

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ALLAN KENEDY SANTOS SILVA

**Estimativas de volume de subvariedades
mínimas compactas imersas em alguns
espaços simétricos de posto 1**

Maceió - AL

31/03/2021

ALLAN KENEDY SANTOS SILVA

**Estimativas de volume de subvariedades mínimas
compactas imersas em alguns espaços simétricos de
posto 1**

Dissertação na área de Matemática com linha de pesquisa em Análise Geométrica submetida à banca examinadora designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos necessários para a obtenção de grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Maceió - AL

31/03/2021

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

S586e

Silva, Allan Kenedy Santos.

Estimativas de volume de subvariedades mínimas compactas imersas em alguns espaços simétricos de posto 1 / Allan Kenedy Santos Silva. - 2021. 64 f. : il.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 63-64.

1. Volume. 2. Espaços simétricos. 3. Espaços projetivos. I. Título.

CDU: 514.75/.76

Estimativas de volume de subvariedades mínimas compactas imersas em alguns espaços simétricos de posto 1

Allan Kenedy Santos Silva

Dissertação na área de Matemática com linha de pesquisa em Análise Geométrica submetida à banca examinadora designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos necessários para a obtenção de grau de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado em 31/03/2021.

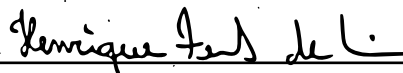


**Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da
Silva**

Orientador - Ufal



Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos
Examinador Externo - UFPE



**Prof. Dr. Henrique Fernandes de
Lima**

Examinador Externo - UFCG

Maceió - AL
31/03/2021

Resumo

A teoria das superfícies mínimas surgiu com um problema proposto por Lagrange, que consistia no seguinte: dada uma curva fechada sem auto-intersecções, achar a superfície de menor área que tem aquela curva como fronteira. Tal problema ficou conhecido como o Problema de Plateau. Passaram-se cerca de 16 anos desde os trabalhos de Lagrange até fossem descobertos exemplos não triviais de superfícies mínimas devidos a Meusnier. A teoria ficou estagnada por 60 anos até que Scherk encontrou novos exemplos de mínimas. Com os trabalhos de Weierstrass foi possível obter mais exemplos dessas superfícies. Daí por diante houveram grandes desenvolvimentos da teoria, se tornando um dos campos mais férteis da Geometria Diferencial. Uma classe de problemas estudados é o de estimar o volume de subvariedades mínimas imersas em certas variedades ambientes, como esferas, hiperplanos, espaços projetivos etc. O objetivo do presente trabalho é fornecer estimativas inferiores de volume de subvariedades mínimas compactas imersas em certos espaços simétricos de posto 1, a saber: a esfera unitária \mathbb{S}^n , e os espaços projetivos real $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, complexo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ e quaterniônico $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$. Será mostrado que se M^m é uma subvariedade mínima da esfera \mathbb{S}^n , então $\text{vol } M \geq V_c(n, M)$ em que $V_c(n, M)$ é o n -volume conforme de M . Uma outra estimativa para isto é $\text{vol } M \geq c_n$, em que $c_n = \text{vol } \mathbb{S}^n$. No caso de M estar imersa em espaços projetivos tem-se os limitantes inferiores: $c_n/2$ em $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, $c_{n+1}/2\pi$ em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ e $c_{n+2}/2\pi^2$ em $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$.

Palavras-chave: Volume. Espaços simétricos. Espaços projetivos.

Abstract

The theory of minimal surfaces came up with a problem proposed by Lagrange, which consisted of the following: given a closed curve without auto-intersections, find the surface of the smallest area that has that curve as a boundary. Such a problem became known as the Plateau Problem. It took about 16 years from Lagrange's work to discover non-trivial examples of minimal surfaces due to Meusnier. The theory was stagnant for 60 years until Scherk found new examples of minimums. With the work of Weierstrass it was possible to obtain more examples of these surfaces. Thereafter there were major developments in theory, becoming one of the most fertile fields of Differential Geometry. One class of problems studied is that of estimating the volume of minimal submanifolds immersed in certain ambient manifolds, such as spheres, hyperplanes, projective spaces, etc. The objective of the present work is to provide lower estimates of volume of minimal compact submanifolds immersed in certain symmetrical spaces of post 1, namely: the unitary sphere \mathbb{S}^n , and the real $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, complex $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ and quaternionic $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ projective spaces. It will be shown that if M^m is a minimal submanifold of the \mathbb{S}^n sphere, then $\text{vol } M \geq V_c(n, M)$ where $V_c(n, M)$ is o n -volume according to M . Another estimate for this is $\text{vol } M \geq c_n$, where $c_n = \text{vol } \mathbb{S}^n$. In the case of M being immersed in projective spaces, we have the lower limits: $c_n/2$ in $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, $c_{n+1}/2\pi$ in $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ e $c_{n+2}/2\pi^2$ in $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$.

Key-words: Volume. Symetric spaces. Projective spaces.

Sumário

	INTRODUÇÃO	5
1	VARIEDADES RIEMANNIANAS	9
1.1	Preliminares topológicos	9
1.2	Variedades diferenciáveis	12
1.3	Métricas Riemannianas	21
1.4	Formas diferenciais	24
2	GEOMETRIA INTRÍNSECA E A 2ª FORMA FUNDAMENTAL	27
2.1	Campos de vetores	27
2.2	Conexão afim	28
2.3	Isometrias	32
2.4	Curvaturas	32
2.5	A segunda forma fundamental	34
3	VOLUME CONFORME	36
4	CURVATURA TOTAL DE VARIEDADES IMERSAS	45
4.1	As equações de estrutura	46
4.2	Prova do teorema 4.1	48
5	VOLUME DE SUBVARIEDADES MÍNIMAS COMPACTAS EM ESPAÇOS PROJETIVOS	55
5.1	Submersões	55
5.2	Caracterização dos espaços projetivos	57
5.2.1	O espaço projetivo real	57
5.2.2	O espaço projetivo complexo	58
5.2.3	Espaço projetivo quaterniônico	59
5.3	Espaços simétricos de posto 1	60
5.4	Estimativas de volume	61
	REFERÊNCIAS	63

Introdução

Notas históricas

Consideremos o seguinte problema:

Dada uma curva fechada sem auto-intersecções, achar a superfície de menor área que tem aquela curva como fronteira.

Este problema foi descrito por Lagrange num trabalho publicado em 1760 como um exemplo de um método, por ele desenvolvido, para achar curvas e superfícies que minimizam certas quantidades, como comprimento, área, volume, energia, etc. (CARMO, 2011)

Este problema ficou conhecido como o *problema de Plateau*, em homenagem ao físico belga Joseph A. F. Plateau que realizou cuidadosos experimentos com bolhas de sabão por volta de 1850 (CARMO, 2012).

Em seu trabalho, Lagrange restringiu seu estudo a superfícies que são gráficos de funções $z = f(x, y)$, mostrando que uma superfície que minimiza área (a qual ele chamou de *superfície mínima*) deve satisfazer à equação diferencial parcial

$$(1 + f_y^2)f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Lagrange deu como exemplo de solução apenas a trivial: o plano.

16 anos após o trabalho de Lagrange, Meusnier mostrou que a equação acima é equivalente a

$$k_1 + k_2 = 0 \Leftrightarrow H = 0$$

sendo k_1 e k_2 as curvaturas principais e $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ a curvatura média, e encontrou 2 exemplos não-triviais de superfícies mínimas: o heloicoide e o catenoide (CARMO, 2011).

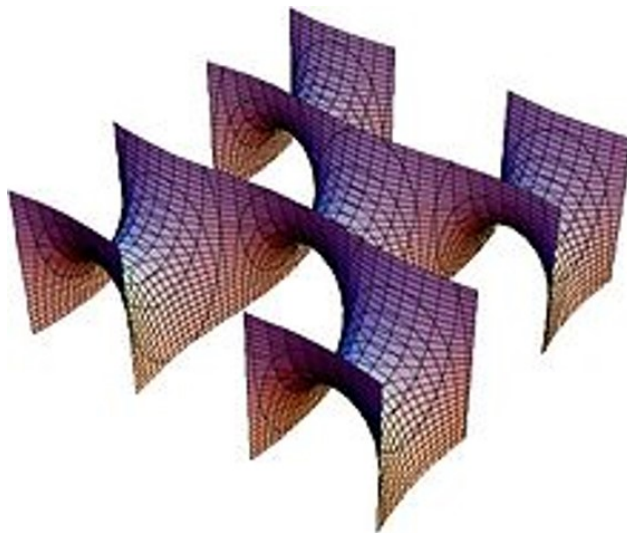
Durante muito tempo eram conhecidos apenas estes três exemplos de superfícies mínimas. Só em 1835, Scherk obteve novos exemplos de tais superfícies, sendo o seu exemplo mais famoso a *superfície de Scherk*

$$z = \log \frac{\cos y}{\cos x}.$$

Em 1866, Weierstrass obteve fórmulas de representação das superfícies mínimas em termos de funções de uma variável complexa. Tais fórmulas foram obtidas de maneira independente também por Enneper, o qual deu mais um exemplo de superfície mínima: a *superfície de Enneper* (ALVAREZ, 2015; CARMO, 2011).

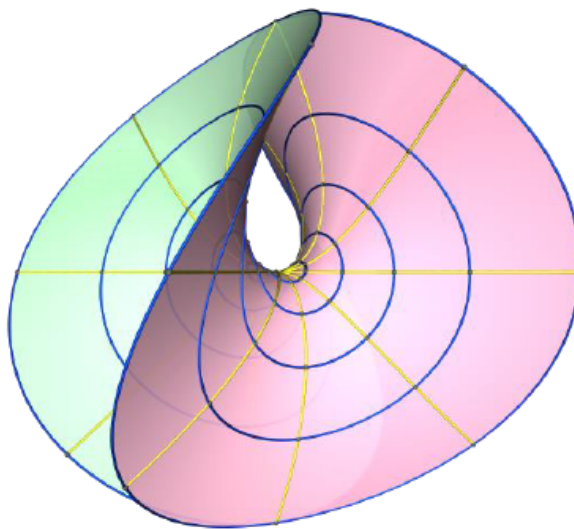
$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

Figura 0.1 – Superfície de Scherk.



Fonte: Google Imagens.

Figura 0.2 – Superfície de Enneper



Fonte: Alvarez (2015).

No século XX houveram grandes desenvolvimentos da teoria, como a solução do Problema de Plateau por Douglas (DOUGLAS, 1931) e Radó (RADÓ, 1930) de maneira independente, e generalizações para superfícies de várias dimensões, superfícies de Riemann e variedades, se tornando um dos mais férteis campos de pesquisa em Geometria Diferencial (OSSERMAN, 1986).

Um dos tipos de problemas estudados é o de estimar o volume de subvariedades mínimas em certas variedades ambientes, como esferas, hiperplanos, espaços projetivos etc.

Objetivos

O objetivo do presente trabalho é fornecer estimativas inferiores de volume de subvariedades mínimas compactas imersas em certos espaços simétricos de posto 1, a saber: a esfera unitária S^n , e os espaços projetivos real $\mathbb{R}P^n$, complexo $\mathbb{C}P^n$ e quaterniônico $\mathbb{H}P^n$.

Divisão do trabalho

No capítulo 1 serão introduzidos alguns conceitos topológicos, como os espaços e subespaços topológicos, topologias quocientes e ações de grupos. Serão introduzidos também os conceitos de variedade topológica, variedade diferenciável e variedade Riemanniana, além de serem dados diversos exemplos. Também serão definidos os conceitos de imersão e isometria. O capítulo será finalizado com a definição de formas diferenciais e suas propriedades básicas.

No capítulo 2 serão estudados alguns conceitos e propriedades das variedades que são intrínsecas, isto é, que não dependem do ambiente onde a variedade está imersa. Ao final será definido um operador bilinear chamado de 2ª forma fundamental, o qual é um conceito extrínseco, isto é, depende da variedade ambiente.

No capítulo 3 será introduzido o conceito de volume conforme, no qual se apoiará nosso primeiro resultado, que é dar um limitante inferior do volume de uma subvariedade mínima imersa na esfera unitária. Esse limitante inferior será o n -volume conforme da variedade em estudo.

No capítulo 4 será dado um outro limitante inferior para o volume de uma subvariedade mínima na esfera. Ele será o volume da esfera unitária de mesma dimensão que a variedade.

No capítulo 5 serão dadas fórmulas para limitantes inferiores do volume de subvariedades dos espaços projetivos real, complexo e quaterniônico.

1 Variedades Riemannianas

1.1 Preliminares topológicos

Uma *topologia* sobre um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X , chamados *conjuntos abertos*, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$;
2. Se $U_1, \dots, U_n \in \tau$, então $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$;
3. Se $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L} \subset \tau$, então $\bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda \in \tau$.

Um conjunto X munido de uma topologia τ é chamado um *espaço topológico*. Os elementos de um espaço topológico são chamados de *pontos*.

Uma *vizinhança* de um ponto $x \in X$ na topologia τ é um aberto dessa topologia que contém x .

Um conjunto $F \subset X$ é dito ser *fechado* se o seu complementar $X - F$ é aberto.

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos é *contínua* se para todo conjunto aberto $U \subset Y$, $f^{-1}(U) \subset X$ é aberto. Um *homeomorfismo* entre espaços topológicos X e Y é uma aplicação bijetiva contínua $f : X \rightarrow Y$ cuja inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é contínua; os espaços X e Y são ditos serem *homeomorfos* ou *topologicamente equivalentes*. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é um *homeomorfismo local* se para cada ponto $x \in X$ existe uma vizinhança $U \ni x$ tal que $f(U)$ é um subconjunto aberto de Y e a restrição $f|_U : U \rightarrow f(U)$ é um homeomorfismo.

Exemplo: A bola aberta $B = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^n$ é homeomorfa ao espaço \mathbb{R}^n na topologia Euclidiana. De fato, as aplicações $f : \mathbb{R}^n \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad \text{e} \quad g(y) = \frac{y}{1 - |y|}$$

são contínuas, $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$, logo $g = f^{-1}$.

Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$ qualquer subconjunto. Defina

$$\tau_A = \{U \cap A; U \subset X \text{ é aberto}\}$$

τ_A é uma topologia sobre A , chamada *topologia induzida* por X sobre A . A é dito ser um *subespaço topológico* de X .

Uma aplicação contínua injetiva que é um homeomorfismo sobre sua imagem (na topologia induzida) é chamada uma *imersão topológica*.

Sejam X um espaço topológico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em X . Dizemos que a sequência converge para $x \in X$, e que x é o *limite* da sequência, se para toda vizinhança U de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. Notação: $\lim x_n = x$ ou $x_n \rightarrow x$.

Em espaços topológicos não é sempre que o limite de uma sequência, quando existe, é único; por exemplo: seja $X = \{1, 2, 3\}$ e a topologia $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$; os pontos 2 e 3 são limites da sequência constante $(2, 2, 2, \dots)$. Uma classe de espaços em que esta patologia não ocorre são os espaços de Hausdorff.

Um espaço topológico X é dito ser um *espaço de Hausdorff* se para qualquer par de pontos distintos $x_1, x_2 \in X$ existem abertos $U_1 \ni x_1$ e $U_2 \ni x_2$ em X tais que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Em outras palavras, existem vizinhanças "separando" x_1 e x_2 .

Dado um espaço topológico X , uma *base* de X é uma coleção \mathcal{B} de subconjuntos abertos de X tais que para todo $U \subset X$ aberto e todo $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$. Em outras palavras, existe $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$.

Dizemos que um espaço topológico X satisfaz o *segundo axioma da enumerabilidade* se X possui uma base enumerável.

Exemplo: \mathbb{R}^n com a topologia Euclidiana é um espaço de Hausdorff. De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, as bolas abertas $B(x; r)$ e $B(y; r)$ de raio $r = |x - y|/2$ são disjuntas. Uma base de \mathbb{R}^n é o conjunto das bolas abertas de raios racionais e centros cujas coordenadas são números racionais. Esta base é enumerável, logo \mathbb{R}^n satisfaz o 2º axioma da enumerabilidade.

Um espaço topológico que satisfaz o 2º axioma da enumerabilidade possui a *propriedade de Lindelöf*, isto é, dada uma cobertura aberta desse espaço, existe uma subcobertura enumerável.

Sintetizamos a seguir algumas propriedades dos subespaços topológicos

Proposição 1.1 (Propriedades dos subespaços) *Sejam X, Y espaços topológicos e A um subespaço de X .*

1. *A inclusão $\iota_A : A \rightarrow X$ é uma imersão;*
2. *Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, sua restrição $f|_A : A \rightarrow Y$ é contínua;*
3. *Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então $f : X \rightarrow f(X)$ é contínua;*
4. *Os subconjuntos fechados de A são as intersecções de A com subconjuntos fechados de X ;*
5. *Se $B \subset A$ é um subespaço de A , então B é um subespaço de X ;*
6. *Se $B \subset A$, B é aberto em A e A é aberto em X , então B é um subespaço de X ;*
7. *Se \mathcal{B} é uma base de X , então $\mathcal{B}_A = \{B \cap A; B \in \mathcal{B}\}$ é uma base de A ;*

8. Qualquer subespaço de um espaço de Hausdorff é Hausdorff;
9. Qualquer subespaço de um espaço que satisfaz o 2º axioma da enumerabilidade também satisfaz esse axioma.

A prova de alguns dos itens desta proposição pode ser vista em Lee (2000, p. 42-43).

Um espaço topológico X é dito ser *localmente Euclidiano de dimensão n* se todo ponto $x \in X$ tem uma vizinhança que é homeomorfa a um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Tal vizinhança é chamada uma *vizinhança coordenada*. O homeomorfismo dessa vizinhança coordenada sobre um aberto de \mathbb{R}^n é chamada uma *parametrização* ou uma *carta coordenada* (ou simplesmente *carta*).

A definição de X ser localmente Euclidiano tem sentido se $n = 0$. Convencionamos $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Neste caso X é necessariamente um espaço discreto (isto é, os conjuntos unitários $\{x\} \subset X$ são abertos).

Finalizamos esta seção falando um pouco sobre topologias quocientes.

Sejam (X, τ) um espaço topológico, Y um conjunto qualquer e $\pi : X \rightarrow Y$ uma aplicação sobrejetiva. A topologia

$$\tau_\pi = \{U \subset Y \mid \pi^{-1}(U) \in \tau\}$$

é chamada a *topologia quociente induzida por π* . Se X e Y são espaços topológicos, uma aplicação $\pi : X \rightarrow Y$ é uma *aplicação quociente* se é sobrejetiva, contínua e Y tem a topologia quociente induzida por π .

Seja \sim uma relação de equivalência sobre um espaço topológico X . Para cada $x \in X$, seja $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ a classe de equivalência de x , e seja $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$. Seja $\pi : X \rightarrow X/\sim$ a *projeção natural* $\pi(x) = [x]$. Então X/\sim com a topologia quociente induzida por π é chamado o *espaço quociente* (ou *espaço de identificação*) de X por \sim .

As seguintes proposições poderão ser úteis:

Proposição 1.2 *Se $\pi : X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua e sobrejetiva entre espaços topológicos e que é aberta (isto é, se $U \subset X$ é aberto então $\pi(U) \subset Y$ é aberto), então π é quociente.*

Proposição 1.3 *Suponha que $\pi_1 : X \rightarrow Y_1$ e $\pi_2 : X \rightarrow Y_2$ são aplicações quocientes que fazem as mesmas identificações (isto é, $\pi_1(x) = \pi_1(y) \Leftrightarrow \pi_2(x) = \pi_2(y)$). Então Y_1 e Y_2 são espaços homeomorfos. Mais ainda, existe um único homeomorfismo $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ tal que $\varphi \circ \pi_1 = \pi_2$.*

Seja $\pi : X \rightarrow Y$ uma aplicação quociente. Um subconjunto $\pi^{-1}(y) \subset X$ para $y \in Y$ é chamado uma *fibra* de π .

Exemplo: Considere a aplicação $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$ nas topologias usuais definida por $\pi(x) = x/|x|$. π é contínua, sobrejetiva e aberta, logo é quociente pela proposição 1.2. As fibras de π são raios em $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

Um *grupo topológico* é um grupo G dotado de uma topologia tal que as aplicações $\mu : G \times G \rightarrow G$ e $\nu : G \rightarrow G$ definidas por

$$\mu(g, h) = gh \quad \nu(g) = g^{-1}$$

são contínuas.

Sejam G um grupo e X um espaço topológico. Uma *ação à esquerda* de G sobre X é uma aplicação $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$, tal que

1. $\forall x \in X, \forall g, h \in G, g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$;
2. $\forall x \in X, 1 \cdot x = x$.

Se G é um grupo topológico, uma ação de G sobre X é dita ser *contínua* se a aplicação $G \times X \rightarrow X$ é contínua.

Dada uma ação de G sobre um espaço X , definimos uma relação de equivalência por

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G | g \cdot x = y.$$

As classes de equivalência $[x] = \{g \cdot x | g \in G\} = G \cdot x$ são as *órbitas* da ação. O espaço quociente resultante $X/G = X/\sim$ é chamado o *espaço de órbitas* da ação.

Exemplo: Considere o espaço \mathbb{R} e o grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$. Considere a ação de \mathbb{Z} sobre \mathbb{R} definida por $n \cdot x = n + x$. Então $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} | x \in \mathbb{R}\}$. Pode-se mostrar que a aplicação $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ nas topologias usuais definida por

$$\varepsilon(t) = e^{2\pi it}$$

é uma aplicação quociente, chamada *aplicação quociente exponencial*. Pode-se provar também que \mathbb{R}/\mathbb{Z} é homeomorfo a \mathbb{S}^1 e, mais geralmente, que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^n$ (ver exemplo 3.36 de Lee (2000)).

1.2 Variedades diferenciáveis

Uma *variedade topológica n-dimensional* é um espaço de Hausdorff localmente Euclidiano de dimensão n que satisfaz o 2º axioma da enumerabilidade. Podemos chamar também de *variedade n-dimensional*, *n-variedade* ou simplesmente *variedade*. Uma n -variedade M pode ser denotada por M^n .

Seja $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ uma família de parametrizações $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \subset M$ de uma n -variedade M . M é uma *variedade diferenciável* se

- (1) $\bigcup_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha}(U_{\alpha}) = M$;
- (2) $\forall \alpha, \beta$ com $\mathbf{x}_{\alpha}(U_{\alpha}) \cap \mathbf{x}_{\beta}(U_{\beta}) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_{\alpha}^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_{\beta}^{-1}(W)$ são abertos e as aplicações $\mathbf{x}_{\beta}^{-1} \circ \mathbf{x}_{\alpha} : \mathbf{x}_{\alpha}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}_{\beta}^{-1}(W)$ são diferenciáveis. Em particular as aplicações $\mathbf{x}_{\beta}^{-1} \circ \mathbf{x}_{\alpha}$ são difeomorfismos.
- (3) A família $\{(U_{\alpha}, \mathbf{x}_{\alpha})\}$ é máxima com respeito as condições (1) e (2). Isto significa que se uma parametrização $\mathbf{x}_{\gamma} : U_{\gamma} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{x}_{\gamma}(U_{\gamma}) \subset M$ atende a condição (2), então $(U_{\gamma}, \mathbf{x}_{\gamma}) \in \{(U_{\alpha}, \mathbf{x}_{\alpha})\}$.

Uma família de parametrizações que atendem as condições (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* ou um *atlas* de M .

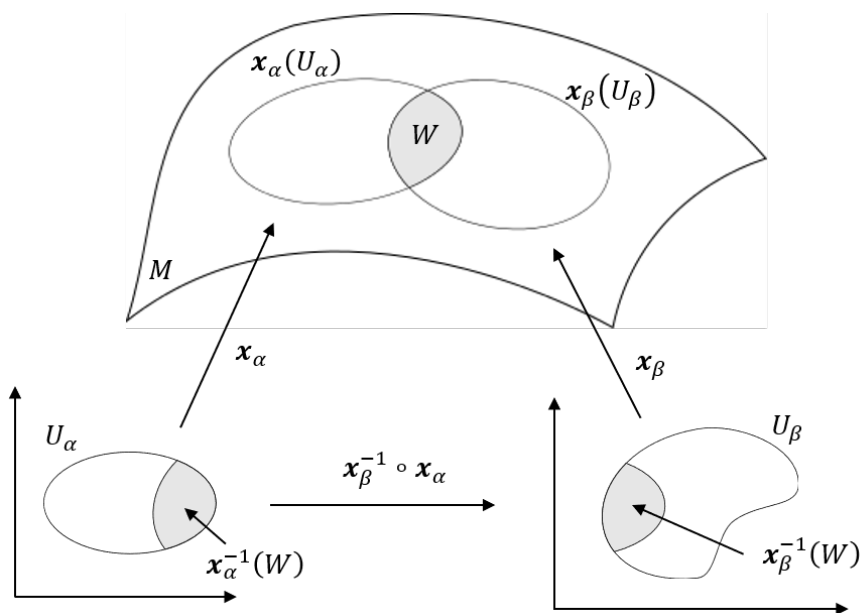
Segundo [Carmo \(2015a, p. 3\)](#),

A condição (3) comparece por razões puramente técnicas. [...] dada uma estrutura diferenciável em M , podemos facilmente completá-la em uma máxima, agregando a ela todas as parametrizações que junto com alguma parametrização da estrutura satisfazem a condição (2).

isto é, uma variedade diferenciável é, com um abuso de linguagem, um conjunto munido de uma estrutura diferenciável. Com isso a estrutura máxima já será admitida nos exemplos que virão.

Observação: No presente trabalho entenderemos por *diferenciável* uma aplicação ser de classe C^{∞} .

Figura 1.1 – Definição de variedade.



Fonte: O autor.

Uma n -variedade com bordo M é um espaço de Hausdorff que satisfaz o 2º axioma da enumerabilidade em que todo ponto tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do semi-espaço superior n -dimensional $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$. Uma n -variedade diferenciável com bordo é uma n -variedade com bordo que possui uma estrutura diferenciável maximal. Chamando o bordo de \mathbb{R}_+^n o conjunto $\partial\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$, o bordo de M é o conjunto ∂M dos pontos p tais que $\mathbf{x}^{-1}(p) \in \partial\mathbb{R}_+^n$ para alguma parametrização \mathbf{x} .

Exemplos:

1. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e

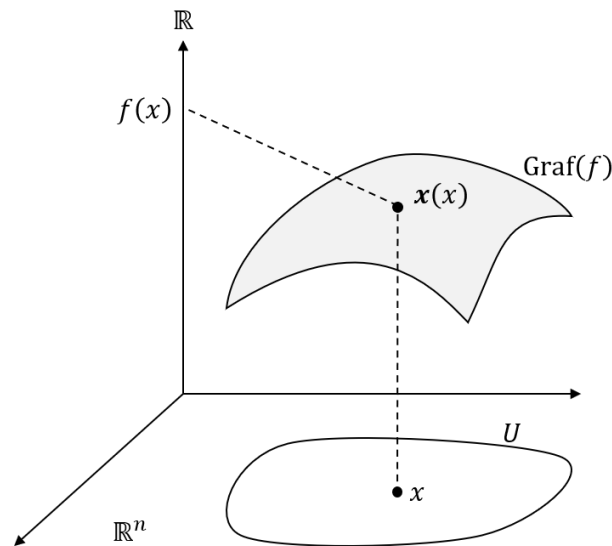
$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} | x \in U\}$$

o seu gráfico. Afirmamos que $\text{Graf}(f)$ é uma variedade diferenciável de dimensão n . De fato, a aplicação $\mathbf{x} : U \rightarrow \text{Graf}(f)$ definida por

$$\mathbf{x}(x) = (x, f(x))$$

é diferenciável e bijetiva, cuja inversa é a aplicação projeção $\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$ restrita a $\text{Graf}(f)$, que também é diferenciável. Como $\text{Graf}(f)$ é sua única vizinhança coordenada, concluímos que é uma n -variedade diferenciável.

Figura 1.2 – Gráfico de f .



Fonte: O autor.

2. Mostremos que a esfera $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ é uma n -variedade diferenciável. Seja $N = (0, \dots, 0, 1)$ o polo norte e $S = (0, \dots, 0, -1)$ o polo

sul de \mathbb{S}^n . Identifique $\mathbb{R}^n \equiv \{(x_1, \dots, x_n, 0) | x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Defina a aplicação $\pi_N : \mathbb{S}^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, chamada a *projeção estereográfica* pelo polo norte, da seguinte maneira: dado $p \in \mathbb{S}^n$, $\pi_N(p)$ é a intersecção da reta que liga N a p com o hiperplano $x_{n+1} = 0$. Em termos de coordenadas:

$$\pi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

π_N é contínua e bijetiva, cuja inversa $\pi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n - \{N\}$ dada por

$$\pi_N^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right)$$

é contínua, logo π_N é um homeomorfismo. O mesmo vale para para a projeção estereográfica pelo polo sul $\pi_S : \mathbb{S}^n - \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

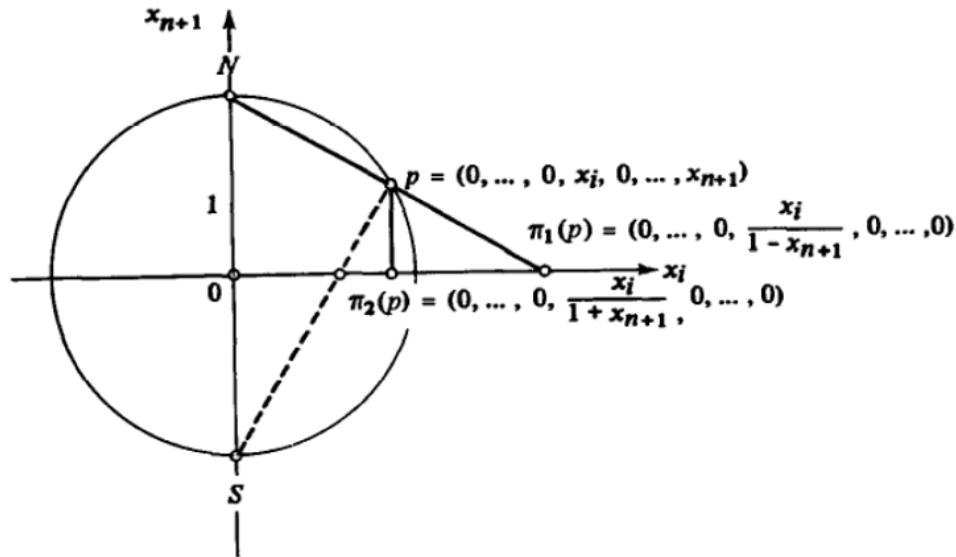
$$\pi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

onde $\pi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n - \{S\}$ é dado por

$$\pi_S^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2}, \frac{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}{1 + y_1^2 + \dots + y_n^2} \right)$$

Assim π_N^{-1} e π_S^{-1} são parametrizações de \mathbb{S}^n e suas imagens cobrem-na. Isto mostra

Figura 1.3 – Projeções estereográficas.



Fonte: Carmo (2015a).

que \mathbb{S}^n é localmente Euclidiana de dimensão n . Como $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e \mathbb{R}^{n+1} é um espaço

de Hausdorff que satisfaz o 2º axioma da enumerabilidade, munindo \mathbb{S}^n da topologia induzida por \mathbb{R}^{n+1} concluímos que \mathbb{S}^n é também um espaço de Hausdorff que satisfaz o 2º axioma da enumerabilidade. Portanto, \mathbb{S}^n é uma variedade topológica de dimensão n . Para provar que é diferenciável devemos mostrar que as mudanças de coordenadas são diferenciáveis. De fato

$$\pi_N \circ \pi_S^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2}, \dots, \frac{y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2} \right) = \pi_S \circ \pi_N^{-1}(y_1, \dots, y_n)$$

são diferenciáveis. Portanto \mathbb{S}^n é uma variedade diferenciável de dimensão n .

3. O *espaço projetivo real* $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ (às vezes indicado também como $P^n(\mathbb{R})$ ou \mathbb{P}^n) é o conjunto das retas de \mathbb{R}^{n+1} que passam pela origem.¹ Em outras palavras, $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ é o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pela relação de equivalência

$$x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Considere a projeção canônica $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ dada por $\pi(x) = \{\lambda x | \lambda \in \mathbb{R}\}$ e defina a topologia em $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ como sendo a topologia quociente induzida por π . É fácil verificar que, como $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ é um espaço de Hausdorff e satisfaz o 2º axioma da enumerabilidade, $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ é um espaço de Hausdorff e satisfaz o 2º axioma da enumerabilidade. Então, para mostrar que $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ é uma variedade n -dimensional, basta verificar que é localmente Euclidiano de dimensão n .

A classe de equivalência do ponto $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ será denotada por $[x_1, \dots, x_{n+1}] = \{(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Como o espaço base é $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, algum $x_i \neq 0$. Podemos escrever

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right]$$

Seja $V_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n | x_i = 1\}$ para cada $i = 1, \dots, n+1$. Temos que $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i = \mathbb{R}\mathbb{P}^n$, que

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto [x_1, \dots, x_{n+1}] \end{aligned}$$

é contínua e que

$$\begin{aligned} h_i : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

é contínua, logo $\mathbf{x}_i = \pi \circ h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow V_i$ é contínua. Como \mathbf{x}_i é bijetiva e aberta (por ser uma composição de aplicações abertas), \mathbf{x}_i é um homeomorfismo. Assim $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ é localmente Euclidiano de dimensão n .

¹ Analogamente, o *espaço projetivo complexo* $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é o conjunto das retas de \mathbb{C}^{n+1} que passam pela origem, e o *espaço projetivo quaterniônico* $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ é o conjunto das retas em \mathbb{H}^{n+1} que passam pela origem. Estes espaços serão estudados com mais detalhes no capítulo 5.

Afirmamos que $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ é uma variedade diferenciável. Mais precisamente, afirmamos que a família $\{(\mathbb{R}^n, \mathbf{x}_i)\}$ é uma estrutura diferenciável. Com efeito, $\bigcup_{i=1}^n \mathbf{x}_i(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{i=1}^n V_i = \mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Dadas duas vizinhanças coordenadas V_i e V_j , temos que

$$\mathbf{x}_i^{-1}(V_i \cap V_j) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_j \neq 0\}$$

é aberto. Finalmente, para qualquer $(x_1, \dots, x_n) \in V_i \cap V_j$, supondo $i > j$ (o caso $i < j$ é análogo),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j^{-1} \circ \mathbf{x}_i(x_1, \dots, x_n) &= \mathbf{x}_j^{-1}[x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n] \\ &= \mathbf{x}_j^{-1} \left[\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, 1, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_j}, \frac{1}{x_j}, \frac{x_{i+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right] \\ &= \left(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_j}, \frac{1}{x_j}, \frac{x_{i+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right) \end{aligned}$$

que é diferenciável. Portanto $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão n .

Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é *diferenciável* em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ e a aplicação

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (1.1)$$

é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$. φ é *diferenciável em um aberto* de M_1 (ou o próprio M_1) se é diferenciável em todos os pontos desse aberto. A aplicação (1.1) é chamada a *expressão* de φ nas parametrizações \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Em particular, uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ e sua inversa $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \subset M \rightarrow U$ são aplicações diferenciáveis. Para ver isto basta notar que \mathbb{R}^n é uma n -variedade parametrizada pela identidade $\mathbf{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{id}(p) = p$; então $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{id} = \mathbf{id} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{id}^{-1} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x} = \mathbf{id} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são diferenciáveis.

Dada uma variedade diferenciável M , uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow M$ em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, é chamada uma *curva* (diferenciável) em M . Suponha que $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $\alpha(0) = p \in M$, e seja \mathcal{D} o conjunto das funções de $M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis em p . O *vetor tangente à curva* α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

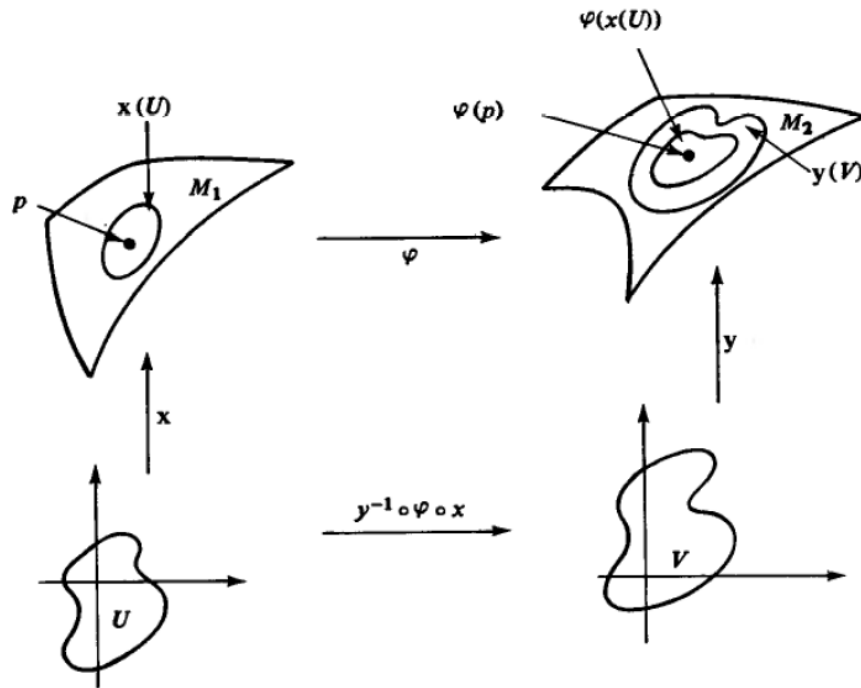
$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \quad (1.2)$$

Um *vetor tangente* em p é um vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por $T_p M$.

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização. Defina a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ por

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Figura 1.4 – Aplicação diferenciável entre variedades.



Fonte: Carmo (2015a).

em que $q = (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^{-1}(p)$ e $\alpha(0) = x(q) = p$. Então

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} [(f \circ \mathbf{x}) \circ (\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)] \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} [(f \circ \mathbf{x})(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n)] \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{\partial(f \circ \mathbf{x})}{\partial x_i} \right|_q \end{aligned}$$

Cometeremos um abuso de notação e escreveremos f para significar $f \circ \mathbf{x}$, isto é, a expressão de f no sistema de coordenadas \mathbf{x} . α é uma *curva coordenada na direção x_i* . Então

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_q$$

o qual pode ser escrito como

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_q = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q f,$$

isto é,

$$\alpha'(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q.$$

Com isso, dada uma curva α qualquer em M passando por $p = \mathbf{x}(q)$ teremos, na parametrização \mathbf{x} ,

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f \circ \mathbf{x})(q), \quad q = (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^{-1}(p), \quad \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

e

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} [(f \circ \mathbf{x}) \circ (\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha)] \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} [f(x_1(t), \dots, x_n(t))] \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_q = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q \right) f \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q \quad (1.3)$$

A expressão (1.3) mostra que o vetor tangente a uma curva α em p depende apenas das derivadas das coordenadas de α . Decorre de (1.3) também que $T_p M$ é um espaço vetorial de dimensão n , em que uma base é $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_q \right\}$, chamada a *base associada* à parametrização \mathbf{x} . O espaço $T_p M$ é chamado o *espaço tangente* de M em p .

Proposição 1.4 *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_p M_1$, escolha uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ definida por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .*

Prova:

Sejam $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ e $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ parametrizações em p e em $\varphi(p)$, respectivamente. Exprimindo φ e α nessas parametrizações podemos escrever

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}(q) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$$

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

em que $q = (x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^{-1}(p)$ e $(y_1, \dots, y_m) = \mathbf{y}^{-1}(\varphi(p))$.

Sejam $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \right\}$ as bases de $T_p M_1$ e $T_{\varphi(p)} M_2$ associadas a \mathbf{x} e \mathbf{y} , respectivamente. Podemos assim escrever $\beta'(0)$ nessas bases como

$$\beta'(0) = \sum_{i=1}^m \left. \frac{d}{dt} y_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} x'_j(0) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\beta'(0) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y_1}{\partial x_j} x'_j(0), \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_m}{\partial x_j} x'_j(0) \right)$$

Em forma matricial

$$\beta'(0) = d\varphi_p(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{m \times n} (x'_j(0))_{n \times 1} \quad (1.4)$$

Esta igualdade mostra que $d\varphi_p$ é uma transformação linear de $T_p M_1$ em $T_{\varphi(p)} M_2$ cuja matriz nas bases associadas às parametrizações \mathbf{x} e \mathbf{y} é justamente a matriz da diferencial de $\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}$ em p , e independe de α . \square

A aplicação $d\varphi_p$ é chamada *diferencial* de φ em p .

Vale também a *regra da cadeia*: Se $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ e $\psi : M_2 \rightarrow M_3$ são diferenciáveis, então $\psi \circ \varphi : M_1 \rightarrow M_3$ é diferenciável e

$$d(\psi \circ \varphi)_p(v) = d\psi_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v)) \quad (1.5)$$

Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ entre variedades diferenciáveis é um *difeomorfismo* se é diferenciável, bijetiva e sua inversa $\varphi^{-1} : M_2 \rightarrow M_1$ é diferenciável. φ é um *difeomorfismo local* se para todo $p \in M_1$, existem vizinhanças $U \subset M_1$ de p e $V \subset M_2$ de $\varphi(p)$ tais que a restrição $\varphi|_U : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

Por exemplo, uma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset M$ é um difeomorfismo como já vimos.

Segue da regra da cadeia que se φ é um difeomorfismo, então $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ é um isomorfismo e que $(d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}) = (d\varphi_p)^{-1}$. Em particular M_1 e M_2 devem ter dimensões iguais.

Existe um análogo para variedades do Teorema da Função inversa.

Teorema 1.1 (Aplicação inversa) *Seja $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^n$ uma aplicação diferenciável e seja $p \in M_1$ um ponto em que $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ é um isomorfismo. Então φ é um difeomorfismo local em p .*

Uma aplicação diferenciável $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$ é uma *imersão* se $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ é injetiva para todo $p \in M_1$. Além disso, se $\varphi : M_1 \rightarrow \varphi(M_1) \subset M_2$ é um homeomorfismo, onde $\varphi(M_1)$ tem a topologia induzida por M_2 , φ é chamado de *mergulho*. Se $M_1 \subset M_2$ e a inclusão $i : M_1 \rightarrow M_2$ é um mergulho, diz-se que M_1 é uma *subvariedade* de M_2 .

A proposição a seguir afirma que toda imersão é localmente um mergulho.

Proposição 1.5 *Seja $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$, $n \leq m$, uma imersão. Para todo $p \in M_1$, existe uma vizinhança $V \subset M_1$ de p tal que $\varphi|_V : V \rightarrow M_2$ é um mergulho.*

Prova: Ver [Carmo \(2015a, p. 14-15\)](#). \square

1.3 Métricas Riemannianas

Uma *métrica Riemanniana* (ou *estrutura Riemanniana*) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ uma forma quadrática simétrica positiva definida g_p no espaço tangente T_pM (isto é, associa cada p a um produto interno em T_pM) de modo que g_p varia diferenciavelmente com p no seguinte sentido: se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é uma parametrização ao redor de p e $(x_1, \dots, x_n) \in U$, com $q = \mathbf{x}(x_1, \dots, x_n)$, então

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = g_q \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad (1.6)$$

é diferenciável em U . Notação: $g_p(u, v) = \langle u, v \rangle_p$.

As funções g_{ij} são chamadas *expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas* $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana*. Uma variedade M com uma métrica g pode ser indicada pelo par (M, g) .

Exemplos:

1. \mathbb{R}^n com $\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. A expressão da métrica é $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ e é diferenciável em todo \mathbb{R}^n .
2. Sejam M^m e N^n variedades Riemannianas e considere a variedade produto $M \times N$. Uma parametrização de $M \times N$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{z} : U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n} &\rightarrow M \times N \\ (r, s) &\mapsto (\mathbf{x}(r), \mathbf{y}(s)) \end{aligned}$$

em que $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ e $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N$ são parametrizações de M e N , respectivamente. Sejam

$$\begin{aligned} \pi_1 : M \times N &\rightarrow M & \pi_2 : M \times N &\rightarrow N \\ (p, q) &\mapsto p & (p, q) &\mapsto q \end{aligned} \quad \text{e}$$

as projeções naturais. Defina

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v) \rangle_p + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v) \rangle_q$$

para todos $(p, q) \in M \times N$ e todos $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$. Vamos mostrar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(p,q)}$ é uma métrica em $M \times N$. Claramente é bilinear e simétrica. Como

$$(\mathbf{x}^{-1} \circ \pi_1 \circ \mathbf{z})(r, s) = r$$

a matriz de $d\pi_1$ nessas parametrizações é

$$d\pi_1 = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix}_{m \times (m+n)}$$

em que I_m é a matriz identidade de ordem m . Analogamente,

$$d\pi_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}_{n \times (m+n)}$$

Assim, sendo (u_1, \dots, u_{m+n}) as coordenadas de $u \in T_{(p,q)}(M \times N)$,

$$\langle u, u \rangle_{(p,q)} = |d\pi_1(u)|_p^2 + |d\pi_2(u)|_q^2 = \sum_{i=1}^m u_i^2 + \sum_{i=m+1}^{m+n} u_i^2 > 0 \Leftrightarrow u \neq 0$$

logo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(p,q)}$ é positiva definida e, assim, define um produto interno. Resta mostrar que é diferenciável. Observe que

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(p, q) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \text{ se } i \leq m \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial z_i}(p, q) = \frac{\partial}{\partial y_i}(q) \text{ se } i > m$$

logo

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p), \frac{\partial}{\partial y_1}(q), \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}(q) \right\}$$

é a base de $T_{(p,q)}(M \times N)$ associada a \mathbf{z} . Então

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j} \right\rangle_{(p,q)} &= \left\langle d\pi_1 \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right), d\pi_1 \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right) \right\rangle_p + \left\langle d\pi_2 \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right), d\pi_2 \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right) \right\rangle_q \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \text{ ou } \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle \end{aligned}$$

Logo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(p,q)}$ é diferenciável e, portanto, é uma métrica, chamada *métrica produto*. Em particular o n -toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ é uma n -variedade Riemanniana. Este exemplo também mostra que $T_{(p,q)}(M \times N)$ pode ser decomposto em soma direta

$$T_{(p,q)}(M \times N) = T_p M \oplus T_q N.$$

Para o próximo teorema precisaremos de algumas definições. Uma cobertura aberta $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de uma variedade diferenciável M é *localmente finita* se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança $U \subset M$ tal que $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices α . O *suporte* de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é o conjunto

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in M | f(x) \neq 0\}}$$

Uma família de funções diferenciáveis $\{\phi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ é uma *partição diferenciável da unidade* se

1. Para todo α , $\phi_\alpha \geq 0$ e $\text{supp } \phi_\alpha$ está contido em alguma vizinhança coordenada de M ;
2. $\{\phi_\alpha(M)\}_{\alpha \in A}$ é localmente finita;

$$3. \sum_{\alpha \in A} \phi_\alpha(p) = 1 \quad \forall p \in M.$$

A soma no item 3 está bem posta pois $\phi_\alpha \neq 0$ apenas para uma coleção finita de índices α .

Uma partição da unidade $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é dita estar *subordinada* a uma cobertura aberta $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de M se para todo $\alpha \in A$ existe um $\lambda \in L$ tal que $\text{supp } \phi_\alpha \subset U_\lambda$.

Teorema 1.2 (Existência de partição da unidade) *Seja M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de M . Então existe uma partição diferenciável da unidade enumerável $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ com $\text{supp } \phi_i$ compacto para cada $i \in \mathbb{N}$*

Prova: Ver Warner (1983), teorema 1.11. □

Como exemplo de aplicação temos o importante resultado seguinte, o qual afirma que toda variedade diferenciável é uma variedade Riemanniana.

Teorema 1.3 *Uma variedade diferenciável M possui uma métrica Riemanniana.*

Prova:

Seja $\{V_\alpha\}$ uma cobertura de M^n por vizinhanças coordenadas. Seja $\{\phi_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{V_\alpha\}$. Seja $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V_\alpha$ a parametrização correspondente a V_α . Dados $p \in V_\alpha$ e $u, v \in T_p M$, em que

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad v = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

defina

$$\langle u, v \rangle_p^\alpha = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Vemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_p^\alpha$ é bilinear simétrica positiva e que $g_{ij}^\alpha = \delta_{ij}$ é diferenciável, logo é uma métrica em V_α . Por fim, para cada $p \in M$, ponha

$$\langle u, v \rangle_p = \sum_{\alpha} \phi_\alpha \langle u, v \rangle_p^\alpha$$

Então $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é bilinear simétrica positiva para todo $p \in M$ e $g_{ij} = \sum_{\alpha} \phi_\alpha g_{ij}^\alpha$ é diferenciável em M . Portanto é uma métrica em M . □

Com as partições da unidade podemos definir o volume de uma variedade.

Uma variedade diferenciável M é *orientável* se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ tal que para todos α, β com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ tem determinante positivo. Uma parametrização \mathbf{x} é *positiva* se é *compatível* com a orientação de M , isto é, se a diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}$ tem determinante positivo.

Seja M^n uma variedade diferenciável orientada com métrica g e $\Omega \subset M$ uma região (conjunto aberto e conexo) cujo fecho é compacto. Suponha que R está contida em uma vizinhança coordenada $\mathbf{x}(U)$ de uma parametrização positiva $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ e que a fronteira de $\mathbf{x}^{-1}(\Omega)$ tenha medida nula. Definimos o *volume* de Ω na métrica g por

$$\text{vol}(\Omega, g) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(\Omega)} \sqrt{\det g_{ij}} dx_1 \cdots dx_n. \quad (1.7)$$

Se Ω não está contida em uma vizinhança coordenada, basta tomar uma partição da unidade $\{\phi_\alpha\}$ subordinada a uma cobertura de Ω por vizinhanças coordenadas $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ e tomar

$$\text{vol}(\Omega, g) = \sum_\alpha \int_{\mathbf{x}_\alpha^{-1}(\Omega)} \phi_\alpha \sqrt{\det g_{ij}} dx_1 \cdots dx_n. \quad (1.8)$$

A hipótese de M ser orientável é para que $V(\Omega, g)$ não mude de sinal ao se tomar uma parametrização específica.

Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com $\text{supp } f = \Omega$ compacto, definimos a integral de f sobre M com respeito à métrica g por

$$\int_M f dV_g = \sum_\alpha \int_{\mathbf{x}_\alpha^{-1}(\Omega)} \phi_\alpha \cdot f \circ \mathbf{x}_\alpha \cdot \sqrt{\det g_{ij}} dx_1 \cdots dx_n. \quad (1.9)$$

Em particular, $V(\Omega, g) = \int_\Omega 1 dV_g$.

1.4 Formas diferenciais

Sejam $f_1, \dots, f_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais lineares. O *produto exterior* deles é uma forma r -linear $f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$ definida por

$$(f_1 \wedge \cdots \wedge f_r)(v_1, \dots, v_r) = \det[f_i(v_j)]$$

para quaisquer $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$.

Seja $\mathcal{A}_r(E)$ o conjunto das r -formas lineares alternadas $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ no espaço vetorial E . Uma *forma diferencial de grau r* num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\omega : U \rightarrow \mathcal{A}_r(\mathbb{R}^n)$.

Denotando por $\{dx_1, \dots, dx_n\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ a base dual de $\{e_1, \dots, e_n\} \in \mathbb{R}_n$, pode-se provar que

$$\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \mid i_1 < \cdots < i_r; i_j \in \{1, \dots, n\}\}$$

forma uma base do espaço dual $\mathcal{A}_r(\mathbb{R}^n)^*$. Assim toda r -forma ω pode ser escrita como

$$\omega(x) = \sum_I a_I(x) dx_I$$

em que I denota a r -upla $(i_1 < \dots < i_r)$, $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ e os $a_I : U \rightarrow \mathbb{R}$ são os coeficiente de ω .

Estendemos o produto exterior a formas da seguinte maneira: sejam $\omega = \sum a_I dx_I$ uma r -forma e $\varphi = \sum b_J dx_J$ uma s -forma. Então o produto exterior $\omega \wedge \varphi$ é

$$(\omega \wedge \varphi)(x) = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$$

Proposição 1.6 (Propriedades do produto exterior) *Sejam ω uma k -forma, φ uma s -forma e θ uma r -forma. Então:*

- a) $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$;
- b) $\omega \wedge \varphi = (-1)^{ks} \varphi \wedge \omega$;
- c) $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$ se $r = s$.

A *diferencial exterior* de uma r -forma $\omega = \sum a_I dx_I$ é a $(r+1)$ -forma

$$d\omega = \sum da_I \wedge dx_I = \sum_{i,I} \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável e seja ω uma r -forma em \mathbb{R}^m . O *pullback* (ou a *forma induzida*) $f^*\omega$ de ω por f é a r -forma sobre \mathbb{R}^n definida por

$$f^*\omega(x)(v_1, \dots, v_r) = \omega(f(x))(df_x(v_1), \dots, df_x(v_r))$$

para quaisquer $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$.

Se M^n é uma variedade, uma *forma diferencial de grau r* em M é uma aplicação ω que associa a cada $p \in M$ uma r -forma linear alternada $\omega(p) : M \rightarrow \mathcal{A}_r(T_p M)$

Se $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ é uma parametrização em p , indicaremos com $\{du_1, \dots, du_n\}$ a base dual de $\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_n}\}$. As formas $du_I = du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r}$ formam uma base de $\mathcal{A}_r(T_p M)^*$. Assim

$$\omega(p) = \sum_I a_I(p) du_I$$

Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável entre variedades, o *pullback* da r -forma ω em N por f é a r -forma $f^*\omega$ em M definida por

$$f^*\omega(p)(v_1, \dots, v_r) = \omega(f(p))(df_p(v_1), \dots, df_p(v_r))$$

em que $v_1, \dots, v_r \in T_p M$.

Um exemplo importante de forma diferencial é o *elemento de volume* de uma variedade orientada M^n , o qual é definido por $dV(p)(v_1, \dots, v_n) = \pm$ volume do paralelepípedo formado

pelos vetores $v_1, \dots, v_r \in T_p M$. Se $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ é uma parametrização em p e $\{du_1, \dots, du_n\}$ é a base dual de $\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_n}\}$, sendo g a matriz da métrica de M , então

$$dV(p) = \sqrt{\det g} du_1 \wedge \dots \wedge du_n$$

O volume de M é então

$$\text{vol } M = \int_M dV$$

2 Geometria intrínseca e a 2ª forma fundamental

Neste capítulo estudaremos alguns conceitos e propriedades das variedades que são intrínsecos, isto é, que não dependem do ambiente onde a variedade está imersa. Tais propriedades, como curvaturas e isometrias, dependem apenas da métrica Riemanniana da variedade. Ao final, definiremos a 2ª forma fundamental, a qual é um conceito extrínseco. As provas das proposições presentes neste capítulo podem ser encontradas em [Carmo \(2015a\)](#) e em [Biezuner \(2017\)](#).

2.1 Campos de vetores

Um *campo de vetores* X em uma variedade diferenciável M é uma aplicação que associa cada ponto $p \in M$ a um vetor tangente $X(p) \in T_pM$.

Considerando uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em torno de p podemos escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.1)$$

onde cada $a_i : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é calculado em p . Dizemos que X é *diferenciável* se as funções coordenadas a_i são diferenciáveis.

Podemos pensar no campo X como uma aplicação $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$ do conjunto das funções diferenciáveis em M no conjunto das funções em M definido por

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad (2.2)$$

Assim X é diferenciável se Xf é diferenciável para todo $f \in \mathcal{D}$.

Lema 2.1 *Sejam X e Y campos de vetores diferenciáveis em uma variedade diferenciável M . Existe um único campo vetorial (diferenciável) Z tal que $Zf = (XY - YX)f$ para todo $f \in \mathcal{D}$.*

O campo Z do lema é chamado o *colchete de Lie* de X por Y e é denotado por $[X, Y]$.

Proposição 2.1 (Propriedades do colchete de Lie) *Sejam X, Y, Z campos diferenciáveis em M ; a, b números reais; e f, g funções diferenciáveis em M . Então*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anti-comutatividade*);
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (*linearidade*);
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*);
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.

Mais propriedades dos colchetes podem ser encontradas em [Biezuner \(2017\)](#).

Um campo de vetores particularmente importante é o campo gradiente. Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. O *gradiente* de f é o campo $\text{grad } f \in \mathcal{X}(M)$ definido por

$$\langle \text{grad } f, X \rangle = Xf \quad \forall X \in \mathcal{X}(M) \quad (2.3)$$

Para qualquer campo $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ temos

$$df(X) = \sum_{i=1}^n a_i df \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Xf$$

o que permite escrever

$$df(X) = \langle \text{grad } f, X \rangle \quad (2.4)$$

Em termos de coordenadas, denotando por (g^{ij}) a matriz inversa de (g_{ij}) , temos a seguinte expressão (fácil de deduzir, bastando aplicar (2.4) com $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$ e resolver o sistema linear resultante):

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g^{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

No caso $M = \mathbb{R}^n$ a fórmula acima se reduz à definição clássica $\text{grad } f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$.

2.2 Conexão afim

Indicamos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais diferenciáveis. Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ (*linearidade*);
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ (*aditividade*);

$$3. \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \text{ (regra do produto)}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e todos $f, g \in \mathcal{D}(M)$. Às vezes denotamos a conexão como ∇^M para explicitar a variedade a qual se refere.

Dado $p \in M^n$, seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ um sistema de coordenadas em p . Denote $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$. Então dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, temos, nesse sistema,

$$X = \sum_{i=1}^n x_i X_i \quad \text{e} \quad Y = \sum_{i=1}^n y_i X_i$$

Assim

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n x_i \nabla_{X_i} Y = \sum_{i=1}^n x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_{j=1}^n y_j X_j \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j=1}^n x_i (X_i y_j) X_j$$

Denotando por Γ_{ij}^k as coordenadas de $\nabla_{X_i} X_j$ na base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de $T_p M$, isto é, $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$ (note que os Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis), e trocando o símbolo "j" pelo símbolo "k" no 2º somatório obtemos

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X y_k \right) X_k \quad (2.6)$$

o que mostra que $\nabla_X Y$ depende apenas dos valores de X e Y no ponto p e dos valores de Y ao longo de uma curva tangente a X em p .

Os símbolos Γ_{ij}^k são chamados os *coeficientes da conexão* ou os *símbolos de Christoffel* da conexão.

Proposição 2.2 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Existe uma única correspondência que associa a cada campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow M$ uma campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de α tal que*

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, onde W é um campo vetorial ao longo de α (aditividade);
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável (regra do produto);
3. $V(t) = Y(\alpha(t)) \Rightarrow \frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} Y$ (regra da cadeia).

O campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ da proposição acima é denominado *derivada covariante* de V ao longo de α . Tal campo é dito *paralelo* se $\frac{DV}{dt} = 0 \forall t \in I$.

Proposição 2.3 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $\alpha(t_0)$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo paralelo V ao longo de α tal que $V(t_0) = V_0$.*

O campo V da proposição acima é chamado o *transporte paralelo* de V_0 ao longo de α .

Proposição 2.4 *Seja M uma variedade Riemanniana com uma conexão afim ∇ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Para quaisquer campos de vetores paralelos V e W ao longo de uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow M$ tem-se que $\langle V, W \rangle$ é constante;*

2. *Para quaisquer campos de vetores V, W ao longo de uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle$$

3. *Para quaisquer campos de vetores diferenciáveis X, Y, Z de M vale*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

Uma conexão afim ∇ que satisfaz uma das afirmações da proposição anterior (e, portanto, todas elas) é dita ser *compatível* com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Uma conexão afim ∇ é *simétrica* se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

O nome se justifica pois em um sistema de coordenadas \mathbf{x} tem-se

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0 \Rightarrow \nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_j} X_i \quad \forall i, j$$

De forma equivalente, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ para todos os índices i, j, k .

Teorema 2.1 (Levi-Civita) *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M simétrica e compatível com a métrica Riemanniana de M .*

A conexão afim ∇ do teorema é chamada *conexão de Levi-Civita* ou *conexão Riemanniana*.

Sendo (g_{ij}) a matriz da métrica g em M^n , os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana são calculados pela fórmula

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) g^{km} \quad (2.7)$$

Observe que para o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n tem-se $g_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = 0 \forall i, j, k \Rightarrow \Gamma_{ij}^m = 0 \forall i, j, m$.

A derivada covariante de um campo $V = \sum_{i=1}^n v_i X_i$ ao longo de uma curva diferenciável $\alpha(t) = \mathbf{x}(x_1(t), \dots, x_n(t))$ pode ser calculada como

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dt} v_j \Gamma_{ij}^k \right) X_k \quad (2.8)$$

No caso do espaço Euclidiano, como $\Gamma_{ij}^k = 0$, a derivada covariante coincide com a derivada usual.

Uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow M$ é uma *geodésica* em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) = 0$ em t_0 . Se α é geodésica em todo $t \in I$, dizemos que α é uma *geodésica*.

A equação (2.8) mostra que toda geodésica $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ satisfaz o sistema de equações diferenciais de 2ª ordem

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Proposição 2.5 Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M$, $p \in V$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ e uma aplicação C^∞

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \mathcal{U} = \{(q, v) | q \in V, v \in T_q M, |v| < \varepsilon_1\},$$

tais que a curva $t \mapsto \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v , para cada $q \in V$ e cada $v \in T_q M$ com $|v| < \varepsilon_1$.

Sejam $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ aberto, em que TM é o fibrado tangente de M , isto é, é o conjunto dos pares (q, v) com $q \in M$ e $v \in T_q M$. A aplicação $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ definida por

$$\exp(q, v) = \exp_q(v) = \gamma(1, q, v) = \gamma \left(|v|, q, \frac{v}{|v|} \right)$$

e chamada *aplicação exponencial* em \mathcal{U} .

Geometricamente, $\exp_q(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de q , sobre a geodésica que passa por q com velocidade $\frac{v}{|v|}$.

Proposição 2.6 Dado $q \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q : B(0, \varepsilon) \subset T_q M \rightarrow M$ é um difeomorfismo sobre a sua imagem.

2.3 Isometrias

Um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ entre variedades Riemannianas é uma *isometria* se

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_p \quad \forall p \in M \text{ e } \forall u, v \in T_p M. \quad (2.10)$$

φ é uma *isometria local* em $p \in M$ se existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que $\varphi|_V : V \rightarrow \varphi(V)$ é uma isometria. M é *localmente isométrica* a N se para todo $p \in M$ existem uma vizinhança $V \subset M$ de p e uma isometria local $\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subset N$.

Seja $\varphi : M^n \rightarrow N^{n+k}$ uma imersão, Se N tem uma estrutura Riemanniana, φ induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle u, v \rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{f(p)}$. De fato, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é bilinear, simétrica e, como $d\varphi_p$ é injetiva, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é positiva definida. Sejam $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ e $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow N$ parametrizações sobre $p \in M$ e $\varphi(p) \in N$, respectivamente. Então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p = \left\langle d\varphi_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right), d\varphi_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right) \right\rangle_{\varphi(p)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}(\varphi(p)), \frac{\partial}{\partial y_j}(\varphi(p)) \right\rangle_{\varphi(p)}$$

é diferenciável para todo $p \in M$, logo $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é uma métrica em M , chamada a *métrica induzida* por φ . Se a métrica de M coincide com a métrica induzida por φ , dizemos que φ é uma *imersão isométrica*. Em particular, uma subvariedade $M \subset N$ admite a métrica induzida pela inclusão $i : M \rightarrow N$ (M herda a métrica de N). Podemos também usar a seguinte notação para a métrica de M induzida por (N, g) :

$$\varphi^* g_p(u, v) = g_{\varphi(p)}(d\varphi_p(u), d\varphi_p(v)) \quad (2.11)$$

A aplicação φ^* é o *pullback* de φ . Verifica-se sem dificuldades que se $\varphi : M \rightarrow N$ e $\psi : N \rightarrow P$ são imersões, então $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$.

2.4 Curvaturas

A *curvatura* R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.12)$$

No caso do espaço euclidiano $M = \mathbb{R}^n$, a curvatura é nula. De fato, como $\Gamma_{ij}^k = 0$ para quaisquer índices i, j, k e $\partial/\partial x_i = e_i$, temos por (2.6) que

$$\nabla_X Z = \nabla_X(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=1}^n X(z_k) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^n X(z_k) e_k = (X(z_1), \dots, X(z_n))$$

De forma análoga $\nabla_X \nabla_Y z = (XY(z_1), \dots, XY(z_n))$. Assim

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YX(z_1), \dots, YX(z_n))$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow R(X, Y)Z &= (YX(z_1), \dots, YX(z_n)) - (XY(z_1), \dots, XY(z_n)) \\
 &\quad + ((XY - YX)(z_1), \dots, (XY - YX)(z_n)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que para quaisquer campos de vetores

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Z = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

em M^n tem-se a fórmula

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R_{ijk}^l x_i y_j z_k \frac{\partial}{\partial x_l} \quad (2.13)$$

em que

$$R_{ijk}^l = \sum_r (\Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l - \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^l) + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l \quad (2.14)$$

Introduzimos a notação $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = (X, Y, Z, W)$. Dados $p \in M^n$, $n \geq 2$, e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$, o número real K definido por

$$K(x, y) = K(\sigma) = K(\sigma) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2} \quad (2.15)$$

em que $\{x, y\}$ é uma base de σ , onde $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$, é chamado *curvatura seccional* de σ em p .

A proposição a seguir mostra que $K(\sigma)$ independe da base $\{x, y\}$ escolhida, o que mostra que $K(\sigma)$ está bem definida.

Proposição 2.7 *Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bidimensional do espaço tangente $T_p M$ e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então $K(x, y)$ independe da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.*

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p M^n$. Tomemos uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x e consideremos as seguintes médias

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x, z_i, x, z_i) \quad (2.16)$$

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Ric}(z_j) \quad (2.17)$$

$\text{Ric}_p(x)$ é a *curvatura de Ricci* de M em p na direção x e $K(p)$ é a *curvatura escalar* em p .

É possível demonstrar que essas curvaturas não dependem das bases escolhidas, estando assim bem definidas. Os detalhes podem ser vistos em Carmo (2015a, p. 108-109).

2.5 A segunda forma fundamental

Seja $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{m+n}$ uma imersão da variedade M na variedade Riemanniana \overline{M} . Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\varphi(U)$ é uma subvariedade de \overline{M} (a métrica de $\varphi(U)$ é a métrica induzida por \overline{M}).

Para simplificar a notação, identificaremos U com $\varphi(U)$ e cada vetor $v \in T_q M$, $q \in U$, com $d\varphi_q(v) \in T_{\varphi(q)} \overline{M}$. Desta forma, para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p \overline{M}$ se decompõe na soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp.$$

Se $v \in T_p \overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever (de forma única)

$$v = v^\top + v^\perp, v^\top \in T_p M, v^\perp \in T_p M^\perp.$$

Denominamos v^\top de *componente tangencial* de v e v^\perp a *componente normal* do vetor v .

A conexão Riemanniana de \overline{M} será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M e \overline{X} e \overline{Y} são extensões de X e Y a \overline{M} , respectivamente, definimos a conexão afim de M por

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}. \quad (2.18)$$

É fácil verificar que a conexão ∇ acima definida é uma conexão Riemanniana com respeito à métrica induzida por \overline{M} (basta aplicar as definições de conexão afim e compatibilidade com a métrica na equação acima).

Se X e Y são campos de vetores locais em M , definimos o campo normal local

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\perp. \quad (2.19)$$

Proposição 2.8 *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, $U \subset M$, a aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$ é bilinear e simétrica.*

Sejam $p \in M$ e $\eta \in T_p M^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle \quad (2.20)$$

é bilinear e simétrica. A forma quadrática II_η definida em $T_p M$ por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x) \quad (2.21)$$

é chamada a *segunda forma fundamental* em p segundo o vetor normal η . Alguns autores chamam o campo B de 2ª forma fundamental.

A H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ dada por

$$\langle A_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle. \quad (2.22)$$

Se N é uma extensão local de η para a variedade ambiente \overline{M} , então o operador linear A_η pode ser calculado por meio da expressão

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^\top. \quad (2.23)$$

O operador A_η acima definido chama-se *operador de Weingarten*.

O teorema a seguir relaciona as curvaturas seccionais das variedades M e \overline{M} com suas respectivas segundas formas fundamentais.

Teorema 2.2 (Gauss) *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de $T_p M$. Então*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2 \quad (2.24)$$

Uma imersão $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$ é dita *totalmente geodésica* em $p \in M$ se $\forall \eta \in T_p M^\perp$ a 2ª forma fundamental II_η é identicamente nula em p . Tal terminologia se justifica pelo seguinte

Teorema 2.3 *Uma imersão $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$ é totalmente geodésica se, e somente se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de \overline{M} em $\varphi(p)$.*

Uma imersão $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$ é dita *mínima* se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in T_p M^\perp$ tem-se que o traço $\text{tr } A_\eta = 0$.

Escolhendo uma base ortonormal $\{E_1, \dots, E_n, \dots, E_{m+n}\}$ em $T_p \overline{M}$, onde $\{E_1, \dots, E_n\} \subset T_p M$ e $\{E_{n+1}, \dots, E_{m+n}\} \subset T_p M^\perp$, definimos o vetor

$$H = \sum_{i=1}^{m+n} B(E_i, E_i) = \sum_{j=n+1}^{m+n} (\text{tr } A_{E_j}) E_j \quad (2.25)$$

chamado *vetor curvatura média* da imersão φ . Pela definição, φ é mínima se, e somente se $H(p) = 0 \forall p \in M$.

Dada uma imersão isométrica, considere o tensor

$$B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^\perp \rightarrow \mathcal{D}(M)$$

definido por

$$B(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle$$

Defina

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = X(B(Y, Z, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla_X \eta)$$

Teorema 2.4 (Equação de Codazzi) *Com a notação acima*

$$\langle \overline{R}(X, Y), Z, \eta \rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) \quad (2.26)$$

Em particular, se a curvatura é 0, então

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = (\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) \quad (2.27)$$

3 Volume conforme

Um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ é uma aplicação *conforme* se

$$\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2(p) \langle v, w \rangle_p \quad \forall p \in M, \forall v, w \in T_p M$$

em que $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ é uma função diferenciável. As aplicações conformes têm a propriedade de preservar ângulos isto é, se duas curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ se intersectam em $t = t_0$ e θ é o ângulo entre elas, e θ' for o ângulo entre suas imagens $\varphi \circ \alpha$ e $\varphi \circ \beta$ em $t = t_0$, então $\cos \theta = \cos \theta'$.

Seja (M^m, g) uma variedade Riemanniana compacta imersa na esfera unitária \mathbb{S}^n munida de sua *métrica canônica* δ (isto é, a métrica induzida pela métrica Euclidiana de \mathbb{R}^{n+1}). Vamos denotar por G o grupo dos difeomorfismos conformes de \mathbb{S}^n .

Chamamos de *n-volume conforme* de uma imersão $\varphi : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ a quantidade

$$V_c(n, \varphi) = \sup_{\gamma \in G} \text{vol}(M, (\gamma \circ \varphi)^* \delta). \quad (3.1)$$

O ínfimo sobre todas as imersões conformes de M em \mathbb{S}^n é o *n-volume conforme* de M e denotado por $V_c(n, M)$, isto é,

$$V_c(n, M) = \inf_{\varphi} V_c(n, \varphi). \quad (3.2)$$

Definimos também o *volume conforme* de M por

$$V_c(M) = \inf_{n \in \mathbb{N}} V_c(n, M). \quad (3.3)$$

Seja $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor unitário e denote por A o campo de vetores em \mathbb{S}^n obtido por projetar o vetor a no espaço tangente de \mathbb{S}^n , isto é, $A(p)$ é a componente de a em $T_p \mathbb{S}^n$. De forma explícita,

$$A(p) = a^\top = a - \langle a, p \rangle p \quad \forall p \in \mathbb{S}^n. \quad (3.4)$$

Lema 3.1 *Defina a função $u : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por $u(p) = \langle a, p \rangle$ (produto interno canônico em \mathbb{R}^{n+1}). Então $\text{grad } u = A$.*

Prova:

Dado qualquer vetor $v \in T_p \mathbb{S}^n$, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^n$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, teremos

$$du_p(v) = \left. \frac{d}{dt} (u \circ \alpha) \right|_{t=0} = \langle a, \alpha'(0) \rangle = \langle a, v \rangle.$$

Assim para uma dada base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}; i = 1, \dots, n\} \subset T_p\mathbb{S}^n$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = du_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Dessa maneira, para cada $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_p\mathbb{S}^n$,

$$\langle \text{grad } u, X \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \left\langle \text{grad } u, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i du_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n a_i \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = \langle a, X \rangle = \langle a^\top, X \rangle.$$

Como isto vale para todo p e todo X obtemos, portanto,

$$\text{grad } u = a^\top = A.$$

□

Considere o *fluxo* γ_t do campo A , isto é,

$$\frac{d}{dt}\gamma_t = A \circ \gamma_t \tag{3.5}$$

Sabe-se da teoria das equações diferenciais que γ_t é um difeomorfismo de \mathbb{S}^n e que o conjunto G' desses fluxos tem uma estrutura de grupo (ver proposição 1.3 de [Palis e Melo \(1978\)](#) e seu corolário).

Afirmamos que γ_t é conforme $\forall t$. Com efeito, dados $v, w \in T_p\mathbb{S}^n$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\langle d\gamma_t(v), d\gamma_t(w) \rangle = \left\langle \frac{D}{dt}d\gamma_t(v), d\gamma_t(w) \right\rangle + \left\langle d\gamma_t(v), \frac{D}{dt}d\gamma_t(w) \right\rangle.$$

Vamos precisar do seguinte

Lema 3.2 (de simetria) *Se M é uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica e $\psi : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma superfície parametrizada $\psi = \psi(u, v)$. Então*

$$\frac{D}{du} \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{D}{dv} \frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

Prova: Ver [Carmo \(2015a\)](#), p. 76-77). □

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{S}^n$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então pelo lema de simetria,

$$\frac{D}{dt}d\gamma_t(v) = \frac{D}{dt} \frac{d}{ds}(\gamma \circ \alpha) \Big|_{s=0} = \frac{D}{ds} \frac{d}{dt}(\gamma \circ \alpha) \Big|_{s=0} = \frac{D}{ds} a^\top(\gamma_t(\alpha(s))) \Big|_{s=0} = \nabla_v a^\top(\gamma_t(p))$$

Analogamente

$$\frac{D}{dt}d\gamma_t(w) = \nabla_w a^\top(\gamma_t(p)).$$

Assim

$$\frac{d}{dt}\langle d\gamma_t(v), d\gamma_t(w) \rangle = \langle \nabla_v a^\top(\gamma_t(p)), w \rangle + \langle v, \nabla_w a^\top(\gamma_t(p)) \rangle.$$

Agora

$$\nabla_v a^\top = (\overline{\nabla}_v a^\top)^\top,$$

mas como a variedade ambiente é o \mathbb{R}^{n+1} então

$$\nabla_v a^\top = \left(\frac{\partial a^\top}{\partial v} \right)^\top = \left(\frac{\partial}{\partial v} (a - \langle a, q \rangle q) \right)^\top = (-\langle a, v \rangle q - \langle a, q \rangle v)^\top = -\langle a, q \rangle v = -u(q)v$$

para qualquer $q \in \mathbb{S}^n$. Assim

$$\nabla_v a^\top(\gamma_t(p)) = -u(\gamma_t(p))v.$$

Analogamente

$$\nabla_w a^\top(\gamma_t(p)) = -u(\gamma_t(p))w$$

logo

$$\frac{d}{dt} \langle d\gamma_t(v), d\gamma_t(w) \rangle = -2u(\gamma_t(p)) \langle v, w \rangle.$$

Integrando de 0 a t obtém-se

$$\langle d\gamma_t(v), d\gamma_t(w) \rangle = \left(1 - \int_0^t 2u(\gamma_s(p)) ds \right) \langle v, w \rangle.$$

Fazendo $v = w \neq 0$ teremos que

$$|d\gamma_t(v)|^2 = \left(1 - \int_0^t 2u(\gamma_s(p)) ds \right) |v|^2 \Rightarrow 1 - \int_0^t 2u(\gamma_s(p)) ds > 0$$

o que prova a afirmação.

Lema 3.3 *Seja $\gamma \in G$, existem $r \in O(n+1)$ e $\gamma_t \in G'$ tais que $\gamma = r \circ \gamma_t$.*

Prova: Ver [Soufi e Ilias \(1986, p. 259\)](#). □

Com este lema

$$\begin{aligned} \text{vol}(M, (\gamma \circ \varphi)^* \delta) &= \text{vol}(M, (r \circ \gamma_t \circ \varphi)^* \delta) \\ &= \text{vol}(M, (\gamma_t \circ \varphi)^* r^* \delta) \\ &= \text{vol}(M, (\gamma_t \circ \varphi)^* \delta) \end{aligned}$$

e então podemos restringir a definição de $V_c(n, \varphi)$ a

$$V_c(n, \varphi) = \sup\{\text{vol}(M, (\gamma_t \circ \varphi)^* \delta); a \in \mathbb{S}^n, t \geq 0\}$$

Vamos precisar também do

Teorema 3.1 (1ª variação de volume) *Seja $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma variação da sub-variiedade $\Sigma \subset M$ com suporte compacto e bordo fixo, isto é, $F(p, 0) = p$ e $F(q, t) = q \forall q \in \partial\Sigma$ e $t \geq 0$. Então*

$$\left. \frac{d}{dt} \text{vol}(F(\Sigma, t)) \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} \left\langle H, \frac{dF}{dt} \right\rangle dV. \quad (3.6)$$

Uma prova pode ser encontrada em [Colding e Minicozzi \(2011, p. 6,7\)](#).

Duas métricas g e \bar{g} de M são *conformes* se existe uma função positiva $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\bar{g} = \mu g$.

Proposição 3.1 *Seja M uma variedade Riemanniana com métricas conformes g e $\bar{g} = \mu g$. Sejam ∇ e $\bar{\nabla}$ conexões Riemannianas de g e \bar{g} . Então para todos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y) \quad (3.7)$$

onde

$$S(X, Y) = \frac{1}{2\mu} [(X\mu)Y + (Y\mu)X - g(X, Y) \text{grad } \mu]. \quad (3.8)$$

Prova:

Defina $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y)$. Pelo Teorema 2.1 basta provar que $\tilde{\nabla}$ é uma conexão simétrica e compatível com a métrica \bar{g} , pois assim $\tilde{\nabla} = \bar{\nabla}$.

Mostremos que $\tilde{\nabla}$ é uma conexão afim. Dados $f, h \in \mathcal{D}(M)$ e $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{fX+hY} Z &= \nabla_{fX+hY} Z + S(fX+hY, Z) \\ &= f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z + \frac{1}{2\mu} [((fX+hY)\mu)Z + (Z\mu)(fX+hY) - g(fX+hY, Z) \text{grad } \mu] \\ &= f\nabla_X Z + \frac{f}{2\mu} [(X\mu)Y + (Y\mu)X - g(X, Y) \text{grad } \mu] \\ &\quad + h\nabla_Y Z + \frac{h}{2\mu} [(X\mu)Y + (Y\mu)X - g(X, Y) \text{grad } \mu] \\ &= f\tilde{\nabla}_X Z + h\tilde{\nabla}_Y Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X (Y+Z) &= \nabla_X (Y+Z) + S(X, Y+Z) \\ &= \nabla_X Y + \nabla_X Z + \frac{1}{2\mu} [(X\mu)(Y+Z) + ((Y+Z)\mu)X - g(X, Y+Z) \text{grad } \mu] \\ &= \nabla_X Y + \frac{1}{2\mu} [(X\mu)Y + (Y\mu)X - g(X, Y) \text{grad } \mu] \\ &\quad + \nabla_X Z + \frac{1}{2\mu} [(X\mu)Z + (Z\mu)X - g(X, Z) \text{grad } \mu] \\ &= \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_X Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X(fY) &= \nabla_X(fY) + \frac{1}{2\mu}[(X\mu)(fY) + (fY\mu)X - g(X, fY) \text{grad } \mu] \\
&= f\nabla_X Y + (Xf)Y + \frac{f}{2\mu}[(X\mu)Y + (Y\mu)X - g(X, Y) \text{grad } \mu] \\
&= f\tilde{\nabla}_X Y + (Xf)Y
\end{aligned}$$

o que prova que $\tilde{\nabla}$ é uma conexão afim. Para a simetria temos

$$\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X = \nabla_X Y + S(X, Y) - \nabla_Y X - S(Y, X) = \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Resta então mostrar que $\tilde{\nabla}$ é compatível com \bar{g} , isto é, que

$$X\bar{g}(Y, Z) = \bar{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(Y, \tilde{\nabla}_X Z) \quad (3.9)$$

O primeiro membro dá

$$\begin{aligned}
X\bar{g}(Y, Z) &= X\mu g(Y, Z) = Xg(\sqrt{\mu}Y, \sqrt{\mu}Z) \\
&= g(\nabla_X(\sqrt{\mu}Y), \sqrt{\mu}Z) + g(\sqrt{\mu}Y, \nabla_X(\sqrt{\mu}Z)) \\
&= g(\sqrt{\mu}\nabla_X Y + (X\sqrt{\mu})Y, \sqrt{\mu}Z) + g(\sqrt{\mu}Y, \sqrt{\mu}\nabla_X Z + (X\sqrt{\mu})Z) \\
&= g\left(\sqrt{\mu}\nabla_X Y + \frac{1}{2\sqrt{\mu}}(X\mu)Y, \sqrt{\mu}Z\right) + g\left(\sqrt{\mu}Y, \sqrt{\mu}\nabla_X Z + \frac{1}{2\sqrt{\mu}}(X\mu)Z\right) \\
&= \mu g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2}g((X\mu)Y, Z) + \mu g(Y, \nabla_X Z) + \frac{1}{2}g(Y, (X\mu)Z) \\
&= (X\mu)g(Y, Z) + \mu g(\nabla_X Y, Z) + \mu g(Y, \nabla_X Z) \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Já o segundo membro dá

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(Y, \tilde{\nabla}_X Z) &= \mu g(\nabla_X Y + S(X, Y), Z) + \mu g(Y, \nabla_X Z + S(X, Z)) \\
&= \mu g(\nabla_X Y, Z) + \mu g(Y, \nabla_X Z) + \mu g(S(X, Y), Z) + \mu g(Y, S(X, Z)) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Assim, para obter (3.9), tendo em vista (3.10) e (3.11), devemos mostrar que

$$(X\mu)g(Y, Z) = \mu g(S(X, Y), Z) + \mu g(Y, S(X, Z))$$

Com efeito

$$\begin{aligned}
g(S(X, Y), Z) &= g\left(\frac{1}{2\mu}[(X\mu)Y + (Y\mu)X - g(X, Y) \text{grad } \mu], Z\right) \\
&= \frac{1}{2\mu}[g((X\mu)Y, Z) + g((Y\mu)X, Z) - g(X, Y)g(\text{grad } \mu, Z)] \\
&= \frac{1}{2\mu}[g((X\mu)Y, Z) + g((Y\mu)X, Z) - g(X, Y)(Z\mu)]
\end{aligned}$$

Analogamente

$$g(Y, S(X, Z)) = \frac{1}{2\mu} [g((X\mu)Z, Y) + g((Z\mu)X, Y) - g(X, Z)(Y\mu)]$$

Portanto

$$g(S(X, Y), Z) + g(Y, S(X, Z)) = \frac{1}{\mu} g((X\mu)Y, Z) = \frac{1}{\mu} (X\mu)g(Y, Z)$$

□

Teorema 3.2 (Soufi e Ilias (1986)) *Seja (M^m, g) uma variedade Riemanniana compacta e suponha que existe uma imersão isométrica mínima $\varphi : (M, g) \rightarrow (\mathbb{S}^n, \delta)$. Então*

$$\text{vol}(M, g) = V_c(n, \varphi) \geq V_c(n, M). \quad (3.12)$$

Além disso, se (M, g) não é isométrica a (\mathbb{S}^n, δ) , então $\text{vol}(M, g) > \text{vol}(M, (\gamma \circ \varphi)^\delta)$ para todo $\gamma \in G - O(n+1)$.*

Prova:

Para simplificar as contas iremos supor que M é uma subvariedade mínima de \mathbb{S}^n , pois isto permite omitir φ das contas. Por conta das observações anteriores basta mostrar que

$$V(t) = \text{vol}(\gamma_t(M)) \leq \text{vol}(M) \quad \forall a \in \mathbb{S}^n, t \geq 0.$$

Vamos fixar um $a \in \mathbb{S}^n$ e escrever $\gamma = \gamma_t$ para $t = t_0$. A fórmula da primeira variação de volume dá

$$V'(t_0) = - \int_{\gamma(M)} \langle H^{\gamma(M)}(x), \gamma'(x) \rangle dV_\delta = - \int_{\gamma(M)} \langle H^{\gamma(M)}(x), A(x) \rangle dV_\delta$$

onde $H^{\gamma(M)}$ é o vetor curvatura média de $\gamma(M)$ em \mathbb{S}^n . Efetuando uma mudança de variável obtemos

$$V'(t_0) = - \int_M \langle H^{\gamma(M)}(\gamma(x)), A(\gamma(x)) \rangle |\det d\gamma(x)| dV_\delta.$$

Como γ é conforme, existe uma função $\lambda(p) > 0$ tal que $\langle d\gamma(u), d\gamma(v) \rangle_p = \lambda \langle u, v \rangle_p$. Escrevendo $\lambda = e^{2f}$ temos

$$\langle d\gamma(u), d\gamma(v) \rangle = e^{2f} \langle u, v \rangle$$

para algum $f \in \mathbb{R}$. Em termos matriciais

$$d\gamma^T d\gamma = e^{2f} I_m \Rightarrow |\det d\gamma| = e^{mf}$$

Portanto

$$V'(t_0) = - \int_M \langle H^{\gamma(M)}(\gamma(x)), A(\gamma(x)) \rangle e^{mf} dV_\delta \quad (3.13)$$

Como $\langle d\gamma(u), d\gamma(v) \rangle = e^{2f} \langle u, v \rangle$, então $\gamma^* \delta = e^{2f} \delta$. Assim, pela Proposição 3.1

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (Xf)Y + (Yf)X - \langle X, Y \rangle \text{grad } f$$

em que $\bar{\nabla}$ é a conexão em $\gamma(M)$ e ∇ é em M . Com isso a 2ª forma fundamental em $\gamma(M)$ é

$$\bar{B}(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp = (\nabla_X Y)^\perp - \langle X, Y \rangle (\text{grad } f)^\perp = B(X, Y) - \langle X, Y \rangle (\text{grad } f)^\perp$$

Seja $\{e_1, \dots, e_m\}$ uma base ortonormal do espaço tangente de M em $g = \delta$. Então

$$\gamma^* \delta(e_i, e_j) = e^{2f} \delta_{ij}$$

logo $\{e^{-f} e_1, \dots, e^{-f} e_m\}$ é uma base ortonormal de $\gamma(M)$ em $\gamma^* \delta$. Assim

$$\begin{aligned} H^{\gamma(M)} &= \sum_{i=1}^m \bar{B}(e^{-f} e_i, e^{-f} e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m [B(e^{-f} e_i, e^{-f} e_i) - \langle e^{-f} e_i, e^{-f} e_i \rangle (\text{grad } f)^\perp] \\ &= e^{-2f} H^M - m e^{-2f} (\text{grad } f)^\perp \\ &= -m e^{-2f} (\text{grad } f)^\perp \end{aligned}$$

A rigor, o correto é escrever

$$H^{\gamma(M)}(\gamma(x)) = -m e^{-2f} d\gamma((\text{grad } f(x))^\perp) \quad (3.14)$$

$d\gamma$ não aparece naquelas contas por causa da notação introduzida na Seção 2.5.

O fluxo γ_t do campo A (na verdade de qualquer campo de vetores) possui a propriedade de grupo

$$\gamma_t \circ \gamma_s = \gamma_{t+s}.$$

Derivando em s obtemos

$$d\gamma_t(\gamma_s) \frac{d\gamma_s}{ds} = \frac{d\gamma_{t+s}}{ds}.$$

Em $s = 0$ teremos

$$d\gamma_{t,x} A(x) = A(\gamma_t(x))$$

ou, de forma abreviada,

$$d\gamma(A) = A \circ \gamma. \quad (3.15)$$

Por (3.4) obtemos

$$|A(x)|^2 = 1 - u^2(x) \quad \text{e} \quad |A(\gamma(x))|^2 = 1 - u^2(\gamma(x))$$

Mas por (3.15)

$$|A \circ \gamma|^2 = |d\gamma(A)|^2 = e^{2f} |A|^2$$

logo

$$e^{2f} = \frac{|A \circ \gamma|^2}{|A|^2} = \frac{1 - u^2 \circ \gamma}{1 - u^2} \quad (3.16)$$

Derivando:

$$e^{2f} \cdot 2df = 2 \frac{-u \circ \gamma}{1 - u^2} du_\gamma d\gamma + 2 \frac{1 - u^2 \circ \gamma}{(1 - u^2)^2} u du$$

Substituindo (3.16) obtemos

$$df = -\frac{u \circ \gamma}{1 - u^2 \circ \gamma} du_\gamma d\gamma + \frac{u}{1 - u^2} du. \quad (3.17)$$

Agora, para qualquer campo X em \mathbb{S}^n ,

$$du_\gamma d\gamma(X) = \langle \text{grad } u(\gamma), d\gamma(X) \rangle = \langle d\gamma(\text{grad } u), d\gamma(X) \rangle = e^{2f} \langle \text{grad } u, X \rangle$$

logo

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } f, X \rangle &= df(X) = -\frac{u \circ \gamma}{1 - u^2 \circ \gamma} du_\gamma d\gamma(X) + \frac{u}{1 - u^2} du(X) \\ &= -\frac{u \circ \gamma}{1 - u^2 \circ \gamma} e^{2f} \langle \text{grad } u, X \rangle + \frac{u}{1 - u^2} \langle \text{grad } u, X \rangle \\ &= \left(-\frac{u \circ \gamma}{1 - u^2 \circ \gamma} \cdot \frac{1 - u^2 \circ \gamma}{1 - u^2} + \frac{u}{1 - u^2} \right) \langle \text{grad } u, X \rangle \\ &= \frac{u - u \circ \gamma}{1 - u^2} \langle \text{grad } u, X \rangle \end{aligned}$$

Portanto

$$\text{grad } f = \frac{u - u \circ \gamma}{1 - u^2} \text{grad } u. \quad (3.18)$$

Substituindo (3.14) e (3.15) em (3.13) obtemos

$$V'(t_0) = \int_M m \langle \text{grad } f^\perp, A \rangle e^{mf} dV_\delta$$

e substituindo (3.18) encontramos

$$V'(t_0) = \int_M m \frac{u - u \circ \gamma}{1 - u^2} \langle \text{grad } u^\perp, A \rangle e^{mf} dV_\delta.$$

Mas $\text{grad } u = A$ pelo Lema 3.1, logo

$$V'(t_0) = \int_M m \frac{u - u \circ \gamma}{1 - u^2} |A^\perp|^2 e^{mf} dV_\delta. \quad (3.19)$$

Observe que

$$\frac{d}{dt} u \circ \gamma = \left\langle a, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = \langle a, a^\top \circ \gamma \rangle = |a^\top \circ \gamma|^2 \geq 0$$

o que mostra que a aplicação $t \mapsto u \circ \gamma_t$ é não-decrescente, logo

$$u(x) = u(\gamma_0(x)) \leq u(\gamma_t(x)) \Rightarrow u \leq u \circ \gamma$$

e como $u^2(x) = \langle a, x \rangle^2 \leq |a|^2 |x|^2 = 1$ concluímos de (3.19) que $V'(t_0) \leq 0$, logo $V(t)$ é não-crescente em uma vizinhança de t_0 . Como t_0 foi arbitrado, temos que $V(t) \leq V(0) = \text{vol}(M) \forall t$.

Suponha que existe $\gamma = \gamma_t$ com $t = t_0 > 0$ tal que $V(t) = \text{vol}(M)$. Como $V(t)$ é não-crescente, temos que $V(t) = \text{vol}(M) \forall t \in [0, t_0]$, logo $V'(t) = 0$ nesse intervalo. De (3.19) concluímos que $A^\perp = 0$ sobre M . A restrição de A a M nos dá um campo de vetores sobre M cujas curvas integrais são grandes círculos passando pelos pontos a e $-a$. Então $a \in M$ e as geodésicas de a são os grandes círculos. Portanto, M é a imagem exponencial de \mathbb{S}^n de seu próprio espaço tangente em a ; é, portanto, uma subesfera totalmente geodésica de dimensão m em \mathbb{S}^n . \square

4 Curvatura total de variedades imersas

Uma variedade M imersa numa variedade \overline{M} é denominada uma *hipersuperfície* se a dimensão de \overline{M} é uma unidade a mais do que a dimensão de M . Seja $p \in M$ e η um vetor normal unitário a M em p . Como $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_p M$ com autovalores reais k_1, \dots, k_n . Se M e \overline{M} são orientáveis e estão orientadas, então o sentido do vetor η fica univocamente determinado por estas orientações, se exigirmos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ sejam bases positivas em M e \overline{M} . Assim, chamamos os e_i de *direções principais* e os seus autovalores associados k_i de *curvaturas principais*. Com isto podemos definir a *curvatura de Gauss-Kronecker* $K = \det A_\eta = k_1 \cdots k_n$ e a *curvatura média* $H = \frac{k_1 + \dots + k_n}{n}$. Vamos generalizar estas ideias.

Considere uma variedade M^n e uma imersão $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ para algum N .¹ Seja $B_v(\varphi)$ o campo de vetores normais unitários de $\varphi(M^n)$ de modo que um ponto de $B_v(\varphi)$ é um par (p, \mathbf{e}) onde \mathbf{e} é um vetor normal unitário em $\varphi(p)$. Sejam $A_{\mathbf{e};ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, os coeficientes da 2ª forma fundamental (isto é, do operador de Weingarten) com respeito a $(p, \mathbf{e}) \in B_v(\varphi)$. Definimos a α -ésima *curvatura média* por

$$H_\alpha(p, \mathbf{e}) = \binom{n}{\alpha}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\alpha \leq n} k_{i_1} \cdots k_{i_\alpha} \quad (4.1)$$

em que os k_{i_j} ($j = 1, \dots, n$) são os autovalores de $A_{\mathbf{e}}$. Um cálculo direto mostrará que os H_α satisfazem a igualdade

$$\det(\delta_{ij} + tA_{\mathbf{e};ij}) = \sum_{\alpha=0}^n \binom{n}{\alpha} H_\alpha(p, \mathbf{e}) t^\alpha \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

conforme definido em [Chen \(1971, p. 149\)](#), em que se convencionou $H_0 = 1$.

Chame a integral

$$H_i^*(p, k) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |H_i(p, \mathbf{e})|^k d\sigma, \quad i = 1, \dots, n; k > 0 \quad (4.3)$$

sobre a esfera \mathbb{S}^{N-1} de vetores normais unitários em $\varphi(p)$, a i -ésima *curvatura total absoluta de ordem k* em p , e a integral

$$TA_i(\varphi, k) = \frac{1}{c_{N+ik-1}} \int_{M^n} H_i^*(p, k) dV \quad (4.4)$$

¹ Tal imersão sempre existe pois o *teorema do mergulho de Whitney* afirma que toda variedade de dimensão n pode ser mergulhada como uma subvariedade fechada no espaço euclidiano \mathbb{R}^{2n+1} ([SPANIER, dez. 1989](#)).

a i -ésima curvatura total de ordem k da imersão φ , se existe, onde c_m denota a área de \mathbb{S}^m .

Um fato demonstrado por Willmore em 1968 afirma que se M^2 é uma superfície compacta orientada em \mathbb{R}^3 , então sua curvatura média H satisfaz

$$\int_M H dV \geq 4\pi \quad (4.5)$$

e a igualdade vale quando, e somente quando M é uma esfera.

Neste capítulo será apresentada uma generalização devida a Chen desse resultado, enunciada no seguinte

Teorema 4.1 (Chen (1971)) *Seja $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ uma imersão de uma variedade fechada (isto é, compacta e sem bordo) M^n em \mathbb{R}^{n+N} . Então sua primeira curvatura total absoluta de ordem n satisfaz a desigualdade*

$$TA_1(\varphi, n) \geq 2 \quad (4.6)$$

e vale a igualdade se, e somente se M^n é mergulhado como uma hipersfera em um subespaço $(n+1)$ -dimensional de \mathbb{R}^{n+N} .

4.1 As equações de estrutura

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e e_1, \dots, e_n campos vetoriais diferenciáveis em U tais que, para cada $p \in U$, tenhamos $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Um tal conjunto de campos vetoriais é denominado um *referencial móvel ortonormal*.

Dado um referencial móvel $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ ficam definidas 1-formas diferenciais ω_i pela condição $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$. O conjunto dessas 1-formas é denominado *co-referencial associado* ao referencial $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$.

Cada campo e_i é uma aplicação diferenciável. Assim, para cada $p \in U$ e cada $v \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$(de_i)_p(v) = \sum_j (\omega_{ij})_p(v)(e_j)_p.$$

As expressões $(\omega_{ij})_p(v)$ são lineares em v , logo são 1-formas diferenciais. Podemos escrever a igualdade acima como

$$de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j$$

As n^2 formas ω_{ij} são chamadas *formas de conexão* de \mathbb{R}^n , no referencial móvel $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$.

Diferenciando $\langle e_i, e_j \rangle$ obtemos

$$0 = \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = \omega_{ij} + \omega_{ji} \Rightarrow \omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

Proposição 4.1 (Equações de estrutura de \mathbb{R}^n) *Seja $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ um referencial móvel em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $\{\omega_i\}_{i=1,\dots,n}$ o co-referencial associado e ω_{ij} as formas de conexão de \mathbb{R}^n , no referencial $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$. Então*

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} \quad (4.7)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

Lema 4.1 (Cartan) *Seja V^n um espaço vetorial de dimensão n e sejam $\omega_1, \dots, \omega_r : V^n \rightarrow \mathbb{R}$, $r \leq n$, formas lineares em V que são linearmente independentes. Admita que existam formas lineares $\theta_1, \dots, \theta_r : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = 0$$

Então

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

As provas dessas proposições podem ser encontradas em [Carmo \(2015b\)](#).

Seja $F(n, N)$ o conjunto de todos os referenciais de \mathbb{R}^{n+N} e B o subconjunto de $M^n \times F(n, N)$ consistindo de $(p, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{n+N})$ tais que $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ são tangentes e $\mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_{n+N}$ são normais a M em $\varphi(p)$. Considere as aplicações

$$B \xrightarrow{\iota} M^n \times F(n, N) \xrightarrow{\pi} F(n, N)$$

em que ι é a inclusão e π é a projeção sobre $F(n, N)$. Ponha

$$\omega'_i = (\pi\iota)^* \omega_i \quad \omega'_{ij} = (\pi\iota)^* \omega_{ij}$$

Então as equações de estrutura se tornam

$$d\omega'_i = \sum_k \omega'_k \wedge \omega'_{ki} \quad d\omega'_{ij} = \sum_k \omega'_{ik} \wedge \omega'_{kj}$$

Para $i = n+1, \dots, n+N$ tem-se $\omega'_i = 0$ e os ω'_j são linearmente independentes para $j = 1, \dots, n$. Dessa forma

$$\sum_{i=1}^n \omega'_i \wedge \omega'_{ir} = 0$$

Pelo lema de Cartan

$$\omega'_{ir} = \sum_{j=1}^n A_{rij} \omega'_j \quad (4.10)$$

O elemento de volume de M é

$$dV = \omega'_1 \wedge \cdots \wedge \omega'_n$$

e o elemento de volume de $B_v(\varphi)$ é

$$dV \wedge d\sigma_{N-1} = \omega'_1 \wedge \cdots \wedge \omega'_n \wedge \omega'_{n+N,n+1} \wedge \cdots \wedge \omega'_{n+N,n+N-1}$$

Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{v} : B_v(\varphi) &\rightarrow \mathbb{S}^{n+N-1} \\ (p, \mathbf{e}) &\mapsto \mathbf{e} \end{aligned}$$

então, denotando por $d\Sigma_{n+N-1}$ o elemento de volume de \mathbb{S}^{n+N-1} , tem-se

$$\tilde{v}^* d\Sigma_{n+N-1} = \omega'_{n+N,1} \wedge \cdots \wedge \omega'_{n+N,n} \wedge \omega'_{n+N,n+1} \wedge \cdots \wedge \omega'_{n+N,n+N}$$

Usando (4.10) teremos

$$\begin{aligned} \tilde{v}^* d\Sigma_{n+N-1} &= (-1)^n \det(A_{n+N,ij}) \omega'_1 \wedge \cdots \wedge \omega'_n \wedge \omega'_{n+N,n+1} \wedge \cdots \wedge \omega'_{n+N,n+N-1} \\ &= (-1)^n \det(A_{n+N,ij}) dV \wedge d\sigma_{N-1} \end{aligned}$$

4.2 Prova do teorema 4.1

Afirmção 1: \tilde{v} é sobrejetiva e para cada $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^{n+N-1}$, a sua pré-imagem $\tilde{v}^{-1}(\mathbf{e})$ tem pelo menos dois elementos.

Com efeito, fixe um vetor $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^{n+N-1}$ e defina

$$\begin{aligned} \psi : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \langle \mathbf{e}, \varphi(p) \rangle \end{aligned}$$

Dado $v \in T_p M$ tem-se

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } \psi(p), v \rangle &= d\psi_p(v) = \langle \mathbf{e}, d\varphi_p(v) \rangle = \langle \mathbf{e}, v \rangle = \langle \mathbf{e}^\top, v \rangle \\ &\Rightarrow \text{grad } \psi(p) = \mathbf{e}^\top(p) \end{aligned}$$

Como M é compacta e ψ é contínua, ψ atinge seus valores de máximo e mínimo em certos pontos q e q' de M . Assim $\text{grad } \psi = \mathbf{e}^\top = 0$ nesses pontos, logo \mathbf{e} é normal a M em q e q' , portanto $\tilde{v}(q, \mathbf{e}) = \mathbf{e} = \tilde{v}(q', \mathbf{e})$, o que prova a afirmação.

Considere agora o *hessiano* de ψ no ponto $p \in M$

$$\text{Hess } \psi_p(v, w) = \langle \nabla_v \psi(p), w \rangle$$

em que $v, w \in T_p M$. Temos que

$$\begin{aligned} \text{Hess } \psi_p(v, w) &= \langle \nabla_v \mathbf{e}^\top(p), w \rangle \\ &= \langle \nabla_v (\mathbf{e} - \mathbf{e}^\perp)(p), w \rangle \\ &= \langle -\nabla_v \mathbf{e}^\perp(p), w \rangle \\ &= \langle A_{\mathbf{e}^\perp} v, w \rangle \end{aligned}$$

Nos pontos q e q' tem-se

$$\text{Hess } \psi(v, w) = \langle A_{\mathbf{e}} v, w \rangle$$

sendo q e q' pontos de máximo e mínimo, $\text{Hess } \psi = A_{\mathbf{e}}$ é não-positiva ou não-negativa², respectivamente, o que significa que seus autovalores k_1, \dots, k_n são todos ≤ 0 ou todos ≥ 0 em (q, \mathbf{e}) e (q', \mathbf{e}) , respectivamente. Assim o conjunto

$$U = \{(p, \mathbf{e}) \in B_v(\phi) \mid k_1(p, \mathbf{e}), \dots, k_n(p, \mathbf{e}) \text{ têm o mesmo sinal}\}$$

cobre a esfera \mathbb{S}^{n+N-1} pelo menos duas vezes através da aplicação \tilde{v} .

Pela afirmação 1, $\tilde{v}(U)$ cobre \mathbb{S}^{n+N-1} pelo menos duas vezes, o que dá

$$\int_U \tilde{v}^* d\Sigma = \int_{\tilde{v}(U)} d\Sigma \geq 2c_{n+N-1}.$$

Agora

$$\tilde{v}^* d\Sigma = (-1)^n \det(A_{ij}) dV \wedge d\sigma = H_n(p, \mathbf{e}) dV \wedge d\sigma.$$

Assim

$$\int_U |H_n(p, \mathbf{e})| dV \wedge d\sigma \geq \int_U H_n(p, \mathbf{e}) dV \wedge d\sigma = \int_U \tilde{v}^* d\Sigma \geq 2c_{n+N-1}$$

Pela desigualdade aritmética-geométrica

$$|H_1(p, \mathbf{e})|^n = \left| \frac{k_1(p, \mathbf{e}) + \dots + k_n(p, \mathbf{e})}{n} \right|^n \geq |k_1(p, \mathbf{e}) \cdots k_n(p, \mathbf{e})| = |H_n(p, \mathbf{e})|$$

² Dados uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, um ponto $p \in M$ e um vetor $v \in T_p M$, seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então f pode ser expandida por uma série de Taylor

$$f(\alpha(t)) = f(p) + t \langle \text{grad } f(p), v \rangle + \frac{t^2}{2} \left[\text{Hess } f_p(v, v) + \left\langle \text{grad } f(p), \frac{D\alpha'}{dt} \Big|_{t=0} \right\rangle \right] + R(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t^2} = 0$$

Se p é um ponto crítico de f então

$$f(\alpha(t)) - f(p) = t^2 \left[\frac{1}{2} \text{Hess } f_p(v, v) + \frac{R(t)}{t^2} \right]$$

e o sinal de $\text{Hess } f_p$ se sobrepõe ao sinal de $R(t)/t^2$ para t pequeno, de modo que se $\text{Hess } f_p > 0$ então $f(\alpha(t)) > f(p)$, logo $f(p)$ é mínimo local estrito. Reciprocamente, se $f(p)$ é mínimo local então $\text{Hess } f_p \geq 0$. Analogamente, $\text{Hess } f_p < 0 \Rightarrow f(p)$ é máximo local estrito e $f(p)$ máximo local $\Rightarrow \text{Hess } f_p \leq 0$.

logo

$$\int_{B_v(\varphi)} |H_1(p, \mathbf{e})|^n dV \wedge d\sigma \geq \int_U |H_1(p, \mathbf{e})|^n dV \wedge d\sigma \geq \int_U |H_n(p, \mathbf{e})| dV \wedge d\sigma$$

Portanto

$$TA_1(\varphi, n) = \frac{1}{c_{n+N-1}} \int_{M^n} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |H_1(p, \mathbf{e})|^n d\sigma dV \geq \frac{1}{c_{n+N-1}} \cdot 2c_{n+N-1} = 2$$

Suponha agora que vale a igualdade. Então

$$\int_{B_v(\varphi)} |H_1(p, \mathbf{e})|^n dV \wedge d\sigma = \int_U |H_1(p, \mathbf{e})|^n dV \wedge d\sigma = \int_U |H_n(p, \mathbf{e})| dV \wedge d\sigma = 2c_{n+N-1}$$

Da segunda igualdade concluímos

$$|H_1(p, \mathbf{e})|^n = |H_n(p, \mathbf{e})| \quad \forall (p, \mathbf{e}) \in U$$

logo

$$k_1(p, \mathbf{e}) = \dots = k_n(p, \mathbf{e}) \quad \forall (p, \mathbf{e}) \in U$$

e da primeira igualdade,

$$H_1(p, \mathbf{e}) = 0 \quad \forall (p, \mathbf{e}) \in B_v(\varphi) - U.$$

O operador $A_{\mathbf{e}}$ é auto-adjunto, logo $T_p M$ possui uma base ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ de autovetores associados aos autovalores $k_1(p, \mathbf{e}), \dots, k_n(p, \mathbf{e})$:

$$A_{\mathbf{e}} E_j = k_j(p, \mathbf{e}) E_j \quad (4.11)$$

Tais vetores podem ser estendidos a campos de vetores por meio de transporte paralelo. Diferenciando (4.11) na direção E_i ($i \neq j$) teremos

$$\nabla_{E_i}(A_{\mathbf{e}} E_j) = \nabla_{E_i}(k_j E_j) = dk_j(E_i) E_j + k_j \nabla_{E_i} E_j$$

Como $\nabla_{E_i} E_j = 0$ e denotando $dk_j(E_i) = k_{j;i}$ teremos

$$\nabla_{E_i}(A_{\mathbf{e}} E_j) = k_{j;i} E_i.$$

Analogamente

$$\nabla_{E_j}(A_{\mathbf{e}} E_i) = k_{i;j} E_j.$$

Pela equação de Codazzi

$$\nabla_{E_i}(A_{\mathbf{e}} E_j) = \nabla_{E_j}(A_{\mathbf{e}} E_i)$$

logo

$$k_{j;i} E_i = k_{i;j} E_j.$$

Como os vetores $\{E_i\}_{i=1,\dots,n}$ são linearmente independentes,

$$k_{j,i} = k_{i,j} = 0 \Rightarrow k_i = \text{const. } \forall i = 1, \dots, n,$$

isto é,

$$k_1(p, \mathbf{e}) = \dots = k_n(p, \mathbf{e}) = \text{const.}$$

em cada componente conexa de U .

Se $k_1(p, \mathbf{e}) = \dots = k_n(p, \mathbf{e}) = 0$ em todo U , então $k_1(p, \mathbf{e}) = \dots = k_n(p, \mathbf{e}) = 0$ em todo $B_v(\varphi)$, logo $H_1(p, \mathbf{e}) = 0$ em todo $B_v(\varphi)$ e assim $TA_1(\varphi, n) = 0$, o que contradiz os resultados anteriores. Logo $k_1(p, \mathbf{e}) = \dots = k_n(p, \mathbf{e}) = \text{const. } \neq 0$ em alguma componente U^* de U .

Defina a aplicação projeção

$$\begin{aligned} \pi : U^* &\rightarrow M^n \\ (p, \mathbf{e}) &\mapsto p \end{aligned}$$

Afirmção 2: A aplicação π é sobrejetiva.

Suponha que esta afirmação é falsa. Como U^* é fechado, M é compacta e π é uma aplicação aberta, então $\pi(U^*)$ é compacto. Como $\pi(U^*) \neq M$, então $\partial\pi(U^*) \neq \emptyset$. Tome $(p, \mathbf{e}) \in B_v(\varphi)$ de modo que $p \in \partial\pi(U^*)$. Então $(p, \mathbf{e}) \in \partial U^*$ pois $\partial\pi(U^*) = \pi(\partial U^*)$. Pela continuidade de $k_i(p, \mathbf{e})$, existe uma vizinhança $V \subset B_v(\varphi)$ de (p, \mathbf{e}) tal que $\forall (p', \mathbf{e}') \in V$, $k_i(p', \mathbf{e}') \neq 0$ e têm o mesmo sinal, logo $V \subset U^*$. Assim $(p, \mathbf{e}) \in \text{int } U^*$, um absurdo pois a fronteira de um conjunto é disjunta de seu interior.

Isso e o fato que $k_i(p, -\mathbf{e}) = -k_i(p, \mathbf{e})$ implicam que M^n é totalmente umbílica. Pelo teorema 3 de [Chern e Lashof \(1957\)](#) temos que M^n é mergulhada como uma hipersuperfície convexa em \mathbb{R}^{n+1} e é totalmente umbílica. Assim M^n é mergulhada como uma hiperesfera em \mathbb{R}^{n+1} . \square

Lema 4.2 Denote por $x = (x_1, \dots, x_{m+1})$ as coordenadas cartesianas de um ponto $x \in \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Então

$$\int_{\mathbb{S}^m} |x_1|^n d\sigma = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) (\sqrt{\pi})^m}{\Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)}$$

em que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty u^{2z-1} e^{-u^2} du$$

é a função gama.

Prova:

Considere a integral

$$I = \int_{\mathbb{R}^{m+1}} |x_1|^n e^{-|x|^2} dx_1 \cdots dx_{m+1}.$$

Pelo teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^n e^{-x_1^2} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_{m+1}^2} dx_{m+1} \\
 &= 2 \int_0^{\infty} x_1^n e^{-x_1^2} dx_1 \sqrt{\pi} \cdots \sqrt{\pi} \\
 &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) (\sqrt{\pi})^m
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Podemos também calcular este integral por meio das coordenadas polares generalizadas. Chamando $\cos \theta_1 = x_1/r$ tem-se

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{S}^m(0,r)} |r \cos \theta_1|^n e^{-r^2} d\sigma dr \\
 &= \int_0^{\infty} r^n e^{-r^2} \left(\int_{\mathbb{S}^m(0,r)} |\cos \theta_1|^n d\sigma \right) dr \\
 &= \int_0^{\infty} r^n e^{-r^2} \left(\int_{\mathbb{S}^m} |\cos \theta_1|^n r^m d\sigma \right) dr \\
 &= \int_0^{\infty} r^{m+n} e^{-r^2} dr \int_{\mathbb{S}^m} |\cos \theta_1|^n d\sigma \\
 &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right) \int_{\mathbb{S}^m} |x_1|^n d\sigma
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

De (4.12) e (4.13) obtemos o resultado do lema. \square

Teorema 4.2 (Chen (1972)) *Seja M^n uma subvariedade mínima compacta de \mathbb{S}^m . Então*

$$\text{vol}(M^n) \geq c_n$$

e vale a igualdade se, e somente se, M é um grande círculo de \mathbb{S}^m .

Prova:

Seja $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^m$ uma imersão mínima e $\iota : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ a inclusão. Será feita, para simplificar a escrita, a identificação $p \equiv \iota \circ \varphi(p)$. Sejam $\{E_1, \dots, E_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ e $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m-n+1}\}$ uma base ortonormal de $T_p M^\perp$, onde $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m-n} \in T_p \mathbb{S}^m$ e $\mathbf{e}_{m-n+1} = p \in T_p \mathbb{S}^m$. Para qualquer $\mathbf{e} \in T_p \mathbb{S}^m$ tem-se

$$H_1^{\iota \circ \varphi}(p, \mathbf{e}) = \frac{1}{n} \text{tr}(A_{\mathbf{e}}^{\mathbb{R}^{m+1}}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \langle A_{\mathbf{e}}^{\mathbb{R}^{m+1}} E_j, E_j \rangle$$

Então para $\mathbf{e} = \mathbf{e}_i, i = 1, \dots, m-n$ tem-se

$$\begin{aligned}
 H_1^{\iota \circ \varphi}(p, \mathbf{e}_i) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \langle A_{\mathbf{e}_i}^{\mathbb{R}^{m+1}} E_j, E_j \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \langle -\nabla_{E_j}^{\mathbb{R}^{m+1}} \mathbf{e}_i, E_j \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \langle -\nabla_{E_j}^{\mathbb{S}^m} \mathbf{e}_i, E_j \rangle \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \langle A_{\mathbf{e}_i}^{\mathbb{S}^m} E_j, E_j \rangle = H_1^\varphi(p, \mathbf{e}_i) = 0
 \end{aligned}$$

e para $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{m-n+1}$:

$$\begin{aligned} H_1^{\iota \circ \varphi}(p, \mathbf{e}_{m-n+1}) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \langle -\nabla_{E_j}^{\mathbb{R}^{m+1}} \mathbf{e}_{m-n+1}, E_j \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \langle -\nabla_{E_j}^{\mathbb{R}^{m+1}} p, E_j \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \langle -d(\iota \circ \varphi)_p E_j, E_j \rangle = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n \langle -E_j, E_j \rangle \\ &= \frac{1}{n} \cdot (-n) = -1 \end{aligned}$$

Assim, dado $\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{m-n+1} a_i \mathbf{e}_i \in T_p M^\perp$, $a_i = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e} \rangle$, tem-se

$$\begin{aligned} H_1^{\iota \circ \varphi}(p, \mathbf{e}) &= \frac{1}{n} \operatorname{tr}(A_{\mathbf{e}}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m-n+1} a_i \operatorname{tr}(A_{\mathbf{e}_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{m-n+1} a_i H_1^{\iota \circ \varphi}(p, \mathbf{e}_i) = -a_{m-n+1} \\ &= -\langle \mathbf{e}_{m-n+1}, \mathbf{e} \rangle \\ &= -\langle p, \mathbf{e} \rangle \end{aligned}$$

Com isso

$$2 \leq TA_1(\iota \circ \varphi, n) = \frac{1}{c_m} \int_{M^n} \int_{\mathbb{S}^{m-n}} |-\langle p, \mathbf{e} \rangle|^n d\sigma dV$$

Escolha $T \in O(m+1)$ de modo que $Te_1 = p$, em que $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Tem-se

$$\int_{\mathbb{S}^{m-n}} |\langle p, \mathbf{e} \rangle|^n d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{m-n}} |\langle Te_1, \mathbf{e} \rangle|^n d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{m-n}} |\langle e_1, T^* \mathbf{e} \rangle|^n d\sigma$$

Efetuada a mudança de variável $\eta = T^* \mathbf{e}$, $d\sigma(\eta) = |\det T^* \mathbf{e}| d\sigma(\mathbf{e}) = d\sigma(\mathbf{e})$, $T^{*-1}(\mathbb{S}^{m-n}) = \mathbb{S}^{m-n}$ temos que

$$\int_{\mathbb{S}^{m-n}} |\langle p, \mathbf{e} \rangle|^n d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{m-n}} |\langle e_1, \eta \rangle|^n d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{m-n}} |x_1|^n d\sigma$$

em que $\eta = (x_1, \dots, x_{m+1})$. Pelo lema 4.2

$$\int_{\mathbb{S}^{m-n}} |x_1|^n d\sigma = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) (\sqrt{\pi})^{m-n}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}$$

e como

$$c_k = \frac{2(\sqrt{\pi})^{k+1}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \quad \forall k \geq 1$$

obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^{m-n}} |x_1|^n d\sigma = 2(\sqrt{\pi})^{m-n} \frac{2(\sqrt{\pi})^{n+1}}{c_n} \frac{c_m}{2(\sqrt{\pi})^{m+1}} = 2 \frac{c_m}{c_n}$$

Portanto

$$2 \leq \frac{1}{c_m} \int_{M^n} 2 \frac{c_m}{c_n} dV = \frac{2 \operatorname{vol}(M^n)}{c_n} \Rightarrow \operatorname{vol}(M^n) \geq c_n$$

O caso da igualdade segue do teorema 4.1.

□

5 Volume de subvariedades mínimas compactas em espaços projetivos

5.1 Submersões

Uma *fibra* de uma função $f : M \rightarrow N$ é um conjunto $f^{-1}(q)$, onde $q \in f(M)$.

Uma aplicação diferenciável $f : M^m \rightarrow N^n$, $m \geq n$, é uma *submersão* se $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é sobrejetiva $\forall p \in M$.

Proposição 5.1 *Seja $f : M^m \rightarrow N^n$ uma submersão. Então cada fibra tem a estrutura de uma subvariedade de M de dimensão $m - n$.*

Prova: Ver [Brickell e Clark \(1970\)](#), proposição 6.2.1. □

Seja $F_q = f^{-1}(q)$ uma fibra de $q \in N$. Dados $p \in F_q$ e $v \in T_p F_q$, seja $\alpha : I \rightarrow F_q$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então

$$f \circ \alpha = q = \text{const.} \Rightarrow df_p(v) = 0 \Rightarrow v \in \ker(df_p)$$

logo $T_p F_q \subset \ker(df_p)$. Como $\dim T_p F_q = m - n = \dim \ker(df_p)$ pela proposição acima, temos que $T_p F_q = \ker(df_p)$

Podemos, portanto, fazer a decomposição em soma direta

$$T_p M = \ker(df_p) \oplus \mathcal{H}_p = T_p F_{f(p)} \oplus \mathcal{H}_p$$

O espaço \mathcal{H}_p é chamado *distribuição horizontal* em p .

Observe que $\dim \mathcal{H}_p = m - (m - n) = n$. Assim, pelo teorema do núcleo-imagem,

$$df_p|_{\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{f(p)} N$$

é um isomorfismo. Isto motiva a seguinte definição: a submersão $f : M \rightarrow N$ é dita ser uma *submersão Riemanniana* se $df_p|_{\mathcal{H}_p}$ é uma isometria.

Proposição 5.2 *Seja $f : M \rightarrow N$ uma submersão. Se $g : N \rightarrow S$ é tal que $g \circ f$ é diferenciável, então g é diferenciável.*

Proposição 5.3 *Se $f : M \rightarrow N$ é uma submersão e se $g : N \rightarrow S$ é uma função diferenciável, então o posto de $d(g \circ f)_p$ é igual ao posto de $dg_{f(p)}$ para todo $p \in M$.*

As provas dessas proposições estão presentes em [Brickell e Clark \(1970\)](#), proposições 6.1.2 e 6.1.3. Juntando-as, tem-se a seguinte

Proposição 5.4 *Sejam $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow S$ aplicações diferenciáveis. Se f e $g \circ f$ são submersões, então g é uma submersão.*

Exemplos:

1. Considere a projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right] \end{aligned}$$

em que $x_i \neq 0$. Considere as parametrizações

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i : \mathbb{R}^n &\rightarrow V_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] | x_i = 1\} \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto [x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Então

$$\mathbf{y}_i^{-1} \circ \pi \circ \mathbf{x}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right]$$

logo a matriz de $d\pi$ nessas parametrizações é

$$d\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_i} & \dots & 0 & -\frac{x_1}{x_i^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{x_i} & -\frac{x_{i-1}}{x_i^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{x_{i+1}}{x_i^2} & \frac{1}{x_i} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{x_{n-1}}{x_i^2} & 0 & \dots & \frac{1}{x_i} \end{bmatrix}$$

As colunas $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1$ são linearmente independentes, logo $d\pi$ tem posto n e então é sobrejetiva. Portanto π é uma submersão.

2. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ z &\mapsto \frac{z}{|z|} \end{aligned}$$

Considere também as aplicações inclusão $\iota : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e identidade $id : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$. Então $\sigma \circ \iota = id \Rightarrow d\sigma d\iota = I$, isto é, $d\sigma$ tem uma inversa à direita, logo $d\sigma$ é sobrejetiva, portanto σ é uma submersão.

3. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{RP}^n \\ z &\mapsto [z] \end{aligned}$$

então $\pi = f \circ \sigma$. Pela proposição 5.4 temos que f é uma submersão.

Um *grupo de Lie* é uma variedade diferenciável com uma estrutura de grupo topológico em que a multiplicação é diferenciável.

Uma ação de um grupo de Lie G sobre uma variedade M é *própria* se para todos os subconjuntos compactos $K, L \subset M$, o conjunto $\{g \in G | g(K) \cap L \neq \emptyset\}$ é compacto. A ação é *livre* se $g \cdot x = x \forall x \in M \Rightarrow g = 1$.

Proposição 5.5 *Suponha que G é um grupo de Lie agindo de forma livre e própria sobre uma variedade M . O espaço quociente M/G com a topologia quociente admite uma estrutura de variedade diferenciável de modo que a projeção canônica $\pi : M \rightarrow M/G$ é uma submersão. Além disso, $\dim M/G = \dim M - \dim G$. Se, além das hipóteses anteriores, G age sobre M por isometrias, então existe uma única métrica g sobre M/G , chamada métrica quociente, tal que π é uma submersão Riemanniana.*

Uma prova pode ser encontrada em [Gorodski \(2012\)](#), teorema 0.4.16 e o seu texto da página 33 sobre submersões Riemannianas.

5.2 Caracterização dos espaços projetivos

5.2.1 O espaço projetivo real

Vimos no capítulo 1 o espaço projetivo real (ou plano projetivo real) \mathbb{RP}^n , definido como o conjunto das retas de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ que passam pela origem. Tal espaço pode ser visto como um espaço quociente $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) / \sim$ pela relação de equivalência

$$x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Na esfera \mathbb{S}^n temos $\forall x \in \mathbb{S}^n$ que $x \sim -x$, isto é, $[x] = \{x, -x\}$, de modo que podemos caracterizar \mathbb{RP}^n como o espaço quociente de \mathbb{S}^n pela relação de equivalência $x \sim y \Leftrightarrow y \in \{x, -x\}$. Note que essa relação $[x]$ é a órbita da ação do grupo multiplicativo $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ sobre $x \in \mathbb{S}^n$, o que nos permite escrever

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n / \mathbb{S}^0$$

Observe que a projeção

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{RP}^n \\ x &\mapsto [x] = \{x, -x\}\end{aligned}$$

é uma aplicação quociente cujas fibras são pares de pontos antípodos. O exemplo 3 da seção anterior mais a proposição 5.5 garantem que π é uma submersão Riemanniana.

Essa estrutura de fibras de \mathbb{RP}^n pode ser apresentada como

$$\mathbb{S}^0 \rightarrow \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$$

chamada *fibração de Hopf* de \mathbb{RP}^n .

5.2.2 O espaço projetivo complexo

O *espaço projetivo complexo* \mathbb{CP}^n é o conjunto das retas de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ que passam pela origem. Em outras palavras, é o espaço quociente $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) / \sim$ pela relação de equivalência

$$(z_1, \dots, z_{n+1}) \sim (w_1, \dots, w_{n+1}) \Leftrightarrow (z_1, \dots, z_{n+1}) = \lambda(w_1, \dots, w_{n+1}) \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$$

De modo que

$$[z_1, \dots, z_{n+1}] = \{\lambda(z_1, \dots, z_{n+1}) \mid \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}$$

Seja $\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^n \mid |z|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$ a esfera unitária em $\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$.

Considere a projeção

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{S}^{2n+1} &\rightarrow \mathbb{CP}^n \\ (z_1, \dots, z_{n+1}) &\mapsto [z_1, \dots, z_{n+1}]\end{aligned}$$

Uma fibra típica é

$$\begin{aligned}\pi^{-1}[z_1, \dots, z_{n+1}] &= \{\lambda(z_1, \dots, z_{n+1}) \mid |\lambda| = 1\} \\ &= \{\lambda(z_1, \dots, z_{n+1}) \mid \lambda \in \mathbb{S}^1\} \\ &= \mathbb{S}^1 \cdot (z_1, \dots, z_{n+1})\end{aligned}$$

a órbita da ação do grupo multiplicativo $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ sobre (z_1, \dots, z_{n+1}) . Note que \mathbb{S}^1 é um grupo de Lie pois a multiplicação em \mathbb{C} é diferenciável, além de ser um grupo agindo por isometrias.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned}\tilde{\pi} : \mathbb{S}^{2n+1} &\rightarrow \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \\ (z_1, \dots, z_{n+1}) &\mapsto \mathbb{S}^1 \cdot (z_1, \dots, z_{n+1})\end{aligned}$$

As aplicações π e $\tilde{\pi}$ são quocientes e fazem as mesmas identificações. Pela proposição 1.3, os espaços \mathbb{CP}^n e $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ são homeomorfos.

Segue da proposição 5.5 que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.
A fibração de Hopf de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é

$$\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

5.2.3 Espaço projetivo quaterniônico

A álgebra dos *quatérnios*, que será denotada por \mathbb{H} , é uma extensão a 4 dimensões da álgebra dos números complexos criada por William R. Hamilton. Cada quatérnio $w = (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ será escrito como

$$w = t + xi + yj + zk$$

em que os vetores básicos $1, i, j, k$ são as unidades de \mathbb{H} . As operações de soma e multiplicação por escalar são as usuais, isto é, dados $w_1 = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k$ e $w_2 = t_2 + x_2i + y_2j + z_2k$ em \mathbb{H} e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

$$w_1 + w_2 = (t_1 + t_2) + (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k$$

$$\lambda w_1 = \lambda t_1 + \lambda x_1i + \lambda y_1j + \lambda z_1k$$

A igualdade é definida por

$$w_1 = w_2 \Leftrightarrow t_1 = t_2, x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$$

A multiplicação em \mathbb{H} fica definida, por bilinearidade, quando são dados os produtos das unidades, de acordo com a tabela seguinte:

Tabela 5.1 – Multiplicação de unidades de \mathbb{H} .

\cdot	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Fonte: Lima (2018).

Em relação a esta multiplicação valem a distributividade (por definição), a associatividade, mas não a comutatividade. Contudo, todo quatérnio w possui um inverso multiplicativo dado por

$$w^{-1} = \frac{t - xi - yj - zk}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

Denotando por $\bar{w} = t - xi - yj - zk$ o conjugado de w e por $|w| = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}$ o seu módulo, tem-se que

$$w^{-1} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

Como \mathbb{H} satisfaz todas as propriedades da definição de corpo exceto a comutatividade da multiplicação, dizemos que \mathbb{H} é um *corpo não comutativo* ou um *anel de divisão*.

Observe que a esfera $\mathbb{S}^3 = \{w \in \mathbb{H} \mid |w| = 1\}$ é um grupo relativamente à multiplicação de quatérnios. Como a multiplicação de quatérnios é diferenciável por ser bilinear, \mathbb{S}^3 é um grupo de Lie.

O *espaço projetivo quaterniônico* $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ é o conjunto das retas em $\mathbb{H}^{n+1} - \{0\}$ que passam pela origem. De forma semelhante ao que foi feito na seção anterior tem-se as seguintes caracterizações de $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$:

- O espaço quociente $(\mathbb{H}^{n+1} - \{0\}) / \sim$ pela relação de equivalência $w_1 \sim w_2 \Leftrightarrow w_1 = \lambda w_2$ para algum $\lambda \in \mathbb{H} - \{0\}$;
- O espaço quociente \mathbb{S}^{4n+3} / \sim de $\mathbb{S}^{4n+3} \subset \mathbb{H}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{4n+4}$ pela relação de equivalência $w_1 \sim w_2 \Leftrightarrow w_1 = \lambda w_2$ para algum $\lambda \in \mathbb{H}$ com $|\lambda| = 1$;
- O espaço quociente $\mathbb{S}^{4n+3} / \mathbb{S}^3$ pelo grupo multiplicativo $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$.

Segue da proposição 5.5 que $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão $4n$.

A fibração de Hopf de $\mathbb{H}\mathbb{P}^n$ é

$$\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{P}^n$$

5.3 Espaços simétricos de posto 1

Seja E um espaço vetorial. Uma *vizinhança simétrica* de um ponto $p \in E$ é um conjunto aberto $V \subset E$ com $p \in V$ tal que para todo ponto $q \in V$ tem-se que $-q \in V$.

Seja M uma variedade Riemanniana e V uma vizinhança simétrica de 0 em $T_p M$ para algum $p \in M$ tal que $\exp_p|_V : V \rightarrow V_p$ é um difeomorfismo para algum aberto $V_p \subset M$. Defina $s : V \rightarrow V$ por $s(X) = -X$ e ponha $s_p = (\exp_p|_V) \circ s \circ (\exp_p|_V)^{-1}$. Esta aplicação é chamada a *simetria geodésica* com respeito a p sobre V_p .

Uma variedade M é chamada *localmente simétrica* se para cada $p \in M$ existem V e V_p tais que a simetria geodésica é uma isometria. Tais variedades podem ser caracterizadas pela seguinte condição:

Proposição 5.6 (Blesse (1978)) *Uma variedade Riemanniana M é localmente simétrica se, e somente se a curvatura seccional K é invariante sob transporte paralelo.*

Uma variedade Riemanniana M é um *espaço simétrico* se para cada $p \in M$ existe uma isometria involutiva $s_p : M \rightarrow M$ (isto é, $s_p \circ s_p = id$) tal que (sobre $T_p M$)

$$s_p \circ \exp_p = \exp_p \circ s_p$$

O *posto* de um espaço simétrico M é a dimensão máxima das subvariedades planas (isto é, aquelas com curvatura zero) que são totalmente geodésicas.

Exemplos de espaços simétricos de posto 1: $\mathbb{S}^n, \mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{H}\mathbb{P}^n$.

5.4 Estimativas de volume

Seja $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ uma submersão Riemanniana, com $\dim \tilde{M} > \dim M$. Para cada $m \in M$, ponha sobre a fibra $\pi^{-1}(m)$ a métrica \tilde{g}_m induzida pela métrica \tilde{g} . Seja $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com suporte compacto. Denote por $\tilde{f}_m = \tilde{f}|_{\pi^{-1}(m)}$. \tilde{f}_m tem suporte compacto para cada $m \in M$. Ponha

$$f(m) = \int_{\pi^{-1}(m)} \tilde{f}_m dV_{\tilde{g}_m}.$$

Proposição 5.7 (Berger, Gauduchon e Mazet (1971)) *f é contínua com suporte compacto, e vale a igualdade*

$$\int_{\tilde{M}} \tilde{f} dV_{\tilde{g}} = \int_M f dV_g. \quad (5.1)$$

Corolário 5.1 *Se M e \tilde{M} são compactas, então*

$$\text{vol}(\tilde{M}, \tilde{g}) = \int_M \text{vol}(\pi^{-1}(m), \tilde{g}_m) dV_g \quad (5.2)$$

Em particular, se as fibras têm volume constante,

$$\text{vol } \tilde{M} = \text{vol } F \text{ vol } M \quad (5.3)$$

em que F denota a fibra.

Lema 5.1 (Lawson (1970)) *Seja $\pi : N \rightarrow B$ uma submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas. Seja M uma subvariedade de B e $M' = \pi^{-1}(M)$. Então M é uma subvariedade mínima de B se, e somente se, M' é uma subvariedade mínima de N .*

Denotaremos os espaços projetivos real, complexo e quaterniônico por $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$ conforme $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} , respectivamente.

Teorema 5.1 (Chen (1983)) *Seja M^n uma subvariedade mínima compacta de $\mathbb{F}\mathbb{P}^m$. Então*

$$\text{vol}(M) \geq \frac{c_n}{2} \quad \text{se } \mathbb{F} = \mathbb{R} \quad (5.4)$$

$$\text{vol}(M) \geq \frac{c_{n+1}}{2\pi} \quad \text{se } \mathbb{F} = \mathbb{C} \quad (5.5)$$

$$\text{vol}(M) \geq \frac{c_{n+2}}{2\pi^2} \quad \text{se } \mathbb{F} = \mathbb{H} \quad (5.6)$$

e a igualdade em (5.4), (5.5) ou (5.6) vale se, e somente se, $M' = \pi^{-1}(M)$ é uma grande $(n + d - 1)$ -esfera de $\mathbb{S}^{(m+1)d-1}$, em que $d = \dim \mathbb{F}$.

Prova:

Denote por $d = \dim \mathbb{F}$. Considere as projeções canônicas

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{F}} : \mathbb{S}^{(m+1)d-1} &\rightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^m = \mathbb{S}^{(m+1)d-1} / \mathbb{S}^{d-1} \\ x &\mapsto [x] = \mathbb{S}^{d-1} \cdot x \end{aligned}$$

Analogamente ao caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, mostra-se que cada $\pi_{\mathbb{F}}$ é uma submersão Riemanniana para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ e $\mathbb{F} = \mathbb{H}$. As geodésicas das fibras são arcos de círculos de $\mathbb{S}^{(m+1)d-1}$, logo as fibras são totalmente geodésicas. Mais ainda, as fibras de cada $\pi_{\mathbb{F}}$ têm o mesmo volume $\text{vol } \mathbb{S}^{d-1}$, que é igual a 2 se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, igual a 2π se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ e igual a $2\pi^2$ se $\mathbb{F} = \mathbb{H}$.

Seja M uma subvariedade compacta mínima n -dimensional de $\mathbb{F}\mathbb{P}^m$ e seja $M' = \pi_{\mathbb{F}}^{-1}(M)$. Então, pelo lema 5.1, M' é uma subvariedade mínima compacta. Como

$$M' = \pi_{\mathbb{F}}^{-1}(M) = \{x | \mathbb{S}^{d-1} \cdot x \in M\} \Rightarrow M = M' / \mathbb{S}^{d-1},$$

pela proposição 5.5 temos que

$$\dim M' = \dim M' / \mathbb{S}^{d-1} + \dim \mathbb{S}^{d-1} = \dim M + \dim \mathbb{S}^{d-1} = n + d - 1$$

logo, pelo teorema 4.2,

$$\text{vol}(M') \geq c_{n+d-1}.$$

Aplicando o corolário 5.1 teremos

$$\text{vol } M = \frac{\text{vol } M'}{\text{vol } \mathbb{S}^{d-1}} \geq \frac{c_{n+d-1}}{\text{vol } \mathbb{S}^{d-1}}$$

que é o resultado do teorema. O caso da igualdade segue também do teorema 4.2. \square

Referências

- ALEXANDRINO, M. M. *Introdução a Geometria Riemanniana*. 2018. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~malex/arquivos/lista2018/GeoRiemanniana-Main-novo.pdf>. Acesso em: 3 nov. 2020.
- ALVAREZ, Y. N. *Superfícies mínimas completas limitadas em \mathbb{R}^3* . 180 f. Dissertação (Mestrado) — PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2015.
- BERGER, M.; GAUDUCHON, P.; MAZET, E. *Le spectre d'une variété riemannienne*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1971. (Lecture Notes in Mathematics 194).
- BIEZUNER, R. J. *Geometria Riemanniana: Curso de geometria riemanniana*. Belo Horizonte: UFMG, 2017. Notas de aula. Disponível em: http://150.164.25.15/~rodney/notas_de_aula/geometria_riemanniana.pdf. Acesso em: 1 dez. 2020.
- BLESSE, A. *Manifolds all of whose geodesic are closed*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1978. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 93).
- BRICKELL, F.; CLARK, R. S. *Differentiable Manifolds: An introduction*. London: Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
- CARMO, M. P. do. *Superfícies mínimas*. 2. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2011.
- CARMO, M. P. do. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana*. 5. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2015a.
- CARMO, M. P. do. *Formas diferenciais e aplicações*. Rio de Janeiro: SBM, 2015b.
- CHEN, B.-Y. On the total curvature of immersed manifolds, I: An inequality of Fenchel-Borsuk-Willmore. *American Journal of Mathematics*, v. 93, n. 1, p. 148–162, 1971.
- CHEN, B.-Y. On the total curvature of immersed manifolds, II: mean curvature and length of second fundamental form. *American Journal of Mathematics*, v. 94, n. 3, p. 799–809, 1972.
- CHEN, B.-Y. On the first eigenvalue of laplacian of compact minimal submanifolds of rank one symmetric spaces. *Chinese Journal of Mathematics*, v. 11, n. 4, p. 259–273, 1983.
- CHERN, S.-S.; LASHOF, R. K. On the total curvature of immersed manifolds. *American Journal of Mathematics*, v. 79, n. 2, p. 306–318, 1957.
- COLDING, T. H.; MINICOZZI, W. P. *A course in minimal surfaces*. Providence: American Mathematical Society, 2011. (Graduate Studies in Mathematics 121).
- DOUGLAS, J. Solution of the problem of Plateau. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 33, n. 1, p. 263–321, 1931.

- EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. 2nd. ed. Providence: American Mathematical Society, 2010. (Graduate Studies in Mathematics 19).
- GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro: Impa, 1979.
- GORODSKI, C. *An introduction to riemannian geometry*. 2012. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~gorodski/teaching/mat5771-2016/gorodski-riem-geom-2012.pdf>. Acesso em: 13 mar. 2021.
- GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*. 2nd. ed. New York: Springer, 2008.
- LAWSON, H. B. Rigidity theoremas in rank-1 symmetric spaces. *Journal of Differential Geometry*, n. 4, p. 349–357, 1970.
- LEE, J. M. *Introduction to topological manifolds*. New York: Springer, 2000. (Graduate Texts in Mathematics 202).
- LIMA, E. L. *Análise real: Funções de n variáveis*. 6. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2013a. v. 2.
- LIMA, E. L. *Análise real: Análise vetorial*. 3. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2013b. v. 3.
- LIMA, E. L. *Álgebra linear*. 9. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016.
- LIMA, E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. 5. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2018.
- OSSERMAN, R. *A survey of minimal surfaces*. 2nd. ed. Mineola: Dover Publications, 1986.
- PALIS, J.; MELO, W. de. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Rio de Janeiro: Impa, 1978.
- RADÓ, T. The problem of the least area and the problem of plateau. *Mathematische Zeitschrift*, n. 32, p. 763–796, 1930.
- SAKAI, T. *Riemannian Geometry*. Providence: American Mathematical Society, 1996. (Translations of Mathematical Monographs 149).
- SOUFI, A. el; ILIAS, S. Immersions minimales, première valeur propre du laplacien et volume conforme. *Mathematische Annalen*, n. 275, p. 257–267, 1986.
- SPANIER, E. Mergulhando variedades suaves em espaços euclidianos. *Matemática Universitária*, n. 9/10, p. 159–165, dez. 1989. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n09_n10_Artigos08.pdf. Acesso em: 10 fev. 2021.
- TANI, M. On hypersurfaces with constant k-th mean curvature. *Kōdai Math. Sem. Rep.*, n. 20, p. 94–102, 1968.
- WARNER, F. W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. New York: Springer, 1983.