle$$

é simétrica.

Demonstração. Dados $X, Y \in T_x M$,

$$\begin{aligned} \ell_\nu(X, Y) &= \langle (\nabla_X^N \nu)^\top, Y \rangle = \langle \nabla_X^N \nu - (\nabla_X^N \nu)^\perp, Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X^N \nu, Y \rangle = X \langle \nu, Y \rangle - \langle \nu, \nabla_X^N Y \rangle \\ &= -\langle \nu, \nabla_X^N Y \rangle \\ &= -\langle \nu, \nabla_Y^N X + [X, Y] \rangle \text{ uma vez que } \nabla^N \text{ é simétrica} \\ &= -\langle \nu, \nabla_Y^N X \rangle \\ &= \langle \nabla_Y^N \nu, X \rangle \\ &= \langle (\nabla_Y^N \nu)^\top, X \rangle \\ &= \ell_\nu(Y, X). \end{aligned}$$

□

Definição 1.5.4. ℓ_ν é chamada de *segunda forma fundamental* de M em N com respeito a ν .

Às vezes se utiliza também a expressão *segunda forma fundamental* de M em N para designar a aplicação

$$\Pi(X, Y) = \nabla_X^N Y - (\nabla_X^N Y)^\top = (\nabla_X^N Y)^\perp,$$

onde X e Y são campos locais de vetores tangentes a M .

1.5.1 Curvatura de Subvariedades

Considere uma subvariedade M de dimensão m e codimensão arbitrária em uma variedade Riemanniana N . Fixado um campo de vetores ν normal a M , escrevemos $S_\nu(X) = S(X, \nu)$. Segue do Lema 1.5.3 que a aplicação $S_\nu : T_x M \rightarrow T_x M$ é auto-adjunta.

Se ν é unitário, os m autovalores de S_ν , os quais são reais por S_ν ser auto-adjunta, são chamados de *curvaturas principais* de M em N na direção ν . Os autovetores correspondentes às curvaturas principais são chamados de *direções principais*.

Definição 1.5.5. A *curvatura média* de M em N na direção ν é definida por

$$H_\nu = \text{tr } S_\nu.$$

Além disso, para a segunda forma fundamental II , o *vetor curvatura média* é definido por

$$\vec{H} = \text{tr II}.$$

Se $e_1, \dots, e_m$ é uma base ortonormal de $T_x M$, então

$$H_\nu = \sum_{i=1}^m \ell_\nu(e_i, e_i) \quad \text{e} \quad \vec{H} = \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i}^N e_i)^\perp.$$

Teorema 1.5.6 (Equação de Gauss). *Sejam N uma variedade Riemanniana e M uma subvariedade de N . Considere $p \in M$ e X e Y dois vetores ortonormais pertencentes a $T_p M$. Então*

$$K^M(X, Y) = K^N(X, Y) + \langle \text{II}(X, X), \text{II}(Y, Y) \rangle - |\text{II}(X, Y)|^2,$$

onde K^M e K^N são as curvaturas seccionais de M e N , respectivamente.

Demonstração. Veja [9], Capítulo VI. □

Definição 1.5.7. Uma subvariedade M de uma variedade Riemanniana N é *totalmente geodésica* se toda segunda forma fundamental ℓ_ν de M em N se anula identicamente.

1.5.2 Fórmula da Primeira Variação do Volume

Sejam N uma variedade Riemanniana e M uma subvariedade de N . Denote por dM a forma de volume de M .

Definimos uma *variação local* de M em N como sendo uma aplicação diferenciável

$$F : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N \quad (\epsilon > 0)$$

tal que

$$\text{supp } F := \overline{\{x \in M; F(x, t) \neq x \text{ para algum } t \in (-\epsilon, \epsilon)\}}$$

é um subconjunto compacto de M e $F(x, 0) = x$ para todo $x \in M$. Por simplicidade, denotamos $M_t = F_t(M)$, onde $F_t(x) = F(x, t)$. O campo $\xi = \frac{\partial F}{\partial t} \big|_{t=0}$ é chamado de *campo variacional* da variação F .

Lema 1.5.8. *Usando as mesmas notações acima, temos que*

$$\frac{\partial}{\partial t} dM_t \big|_{t=0} = \text{div}_M(\xi) dM.$$

A função suave $\text{div}_M(\xi) : M \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$(\text{div}_M(\xi))(x) = \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{e_i}^N \xi, e_i \rangle,$$

onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ é uma base ortonormal de $T_x M$, $x \in M$.

Demonstração. Veja [21]. □

A partir do lema acima, podemos concluir o seguinte teorema:

Teorema 1.5.9 (Fórmula da Primeira Variação do Volume).

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(M_t) |_{t=0} = \int_M \text{div}_M(\xi) dM.$$

Lema 1.5.10. *Seja X um campo de vetores ao longo de M . Decompondo X em parte tangente e parte normal a M , $X = X^\top + X^\perp$, temos que*

$$\text{div}_M(X) = \text{div}(X^\top) - \langle X^\perp, \vec{H} \rangle.$$

Demonstração. Segue diretamente da definição que

$$\text{div}_M(X) = \text{div}_M(X^\top) + \text{div}_M(X^\perp) = \text{div}(X^\top) + \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{e_i}^N(X^\perp), e_i \rangle.$$

Como $X^\perp$ é normal e e_i é tangente a M , segue que

$$0 = e_i \langle X^\perp, e_i \rangle = \langle \nabla_{e_i}^N(X^\perp), e_i \rangle + \langle X^\perp, \nabla_{e_i}^N e_i \rangle.$$

Portanto,

$$\text{div}_M(X) = \text{div}(X^\top) - \sum_{i=1}^m \langle X^\perp, \nabla_{e_i}^N e_i \rangle = \text{div}(X^\top) - \langle X^\perp, \vec{H} \rangle.$$

□

Teorema 1.5.11 (Teorema da Divergência). *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta orientada com bordo ∂M (possivelmente vazio) e X um campo de vetores tangentes sobre M . Então*

$$\int_M \text{div}(X) dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle dS,$$

onde ν é o vetor unitário normal a ∂M que aponta para fora de M e dS é o elemento de volume de ∂M .

Demonstração. Veja [20], Teorema 10.41. □

A partir dos resultados descritos acima, podemos escrever a fórmula da primeira variação do volume da seguinte maneira:

Corolário 1.5.12. *Usando as mesmas notações acima, nós temos*

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(M_t) |_{t=0} = \int_{\partial M} \langle \xi, \nu \rangle dS - \int_M \langle \xi, \vec{H} \rangle dM.$$

Consequentemente, se ξ se anula no bordo ∂M , então

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(M_t) |_{t=0} = - \int_M \langle \xi, \vec{H} \rangle dM.$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 1.5.9 juntamente com o Teorema da Divergência. $\square$

Corolário 1.5.13. *Uma subvariedade M de uma variedade Riemanniana N é um ponto crítico do funcional volume, ou seja,*

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(M_t) |_{t=0} = 0$$

para qualquer ξ com $\xi = 0$ em ∂M se, e somente se, o vetor curvatura média $\vec{H}$ de M se anula identicamente.

Demonstração. Do Corolário 1.5.12, segue que

$$- \int_M \langle \xi, \vec{H} \rangle dM = 0$$

para todo campo variacional ξ com $\xi = 0$ em ∂M . Suponha, por absurdo, que $\vec{H}(p) \neq 0$ para algum ponto $p \in M \setminus \partial M$. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com $f \geq 0$, $f(p) = 1$ e $f|_{\partial M} = 0$. Tomando $\xi = f\vec{H}$, nós temos

$$\int_M f |\vec{H}|^2 dM = \int_M \langle \xi, \vec{H} \rangle dM = 0,$$

o que implica $f |\vec{H}|^2 \equiv 0$. Como $f(p) \neq 0$, segue que $\vec{H}(p) = 0$, o que é uma contradição. Isto demonstra que $\vec{H}(p) = 0$ para todo $p \in M \setminus \partial M$. Por continuidade, segue que $\vec{H} \equiv 0$. $\square$

Definição 1.5.14. Uma subvariedade M de uma variedade Riemanniana N é *mínima* se seu vetor curvatura média $\vec{H}$ se anula identicamente.

Capítulo 2

Resultados Essenciais

Neste capítulo, definiremos o índice de hipersuperfícies mínimas. Além disso, veremos alguns resultados preliminares que nos auxiliarão na demonstração dos teoremas principais.

2.1 O Índice de Hipersuperfícies Mínimas com Fronteira Livre

Seja (Ω^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana orientável com fronteira $\partial\Omega$ não-vazia. Dizemos que uma hipersuperfície compacta, conexa e mergulhada M^n em Ω^{n+1} com fronteira ∂M não-vazia é *propriamente mergulhada* se $\text{int } M \subset \text{int } \Omega$ e $\partial M \subset \partial\Omega$.

De agora em diante, denotaremos por M^n uma hipersuperfície propriamente mergulhada em (Ω^{n+1}, g) . Além disso, assumiremos que M é orientável com um campo normal unitário N globalmente definido sobre M . Também, denotaremos por ν o vetor conormal unitário de ∂M que aponta para fora de M (com respeito à métrica induzida por g).

Definição 2.1.1. A hipersuperfície $M^n \subset \Omega^{n+1}$ propriamente mergulhada é uma *hipersuperfície mínima com fronteira livre* se satisfaz as seguintes condições:

- i) A curvatura média H de M é identicamente nula;
- ii) O vetor conormal ν é ortogonal a $\partial\Omega$ ao longo de ∂M , ou seja, M intersecta $\partial\Omega$ ortogonalmente.

Definição 2.1.2. Dizemos que uma variação $F : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega$ de M é *admissível* se $F_t(\text{int } M) \subset \text{int } \Omega$ e $F_t(\partial M) \subset \partial\Omega$.

Sabemos que a *segunda variação* do volume de uma variação admissível da hipersu-

perfície mínima M com fronteira livre, com campo variacional $\frac{\partial F}{\partial t}|_{t=0} = \phi N$, é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \text{Vol}(M_t) = Q^M(\phi, \phi) := \int_M \left(|\nabla^M \phi|^2 - (\text{Ric}^\Omega(N, N) + |A|^2)\phi^2 \right) dM \\ - \int_{\partial M} \langle D_N \nu, N \rangle \phi^2 dS, \end{aligned}$$

onde A denota a segunda forma fundamental de M e D representa a derivada covariante em (Ω, g) . Observe que N é tangente a $\partial\Omega$ ao longo de ∂M , tendo em vista que M tem fronteira livre, e o termo $\langle D_N \nu, N \rangle$ é precisamente a segunda forma fundamental de $\partial\Omega$, denotada por $\text{II}^{\partial\Omega}$, com respeito a ν aplicada no campo N , tendo em vista que ν é ortogonal a $\partial\Omega$ ao longo de ∂M .

Segue do Teorema da Divergência que

$$Q^M(\phi, \phi) = - \int_M \phi \mathcal{L}_M(\phi) dM + \int_{\partial M} \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \text{II}^{\partial\Omega}(N, N)\phi \right) dS,$$

onde $\mathcal{L}_M(\phi) = -\Delta_M \phi + (\text{Ric}^\Omega(N, N) + |A|^2)\phi$ é o *operador de Jacobi* de M . A forma quadrática Q^M é chamada de *forma do índice* da hipersuperfície mínima com fronteira livre M .

A condição de fronteira $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \text{II}^{\partial\Omega}(N, N)\phi$ é uma condição elíptica de fronteira para o operador autoadjunto $\mathcal{L}_M$. Assim, $\mathcal{L}_M$ admite uma sequência não-decrescente de autovalores

$$\lambda_1(\mathcal{L}_M) \leq \lambda_2(\mathcal{L}_M) \leq \cdots \leq \lambda_k(\mathcal{L}_M) \leq \cdots,$$

que diverge para o infinito, associados a uma base ortonormal $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ de $L^2(M, dM)$ formada por soluções do problema de fronteira de Robin (veja, por exemplo, [13] e [16])

$$\begin{cases} \mathcal{L}_M(\phi) + \lambda\phi = 0 & \text{em } M, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \text{II}^{\partial\Omega}(N, N)\phi = 0 & \text{em } \partial M. \end{cases} \quad (2.1)$$

Definição 2.1.3. O *índice* de uma hipersuperfície mínima com fronteira livre M é igual ao número de autovalores negativos do sistema (2.1) acima (contados com multiplicidade).

Seja V_k o subespaço gerado pelas k primeiras autofunções do problema acima. Temos a seguinte caracterização variacional para o $(k+1)$ -ésimo autovalor $\lambda_{k+1}(\mathcal{L}_M)$:

$$\lambda_{k+1}(\mathcal{L}_M) = \min_{\phi \in V_k^\perp \setminus \{0\}} \frac{Q^M(\phi, \phi)}{\int_M \phi^2 dM},$$

onde $V_k^\perp$ é o complemento ortogonal de V_k em $L^2(M, dM)$. Além disso, o mínimo é atingido precisamente em autofunções de $\mathcal{L}_M$ associadas a $\lambda_{k+1}(\mathcal{L}_M)$ que satisfazem a condição de fronteira $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \text{II}^{\partial\Omega}(N, N)\phi$.

2.2 Teoria de Hodge para Variedades com Fronteira

Lema 2.2.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa, conexa e orientável com fronteira ∂M não-vazia. Se uma p -forma harmônica ω se anula em uma vizinhança $U \cap \partial M \neq \emptyset$ para algum subconjunto aberto $U \subset M$, então ω se anula identicamente em M .*

Demonstração. Ver Teorema 3.4.4 em [26]. □

Teorema 2.2.2 (Hodge-de Rham). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta orientável com fronteira ∂M não-vazia. Para cada $p = 0, \dots, n$, o espaço das p -formas harmônicas em M^n que são tangentes em ∂M é isomorfo ao p -ésimo grupo de cohomologia de de Rham de M^n , i.e.*

$$\mathcal{H}_N^p(M, g) \simeq H_{dR}^p(M, \mathbb{R}).$$

Demonstração. Provaremos o teorema no caso em que $p = 1$. O caso geral pode ser encontrado na Seção 9 do Capítulo 5 de [29].

Em primeiro lugar, observe que se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função harmônica, então, pelo Teorema da Divergência,

$$\int_M |\nabla f|^2 dM = \int_M \operatorname{div}(f \nabla f) dM = \int_{\partial M} f \frac{\partial f}{\partial \nu} dS.$$

Agora, considere o espaço $\mathcal{H}_N^1(M)$ das 1-formas harmônicas ω sobre M que satisfazem a condição de fronteira de Neumann $i_\nu \omega = \omega(\nu) = 0$.

A aplicação

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H}_N^1(M) &\rightarrow H_{dR}^1(M, \mathbb{R}) \\ \omega &\mapsto [\omega] \end{aligned},$$

a qual aplica uma 1-forma harmônica ω em sua classe de cohomologia $[\omega]$, é claramente linear. Suponha que $T(\omega) = [\omega] = 0$, ou seja, $\omega = df$ para alguma $f \in C^\infty(M)$. Como ω é harmônica, em particular cofechada, segue que f é uma função harmônica. Além disso, $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \omega(\nu) = 0$. Assim,

$$\int_M |\nabla f|^2 dM = \int_{\partial M} f \frac{\partial f}{\partial \nu} dS = 0.$$

Logo, $\nabla f = 0$, ou seja, $\omega = df = 0$. Isto demonstra que T é injetiva.

Mostremos agora que T é sobrejetiva. Considere uma 1-forma fechada α sobre M . Queremos mostrar que existe uma 1-forma $\omega \in \mathcal{H}_N^1(M)$ tal que $[\omega] = [\alpha] \in H_{dR}^1(M, \mathbb{R})$. Para isto, seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução suave do problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta f = d^* \alpha & \text{em } M, \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \alpha(\nu) & \text{em } \partial M, \end{cases}$$

e defina $\omega = \alpha - df$. Segue que

- i) $d\omega = d\alpha - d^2f = 0$, tendo em vista que α é fechada;
- ii) $d^*\omega = d^*\alpha - d^*df = d^*\alpha - \Delta f = 0$, pois f é uma solução do problema acima;
- iii) $\omega(\nu) = (\alpha - df)(\nu) = \alpha(\nu) - \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0$, pelo mesmo motivo do item ii).

Logo, ω é fechada e cofechada e satisfaz a condição de Neumann $\omega(\nu) = 0$ sobre ∂M , ou seja, $\omega \in \mathcal{H}_N^1(M)$. Além disso, claramente, $T(\omega) = [\omega] = [\alpha]$. Portanto, T é um isomorfismo. $\square$

Defina

$$\Omega^p(M, \partial M) = \begin{cases} \Omega^p(M) \oplus \Omega^{p-1}(\partial M) & \text{se } p \geq 1, \\ \Omega^0(M) \cong \Omega^0(M) \oplus \{0\} & \text{se } p = 0, \end{cases}$$

e $\hat{d}_p : \Omega^p(M, \partial M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M, \partial M)$ por

$$\hat{d}_p(\omega, \theta) = (d\omega, i^*\omega - d\theta),$$

onde $i : \partial M \rightarrow M$ é a aplicação inclusão. Segue de $d \circ d = 0$ e da comutatividade entre d e i^* que $\hat{d}_{p+1} \circ \hat{d}_p = 0$, ou seja, $\text{Im}(\hat{d}_p) \subset \text{Nuc}(\hat{d}_{p+1})$. Neste caso, para cada $p \geq 1$, podemos considerar o espaço vetorial

$$H_{dR}^p(M, \partial M; \mathbb{R}) := \text{Nuc}(\hat{d}_p) / \text{Im}(\hat{d}_{p-1}),$$

o qual é chamado de *p-ésimo grupo de cohomologia relativa de de Rham do par* $(M, \partial M)$. Se $p = 0$, definimos $H_{dR}^0(M, \partial M; \mathbb{R}) = \text{Nuc}(\hat{d}_0)$.

Observe que $(\omega, \theta) \in \text{Nuc}(\hat{d}_p)$ se, e somente se, ω é uma p -forma fechada sobre M e $i^*\omega$ é uma p -forma exata sobre ∂M com $i^*\omega = d\theta$. Quando $p = 0$, $f \cong (f, 0) \in \text{Nuc}(\hat{d}_0)$ se, e somente se, f é fechada (i.e. $\nabla f = 0$) e $f|_{\partial M} = 0$. Em particular, se M é conexa, $H_{dR}^0(M, \partial M; \mathbb{R}) = \{0\}$.

O espaço dual do espaço $H_{dR}^p(M, \partial M; \mathbb{R})$, o qual denotamos por $H_p(M, \partial M; \mathbb{R})$, é chamado de *p-ésimo grupo de homologia relativa* do par $(M, \partial M)$.

Note que a partir do teorema anterior, temos os seguintes isomorfismos

$$\mathcal{H}_T^p(M, g) \simeq \mathcal{H}_N^{n-p}(M, g) \simeq H_{dR}^{n-p}(M, \mathbb{R}) \simeq H_p(M, \partial M; \mathbb{R}),$$

onde o primeiro isomorfismo vem do operador estrela de Hodge de (M, g) e o terceiro vem da dualidade de Poincaré-Lefschetz (veja, por exemplo, [15]).

Lema 2.2.3. *Seja M^n uma variedade compacta, conexa e orientável de dimensão $n \geq 2$ com fronteira ∂M não-vazia. Se ∂M tem r componentes conexas, então*

$$\dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}) = (r - 1) + (\dim H_1(M, \mathbb{R}) - \dim \text{Im}(i_*)),$$

onde $i_* : H_1(\partial M, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M, \mathbb{R})$ denota a aplicação entre os primeiros grupos de homologia induzida pela inclusão $i : \partial M \rightarrow M$.

Demonstração. Segue diretamente das definições que

$$\begin{aligned} \dim H_0(M, \mathbb{R}) &= \dim H_{dR}^0(M, \mathbb{R}) = 1, \\ \dim H_0(\partial M, \mathbb{R}) &= H_{dR}^0(\partial M, \mathbb{R}) = r, \\ \dim H_0(M, \partial M; \mathbb{R}) &= \dim H_{dR}^0(M, \partial M; \mathbb{R}) = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que existe uma sequência exata

$$\begin{aligned} H_1(\partial M, \mathbb{R}) &\xrightarrow{i_*} H_1(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{j_*} H_1(M, \partial M; \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} H_0(\partial M, \mathbb{R}) \xrightarrow{(i_*)^0} \\ &H_0(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{(j_*)^0} H_0(M, \partial M; \mathbb{R}) = \{0\}. \end{aligned}$$

Portanto, segue do Teorema do Núcleo e da Imagem e da exatidão da sequência acima que

$$\begin{aligned} 1 &= \dim H_0(M, \mathbb{R}) = \dim \text{Nuc}((j_*)_0) + \dim \text{Im}((j_*)_0) = \dim \text{Im}((i_*)_0) \\ &= \dim H_0(\partial M, \mathbb{R}) - \dim \text{Nuc}((i_*)_0) = r - \dim \text{Im}(\delta) \\ &= r - \dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}) + \dim \text{Nuc}(\delta) = r - \dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}) + \dim \text{Im}(j_*) \\ &= r - \dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}) + \dim H_1(M, \mathbb{R}) - \dim \text{Nuc}(j_*) \\ &= r - \dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}) + \dim H_1(M, \mathbb{R}) - \dim \text{Im}(i_*), \end{aligned}$$

o que garante o resultado. □

Lema 2.2.4. *Seja M^2 uma superfície compacta e orientável com fronteira ∂M não-vazia. Então,*

$$\dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}) = 2g + r - 1,$$

onde g é gênero de M e r é o número de componentes conexas de ∂M .

Demonstração. Ver Lema A.0.1 em [23]. □

Lema 2.2.5. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta e orientável com fronteira ∂M não-vazia.*

- i) *Seja $\omega \in \mathcal{H}_T^1(M, g)$ uma 1-forma harmônica em M^n que é normal na fronteira. Então,*

$$\int_M (|\nabla^M \omega|^2 + \text{Ric}^M(\omega, \omega)) dM = - \int_{\partial M} H^{\partial M} |\omega|^2 dS.$$

- ii) *Seja $\omega \in \mathcal{H}_N^1(M, g)$ uma 1-forma harmônica em M^n que é tangencial na fronteira. Então,*

$$\int_M (|\nabla^M \omega|^2 + \text{Ric}^M(\omega, \omega)) dM = - \int_{\partial M} A^{\partial M}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) dS.$$

Demonstração. Desde que ω é harmônica, a fórmula de Bochner para 1-formas nos fornece

$$-\frac{1}{2}\Delta\langle\omega,\omega\rangle = |\nabla^M\omega|^2 + \text{Ric}^M(\omega,\omega).$$

Integrando a equação acima e usando o Teorema da Divergência, nós temos

$$\begin{aligned} \int_M (|\nabla^M\omega|^2 + \text{Ric}^M(\omega,\omega))dM &= -\frac{1}{2} \int_M \Delta_M \langle\omega,\omega\rangle dM \\ &= \frac{1}{2} \int_M \text{div}(\nabla^M \langle\omega,\omega\rangle) dM \\ &= \int_{\partial M} \langle \nabla_\nu^M \omega, \omega \rangle dS, \end{aligned}$$

onde ν é o vetor unitário conormal de ∂M que aponta para fora de M .

Agora, considere um referencial ortonormal local $\{T_1, \dots, T_{n-1}\}$ em ∂M . Segue que $\{T_1, \dots, T_{n-1}, \nu\}$ é uma base ortonormal do espaço tangente de M nos pontos $p \in \partial M$ onde o referencial $\{T_1, \dots, T_{n-1}\}$ está definido.

Se $\omega \in \mathcal{H}_T(M, g)$, então

$$0 = d^*\omega = -\text{div}(\omega^\sharp) = -\sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{T_i}^M \omega^\sharp, T_i \rangle - \langle \nabla_\nu^M \omega^\sharp, \nu \rangle$$

e $\omega^\sharp = \lambda\nu$ em ∂M para alguma função suave $\lambda : \partial M \rightarrow \mathbb{R}$. Portanto, $|\omega|^2 = \lambda^2$ ao longo de ∂M e

$$\langle \nabla_\nu^M \omega, \omega \rangle = \lambda \langle \nabla_\nu^M \omega^\sharp, \nu \rangle = -\lambda \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{T_i}^M \omega^\sharp, T_i \rangle = -\lambda^2 \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{T_i}^M \nu, T_i \rangle = -H^{\partial M} |\omega|^2,$$

o que garante a primeira parte do resultado.

Para demonstrar a segunda parte, tome $\omega \in \mathcal{H}_N(M, g)$ e observe que

$$\langle \nabla_\nu^M \omega, \omega \rangle = \langle \nabla_\nu^M \omega^\sharp, \omega^\sharp \rangle = \left(\nabla_\nu^M \omega \right) (\omega^\sharp) = \left(\nabla_{\omega^\sharp}^M \omega \right) (\nu) = \langle \nabla_{\omega^\sharp}^M \omega^\sharp, \nu \rangle,$$

onde a terceira igualdade segue do fato que $d\omega = 0$.¹ Consequentemente, como $\langle \omega^\sharp, \nu \rangle = \omega(\nu) = i_\nu \omega = 0$ ao longo de ∂M , nós temos

$$\langle \nabla_{\omega^\sharp}^M \omega^\sharp, \nu \rangle = -\langle \omega^\sharp, \nabla_{\omega^\sharp}^M \nu \rangle = -A^{\partial M}(\omega^\sharp, \omega^\sharp),$$

o que garante a segunda parte do resultado. □

¹ $d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$

2.3 Funções Testes Baseadas em Coordenadas de 2-Formas Harmônicas

Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^{n+1}$ com fronteira suave $\partial\Omega$ e $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$ fixada. Dada uma hipersuperfície mínima, compacta com fronteira livre M^n em Ω , queremos calcular a forma do índice nas funções $\langle N^\flat \wedge \omega, \theta_i \wedge \theta_j \rangle$ para $1 \leq i < j \leq n+1$, onde $\theta_i = E_i^\flat$, N é o campo normal de vetores unitários ao longo de M^n e ω é uma 1-forma harmônica em M^n que é normal ou tangente em ∂M .

Proposição 2.3.1. *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^{n+1}$ cuja fronteira tem curvatura média $H^{\partial\Omega}$ e segunda forma fundamental $\Pi^{\partial\Omega}$ com respeito ao normal exterior $\bar{\nu}$ de $\partial\Omega$ em Ω . Seja M^n uma hipersuperfície mínima, compacta e orientável com fronteira livre em Ω .*

i) *Dada uma 1-forma harmônica ω em M^n que é normal na fronteira ∂M , sejam*

$$u_{ij} = \langle N^\flat \wedge \omega, \theta_i \wedge \theta_j \rangle, \quad 1 \leq i < j \leq n+1,$$

as coordenadas de $N^\flat \wedge \omega$ com respeito à base ortonormal $\{\theta_i \wedge \theta_j\}_{i < j}$ de $\Lambda^2(\mathbb{R}^{n+1})$, onde $\theta_i = E_i^\flat$ e $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$. Então

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} Q^M(u_{ij}, u_{ij}) = - \int_{\partial M} H^{\partial\Omega} |\omega|^2 dS.$$

ii) *Dada uma 1-forma harmônica ω em M^n que é tangencial na fronteira de ∂M e usando as mesmas notações acima, nós temos*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} Q^M(u_{ij}, u_{ij}) = - \int_{\partial M} \left(\Pi^{\partial\Omega}(N, N) |\omega|^2 + \Pi^{\partial\Omega}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) \right) dS.$$

Demonstração. Sejam K e $\widetilde{K}$ as curvaturas seccionais de M e Ω , respectivamente. Desde que Ω é plano, $\widetilde{K} = 0$ e a forma do índice de M^n é dada por

$$Q^M(\phi, \phi) = \int_M |\nabla^M \phi|^2 - |A|^2 \phi^2 dM - \int_{\partial M} \Pi^{\partial\Omega}(N, N) \phi^2 dS.$$

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal local em M^n . Note que

$$|\nabla^M u_{ij}|^2 = \sum_{k=1}^n |D_{e_k} u_{ij}|^2 = \sum_{k=1}^n \langle D_{e_k}(N^\flat \wedge \omega), \theta_i \wedge \theta_j \rangle^2.$$

Somando os valores da forma de índice nas funções u_{ij} para todo par (i, j) com $i < j$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} Q^M(u_{ij}, u_{ij}) &= \int_M \sum_{k=1}^n |D_{e_k}(N^\flat \wedge \omega)|^2 - |A|^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \langle N^\flat \wedge \omega, \theta_i \wedge \theta_j \rangle^2 dM \\
&\quad - \int_{\partial M} II^{\partial\Omega}(N, N) \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \langle N^\flat \wedge \omega, \theta_i \wedge \theta_j \rangle^2 dS \\
&= \int_M |D(N^\flat \wedge \omega)|^2 - |A|^2 |N^\flat \wedge \omega|^2 dM \\
&\quad - \int_{\partial M} II^{\partial\Omega}(N, N) |N^\flat \wedge \omega|^2 dS \\
&= \int_M |D(N^\flat \wedge \omega)|^2 - |A|^2 |\omega|^2 dM - \int_{\partial M} II^{\partial\Omega}(N, N) |\omega|^2 dS,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

tendo em vista que $|N^\flat \wedge \omega|^2 = |N \wedge \omega^\sharp|^2 = |N|^2 |\omega^\sharp|^2 - \langle N, \omega^\sharp \rangle^2 = |\omega|^2$. Além disso, desde que a curvatura do ambiente é identicamente nula, os cálculos obtidos em [1], Proposição 2, nos fornecem

$$|D(N^\flat \wedge \omega)|^2 = |\nabla^M \omega|^2 - |A(\omega^\sharp, \cdot)|^2 + |A|^2 |\omega|^2. \tag{2.3}$$

Agora, dado um vetor unitário $\alpha \in T_q M$, considere uma base ortonormal $\{e_1 = \alpha, e_2, \dots, e_n\}$ de $T_q M$. Sabemos que a curvatura de Ricci de M em q é dada por $\text{Ric}^M(\alpha, \alpha) = \sum_{i=2}^n K(\alpha, e_i)$. Portanto, usando a equação de Gauss, nós obtemos

$$\begin{aligned}
\text{Ric}^M(\alpha, \alpha) &= \sum_{i=2}^n K(\alpha, e_i) \\
&= \sum_{i=2}^n \left(\widetilde{K}(\alpha, e_i) + \langle A(\alpha, \alpha), A(e_i, e_i) \rangle - |A(\alpha, e_i)|^2 \right) \\
&= \langle A(\alpha, \alpha), \sum_{i=1}^n A(e_i, e_i) \rangle - \sum_{i=1}^n |A(\alpha, e_i)|^2 \\
&= \langle A(\alpha, \alpha), \vec{H}^M \rangle - \sum_{i=1}^n |A(\alpha, e_i)|^2 \\
&= - \sum_{i=1}^n |A(\alpha, e_i)|^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Ric}^M(\omega^\sharp, \omega^\sharp) = - \sum_{i=1}^n |A(\omega^\sharp, e_i)|^2,$$

o que implica

$$\text{Ric}^M(\omega, \omega) = -|A(\omega^\sharp, \cdot)|^2. \tag{2.4}$$

Portanto, combinando (2.2) com (2.3) e (2.4), obtemos

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} Q^M(u_{ij}, u_{ij}) = \int_M |\nabla^M \omega|^2 + \text{Ric}^M(\omega, \omega) dM - \int_{\partial M} II^{\partial\Omega}(N, N) |\omega|^2 dS. \tag{2.5}$$

Pela parte i) do Lema 2.2.5 obtemos

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} Q^M(u_{ij}, u_{ij}) = - \int_{\partial M} \left(H^{\partial M} + \Pi^{\partial \Omega}(N, N) \right) |\omega|^2 dS.$$

A suposição de fronteira livre implica que, em cada ponto p em ∂M , se denotarmos por $\{T_1, \dots, T_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $T_p \partial M$ de modo que $\{T_1, \dots, T_{n-1}, N\}$ é uma base ortonormal de $T_p \partial \Omega$, então

$$\begin{aligned} H^{\partial M} + \Pi^{\partial \Omega}(N, N) &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{T_i}^M \nu, T_i \rangle + \Pi^{\partial \Omega}(N, N) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle D_{T_i} \nu - \langle D_{T_i} \nu, N \rangle N, T_i \rangle + \Pi^{\partial \Omega}(N, N) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle D_{T_i} \bar{\nu}, T_i \rangle + \Pi^{\partial \Omega}(N, N) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \Pi^{\partial \Omega}(T_i, T_i) + \Pi^{\partial \Omega}(N, N) \\ &= H^{\partial \Omega}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} Q^M(u_{ij}, u_{ij}) = - \int_{\partial M} H^{\partial \Omega} |\omega|^2 dS.$$

Para provar a parte ii), note que, combinando a equação (2.5) com a parte ii) do Lema 2.2.5, nós temos

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} Q^M(u_{ij}, u_{ij}) &= - \int_{\partial M} A^{\partial M}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) dS - \int_{\partial M} \Pi^{\partial \Omega}(N, N) |\omega|^2 dS \\ &= - \int_{\partial M} \left(\Pi^{\partial \Omega}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) + \Pi^{\partial \Omega}(N, N) |\omega|^2 \right) dS, \end{aligned}$$

tendo em vista que $A^{\partial M}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) = \langle D_{\omega^\sharp} \nu, \omega^\sharp \rangle = \langle D_{\omega^\sharp} \bar{\nu}, \omega^\sharp \rangle = \Pi^{\partial \Omega}(\omega^\sharp, \omega^\sharp)$, uma vez que nos pontos de ∂M teremos $\nu = \bar{\nu}$ por M ter fronteira livre.

□

Capítulo 3

Resultados Principais

Neste capítulo, demonstraremos os principais resultados contidos neste trabalho, os quais relacionam o índice de uma hipersuperfície mínima com fronteira livre com a sua cohomologia, obtidos em [2]. Em particular, demonstraremos que, sob condições geométricas naturais, o índice é limitado por baixo por uma função linear da dimensão do primeiro grupo de homologia relativa.

3.1 Estimativas para o Índice de Hipersuperfícies Mínimas com Fronteira Livre

Definição 3.1.1. Seja M^n uma hipersuperfície orientável em uma variedade Riemanniana orientável (Ω^{n+1}, g) . Fixado um campo normal unitário N sobre M , dizemos que a hipersuperfície M é k -convexa (resp. *estritamente k -convexa*), $1 \leq k \leq n$, se a soma de quaisquer k curvaturas principais de M com respeito a N é sempre não-negativa (resp. positiva). Um domínio suave no espaço Euclidiano é k -convexo (resp. *estritamente k -convexo*) se a sua fronteira é k -convexa (resp. *estritamente k -convexa*) com respeito ao normal unitário que aponta para o exterior.

Um domínio *convexo* (resp. *estritamente convexo*) é simplesmente um domínio 1-convexo (resp. *estritamente 1-convexo*) e um domínio *convexo em média* (resp. *estritamente convexo em média*) é simplesmente um domínio com curvatura média positiva (resp. *estritamente positiva*).

Teorema 3.1.2. *Seja Ω^{n+1} um domínio estritamente convexo em média ($H^{\partial\Omega} > 0$) do espaço Euclidiano $(n+1)$ -dimensional, $n \geq 2$. Seja M^n uma hipersuperfície compacta, orientável, mínima com fronteira livre em Ω^{n+1} . Então,*

$$\text{ind}(M) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}),$$

onde $\text{ind}(M)$ denota o índice de M^n em Ω^{n+1} .

3. Resultados Principais

Demonstração. Fixe uma base ortonormal $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Escreva $\text{ind}(M) = k$ e denote por $\{\phi_q\}_{q=1}^\infty$ uma base ortonormal de $L^2(M, dM)$ formada por autofunções do operador de Jacobi de M que satisfazem a condição de fronteira de Robin (2.1). Considere a aplicação linear definida por

$$\Phi : \mathcal{H}_T^1(M, g) \rightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)k/2}$$

$$\omega \mapsto \left[\int_M \langle N^\flat \wedge \omega, \theta_i \wedge \theta_j \rangle \phi_q dM \right],$$

onde $\theta_i = E_i^\flat$, com $1 \leq i < j \leq n+1$ e $1 \leq q \leq k$. Temos claramente que

$$\dim \mathcal{H}_T^1(M, g) \leq \dim \text{Nuc}(\Phi) + \frac{n(n+1)}{2}k.$$

Segue do Teorema 2.2.2, juntamente com a dualidade de Poincaré-Lefschetz, que

$$\mathcal{H}_T^1(M, g) \simeq H_1(M, \partial M; \mathbb{R}).$$

Portanto, para concluirmos o resultado, precisamos demonstrar que $\text{Nuc}(\Phi) = 0$.

Seja $\omega \in \text{Nuc}(\Phi)$. Segue da definição de Φ que

$$\int_M \langle N^\flat \wedge \omega, \theta_i \wedge \theta_j \rangle \phi_q dM = 0 \quad \forall 1 \leq i < j \leq n+1 \text{ e } 1 \leq q \leq k,$$

i.e. todas as funções $u_{ij} = \langle N^\flat \wedge \omega, \theta_i \wedge \theta_j \rangle$ são ortogonais as k primeiras autofunções $\{\phi_q\}_{q=1}^k$ do operador de Jacobi de M . Desde que $\text{ind}(M) = k$, nós temos

$$0 \leq \lambda_{k+1} = \min_{\phi \in V_k^\perp \setminus \{0\}} \frac{Q(\phi, \phi)}{\int_M \phi^2 dM},$$

onde V_k denota o subespaço gerado por $\{\phi_q\}_{q=1}^k$. Tendo em vista que $u_{ij} \in V_k$, nós temos

$$0 \leq Q(u_{ij}, u_{ij}) \quad \forall 1 \leq i < j \leq n+1.$$

Em particular, segue do item i) da Proposição 2.3.1 que

$$0 \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} Q(u_{ij}, u_{ij}) = - \int_{\partial M} H^{\partial \Omega} |\omega|^2 dS.$$

Como $H^{\partial \Omega} > 0$, a única possibilidade para que a desigualdade acima ocorra é que $\omega = 0$ ao longo de ∂M . Portanto, segue do Lema 2.2.1 que $\omega = 0$. Isto demonstra que se o domínio é estritamente convexo em média, a aplicação Φ tem núcleo trivial. Portanto,

$\dim \text{Nuc}(\Phi) = 0$ e logo

$$\text{ind}(M) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 3.1.3. *Seja Ω^{n+1} um domínio estritamente convexo em média ($H^{\partial\Omega} > 0$) do espaço Euclidiano $(n+1)$ -dimensional, $n \geq 2$. Seja M^n uma hipersuperfície compacta, orientável, mínima com fronteira livre em Ω^{n+1} cuja fronteira ∂M possui r componentes conexas. Então,*

$$\text{ind}(M) \geq \frac{2}{n(n+1)}(r-1).$$

Demonstração. Basta combinar o teorema acima com o Lema 2.2.3. $\square$

Teorema 3.1.4. *Seja Ω^{n+1} um domínio estritamente bi-convexo do espaço Euclidiano $(n+1)$ -dimensional, $n \geq 2$. Seja M^n uma hipersuperfície compacta, orientável, mínima com fronteira livre em Ω^{n+1} . Então,*

$$\text{ind}(M) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_{n-1}(M, \partial M; \mathbb{R}).$$

Demonstração. Seguindo as mesmas ideias da demonstração do Teorema 3.1.2, sejam $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ uma base ortonormal fixa de $\mathbb{R}^{n+1}$ e k o índice de M . Seja também $\{\phi_q\}_{q=1}^\infty$ uma base ortonormal de $L^2(M, dM)$ formada por autofunções do operador de Jacobi de M que satisfazem a condição de fronteira de Robin (2.1). Considere a aplicação linear definida por

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{H}_N^1(M, g) &\rightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)k/2} \\ \omega &\mapsto \left[\int_M \langle N^b \wedge \omega, \theta_i \wedge \theta_j \rangle \phi_q dM \right], \end{aligned}$$

onde $\theta_i = E_i^b$, com $1 \leq i < j \leq n+1$ e $1 \leq q \leq k$. Claramente,

$$\dim \mathcal{H}_N^1(M, g) \leq \dim \text{Nuc}(\Phi) + \frac{n(n+1)}{2}k.$$

Segue do Teorema 2.2.2, juntamente com a dualidade de Poincaré-Lefschetz, que

$$\mathcal{H}_N^1(M, g) \simeq H_{n-1}(M, \partial M; \mathbb{R}).$$

Portanto, precisamos apenas analisar a dimensão do núcleo da aplicação Φ .

Seja $\omega \in \text{Nuc}(\Phi)$. Segue da definição de Φ que

$$\int_M \langle N^b \wedge \omega, \theta_i \wedge \theta_j \rangle \phi_q dM = 0 \quad \forall 1 \leq i < j \leq n+1 \text{ e } 1 \leq q \leq k,$$

3. Resultados Principais

i.e. todas as funções $u_{ij} = \langle N^\flat \wedge \omega, \theta_i \wedge \theta_j \rangle$ são ortogonais as k primeiras autofunções $\{\phi_q\}_{q=1}^k$ do operador de Jacobi de M . Desde que $\text{ind}(M) = k$, nós temos

$$0 \leq \lambda_{k+1} = \min_{\phi \in V_k^\perp \setminus \{0\}} \frac{Q(\phi, \phi)}{\int_M \phi^2 dM},$$

onde V_k denota o subespaço gerado por $\{\phi_q\}_{q=1}^k$. Tendo em vista que $u_{ij} \in V_k$, nós temos

$$0 \leq Q(u_{ij}, u_{ij}) \quad \forall 1 \leq i < j \leq n+1.$$

Em particular, segue do item ii) da Proposição 2.3.1 que

$$0 \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} Q(u_{ij}, u_{ij}) = - \int_{\partial M} \left(\text{II}^{\partial \Omega}(N, N) |\omega|^2 + \text{II}^{\partial \Omega}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) \right) dS. \quad (3.1)$$

Como $\omega^\sharp$ é tangente a M , em particular $\omega^\sharp \perp N$, segue que se $\omega_x \neq 0$ para algum $x \in \partial M$, então

$$\text{II}^{\partial \Omega}(N, N) |\omega|^2 + \text{II}^{\partial \Omega}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) = \left(\text{II}^{\partial \Omega}(N, N) + \text{II}^{\partial \Omega}\left(\frac{\omega^\sharp}{|\omega^\sharp|}, \frac{\omega^\sharp}{|\omega^\sharp|}\right) \right) |\omega|^2 > 0$$

em x , tendo em vista que Ω é estritamente bi-convexo. Portanto, a única possibilidade para que a desigualdade (3.1) ocorra é que $\omega = 0$ ao longo de ∂M . Logo, segue do Lema 2.2.1 que $\omega = 0$. Isto demonstra que se o domínio é estritamente bi-convexo, a aplicação Φ tem núcleo trivial. Portanto, $\dim \text{Nuc}(\Phi) = 0$ e logo

$$\text{ind}(M) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_{n-1}(M, \partial M; \mathbb{R}),$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema 3.1.5. *Seja Ω^{n+1} um domínio estritamente bi-convexo do espaço Euclidiano $(n+1)$ -dimensional, $n \geq 2$. Seja M^n uma hipersuperfície compacta, orientável, mínima com fronteira livre em Ω^{n+1} . Então, para qualquer $\alpha \in [0, 1]$, nós temos*

$$\text{ind}(M) \geq \frac{2}{n(n+1)} (\alpha \dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}) + (1 - \alpha) \dim H_{n-1}(M, \partial M; \mathbb{R})).$$

Como um caso especial, para $\alpha = \frac{1}{2}$, nós temos

$$\text{ind}(M) \geq \frac{1}{n(n+1)} (\dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}) + \dim H_{n-1}(M, \partial M; \mathbb{R})).$$

Demonstração. De fato, como todo domínio estritamente bi-convexo é também estritamente convexo em média, o resultado segue por uma combinação linear das estimativas

obtidas nos Teoremas 3.1.2 e 3.1.4. $\square$

O teorema a seguir requer um pouco mais de cuidado, pois estudaremos o caso em que o domínio é apenas convexo em média ($H^{\partial\Omega} \geq 0$). Quando o domínio for estritamente convexo em média, o resultado segue diretamente combinando o Teorema 3.1.2 e o Lema 2.2.4.

Teorema 3.1.6. *Seja Ω^3 um domínio convexo em média ($H^{\partial\Omega} \geq 0$) do espaço Euclidiano tridimensional. Seja M^2 uma superfície compacta, orientável, mínima com fronteira livre em Ω^3 de gênero g e cuja fronteira ∂M possui r componentes conexas. Então,*

$$\text{ind}(M) \geq \frac{1}{3}(2g + r - 1).$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que

$$\text{ind}(M) < \frac{1}{3}(2g + r - 1). \quad (3.2)$$

Como nas demonstrações dos Teoremas 3.1.2 e 3.1.4, tomemos as aplicações $\Phi_T : \mathcal{H}_T^1(M, g) \rightarrow \mathbb{R}^{3k}$ e $\Phi_N : \mathcal{H}_N^1(M, g) \rightarrow \mathbb{R}^{3k}$ definidas por $\omega \mapsto \left[\int_M \langle N^\flat \wedge \omega, \theta_i \wedge \theta_j \rangle \phi_q dM \right]$, onde k denota o índice de M . Claramente,

$$\dim \mathcal{H}_N^1(M, g) \leq \dim \text{Nuc}(\Phi_N) + 3k \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{H}_T^1(M, g) \leq \dim \text{Nuc}(\Phi_T) + 3k.$$

Como, pelo Lema 2.2.4, $\dim \mathcal{H}_N^1(M, g) = \dim \mathcal{H}_T^1(M, g) = 2g + r - 1$ e estamos assumindo que vale (3.2), temos que $\text{Nuc}(\Phi_T)$ e $\text{Nuc}(\Phi_N)$ devem ser não-triviais. Tome $\omega_1 \in \text{Nuc}(\Phi_T)$ e $\omega_2 \in \text{Nuc}(\Phi_N)$ tais que ω_1 e ω_2 são elementos não-nulos. Então, assim como na demonstração do Teorema 3.1.2 e usando a parte i) da Proposição 2.3.1, segue que

$$0 \leq \lambda_{k+1} \int_M |\omega_1|^2 dM \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 3} Q(u_{ij}, u_{ij}) = - \int_{\partial M} H^{\partial\Omega} |\omega_1|^2 dS \leq 0.$$

Uma vez que $H^{\partial\Omega} \geq 0$ e $\omega_1 \neq 0$ se anula somente em um subconjunto de ∂M com interior vazio (em virtude do Lema 2.2.1), as desigualdades acima só ocorrem quando $H^{\partial\Omega} = 0$ ao longo de ∂M , $\lambda_{k+1} = 0$ e cada função u_{ij} é uma autofunção do operador de Jacobi associada a esse autovalor, ou seja, para todo $1 \leq i < j \leq 3$, valem

$$-\Delta_M \langle N^\flat \wedge \omega_1, \theta_i \wedge \theta_j \rangle + |A|^2 \langle N^\flat \wedge \omega_1, \theta_i \wedge \theta_j \rangle = 0 \quad \text{em } M, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \langle N^\flat \wedge \omega_1, \theta_i \wedge \theta_j \rangle - \Pi^{\partial\Omega}(N, N) \langle N^\flat \wedge \omega_1, \theta_i \wedge \theta_j \rangle = 0 \quad \text{em } \partial M. \quad (3.4)$$

Da mesma forma, fazendo uma análise semelhante para $\omega_2 \neq 0$, podemos concluir que qualquer 1-forma deste tipo deve necessariamente satisfazer as equações (3.3) e (3.4).

Afirmção 1. *M é totalmente geodésica.*

De fato, a equação (3.4) para ω_1 e ω_2 é equivalente a

$$\begin{aligned}
 0 &= D_\nu N \wedge \omega_i^\sharp + N \wedge D_\nu \omega_i^\sharp - \Pi^{\partial\Omega}(N, N)N \wedge \omega_i^\sharp \\
 &= D_\nu N \wedge \omega_i^\sharp + N \wedge \left(D_\nu \omega_i^\sharp - \Pi^{\partial\Omega}(N, N)\omega_i^\sharp \right) \\
 &= D_\nu N \wedge \omega_i^\sharp + N \wedge \left(\nabla_\nu^M \omega_i^\sharp + \langle D_\nu \omega_i^\sharp, N \rangle N - \Pi^{\partial\Omega}(N, N)\omega_i^\sharp \right) \\
 &= D_\nu N \wedge \omega_i^\sharp + N \wedge \left(\nabla_\nu^M \omega_i^\sharp - \Pi^{\partial\Omega}(N, N)\omega_i^\sharp \right).
 \end{aligned}$$

O primeiro termo da equação acima é um vetor ortogonal a M e o segundo é um vetor tangente a M . Então, pela independência linear, segue que para $i = 1, 2$,

$$D_\nu N \wedge \omega_i^\sharp = 0 \quad \text{e} \quad N \wedge \left(\nabla_\nu^M \omega_i^\sharp - \Pi^{\partial\Omega}(N, N)\omega_i^\sharp \right) = 0.$$

Note que a primeira equação nos diz que, nos pontos da fronteira onde $\omega_1 \neq 0$, $D_\nu N$ é um vetor paralelo a $\omega_1^\sharp$ ou, equivalentemente, um vetor tangente a ∂M , uma vez que $\omega_1 \in \mathcal{H}_N^1(M, g)$. Da mesma forma, nos pontos da fronteira onde $\omega_2 \neq 0$, $D_\nu N$ é um vetor paralelo a $\omega_2^\sharp$ ou, equivalentemente, um vetor ortogonal a ∂M , uma vez que $\omega_2 \in \mathcal{H}_T^1(M, g)$.

Sendo $D_\nu N$ tangente e ortogonal a ∂M nos pontos em que ambas ω_1 e ω_2 não se anulam, segue que $D_\nu N = 0$. Por outro lado, tendo em vista que nenhuma dessas 1-formas se anulam identicamente, pelo Lema 2.2.1 podemos concluir que

$$\{x \in \partial M; (\omega_1)_x \neq 0\}, \quad \{x \in \partial M; (\omega_2)_x \neq 0\}$$

são ambos densos em ∂M . Em particular, $\{x \in \partial M, (\omega_1)_x \neq 0, (\omega_2)_x \neq 0\}$ também é denso em ∂M . Por continuidade, segue que $D_\nu N = 0$ ao longo de ∂M .

Com isso, temos que ν deve ser uma direção principal em todo ponto de ∂M e a curvatura principal associada a ν deve ser zero. Como M é uma superfície mínima, então ambas curvaturas principais devem ser nulas ao longo de ∂M . A afirmação agora segue porque qualquer superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ ou é totalmente geodésica ou sua segunda forma fundamental se anula em um conjunto discreto de pontos.

Afirmção 2. $\omega_1^\sharp$ e $\omega_2^\sharp$ são vetores constantes não-nulos do $\mathbb{R}^3$.

Em virtude da equação (3.3) e do Lema 1 em [22], temos que ω_1 e ω_2 pertencem ao espaço vetorial

$$\Lambda(M) = \{\omega \in \Omega^1(M); \omega = \langle T, \cdot \rangle \text{ para algum } T \in \mathbb{R}^3 \text{ constante}\}.$$

Como M é totalmente geodésica, então a segunda forma fundamental é identicamente nula, o que implica que ambas curvaturas principais são nulas e assim M deve estar contido em um plano (Ver [8], página 147, Proposição 4) e é necessariamente ortogonal ao vetor constante N .

3. Resultados Principais

Seja $\omega \in \Lambda(M)$ e X tangente a M , então $\omega(X) = \langle T, X \rangle = \langle T^t + \langle T, N \rangle N, X \rangle = \langle T^t, X \rangle$, onde $T^t = T - \langle T, N \rangle N$ é um vetor constante.

Logo, podemos representar $\Lambda(M)$ como sendo

$$\Lambda(M) = \{\omega \in \Omega^1(M); \omega(\cdot) = \langle T, \cdot \rangle \text{ para algum } T \perp N \text{ constante}\}.$$

Assim, como $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda(M)$, segue que $\omega_1^\sharp$ e $\omega_2^\sharp$ são vetores constantes.

Pela Afirmação 1, concluímos que M está contida em um plano e, sendo uma superfície compacta, seu bordo ∂M também é compacto e portanto é formado por uma coleção de curvas planas fechadas. Pela Afirmação 2, $\omega_1^\sharp$ é um vetor constante tangente a essas curvas em todo ponto do bordo; portanto o bordo é uma reta, o que é uma contradição, uma vez que o bordo é uma curva fechada. Isto garante o teorema. $\square$

Agora, apresentaremos alguns resultados sobre estimativas de índice de hipersuperfícies mínimas com fronteira livre em ambientes mais gerais. Seja (Ω^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana suave e orientável com fronteira isometricamente mergulhada em algum espaço Euclidiano $\mathbb{R}^d$, $d \geq n + 1$. Dada uma hipersuperfície M^n compacta, orientável, mínima com fronteira livre em (Ω^{n+1}, g) , usaremos as coordenadas de $N^\flat \wedge \omega$, onde ω é uma 1-forma normal ou tangente em ∂M , como funções testes para a forma de índice.

Proposição 3.1.7. *Seja (Ω^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana com fronteira isometricamente mergulhada em algum espaço Euclidiano $\mathbb{R}^d$. Seja M^n uma hipersuperfície compacta, orientável, mínima com fronteira livre em (Ω^{n+1}, g) . Dada uma 1-forma harmônica ω em M , sejam*

$$u_{ij} = \langle N^\flat \wedge \omega, \theta_i \wedge \theta_j \rangle, \quad i, j = 1, \dots, d, \quad i < j,$$

as coordenadas de $N^\flat \wedge \omega$ com respeito a uma base ortonormal $\{\theta_i \wedge \theta_j\}_{i < j}$ de $\Lambda^2(\mathbb{R}^d)$, onde $\theta_i = E_i^\flat$ e $\{E_i\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^d$.

i) *Se ω é uma 1-forma harmônica pertencente a $\mathcal{H}_T^1(M, g)$, então*

$$\begin{aligned} \sum_{i < j}^d Q(u_{ij}, u_{ij}) &= \int_M \left[\sum_{k=1}^n |\Pi^\Omega(e_k, \omega^\sharp)|^2 + \sum_{k=1}^n |\Pi^\Omega(e_k, N)|^2 |\omega|^2 \right] dM \\ &\quad - \int_M \left[\sum_{k=1}^n \text{Rm}^\Omega(e_k, \omega^\sharp, e_k, \omega^\sharp) + \text{Ric}^\Omega(N, N) |\omega|^2 \right] dM \\ &\quad - \int_{\partial M} H^{\partial\Omega} |\omega|^2 dS. \end{aligned}$$

ii) Se ω é uma 1-forma harmônica pertencente a $\mathcal{H}_N^1(M, g)$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i < j}^d Q(u_{ij}, u_{ij}) &= \int_M \left[\sum_{k=1}^n |\Pi^\Omega(e_k, \omega^\sharp)|^2 + \sum_{k=1}^n |\Pi^\Omega(e_k, N)|^2 |\omega|^2 \right] dM \\ &\quad - \int_M \left[\sum_{k=1}^n \text{Rm}^\Omega(e_k, \omega^\sharp, e_k, \omega^\sharp) + \text{Ric}^\Omega(N, N) |\omega|^2 \right] dM \\ &\quad - \int_{\partial M} \left[\Pi^{\partial\Omega}(N, N) |\omega|^2 + \Pi^{\partial\Omega}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) \right] dS. \end{aligned}$$

Acima, Rm^Ω denota o tensor curvatura de Riemann de (Ω^{n+1}, g) , Π^Ω é a segunda forma fundamental de Ω^{n+1} em $\mathbb{R}^d$, $\Pi^{\partial\Omega}$ denota a segunda forma fundamental de $\partial\Omega$ em (Ω^{n+1}, g) e N é um campo vetorial normal unitário sobre M^n em (Ω^{n+1}, g) .

Demonstração. Dada a forma do índice

$$Q(\phi, \phi) = \int_M |\nabla^M \phi|^2 - (\text{Ric}^\Omega(N, N) + |A|^2) \phi^2 dM - \int_{\partial M} \Pi^{\partial\Omega}(N, N) \phi^2 dS,$$

e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal em M^n , nós temos que

$$|\nabla^M u_{ij}|^2 = \sum_{k=1}^n |D_{e_k} u_{ij}|^2 = \sum_{k=1}^n \langle D_{e_k}(N^\flat \wedge \omega), \theta_i \wedge \theta_j \rangle^2.$$

Consequentemente, somando em $i < j$,

$$\sum_{i < j}^d |\nabla^M u_{ij}|^2 = \sum_{k=1}^n |D_{e_k}(N^\flat \wedge \omega)|^2.$$

Seguindo os cálculos realizados na Proposição 2 em [1], obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |D_{e_k}(N^\flat \wedge \omega)|^2 &= |\nabla^M \omega|^2 - \sum_{k=1}^n |A(e_k, \omega^\sharp)|^2 + |A|^2 |\omega|^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^n |\Pi^\Omega(e_k, \omega^\sharp)|^2 + \sum_{k=1}^n |\Pi^\Omega(e_k, N)|^2 |\omega|^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Aplicando a forma do índice nas funções u_{ij} e substituindo a equação 3.5 nela, ficamos com

$$\begin{aligned} \sum_{i < j}^d Q(u_{ij}, u_{ij}) &= \int_M \sum_{k=1}^n |\Pi^\Omega(e_k, \omega^\sharp)|^2 + \sum_{k=1}^n |\Pi^\Omega(e_k, N)|^2 |\omega|^2 dM \\ &\quad + \int_M |\nabla^M \omega|^2 - \sum_{k=1}^n |A(e_k, \omega^\sharp)|^2 - \text{Ric}^\Omega(N, N) |\omega|^2 dM \\ &\quad - \int_{\partial M} \Pi^{\partial\Omega}(N, N) |\omega|^2 dS. \end{aligned} \tag{3.6}$$

3. Resultados Principais

Da mesma forma como feito no Lema 2.2.5, integrando a fórmula de Bochner e usando o teorema da divergência,

$$\int_M |\nabla^M \omega|^2 = - \int_M \text{Ric}^M(\omega, \omega) dM + \int_{\partial M} \langle \nabla_\nu^M \omega, \omega \rangle dS.$$

Agora, sendo M mínima e usando a equação de Gauss, nós temos

$$\begin{aligned} \text{Ric}^M(\omega, \omega) &= \sum_{k=1}^n K^M(e_k, \omega) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(K^\Omega(e_k, \omega) + \langle A(e_k, e_k), A(\omega, \omega) \rangle - |A(e_k, \omega)|^2 \right) \\ &= \sum_{k=1}^n K^\Omega(e_k, \omega) + \left\langle \sum_{k=1}^n A(e_k, e_k), A(\omega, \omega) \right\rangle - \sum_{k=1}^n |A(e_k, \omega)|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \text{Rm}^\Omega(e_k, \omega, e_k, \omega) + \langle H^M, A(\omega, \omega) \rangle - \sum_{k=1}^n |A(e_k, \omega)|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \text{Rm}^\Omega(e_k, \omega, e_k, \omega) - \sum_{k=1}^n |A(e_k, \omega)|^2, \end{aligned}$$

onde Rm^Ω é o tensor curvatura de Riemann de Ω^{n+1} . Logo

$$\int_M |\nabla^M \omega|^2 = - \int_M \left[\sum_{k=1}^n \text{Rm}^\Omega(e_k, \omega^\sharp, e_k, \omega^\sharp) - \sum_{k=1}^n |A(e_k, \omega^\sharp)|^2 \right] dM + \int_{\partial M} \langle \nabla_\nu^M \omega, \omega \rangle dS. \quad (3.7)$$

Substituindo 3.7 em 3.6,

$$\begin{aligned} \sum_{i < j}^d Q(u_{ij}, u_{ij}) &= \int_M \sum_{k=1}^n |\text{II}^\Omega(e_k, \omega^\sharp)|^2 + \sum_{k=1}^n |\text{II}^\Omega(e_k, N)|^2 |\omega|^2 dM \\ &\quad - \int_M \left[\sum_{k=1}^n \text{Rm}^\Omega(e_k, \omega^\sharp, e_k, \omega^\sharp) + \text{Ric}^\Omega(N, N) |\omega|^2 \right] dM \\ &\quad + \int_{\partial M} \langle \nabla_\nu^M \omega, \omega \rangle dS - \int_{\partial M} \text{II}^{\partial\Omega}(N, N) |\omega|^2 dS. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Das contas feitas nas demonstrações da parte i) do Lema 2.2.5 e final da Proposição 2.3.1, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i < j}^d Q(u_{ij}, u_{ij}) &= \int_M \left[\sum_{k=1}^n |\text{II}^\Omega(e_k, \omega^\sharp)|^2 + \sum_{k=1}^n |\text{II}^\Omega(e_k, N)|^2 |\omega|^2 \right] dM \\ &\quad - \int_M \left[\sum_{k=1}^n \text{Rm}^\Omega(e_k, \omega^\sharp, e_k, \omega^\sharp) + \text{Ric}^\Omega(N, N) |\omega|^2 \right] dM \\ &\quad - \int_{\partial M} H^{\partial\Omega} |\omega|^2 dS. \end{aligned}$$

Para provar o item ii), basta ver as contas realizadas na parte ii) do Lema 2.2.5 e final

da Proposição 2.3.1 e substituir em 3.8. Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{i < j}^d Q(u_{ij}, u_{ij}) &= \int_M \left[\sum_{k=1}^n |\Pi^\Omega(e_k, \omega^\sharp)|^2 + \sum_{k=1}^n |\Pi^\Omega(e_k, N)|^2 |\omega|^2 \right] dM \\ &\quad - \int_M \left[\sum_{k=1}^n \text{Rm}^\Omega(e_k, \omega^\sharp, e_k, \omega^\sharp) + \text{Ric}^\Omega(N, N) |\omega|^2 \right] dM \\ &\quad - \int_{\partial M} \Pi^{\partial\Omega}(N, N) |\omega|^2 + \Pi^{\partial\Omega}(\omega^\sharp, \omega^\sharp) dS. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.8. *Seja (Ω^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana com fronteira que é isometricamente mergulhada em algum espaço Euclidiano $\mathbb{R}^d$. Seja M^n uma hipersuperfície compacta, orientável, mínima com fronteira livre em (Ω^{n+1}, g) . Assuma que para todo campo vetorial não-nulo X em M^n ,*

$$\begin{aligned} \int_M \left[\text{tr}_M \left(\text{Rm}^\Omega(\cdot, X, \cdot, X) \right) + \text{Ric}^\Omega(N, N) |X|^2 \right] dM + \int_{\partial M} H^{\partial\Omega} |X|^2 dS > \\ \int_M \left[(|\Pi^\Omega(\cdot, X)|^2 - |\Pi^\Omega(X, N)|^2) + (|\Pi^\Omega(\cdot, N)|^2 - |\Pi^\Omega(N, N)|^2) |X|^2 \right] dM. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Então, temos que

$$\text{ind}(M) \geq \frac{2}{d(d-1)} \dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}).$$

Demonstração. Seja k o índice de M^n e $\phi_1, \dots, \phi_k$ as autofunções associadas aos k autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \leq \lambda_k$ do operador de Jacobi de M^n que são menores que 0.

Fixe alguma base ortonormal $\{E_1, \dots, E_d\}$ do $\mathbb{R}^d$ e seja $u_{ij} = \langle N^\flat \wedge \omega, \theta_i \wedge \theta_j \rangle$ as funções testes definidas na Proposição 3.1.7. Considere a aplicação que associa a cada $\omega \in \mathcal{H}_T^1(M, g)$ um vetor

$$\left[\int_M u_{ij} \phi_q dM \right],$$

onde $i < j$ varia de 1 a d e q varia 1 a k , é uma aplicação linear em um espaço vetorial de dimensão

$$\binom{d}{2} k = \frac{d(d-1)}{2} k.$$

Pelo Teorema 2.2.2, temos $\mathcal{H}_T^1(M, g) \simeq H_1(M, \partial M; \mathbb{R})$. Portanto $\dim \mathcal{H}_T^1(M, g) = \dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R})$. Suponha por contradição que $\dim \mathcal{H}_T^1(M, g) > \frac{d(d-1)}{2} k$. Então deve existir ω em $\mathcal{H}_T^1(M, g)$ não-nulo tal que $\int_M u_{ij} \phi_q dM = 0$ para todo $i < j$ e todo q . Dessa forma, cada u_{ij} é ortogonal as primeiras k autofunções ϕ_q , segue da caracterização variacional dos autovalores que

$$\sum_{i < j}^d Q(u_{ij}, u_{ij}) \geq \lambda_{k+1} \sum_{i < j}^d \int_M u_{ij}^2 dM = \lambda_{k+1} \int_M |\omega|^2 dM \geq 0.$$

Em vista da Proposição 3.1.7, item i), temos uma contradição com a desigualdade 3.9. Portanto segue que

$$\text{ind}(M) = k \geq \frac{2}{d(d-1)} \dim \mathcal{H}_T^1(M, g) = \frac{2}{d(d-1)} \dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}).$$

□

Podemos também considerar a generalização do Teorema 3.1.4, e consequentemente do Teorema 3.1.5, para domínios bi-convexos em variedades Riemannianas. O enunciado correspondente é o seguinte:

Teorema 3.1.9. *Seja (Ω^{n+1}, g) uma variedade Riemanniana com fronteira isometricamente mergulhada em algum espaço Euclidiano $\mathbb{R}^d$. Seja M^n uma hipersuperfície compacta, orientável, mínima com fronteira livre em (Ω^{n+1}, g) . Assuma que para todo campo vetorial não-nulo X em M^n ,*

$$\begin{aligned} & \int_M \left[\text{tr}_M \left(\text{Rm}^\Omega(\cdot, X, \cdot, X) \right) + \text{Ric}^\Omega(N, N) |X|^2 \right] dM \\ & \quad + \int_{\partial M} \left[\text{II}^{\partial\Omega}(N, N) |X|^2 + \text{II}^{\partial\Omega}(X, X) \right] dS > \\ & \int_M \left[(|\text{II}^\Omega(\cdot, X)|^2 - |\text{II}^\Omega(X, N)|^2) + (|\text{II}^\Omega(\cdot, N)|^2 - |\text{II}^\Omega(N, N)|^2) |X|^2 \right] dM. \end{aligned}$$

Então, para qualquer $\alpha \in [0, 1]$, nós temos

$$\text{ind}(M) \geq \frac{2}{d(d-1)} (\alpha \dim H_1(M, \partial M; \mathbb{R}) + (1 - \alpha) \dim H_{n-1}(M, \partial M; \mathbb{R})).$$

Demonstração. A demonstração segue o mesmo roteiro da demonstração feita no Teorema anterior, bastando usar o fato de que $\mathcal{H}_N^1(M, g) \simeq H_{n-1}(M, \partial M; \mathbb{R})$ e usar a parte ii) da Proposição 3.1.7, assim mostra-se que

$$\text{ind}(M) \geq \frac{2}{d(d-1)} \dim H_{n-1}(M, \partial M; \mathbb{R}).$$

Depois fazer uma combinação linear disso com o resultado do Teorema 3.1.8, e então o resultado segue. □

3.2 Exemplos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de superfícies mínimas com fronteira livre.

3.2.1 Exemplos i e ii

A. Fraser e R. Schoen em [12] provaram a existência de superfícies mínimas com fronteira livre Σ_n em B^3 que têm gênero 0 e n componentes de fronteira, para todo $n \geq 3$.

Para n suficientemente grande, A. Folha, F. Pacard e T. Zolotareva em [11] deram uma construção independente para Σ_n e provaram a existência superfícies mínimas com fronteira livre $\tilde{\Sigma}_n$ em B^3 que têm gênero 1 e n componentes de fronteira. Eles provaram o seguinte teorema:

Teorema 3.2.1. *Existe $n_0 \geq 0$ tal que, para cada $n \geq n_0$, existe uma superfície mínima com fronteira livre Σ_n de gênero 0 e uma superfície mínima com fronteira livre $\tilde{\Sigma}_n$ de gênero 1 no qual ambas estão mergulhadas em B^3 e que intersectam S^2 ortogonalmente ao longo de n curvas fechadas.*

3.2.2 Exemplos iii e iv

Utilizando métodos variacionais, D. Ketover em [19] conseguiu construir superfícies mínimas com fronteira livre Σ_g na bola unitária tridimensional B . Ele provou o seguinte teorema:

Teorema 3.2.2. *Para cada inteiro $g \geq 1$, existe uma superfície mínima com fronteira livre Σ_g na bola unitária tridimensional B com grupo de simetria diedral $\mathbb{D}_{g+1}$ que não é o disco plano D . Quando g é suficientemente grande, Σ_g tem três componentes de fronteira e gênero g .*

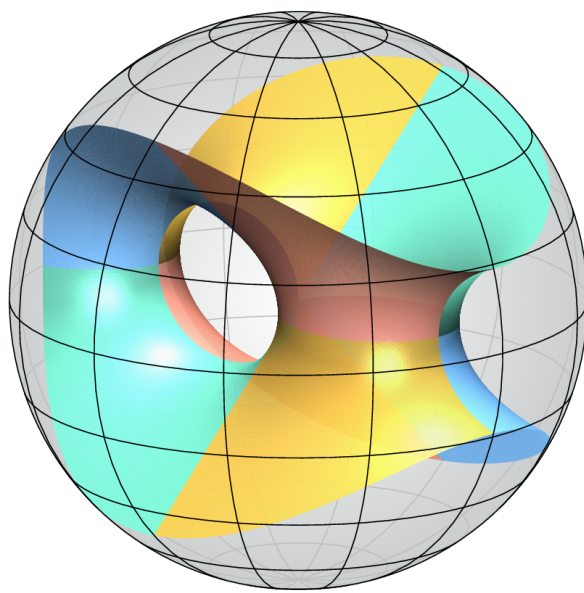
Acima, o grupo diédrico $\mathbb{D}_n$ é o grupo de simetria de um polígono regular de n lados. Ele também obteve vários exemplos para superfícies de gênero zero associados a sólidos platônicos:

Teorema 3.2.3. *Existe uma superfície mínima com fronteira livre em B^3 com 6 extremidades da simetria octaédrica e gênero 0, um exemplo com 4 extremidades da simetria tetraédrica e gênero 0, e um exemplo de gênero 0 e 12 extremidades da simetria dodocaédrica.*

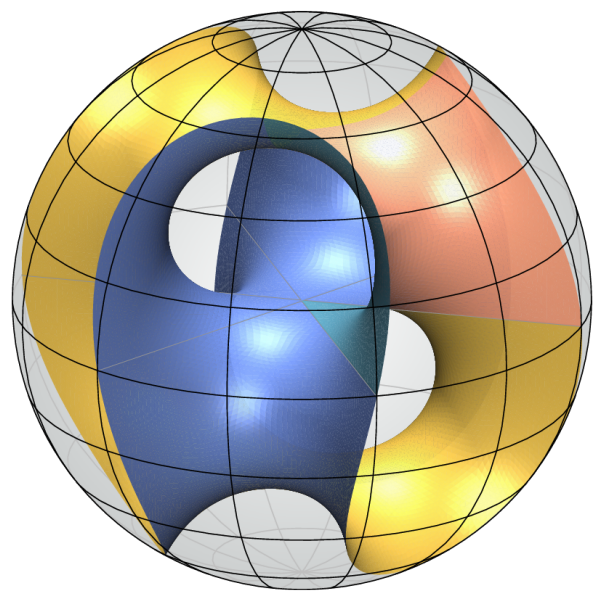
Seguindo na mesma linha, A. Carlotto, G. Franz e M. Schulz em [4] provaram um teorema semelhante ao Teorema de Ketover para a classe de superfícies mínimas com fronteira livre e conexa:

Teorema 3.2.4. *Para cada $1 \leq g \in \mathbb{N}$ existe um superfície mínima com fronteira livre M_g mergulhada em B^3 com fronteira conexa, gênero g e simetria diedral $\mathbb{D}_{g+1}$.*

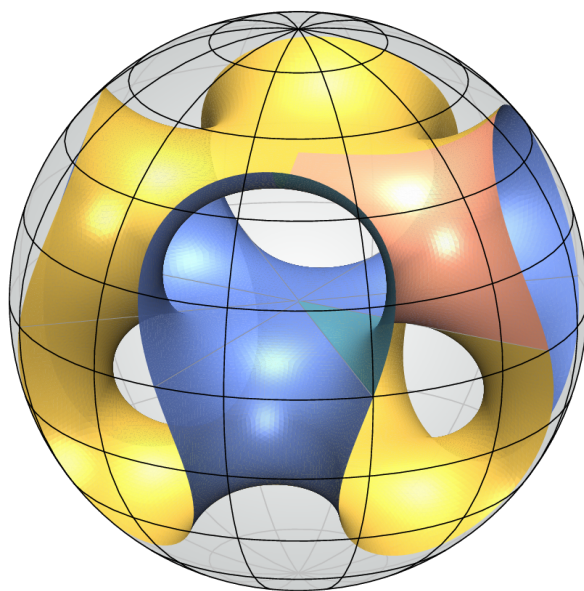
A partir do teorema acima, obteve-se alguns exemplos gráficos de superfícies mínimas com fronteira livre para casos particulares de gênero e fronteira conexa. São eles:



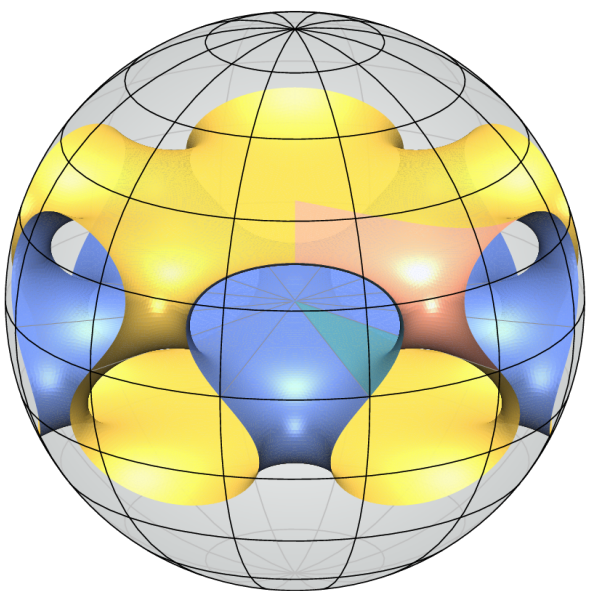
(a) Gênero 1.



(b) Gênero 2.



(c) Gênero 3.



(d) Gênero 5.

Figura 3.1: Exemplos de superfícies mínimas com fronteira livre com fronteira conexa.

Todas as figuras acima foram retiradas da página pessoal do professor doutor Alessandro Carlotto.

Referências Bibliográficas

- [1] Lucas Ambrozio, Alessandro Carlotto, and Ben Sharp, *Comparing the Morse index and the first Betti number of minimal hypersurfaces*, J. Differential Geom. **108** (2018), no. 3, 379–410. MR 3770846
- [2] ———, *Index estimates for free boundary minimal hypersurfaces*, Math. Ann. **370** (2018), no. 3-4, 1063–1078. MR 3770163
- [3] ———, *A note on the index of closed minimal hypersurfaces of flat tori*, Proc. Amer. Math. Soc. **146** (2018), no. 1, 335–344. MR 3723144
- [4] Alessandro Carlotto, Giada Franz, and Mario B. Schulz, *Free boundary minimal surfaces with connected boundary and arbitrary genus*, 2020.
- [5] Marcos P. Cavalcante and Darlan F. de Oliveira, *Index estimates for free boundary constant mean curvature surfaces*, Pacific J. Math. **305** (2020), no. 1, 153–163. MR 4077688
- [6] ———, *Lower bounds for the index of compact constant mean curvature surfaces in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{S}^3$* , Rev. Mat. Iberoam. **36** (2020), no. 1, 195–206. MR 4061986
- [7] Otis Chodosh, Daniel Ketover, and Davi Maximo, *Minimal hypersurfaces with bounded index*, Invent. Math. **209** (2017), no. 3, 617–664. MR 3681392
- [8] Manfredo P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976, Translated from the Portuguese. MR 0394451
- [9] ———, *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992, Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty. MR 1138207
- [10] O. Eriksson, *Hodge decomposition for manifolds with boundary and vector calculus*, 2017.
- [11] Abigail Folha, Frank Pacard, and Tatiana Zolotareva, *Free boundary minimal surfaces in the unit 3-ball*, Manuscripta Math. **154** (2017), no. 3-4, 359–409. MR 3713919

- [12] Ailana Fraser and Richard Schoen, *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball*, Invent. Math. **203** (2016), no. 3, 823–890. MR 3461367
- [13] David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, Reprint of the 1998 edition. MR 1814364
- [14] Claudio Gorodski, Ricardo A. E. Mendes, and Marco Radeschi, *Robust index bounds for minimal hypersurfaces of isoparametric submanifolds and symmetric spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **58** (2019), no. 4, Paper No. 118, 25. MR 3962913
- [15] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR 1867354
- [16] Antoine Henrot, *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. MR 2251558
- [17] Debora Impera and Michele Rimoldi, *Index and first Betti number of f -minimal hypersurfaces: general ambients*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **199** (2020), no. 6, 2151–2165. MR 4165675
- [18] Jürgen Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, seventh ed., Universitext, Springer, Cham, 2017. MR 3726907
- [19] Daniel Ketover, *Free boundary minimal surfaces of unbounded genus*, 2016.
- [20] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer-Verlag, New York, 2003. MR 1930091
- [21] Rodrigo F. de Moura Melo, *Hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em alguns domínios euclidianos e outros tópicos*, 2021, Tese (Doutorado interinstitucional UFBA/UFAL em Matemática) Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Doutorado Interinstitucional em Matemática UFBA/UFAL, Universidade Federal de Alagoas, p. 70.
- [22] Antonio Ros, *One-sided complete stable minimal surfaces*, J. Differential Geom. **74** (2006), no. 1, 69–92. MR 2260928
- [23] Pam Sargent, *Index bounds for free boundary minimal surfaces of convex bodies*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 6, 2467–2480. MR 3626504
- [24] Alessandro Savo, *Index bounds for minimal hypersurfaces of the sphere*, Indiana Univ. Math. J. **59** (2010), no. 3, 823–837. MR 2779062

- [25] Richard Schoen and Shing-Tung Yau, *Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 1, 127–142. MR 541332
- [26] Günter Schwarz, *Hodge decomposition—a method for solving boundary value problems*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1607, Springer-Verlag, Berlin, 1995. MR 1367287
- [27] Graham Smith, Ari Stern, Hung Tran, and Detang Zhou, *On the morse index of higher-dimensional free boundary minimal catenoids*, 2017.
- [28] Graham Smith and Detang Zhou, *The Morse index of the critical catenoid*, Geom. Dedicata **201** (2019), 13–19. MR 3978532
- [29] Michael E. Taylor, *Partial differential equations I. Basic theory*, second ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 115, Springer, New York, 2011. MR 2744150
- [30] Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill.-London, 1971. MR 0295244