



Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Instituto de Matemática - IM

Programa de Pós-Graduação em Matemática
em associação com a Universidade Federal da Bahia



WAGNER OLIVEIRA COSTA FILHO

TEOREMAS DE RIGIDEZ PARA SUBVARIETADES DO ESPAÇO EUCLIDIANO

Programa de Doutorado em Matemática UFAL - UFBA
Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

MACEIÓ
MARÇO DE 2020

Wagner Oliveira Costa Filho

Teoremas de rigidez para subvariedades do espaço Euclidiano

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

Maceió
Março de 2020

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

C837t Costa Filho, Wagner Oliveira.
Teoremas de rigidez para subvariedades do espaço euclidiano / Wagner
Oliveira Costa Filho. – 2020.
42 f.

Orientador: Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante.
Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto
de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal da Bahia, 2020.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da
Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da
Bahia.

Bibliografia: f. 32-36.
Apêndices: f. 37-42.

1. Hipersuperfícies. 2. Cones instáveis. 3. *Self-shrinkers* (Esfera). 4. λ -
Hipersuperfícies. I. Título.

CDU: 514.113.6

Folha de Aprovação

AUTOR: WAGNER OLIVEIRA COSTA FILHO

Teoremas de rigidez para subvariedades do espaço Euclidiano

Tese de Doutorado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia e aprovada em 27 de março de 2020.


Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcane - UFAL (Orientador)

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas - UFPB (Examinador Externo)



Prof. Dr. Feliciano Marcilio Aguiar Vitorio - UFAL (Examinador Interno)



Prof. Dr. Fernando Codá Marques - Princeton University (Examinador Externo)



Prof. Dr. Márcio Henrique Batista - UFAL (Examinador Interno)

Este trabalho é dedicado amorosamente aos meus Pais, minhas Irmãs, meu Sobrinho e minha Esposa.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador e amigo Marcos Petrócio por todas estas décadas de matemática e fé.

Aos professores desta Pós-Graduação pelos ensinamentos e fineza em nossa convivência.

A cada membro da Banca Examinadora por sua participação e contribuição.

Ao colega Sidney Donato pela paciente gentileza na digitação deste trabalho.

A todos(as) os(as) colegas destes tempos de doutoramento pelo fraterno ambiente.

Aos servidores da Pós-Graduação pela eficiente atuação administrativa.

Aos cordiais colegas do Campus Arapiraca pelo agradável clima organizacional.

Às relações pessoais desenvolvidas na UFAL.

À minha família.

À minha esposa Angela Maria por todos estes anos de incentivo e companheirismo.

“If relativity is proved right the Germans will call me a German, the Swiss will call me a Swiss citizen, and the French will call me a great scientist. If relativity is proved wrong the French will call me a Swiss, the Swiss will call me a German, and the Germans will call me a Jew.”

A. Einstein

RESUMO

Nesta tese obtemos alguns resultados de inexistência e rigidez de subvariedades imersas no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+p} . Na primeira parte, motivados pelas ideias apresentadas em (CAVALCANTE; ESPINAR, 2016), no qual os autores estendem teoremas do tipo semiespaço para self-shrinkers, mostramos que não existem hipersuperfícies mínimas propriamente imersas em qualquer região do \mathbb{R}^{n+1} limitada por cones mínimos instáveis. Na segunda parte, mostramos dois resultados de rigidez que caracterizam as esferas redondas como as únicas subvariedades self-shrinkers fechadas do espaço Euclidiano, assumindo uma certa desigualdade geométrica ou na hipótese de uma curvatura média superior ser constante. Além disso, estabelecemos alguns resultados correlatos no contexto de λ -hipersuperfícies fechadas.

Palavras-chave: Hipersuperfícies mínimas. Cones instáveis. Self-shrinkers. Esferas redondas. λ -Hipersuperfícies.

ABSTRACT

In this thesis we obtained some results of the inexistence and rigidity of submanifolds immersed in the Euclidean space \mathbb{R}^{n+p} . In the first part, motivated by the ideas presented in (CAVALCANTE; ESPINAR, 2016), in which the authors extend halfspace type theorems to self-shrinkers, we show that there are no minimal hypersurfaces properly immersed in any region of \mathbb{R}^{n+1} limited by minimal unstable cones. In the second part, we show two results of rigidity that characterize the round spheres as the only closed self-shrinking submanifolds of the Euclidean space, assuming a certain geometric inequality or in the hypothesis that a higher mean curvature is constant. In addition, we have established some correlated results in the context of closed λ -hypersurfaces.

Keywords: Minimal hypersurfaces. Unstable cones. Self-shrinkers. Round spheres. λ -Hypersurfaces.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	TEOREMA DO SEMIESPAÇO PARA REGIÕES LIMITADAS POR CONES MÍNIMOS	15
2.1	Preliminares	15
2.2	r -Estabilidade	16
2.3	O Princípio da Tangência	18
2.4	Cones r -mínimos instáveis	18
2.5	Demonstração dos Teoremas	20
3	CARACTERIZAÇÃO DE ESFERAS COMO SELF-SHRINKERS . . .	23
3.1	Preliminares	23
3.2	Rigidez de Self-Shrinkers	26
3.3	Self-Shrinkers e a r -ésima curvatura média	27
	REFERÊNCIAS	32
	APÊNDICE A – FÓRMULA DA PRIMEIRA VARIAÇÃO DE H_r	37
	APÊNDICE B – FÓRMULAS RELACIONADAS À FUNÇÃO SUPORTE	41

1 INTRODUÇÃO

Um problema clássico em Geometria Diferencial é determinar a existência ou não existência de hipersuperfícies imersas em certas regiões de uma variedade Riemanniana dada. Nesse contexto, trabalhos fundamentais foram obtidos na classe de imersões mínimas, motivado principalmente pela conjectura de Calabi-Yau (CALABI, 1966; CHERN, 1966; YAU, 1982), a qual afirma que uma hipersuperfície mínima completa em \mathbb{R}^{n+1} não é limitada. Muitos resultados importantes foram feitos a respeito dessa conjectura, incluindo contraexemplos em sua forma geral (veja (ALARCÓN; CASTRO-INFANTES, 2018), (COLDING; MINICOZZI II, 2008), (JORGE; XAVIER, 1980), (LÓPEZ et al., 2002), (N; MORALES, 2004), (NADIRASHVILI, 1996)).

Relacionado a esse problema, temos o célebre teorema do semiespaço de Hoffman e Meeks (HOFFMAN; MEEKS III, 1990) no espaço Euclidiano tridimensional. Esse teorema afirma que *não existe superfície mínima própria, possivelmente ramificada, não planar contida em um semiespaço de \mathbb{R}^3* . Essa é uma aplicação do Princípio do Máximo para superfícies mínimas utilizando o comportamento do catenoide em \mathbb{R}^3 . É surpreendente que esse teorema não seja válido em dimensões altas e que os catenoides C^n são eles próprios contraexemplos, visto que estão contidos em uma região dada por dois hiperplanos paralelos de \mathbb{R}^{n+1} , quando $n \geq 3$.

É natural então investigar algum teorema do tipo semiespaço em dimensões altas, ou em outros contextos. De fato, existe uma pesquisa ativa sobre esse tópico e muitos resultados foram obtidos. Veja por exemplo (ALBANESE et al., 2013; ATSUJI, 1999; BESSA et al., 2001; BOMBIERI et al., 1969; CAVALCANTE; ESPINAR, 2016; DANIEL et al., 2011; IMPERA et al., 2018; LÓPEZ, 2001; MARI; RIGOLI, 2010; MAZET; WANDERLEY, 2015; MAZET, 2013; MAZET, 2015; OMORI, 1967; RODRIGUEZ; ROSENBERG, 1998; ROSENBERG et al., 2013).

Nesse sentido o primeiro trabalho sobre a não existência de imersões mínimas em cones foi feito por Omori em (OMORI, 1967), onde ele considera cones estritamente contidos no semiespaço. Uma extensão desse resultado foi obtida posteriormente por Atsuji em (ATSUJI, 1999) usando Geometria Estocástica. Também chamamos a atenção para dois teoremas interessantes sobre hipersuperfícies mínimas e propriamente imersas no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} . Em (LÓPEZ, 2001), López demonstrou um resultado de não imersibilidade considerando cones sobre domínios convexos e em (MARI; RIGOLI, 2010) Mari e Rigoli consideraram esse problema

para cones não degenerados (ver também (RANJBAR-MOTLAGH, 2009)). Estes teoremas foram estendidos para hipersuperfícies no contexto das curvaturas médias de ordem maior em (ALBANESE et al., 2013).

Na primeira parte dessa tese provamos que um resultado do tipo semiespaço é válido quando consideramos cones mínimos instáveis como barreiras. Antes de estabelecermos nosso teorema de forma precisa, precisamos recordar algumas definições. Seja $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície compacta, orientável e mergulhada na esfera redonda unitária. Vamos denotar por $C_M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o cone sobre M , isto é, a imagem de $M \times [0, \infty)$ pela aplicação dada por $(p, t) \rightarrow tp$. É simples ver que $C_M^* = C_M \setminus \{0\}$ é uma hipersuperfície mínima se, e somente se, $M \subset \mathbb{S}^n$ é mínima. Em (SIMONS, 1968), Simons verificou que se $M \subset \mathbb{S}^n$ não é totalmente geodésica e $3 \leq n \leq 6$, então $C_M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima instável (veja também (SCHOEN et al., 1975)). Lembramos que uma hipersuperfície orientada e mínima é dita *estável* se a segunda variação de sua área é não negativa para qualquer deformação normal de M com suporte compacto. Caso contrário, ela é chamada *instável*. Tendo em vista que a segunda variação do funcional área de uma hipersuperfície mínima M é dada pelo operador de Jacobi $J = \Delta + \|A\|^2$, onde A é a segunda forma fundamental de M , concluimos que M é instável se, e somente se, J tem algum autovalor negativo para algum domínio relativamente compacto de M . Nosso teorema principal é o seguinte.

Teorema 1.0.1 *Seja $C_M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um cone mínimo instável, $n \geq 3$. Então não existe hipersuperfície mínima Σ^n propriamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus C_M$.*

A demonstração é inspirada nos argumentos da prova do teorema do semiespaço para self-shrinkers contidos no trabalho (CAVALCANTE; ESPINAR, 2016), e a ideia é usar a instabilidade de C_M e a estrutura de cone para criar uma perturbação de C_M que levam a uma contradição com o Princípio do Máximo.

Ressaltamos que, se C_M é um cone minimizante de área, em particular C_M é uma hipersuperfície mínima estável, então ele pode ser aproximado por hipersuperfícies minimizantes de área e suaves, isto é, a propriedade de semiespaço não é válida neste caso. Esse resultado foi estabelecido por Hardt e Simons em (HARDT; SIMON, 1985) (ver também o trabalho recente de Lohkamp (JOACHIM, 2018)). Por outro lado, o Teorema 1.0.1 garante que este caso não acontece se C_M é instável.

No que segue, denotamos por \bar{M}_c^{n+1} a forma espacial de curvatura seccional constante c , que por simplicidade, assumimos ser $-1, 0$ ou 1 . Lembramos que, dado $r \in \{1, \dots, n\}$,

uma hipersuperfície $M^n \subset \bar{M}_c^{n+1}$ é dita ser r -mínima se a função simétrica S_r das curvaturas principais de M é identicamente zero. Essa é uma generalização natural de hipersuperfícies mínimas ($r = 1$) e também de hipersuperfícies de curvatura escalar zero ($r = 2$) no espaço Euclidiano. Em (REILLY, 1973), Reilly verifica que tais hipersuperfícies são pontos críticos de um certo funcional r -área A_r e calcula a fórmula da segunda variação. Esta variação é dada por uma forma quadrática expressa em termos de um operador diferencial linear de segunda ordem, cuja condição de elipticidade é importante na análise dos autovalores do operador de Jacobi correspondente. Dizemos que uma hipersuperfície r -mínima é r -estável se a segunda variação de A_r é não negativa, caso contrário ela é dita r -instável (veja também (BARBOSA; COLARES, 1997; ALENCAR et al., 2003)).

Assim como no caso mínimo, um cálculo direto mostra que M^{n-1} é uma hipersuperfície r -mínima de \mathbb{S}^n se, e somente se, o cone C_M é uma hipersuperfície r -mínima em \mathbb{R}^{n+1} . É um fato notável que um teorema do tipo Simons ainda seja válido para cones r -mínimos. Isso foi demonstrado em dimensões apropriadas por Barbosa e do Carmo em (BARBOSA; CARMO, 2005) para cones com curvatura escalar zero e $S_3 \neq 0$, como também por Barros e Sousa em (BARROS; SOUSA, 2008) para cones r -mínimos, assumindo que S_{r+1} é uma constante não nula. Nesse cenário temos o seguinte teorema.

Teorema 1.0.2 *Seja $C_M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, um cone r -mínimo instável para algum $r \in \{2, \dots, n-1\}$. Suponha que $S_j > 0$, $j = 1, \dots, r-1$. Então não existe hipersuperfície r -mínima Σ^n propriamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus C_M$ tal que $S_{r+1} \neq 0$.*

A demonstração segue os mesmos passos que no caso de hipersuperfícies mínimas. De fato, sob as hipóteses que estamos assumindo, o operador linearizado associado ao funcional da segunda variação da r -área é elíptico e vale o Princípio do Máximo (ver (HOUNIE; LEITE, 1995; HOUNIE; LEITE, 1999)).

Para a segunda parte dessa tese, consideramos $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma subvariedade conexa de dimensão $n \geq 2$ imersa em \mathbb{R}^{n+p} . Dizemos que M é uma *self-shrinker* se satisfaz a equação

$$\mathbf{H} = -\frac{\mathbf{x}^\perp}{2},$$

onde \mathbf{H} é o vetor curvatura média de M , \mathbf{x} é o vetor posição e \perp denota a projeção ortogonal de \mathbf{x} no fibrado normal de M .

Self-shrinkers são uma importante classe de soluções para o fluxo da curvatura média de M e destacam-se no estudo de certas singularidades do fluxo. Com razão, diz-se que uma

família $M_t = \mathbf{x}_t(M)$ de subvariedades satisfaz a equação do fluxo pela curvatura média, com condição inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$, se

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(p, t) = \mathbf{H}(p, t),$$

onde $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(\cdot, t) : M \times I \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ são imersões e $\mathbf{H}(p, t)$ é o vetor curvatura média de M_t em $p \in M$.

Isto posto, verifica-se que M é uma self-shrinker se, e somente se, $M_t = \sqrt{-t}M \subset \mathbb{R}^{n+p}$, $t \in (-\infty, 0)$, flui pela curvatura média. É conhecido também que, se M é uma self-shrinker em \mathbb{R}^{n+p} , então M é uma subvariedade mínima da variedade ponderada $(\mathbb{R}^{n+p}, e^{-\frac{|x|^2}{2n}}g)$, onde g é a métrica Euclidiana. Mais ainda, as variedades self-shrinkers são precisamente os pontos críticos do funcional

$$F(M) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_M e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\mu.$$

Estas caracterizações estão apresentadas em (COLDING; MINICOZZI II, 2012b).

Alguns exemplos de self-shrinkers (ver por exemplo (CAO; LI, 2013), (CAVALCANTE; ESPINAR, 2016)) são

- (a) Hiperplanos passando pela origem em \mathbb{R}^{n+1} ;
- (b) Esferas redondas $\mathbb{S}^n(\sqrt{2n})$ em \mathbb{R}^{n+1} ;
- (c) Cilindros $\mathbb{S}^k(\sqrt{2k}) \times \mathbb{R}^{n-k}$ em \mathbb{R}^{n+1} , para $k = 1, \dots, n-1$;
- (d) $\mathbb{S}^{k_1}(\sqrt{2k_1}) \times \dots \times \mathbb{S}^{k_p}(\sqrt{2k_p}) \subset \mathbb{R}^{n+p}$, para $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{Z}_+$ tais que $k_1 + \dots + k_p = n$;
- (e) $\mathbb{S}^{k_1}(\sqrt{2k_1}) \times \dots \times \mathbb{S}^{k_p}(\sqrt{2k_p}) \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{n+p}$, para $k_1, \dots, k_p, k \in \mathbb{Z}_+$ tais que $k_1 + \dots + k_p + k = n$.

Em (HUISKEN, 1990) o autor mostra que a única hipersuperfície self-shrinker fechada e mergulhada com $\mathbf{H} \geq 0$ é a esfera redonda. Usando este fato, Colding e Minicozzi (COLDING; MINICOZZI II, 2012a) verificam que as esferas são as únicas self-shrinkers fechadas e mergulhadas F -estáveis, no sentido que $F'' \geq 0$ para toda variação normal de M .

Por oportuno, enunciamos a seguinte recente conjectura proposta por Qing-Ming Cheng em (CHENG, 2016),

Conjectura 1.0.1 *Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma self-shrinker mergulhada e homeomorfa à esfera. Então M é a esfera redonda.*

Essa conjectura foi confirmada por U. Abresch e J. Langer (ABRESCH; LANGER, 1986) para $n = 1$ e por S. Brendle (BRENDLE, 2016) para $n = 2$. Existem exemplos devidos a S. Angenent (ANGENENT, 1992) e G. Drugan (DRUGAN, 2015) que mostram a necessidade das hipóteses na conjectura acima.

Outros teoremas de classificação e rigidez de self-shrinkers foram obtidos nos últimos anos dentro dos mais variados contextos topológicos e geométricos associados à subvariedade M . Ver (CAO; LI, 2013), (LI; WEI, 2014), (CASTRO; LERMA, 2014) e (CHENG; PENG, 2015).

Em (VASQUEZ, 2015) a autora estabelece uma equação tipo Simons generalizada para hipersuperfícies e faz a seguinte aplicação:

Proposição 1.0.1 *Seja M^n uma self-shrinker em \mathbb{R}^{n+1} , então*

$$\frac{1}{2}\tilde{\Delta}|\tilde{A}|_{\tilde{g}}^2 + 3\langle\tilde{\nabla}|\tilde{A}|_{\tilde{g}}^2, \tilde{\nabla}f|_{\tilde{g}}^2\rangle_{\tilde{g}} = e^{-4f} \left(|\nabla\mathring{A}|^2 + \Psi|\mathring{A}|^2 \right),$$

onde $\tilde{\cdot}$ denota a correlata quantidade na variedade M relativa à métrica conforme $\tilde{g} = e^{2f}g$, \mathring{A} é a segunda forma fundamental sem traço, $f = -|\mathbf{x}|^2/(4n)$ e Ψ é dado por

$$\Psi = 1 - \frac{n+2}{4n^2}|\mathbf{x}|^2 + \frac{2}{n^2}|\mathbf{H}|^2 - |A|^2.$$

Como consequência dessa proposição a autora obtém o seguinte:

Teorema 1.0.3 *Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma self-shrinker mergulhada e fechada. Se $\Psi \geq 0$ sobre M , então M é a esfera redonda $\mathbb{S}^n(\sqrt{2n})$.*

Nessa tese apresentamos uma extensão do resultado acima para self-shrinkers apenas imersas e em codimensão qualquer. A saber:

Teorema 1.0.4 *Seja M^n uma self-shrinker imersa e fechada em \mathbb{R}^{n+p} . Se*

$$1 - \frac{n+2}{4n^2}|\mathbf{x}|^2 + \frac{2}{n^2}|\mathbf{H}|^2 - |A|^2 \geq 0, \quad (1)$$

em M , então M é a esfera redonda de raio $r = \sqrt{2n}$.

Em (GUO, 2018) o autor consegue teoremas do tipo *gap* para self-shrinkes fechadas e conclui que tais hipersuperfícies com curvatura escalar constante são isométricas à esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{2n})$. Nesse trabalho mostramos o seguinte resultado, no qual a r -ésima curvatura média H_r da imersão \mathbf{x} é dada por

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r.$$

Teorema 1.0.5 *Seja $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma self-shrinker fechada com H_{r+1} constante para algum r tal que $r + 2 \leq n$. Então $M = \mathbb{S}^n(\sqrt{2n})$.*

2 Teorema do semiespaço para regiões limitadas por cones mínimos

Nesta seção mostramos que não existem hipersuperfícies mínimas propriamente imersas em qualquer região do espaço Euclidiano limitada por cones mínimos instáveis. Os resultados aqui apresentados estão publicados no artigo (CAVALCANTE; COSTA-FILHO, 2019).

2.1 PRELIMINARES

Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa e orientável do espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} .

Podemos escolher um campo vetorial normal unitário N globalmente definido sobre M e designar a segunda forma fundamental da imersão \mathbf{x} associada a esse campo como sendo a aplicação linear $A : T_p M \rightarrow T_p M$ dada por

$$A(X)(p) = -(\bar{\nabla}_X N)(p),$$

para cada $p \in M$, onde $\bar{\nabla}$ é a conexão Riemanniana de \mathbb{R}^{n+1} . Essa aplicação, também chamada operador de forma, é autoadjunta e seus autovalores k_1, \dots, k_n são ditos as curvaturas principais de \mathbf{x} em p .

Consideremos as funções simétricas elementares de k_1, \dots, k_n :

$$\begin{aligned} S_0 &= 1, \\ S_r &= \sum_{i_1 < \dots < i_r} k_{i_1} \cdots k_{i_r}, \quad 1 \leq r \leq n, \\ S_r &= 0 \quad r > n. \end{aligned}$$

A r -ésima curvatura média H_r da imersão \mathbf{x} em $p \in M$ é definida por

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r.$$

Relacionadas a essas curvaturas, introduzimos a r -ésima transformação de Newton $P_r : T_p M \rightarrow T_p M$ dadas indutivamente por

$$\begin{aligned} P_0 &= I, \\ P_r &= S_r I - A P_{r-1}, \end{aligned}$$

onde I é o operador identidade em $T_p M$. Verifica-se que cada P_r é um operador autoadjunto e possui os mesmos autovetores de A .

2.2 r -ESTABILIDADE

Um *domínio* $D \subset M$ é um subconjunto aberto conexo com fecho \overline{D} compacto e fronteira ∂D diferenciável.

Uma *variação* de D é uma aplicação diferenciável $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $\varepsilon > 0$, tal que para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a aplicação $F_t : \{t\} \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por $F_t(p) = F(t, p)$ é uma imersão com $F|_{\partial D} = \mathbf{x}|_{\partial D}$ e $F_0 = \mathbf{x}$.

Sejam

$$E(t, p) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, p) \quad \text{e} \quad f_t = \langle E_t, N_t \rangle,$$

onde N_t é o campo vetorial normal unitário sobre $F_t(D)$. Dizemos que E é o *campo variacional* da variação F e f_t é a componente normal de E_t .

O volume associado à variação F é a função $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(t) = \int_{[0, t] \times D} F^* d\nu,$$

onde $F^* d\nu$ é o pull-back do elemento de volume canônico $d\nu$ de \mathbb{R}^{n+1} .

Dizemos que a variação F *preserva volume* se $V(t) = V(0)$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

É bem conhecido (ver (BARBOSA; COLARES, 1997) e (REILLY, 1973)) que as imersões com H_{r+1} constante são pontos críticos do problema variacional de minimizar a r -área da hipersuperfície dada pela integral

$$A_r(t) = \int_{F_t(D)} S_r dM_t,$$

para variações que preservam volume e cuja componente normal possui suporte compacto em D , onde dM_t é o elemento de volume na métrica induzida sobre M por F_t . É importante destacar que, no caso $H_{r+1} = 0$, tais imersões são pontos críticos do funcional A_r para toda variação com suporte compacto em D .

Nesse contexto, a Fórmula da Segunda Variação de A_r em $t = 0$ avaliada na componente normal f do campo variacional é expressa por (ver (BARBOSA; COLARES, 1997)):

$$A_r''(0)(f) = -(r+1) \int_D f J_r(f) dM,$$

onde $J_r = L_r + (S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2})$ e $L_r = \text{traço}(P_r \nabla^2 f)$ são operadores diferenciais lineares de segunda ordem. Na última igualdade $\nabla^2 f$ denota a matriz Hessiana de f . O operador J_r é chamado de *operador da r -estabilidade* ou *operador de Jacobi*.

Sabe-se que (ver (ROSENBERG, 1993)) se M é fechada ou se M é não compacta e f, g são funções de suporte compacto em M , então

$$L_r(f) = \text{div}(P_r \nabla f) \tag{2}$$

e

$$\int_M f L_r(g) dM = \int_M g L_r(f) dM,$$

onde ∇f é o gradiente de f e div é o operador divergência. E mais, o operador L_r é elíptico se, e somente se, P_r é positivo definido. Para garantir esta última condição, a seguinte proposição é útil.

Proposição 2.2.1 *Sejam $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica, $1 \leq r \leq n - 1$ e $p \in M$.*

(a) *Se $S_r(p) = 0$ e $S_{r+1}(p) \neq 0$, então P_{r-1} é definido em p .*

(b) *Se $S_{r+1} > 0$, $r > 1$ e existe um ponto em M onde todas as curvaturas principais de \mathbf{x} são positivas, então P_r é positivo definido.*

Demonstração: Ver (HOUNIE; LEITE, 1995) e (BARBOSA; COLARES, 1997) para os itens (a) e (b), respectivamente.

□

Associada ao operador de Jacobi J_r , definimos uma forma bilinear simétrica I_r por

$$I_r(f, g) = - \int_M g J_r(f) dM,$$

agindo no conjunto das funções reais diferenciáveis $C_c^\infty(D)$ com suporte compacto em um fixado domínio compacto $D \subset M$.

Definição 2.2.1 *Sejam $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica com S_{r+1} constante e D um domínio. Dizemos que D é r -estável se $I_r(f, f) \geq 0$ para toda função $f \in C_c^\infty(D)$. Definimos que M é r -estável quando for r -estável para todo domínio $D \subset M$. Caso contrário, dizemos que M é r -instável.*

Para concluir, enunciamos um importante lema, o qual é demonstrado no apêndice.

Lema 2.2.1 *Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa e orientável. Se $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma variação de \mathbf{x} , então em $t = 0$:*

$$\frac{\partial S_{r+1}}{\partial t} = L_r(f) + \text{tr}(A^2 P_r) f + \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^T, \nabla S_{r+1} \right\rangle.$$

2.3 O PRINCÍPIO DA TANGÊNCIA

Nesta subseção recordamos os Princípios da Tangência para hipersuperfícies em suas versões geométricas associadas a r -ésima curvatura média. Ressaltamos que o princípio do máximo para operadores elípticos é a ferramenta analítica principal usada na demonstração dos resultados.

Sejam M_1 e M_2 hipersuperfícies de \mathbb{R}^{n+1} . Dizemos que $p \in M_1 \cap M_2$ é um ponto de tangência se $T_p M_1 = T_p M_2$. Sejam $V \subset T_p M_1$ uma vizinhança de p e $u_1, u_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis cujos gráficos são vizinhanças de M_1 e M_2 , respectivamente. Se $u_1 \leq u_2$ em V , dizemos que M_2 está acima de M_1 em V .

Teorema 2.3.1 (*Princípio da Tangência*)

- (a) *Sejam M_1 e M_2 hipersuperfícies orientadas de \mathbb{R}^{n+1} com curvaturas médias H_1 e H_2 , respectivamente, tais que $H_1 \leq 0 \leq H_2$. Se M_1 e M_2 têm o mesmo vetor normal em um ponto de tangência p , então M_1 não pode permanecer acima de M_2 em uma vizinhança de p , exceto se $M_1 = M_2$ localmente.*
- (b) *Sejam M_1 e M_2 hipersuperfícies orientadas de \mathbb{R}^{n+1} tais que $H_r(M_1) \leq 0 \leq H_r(M_2)$ para algum r , $0 \leq r < n$. Assuma que M_1 e M_2 têm o mesmo vetor normal em um ponto de tangência p e $H_i(M_2) \geq 0$, para todo i , $1 \leq i \leq r - 1$. Se M_2 está acima de M_1 em uma vizinhança de p e $H_{r+1}(M_1) \neq 0$ ou $H_{r+1}(M_2) \neq 0$, então $M_1 = M_2$ localmente.*

Demonstração: Ver (LEITE, 2000) e (HOUNIE; LEITE, 1999) para os itens (a) e (b), respectivamente. □

2.4 CONES r -MÍNIMOS INSTÁVEIS

Estudamos agora a geometria de cones mínimos seguindo a exposição apresentada em (LIRA; SORET, 2009). Para uma outra abordagem com as técnicas dos referenciais móveis, ver (BARBOSA; CARMO, 2005).

Considere M^{n-1} uma hipersuperfície orientável e compacta, imersa na esfera Euclidiana unitária \mathbb{S}^n . O cone $C_M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sobre M é a união dos segmentos de reta iniciando na origem e passando pelos pontos de M . Descrevemos $C_M \setminus \{0\}$ como a hipersuperfície em \mathbb{R}^{n+1} parametrizada pela aplicação $Y : M \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, dada por $Y(p, t) = tp$. O cone

truncado C_M^ε é a imagem de $M \times [\varepsilon, 1]$ pela mesma aplicação para $\varepsilon > 0$. Se N é um vetor normal unitário de M em p , então $N(p, t) = N(p)$ é um vetor normal unitário a C_M em (p, t) .

Sejam p_1, \dots, p_{n-1} coordenadas locais em M , com os campos vetoriais coordenados associados denotados por $\partial_1, \dots, \partial_{n-1}$. Adicionando o campo vetorial ∂_t a esse referencial, a primeira forma fundamental $I = \langle dY, dY \rangle$ e a segunda forma fundamental $II = \langle -dN, dY \rangle$ do cone C_M são, respectivamente, descritas pelas matrizes

$$(\bar{g}_{uv}) = \begin{pmatrix} t^2 p_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\bar{b}_{uv}) = \begin{pmatrix} t b_{ij} & 0 \\ 0 & 0, \end{pmatrix}$$

onde $p_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ e $b_{ij} = -\langle \partial_i N, \partial_j \rangle$ são as componentes das correspondentes formas quadráticas da imersão $M \subset \mathbb{S}^n$.

O operador de forma \bar{A} do cone C_M , com componentes locais $\bar{a}_{uv} = \bar{g}^{uv} \bar{b}_{uv}$, é expresso por

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{t} a_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $a_{ij} = p^{ik} b_{kj}$ são as componentes do operador de forma A da hipersuperfície M .

Assim, se k_1, \dots, k_{n-1} são as curvaturas principais de A , então as curvaturas principais de \bar{A} são

$$0, \frac{k_1}{t}, \dots, \frac{k_{n-1}}{t}.$$

Com isso, vale o seguinte fato:

Proposição 2.4.1 *Sejam \bar{S}_r e \bar{P}_r a função simétrica elementar e o operador de Newton de ordem r , respectivamente, do cone C_M . Então*

$$(a) \quad |\bar{A}| = \frac{1}{t} |A|;$$

$$(b) \quad \bar{S}_r = \frac{1}{t^r} S_r, \quad 1 \leq r \leq n-1, \quad \text{e} \quad \bar{S}_n = 0;$$

$$(c) \quad \bar{P}_r = \frac{1}{t^r} \begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & P_r \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Ver (BARBOSA; CARMO, 2005). □

Motivado pela relação com o problema de Bernstein sobre a possibilidade de solução da equação de uma hipersuperfície mínima em \mathbb{R}^{n+1} , cujo gráfico não é um hiperplano, o estudo da estabilidade de cones mínimos se desenvolveu. A esse respeito, os seguintes trabalhos garantem, sob certas condições, a existência de cones r -mínimos $C_M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ instáveis:

- No importante artigo (SIMONS, 1968) o autor obteve:

Teorema 2.4.1 *Seja $M \subset \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície orientável, compacta, mínima e não totalmente geodésica. Se $n \leq 6$, então existe $\varepsilon \in (0, 1)$ tal que o cone truncado C_M^ε não é estável.*

- No trabalho (BARBOSA; CARMO, 2005) os autores estenderam esse resultado nos seguintes termos:

Teorema 2.4.2 *Seja $M \subset \mathbb{S}^n$, $4 \leq n \leq 7$, uma hipersuperfície orientável e compacta. Se $H_2 = 0$ e $H_3 \neq 0$ em todo ponto, então existe $\varepsilon \in (0, 1)$ tal que o cone truncado C_M^ε não é 1-estável.*

- Uma generalização desse último teorema foi obtida em (BARROS; SOUSA, 2008):

Teorema 2.4.3 *Seja $M \subset \mathbb{S}^n$ uma hipersuperfície orientável e compacta. Se $H_r = 0$ e H_{r+1} é constante e não nula, com $r + 2 \leq n \leq r + 5$, então existe $\varepsilon \in (0, 1)$ tal que o cone truncado C_M^ε não é $(r - 1)$ -estável.*

2.5 DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS

Ao longo desta subseção assumimos que $M^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ é uma hipersuperfície orientada, compacta, não totalmente geodésica e minimamente mergulhada em \mathbb{S}^n .

Teorema 2.5.1 *Seja $C_M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um cone mínimo instável, $n \geq 3$. Então não existe hipersuperfície mínima Σ^n propriamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus C_M$.*

Demonstração: Para tanto, suponhamos que Σ exista e seja $\ell = \text{dist}(\Sigma, C_M)$ a distância Euclidiana entre Σ e C_M .

Observamos primeiro que a distância não pode ser atingida em pontos de Σ e C_M . De fato, assumamos que existem $p \in \Sigma$ e $q \in C_M$ tais que $\ell = \text{dist}(p, q)$. Se $q \neq 0$, podemos transladar Σ via $V = p - q$ até tocar C_M em um primeiro ponto de contato interior e isso contradiz o Princípio da Tangência (Teorema 2.3.1 (a)).

Agora assumamos que $q = 0$. Nesse caso, argumentamos como em (MARQUES; NEVES, 2016, Teorema 5.2). Considere $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ o segmento de reta ligando $\gamma(0) = p \in \Sigma$ e $\gamma(\ell) = 0 \in C_M$. Dado $r \in (0, \ell/2)$, temos que a bola aberta $B(\gamma(\ell - r), r)$ não intersecta

C_M . De fato, caso contrário, se existisse $q_0 \in B(\gamma(\ell - r), r) \cap C_M$, então o caminho $\tilde{\gamma}$ dado pela união de $\gamma([0, \ell - r])$ com o segmento ligando $\gamma(\ell - r)$ e q_0 é um caminho conectando Σ e C_M cujo comprimento é menor do que ℓ . Então, como $B(\gamma(\ell - r), r) \cap C_M = \emptyset$ para todo $r \in (0, \ell/2)$, temos que C_M está contido em um semiespaço, obrigando M estar contida em um hemisfério fechado de \mathbb{S}^n . Mas neste caso a única possibilidade é que M seja totalmente geodésica, o que é uma contradição.

Portanto, a distância entre Σ e C_M é atingida em uma sequência de pontos. Sejam $\{p_i\} \subset \Sigma$ e $\{q_i\} \subset C_M$ sequências tais que $\ell = \lim dist(p_i, q_i)$. Note que $\{p_i\}$ e $\{q_i\}$ divergem para infinito. Vamos denotar por

$$U_i = \frac{p_i - q_i}{\|p_i - q_i\|} \in \mathbb{S}^n$$

a sequência de direções normalizadas. Então, a menos de uma subsequência, temos que $U_i \rightarrow U_0 \in \mathbb{S}^n$. Transladando Σ por $-\ell U_0$, podemos assumir que $dist(\Sigma, C_M) = 0$. Observamos que U_0 pode não ser único e qualquer ponto aderente de $\{U_i\}$ fornece uma direção para a qual podemos transladar Σ a fim de obter $dist(\Sigma, C_M) = 0$.

Agora, escolha $\varepsilon \in (0, 1)$ tal que o cone ε -truncado $C_M^\varepsilon = M \times [\varepsilon, 1]$ é instável (ver (SIMONS, 1968, Lema 6.1.1)). Lembramos que estamos identificando $C_M^\varepsilon = M \times [\varepsilon, 1]$ com sua imagem pela aplicação $(p, t) \rightarrow tp$. Daí, existem $\lambda < 0$ e uma função suave $\varphi : M \times [\varepsilon, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} -\bar{J}\varphi = \lambda\varphi & \text{em } C_M^\varepsilon, \\ \varphi(\cdot, \varepsilon) = \varphi(\cdot, 1) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

onde $\bar{J} = \bar{\Delta} + \|\bar{A}\|^2$ é o operador de Jacobi do cone C_M .

Escolhendo $\lambda = \lambda_1$, o primeiro autovalor de \bar{J} , podemos assumir que $\varphi > 0$ em $M \times (\varepsilon, 1)$. Usamos φ para construir uma perturbação de C_M . Com efeito, dados $\tau > 0$ suficientemente pequeno e $s \in (-\tau, \tau)$, definimos

$$D(s) = \{p + s\varphi(p)N(p) : p \in C_M^\varepsilon\},$$

onde N é o vetor normal unitário sobre C_M apontando para o interior de C_M^+ (a componente conexa de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus C_M$ que contém Σ), pois dado que M está mergulhada, temos que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus C_M$ tem duas componentes conexas. Como Σ está propriamente imersa, existe $\tau_0 \leq \tau$ tal que $D(s) \cap \Sigma = \emptyset$, para todo $s \in (-\tau_0, \tau_0)$.

Fixamos $s \in (-\tau_0, \tau_0)$, $s \neq 0$, tal que $D(s)$ está contido em C_M^+ , e vamos denotar por $H(s)$ a função curvatura média de $D(s)$ com respeito ao vetor normal unitário $N(s)$ apontando

para o interior de C_M^+ . Dado que φ é uma solução não trivial do problema (3), temos que

$$H'(0) = \frac{1}{n} \bar{J}\varphi = -\lambda\varphi > 0,$$

pelo Lema 2.2.1 no caso $r = 0$. Daí, $H(s) > 0$ para s suficientemente pequeno.

Considere o cone perturbado \tilde{C}_M definido como

$$\tilde{C}_M = \begin{cases} D(s), & \text{se } s \in (\varepsilon, 1) \\ C_M, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Visto que Σ é assintótica ao cone C_M , se aplicarmos uma família de homotetias R_a à Σ , podemos encontrar $a \in (0, 1)$ tal que $\Sigma_a = R_a(\Sigma)$ é tangencial ao cone \tilde{C}_M em algum ponto de $D(s)$. Como as homotetias preservam a minimalidade, chegamos a uma contradição pelo Princípio da Tangência 2.3.1 (a). \square

Teorema 2.5.2 *Seja $C_M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, um cone r -mínimo instável para algum $r \in \{2, \dots, n-1\}$. Suponha que $S_j > 0$, $j = 1, \dots, r-1$. Então não existe hipersuperfície r -mínima Σ^n propriamente imersa em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus C_M$ tal que $S_{r+1} \neq 0$.*

Demonstração: A prova segue as mesmas etapas da demonstração acima. De fato, homotetias preservam r -minimalidade e podemos escolher perturbações do cone suficientemente pequenas tal que as condições sobre a positividade de S_j são preservadas e portanto o Princípio da Tangência (Teorema 2.3.1 (b)) se aplica. \square

3 Caracterização de esferas como self-shrinkers

Mostramos nesta seção que as esferas redondas são as únicas self-shrinkers compactas imersas no espaço Euclidiano em codimensão arbitrária que satisfazem uma desigualdade geométrica. Apresentamos também um resultado de rigidez sobre self-shrinkers com r -ésima curvatura média constante.

3.1 PRELIMINARES

Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma subvariedade conexa e imersa no espaço Euclidiano. Se ∇ e $\bar{\nabla}$ são as conexões Riemannianas em M^n e \mathbb{R}^{n+p} respectivamente, então a segunda forma fundamental B e o operador de forma A são definidos por

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \quad \text{e}$$

$$A_\xi(X) = -\bar{\nabla}_X \xi + \nabla_X^\perp \xi,$$

onde X, Y são campos de vetores tangentes sobre M , ξ um campo normal à M e ∇^\perp a conexão normal associada a \mathbf{x} .

Da decomposição do vetor posição \mathbf{x} nos fibrados tangente e normal de M dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}^T + \mathbf{x}^\perp$, obtemos da segunda igualdade acima que

$$A_{\mathbf{x}^\perp} X = -X + \nabla_X \mathbf{x}^T. \quad (4)$$

Com razão, utilizando que $\bar{\nabla}_X \mathbf{x} = X$ para todo campo de vetor X tangente sobre M , temos

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{x}^\perp} X &= -\bar{\nabla}_X \mathbf{x}^\perp + \nabla_X^\perp \mathbf{x}^\perp = -\bar{\nabla}_X (\mathbf{x} - \mathbf{x}^T) + (\bar{\nabla}_X \mathbf{x}^\perp)^\perp \\ &= -X + \left(\bar{\nabla}_X \mathbf{x}^\perp + (\bar{\nabla}_X \mathbf{x}^\perp)^\perp \right) \\ &= -X + \left(\bar{\nabla}_X \mathbf{x}^T + (\bar{\nabla}_X \mathbf{x})^\perp - (\bar{\nabla}_X \mathbf{x}^T)^\perp \right) \\ &= -X + (\bar{\nabla}_X \mathbf{x})^T \\ &= -X + \nabla_X \mathbf{x}^T. \end{aligned}$$

Escolhemos um referencial local ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n+p}\}$ em \mathbb{R}^{n+p} , localmente adaptado à imersão \mathbf{x} tal que e_1, \dots, e_n são tangentes à M e e_{n+1}, \dots, e_{n+p} são normais à M . Para cada α , $n+1 \leq \alpha \leq n+p$, temos que

$$\langle A_\alpha X, Y \rangle = \langle B(X, Y), e_\alpha \rangle.$$

A norma ao quadrado $|A|^2$ da segunda forma fundamental e o vetor curvatura média \mathbf{H} (não normalizado) da imersão são definidos respectivamente por

$$|A|^2 = \sum_{\alpha} \text{tr}(A_{\alpha}^2) = \sum_{\alpha} \sum_{i,j} (h_{ij}^{\alpha})^2 \quad \text{e}$$

$$\mathbf{H} = \sum_{\alpha} \mathbf{H}^{\alpha} e_{\alpha} = \sum_{\alpha} \sum_i h_{ii}^{\alpha} e_{\alpha},$$

onde $h_{ij}^{\alpha} = \langle A_{\alpha} e_i, e_j \rangle$, para $1 \leq i, j \leq n$.

Para cada α , defina a aplicação linear $\phi_{\alpha} : T_x M \rightarrow T_x M$ por

$$\langle \phi_{\alpha} X, Y \rangle = \frac{1}{n} \langle X, Y \rangle H^{\alpha} - \langle A_{\alpha} X, Y \rangle,$$

e a aplicação bilinear $\phi : T_x M \times T_x M \rightarrow T_x M^{\perp}$ por

$$\phi(X, Y) = \sum_{\alpha} \langle \phi_{\alpha} X, Y \rangle e_{\alpha},$$

esta última conhecida como a segunda forma fundamental sem traço. Tem-se

$$|\phi|^2 := \sum_{\alpha} \text{tr}(\phi_{\alpha}^2) = |A|^2 - \frac{1}{n} |\mathbf{H}|^2. \quad (5)$$

Segue-se que \mathbf{x} é totalmente umbílica se, e somente se, $|\phi|^2 = 0$.

Para demonstrarmos o teorema principal dessa seção vamos precisar do seguinte resultado, chamado fórmula integral de Minkowski, o qual pode ser encontrado em (AL-ODAN; DESHMUKH, 2002).

Proposição 3.1.1 *Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma subvariedade orientada e fechada. Então*

$$\int_M (n + \langle \mathbf{H}, \mathbf{x} \rangle) dM = 0.$$

Demonstração: Com razão, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local sobre M , então por definição do operador divergente vale

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{x}^T &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \mathbf{x}^T, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i + A_{\mathbf{x}^{\perp}} e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n (\langle e_i, e_i \rangle + \langle B(e_i, e_i), \mathbf{x}^{\perp} \rangle) \\ &= n + \langle \mathbf{H}, \mathbf{x}^{\perp} \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

onde na segunda igualdade usamos a identidade (4). Integrando em M a expressão acima, segue-se o resultado pelo teorema da divergência. \square

Lembramos que uma subvariedade M^n em \mathbb{R}^{n+p} é uma self-shrinker se satisfaz a equação

$$\mathbf{H} = -\frac{\mathbf{x}^{\perp}}{2}.$$

Em (SMOCZYK, 2005), K. Smoczyk obtém uma extensão do resultado apresentado por Huisken (ver (HUISKEN, 1990)), agora em codimensão qualquer, ao mostrar que uma self-shrinker fechada M^n em \mathbb{R}^{n+p} para a qual $\mathbf{H} \neq 0$ e o campo vetorial $\mathbf{H}/|\mathbf{H}|$ é paralelo no fibrado normal de M , então $M^n = \mathbb{S}^n(\sqrt{2n})$ em \mathbb{R}^{n+1} .

A próxima caracterização de self-shrinkers foi estabelecida em (AREZZO; SUN, 2013). Apresentamos uma demonstração alternativa para fins de completude do texto.

Proposição 3.1.2 *Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+p}(\sqrt{2n})$ uma imersão isométrica. Então, M é uma subvariedade mínima de $\mathbb{S}^{n+p}(\sqrt{2n})$ se, e somente se, ela é uma self-shrinker em \mathbb{R}^{n+p+1} .*

Demonstração: Considere $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+p}(r)$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M na esfera Euclidiana de raio r . Defina $\bar{\mathbf{x}} = i \circ \mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p+1}$, onde $i : \mathbb{S}^{n+p}(r) \rightarrow \mathbb{R}^{n+p+1}$ é a aplicação inclusão. Se \bar{B} e B denotam as segundas formas fundamentais de $\bar{\mathbf{x}}$ e \mathbf{x} , respectivamente, é bem conhecido que

$$\bar{B}(X, Y) = B(X, Y) - \frac{1}{r^2} \langle X, Y \rangle \bar{\mathbf{x}},$$

onde X e Y são campos de vetores tangentes sobre M .

No nosso caso, obtemos que

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}.$$

Como $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}^\perp$, pois \mathbf{x} está imersa em uma esfera, reescrevemos

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}^\perp.$$

Daí, segue o resultado. □

A seguinte identidade é útil para os nossos propósitos.

Proposição 3.1.3 *Se $\mathbf{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ é uma self-shrinker, então $\Delta|\mathbf{x}|^2 = 2n - 4|\mathbf{H}|^2$.*

Demonstração: Considere a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = |\mathbf{x}(p)|^2$, para cada $p \in M$. Dado $X \in T_p M$, o gradiente ∇f de f em p é dado por

$$\langle X, \nabla f \rangle_p = X(f) = 2 \langle \bar{\nabla}_X \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_p = \langle X, 2\mathbf{x} \rangle_p = \langle X, 2\mathbf{x}^T \rangle_p,$$

ou seja, $\nabla|\mathbf{x}|^2 = 2\mathbf{x}^T$. Logo,

$$\Delta|\mathbf{x}|^2 = \operatorname{div}(\nabla|\mathbf{x}|^2) = 2\operatorname{div}(\mathbf{x}^T) = 2(n + \langle \mathbf{H}, \mathbf{x}^\perp \rangle) = 2(n + \langle \mathbf{H}, -2\mathbf{H} \rangle) = 2n - 4|\mathbf{H}|^2,$$

onde na terceira e quarta igualdades usamos (6) e a equação de uma self-shrinker, respectivamente. □

3.2 RIGIDEZ DE SELF-SHRINKERS

Demonstramos agora o principal resultado desta seção.

Teorema 3.2.1 *Seja M^n uma self-shrinker imersa e fechada em \mathbb{R}^{n+p} . Se*

$$1 - \frac{n+2}{4n^2}|\mathbf{x}|^2 + \frac{2}{n^2}|\mathbf{H}|^2 - |A|^2 \geq 0, \quad (7)$$

em M , então M é a esfera redonda de raio $r = \sqrt{2n}$.

Demonstração: Pela equação de uma self-shrinker

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^\perp,$$

temos que $4|\mathbf{H}|^2 \leq |\mathbf{x}|^2$. Usando esse fato na hipótese (7), obtemos

$$\begin{aligned} n|A|^2 - n &\leq -\frac{(n+2)}{4n}|\mathbf{x}|^2 + \frac{2}{n}|\mathbf{H}|^2 \\ &\leq -\frac{(n+2)}{4n}4|\mathbf{H}|^2 + \frac{2}{n}|\mathbf{H}|^2 \\ &= -|\mathbf{H}|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$n|A|^2 - |\mathbf{H}|^2 \leq n - 2|\mathbf{H}|^2.$$

Integrando (5) e a desigualdade acima, tem-se

$$0 \leq \int_M n|\phi|^2 dM = \int_M (n|A|^2 - |\mathbf{H}|^2) dM \leq \int_M (n - 2|\mathbf{H}|^2) dM.$$

Pela fórmula de Minkowski (Proposição 3.1.1)

$$0 = \int_M (n + \langle \mathbf{x}, \mathbf{H} \rangle) dM,$$

e novamente pela equação de uma self-shrinker, temos

$$0 = \int_M (n - 2|\mathbf{H}|^2) dM.$$

Isso implica que $|\phi|^2 \equiv 0$ e, portanto M é totalmente umbílica. E sendo M compacta em \mathbb{R}^{n+p} , então $M = \mathbb{S}^n(r)$ para algum r positivo. Por fim, como M é uma self-shrinker, o raio r é determinado por

$$r^2 = |\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}^\perp|^2 = 4|\mathbf{H}|^2 = 2n \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{2n}.$$

Portanto, $M = \mathbb{S}^n(\sqrt{2n})$. □

3.3 SELF-SHRINKERS E A r -ÉSIMA CURVATURA MÉDIA

Nesta parte caracterizamos as esferas redondas como self-shrinkers com curvatura média superior constante, conforme o próximo teorema. Utilizamos algumas definições encontradas nas Subseções 2.1 e 2.2. Antes, precisamos do seguinte fato (ver por exemplo (SILVA et al., 2016)):

Lema 3.3.1 *Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada. Se H_{r+1} é positivo sobre M^n , temos que, para cada i , $1 \leq i \leq r$, valem:*

(a) *Cada i -ésima curvatura média H_i é positiva;*

(b) $H H_{i+1} - H_{i+2} \geq 0$.

E mais, a igualdade em (b) ocorre para algum i se, e somente se, as curvaturas principais de \mathbf{x} são iguais.

Demonstração: Para o item (a) ver (BARBOSA; COLARES, 1997). Para (b), utilizaremos a bem conhecida desigualdade de Newton (ver (HARDY et al., 1988)):

$$H_i^2 - H_{i-1}H_{i+1} \geq 0, \quad \text{para qualquer } 1 \leq i \leq n-1. \quad (8)$$

A igualdade ocorre para algum i se, e somente se, as curvaturas principais de \mathbf{x} são iguais. Como $H_i > 0$ para todo $1 \leq i \leq r+1$, podemos escrever (8) da seguinte maneira:

$$\frac{H_i}{H_{i-1}} \geq \frac{H_{i+1}}{H_i}.$$

Logo, temos as desigualdades

$$H \geq \frac{H_2}{H_1} \geq \frac{H_3}{H_2} \geq \dots \geq \frac{H_{i+2}}{H_{i+1}}, \quad (9)$$

para todo $1 \leq i \leq r$, e ocorre a igualdade para algum i se, e somente se, as curvaturas principais de \mathbf{x} são iguais. Portanto, de (9) concluímos o item (b). \square

Utilizamos também o resultado abaixo.

Proposição 3.3.1 *Sejam $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada do espaço Euclidiano e N um campo normal unitário de vetores sobre M . Se $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ é a função suporte de \mathbf{x} , definida por $\rho = \langle \mathbf{x}, N \rangle$, então*

$$(a) \quad L_r(\rho) = -(r+1)S_{r+1} - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\rho - \langle \nabla S_{r+1}, \mathbf{x}^T \rangle;$$

(b) (Fórmula de Minkowski) Para M fechada e cada $0 \leq r \leq n - 1$,

$$\int_M (H_r + H_{r+1}\rho) dM = 0.$$

Demonstração: Ver Apêndice B. □

Corolário 3.3.1 *Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma self-shrinker. Então*

$$\Delta H = \frac{1}{2}(H + \langle \mathbf{x}, N \rangle |A|^2 + \langle \nabla H, \mathbf{x}^T \rangle). \quad (10)$$

Demonstração: Basta fazer $r = 0$ no item (a) da Proposição 3.3.1, usar a equação de uma self-shrinker e a igualdade

$$|A|^2 + 2S_2 = S_1^2.$$

□

Podemos agora enunciar o fato principal dessa parte do trabalho.

Teorema 3.3.1 *Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma self-shrinker imersa e fechada com H_{r+1} constante para algum r tal que $r + 2 \leq n$. Então $M = \mathbb{S}^n(\sqrt{2n})$.*

Demonstração: Do item (a) da Proposição 3.3.1, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -(r+1) \binom{n}{r+1} \int_M H_{r+1} dM \\ &\quad - \int_M \left[nHH_{r+1} \binom{n}{r+1} - (r+2) \binom{n}{r+2} H_{r+2} \right] \rho dM \\ &= -(r+1) \binom{n}{r+1} \int_M H_{r+1} dM \\ &\quad - \int_M \left[nHH_{r+1} \binom{n}{r+1} - (n - (r+1)) \binom{n}{r+1} H_{r+2} \right] \rho dM. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= -(r+1) \int_M H_{r+1} dM - \int_M [(nHH_{r+1} - nH_{r+2})\rho + (r+1)H_{r+2}\rho] dM \\ &= -(r+1) \int_M (H_{r+1} + H_{r+2}\rho) dM - n \int_M (HH_{r+1} - H_{r+2})\rho dM. \end{aligned}$$

Logo, pela Fórmula de Minkowski do item (b) da Proposição 3.3.1

$$\int_M (HH_{r+1} - H_{r+2})\rho dM = 0. \quad (11)$$

Pela equação de uma self-shrinker, reescrevemos

$$\int_M (HH_{r+1} - H_{r+2})H dM = 0.$$

Escolhendo a orientação tal que $H_{r+1} > 0$, concluímos pelo item (b) do lema anterior que M é totalmente umbílica. Segue que $M = \mathbb{S}^n(\sqrt{2n})$. \square

Observação 3.3.1 *Nas condições do Lema 3.3.1, se existe $r \in \{1, \dots, n\}$ tal que $H_r > 0$ sobre M , então*

$$H \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq \dots \geq H_r^{\frac{1}{r}}, \quad (12)$$

e ocorre a igualdade somente em pontos umbílicos (ver (HARDY et al., 1988)). Assim, se H_n for constante no Teorema 3.3.1, temos por (12) e as fórmulas de Minkowski que

$$\int_M (H_n^{\frac{1}{n}} - H) \rho \, dM = 0.$$

Portanto, M é totalmente umbílica e o teorema acima vale para qualquer r . \diamond

Uma natural generalização do conceito de self-shrinker é dada a seguir.

Definição 3.3.1 *Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície orientada M no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} . Dizemos que M é uma λ -hipersuperfície se satisfaz a equação*

$$H = -\frac{\langle \mathbf{x}, N \rangle}{2} + \lambda,$$

onde λ é uma constante.

Por exemplo, a esfera $\mathbb{S}^n(r)$ com raio $r > 0$ é uma λ -hipersuperfície compacta em \mathbb{R}^{n+1} com $\lambda = n/r - r/2$.

Essa ideia foi introduzida por (CHENG; WEI, 2018) a partir da noção de fluxo da curvatura média que preserva volume ponderado. Nesse trabalho os autores mostram, dentre outros resultados, que M é uma λ -hipersuperfície se, e somente se, a curvatura média com respeito à métrica $e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2n}} g$ é constante e igual a λ . Para mais detalhes ver (ROSS, 2015).

Usando a equação da λ -hipersuperfície em (11), obtemos a seguinte versão do resultado anterior.

Escólio 3.3.1 *Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma λ -hipersuperfície fechada com H_{r+1} constante para algum r tal que $r + 2 \leq n$. Se $H - \lambda > 0$ ou $H - \lambda < 0$, então M é uma esfera redonda.*

Estabelecemos agora uma nova demonstração para o caso da curvatura escalar do Teorema 3.3.1 (ver também (GUO, 2018)).

Proposição 3.3.2 *Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma self-shrinker fechada com curvatura escalar S constante, então $M^n = \mathbb{S}^n(\sqrt{2n})$.*

Demonstração: Integrando a equação (10) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_M H \, dM + \int_M 2H|A|^2 \, dM - \frac{1}{2} \int_M \langle \nabla H, \nabla |\mathbf{x}|^2 \rangle \, dM \\ &= - \int_M H \, dM + \int_M 2H|A|^2 \, dM + \frac{1}{2} \int_M H \Delta |\mathbf{x}|^2 \, dM \\ &= - \int_M H \, dM + \int_M 2H|A|^2 \, dM + \int_M H(n - 2H^2) \, dM \\ &= \int_M (-1 + n + 2(|A|^2 - H^2))H \, dM. \end{aligned}$$

Como $S = H^2 - |A|^2$ é constante, segue-se

$$(2S - (n - 1)) \int_M H \, dM = 0.$$

Considere a orientação de M tal que $S > 0$. Logo, da última igualdade temos que

$$S = \frac{n - 1}{2}.$$

Por outro lado,

$$S - \frac{n - 1}{n} H^2 = \frac{H^2}{n} - |A|^2 \leq 0, \quad (13)$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Integrando (13) e usando a fórmula de Minkowski

$$\int_M n \, dM = \int_M 2H^2 \, dM,$$

resulta que $|A|^2 = H^2/n$. Portanto, M é totalmente umbílica. \square

Com a mesma abordagem realizada acima, obtemos o seguinte resultado (ver (ROSS, 2015)).

Proposição 3.3.3 *Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma λ -hipersuperfície fechada com $H \geq \lambda \geq 0$. Se $|A|^2 \leq 1/2$, então M é uma esfera redonda.*

Demonstração: Pelo Corolário 3.3.1 e da Proposição 3.1.3, verificamos que

$$0 = \int_M H \, dM + \int_M 2(\lambda - H)|A|^2 \, dM - \int_M H(n + 2(\lambda - H)H) \, dM,$$

donde

$$0 = \int_M [(n - 1)H + 2(H - \lambda)(|A|^2 - H^2)] \, dM. \quad (14)$$

Com as hipóteses, tem-se

$$\begin{aligned}(n-1)H + 2(H-\lambda)(|A|^2 - H^2) &\geq (n-1)H + 2(H-\lambda)(1-n)|A|^2 \\ &= (n-1)H - 2(H-\lambda)(n-1)|A|^2 \\ &\geq (n-1)H - (n-1)(H-\lambda) \\ &= (n-1)\lambda,\end{aligned}$$

onde usamos o fato de $|A|^2 \geq H^2/n$ na primeira desigualdade acima. Logo, por (14) concluímos que M é totalmente umbílica. □

REFERÊNCIAS

- ABRESCH, U.; LANGER, J. The normalized curve shortening flow and homothetic solutions. **J. Differential Geom.**, v. 23, n. 2, p. 175–196, 1986. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214440025>>.
- AL-ODAN, H.; DESHMUKH, S. Spherical submanifolds of a Euclidean space. **Q. J. Math.**, v. 53, n. 3, p. 249–256, 2002. ISSN 0033-5606. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/qjmath/53.3.249>>.
- ALARCÓN, A.; CASTRO-INFANTES, I. Complete minimal surfaces densely lying in arbitrary domains of \mathbb{R}^n . **Geom. Topol.**, v. 22, n. 1, p. 571–590, 2018. ISSN 1465-3060. Disponível em: <<https://doi.org/10.2140/gt.2018.22.571>>.
- ALBANESE, G.; ALÍAS, L. J.; RIGOLI, M. A general form of the weak maximum principle and some applications. **Rev. Mat. Iberoam.**, v. 29, n. 4, p. 1437–1476, 2013. ISSN 0213-2230. Disponível em: <<https://doi.org/10.4171/RMI/764>>.
- ALENCAR, H.; CARMO, M. do; ELBERT, M. F. Stability of hypersurfaces with vanishing r -mean curvatures in Euclidean spaces. **J. Reine Angew. Math.**, v. 554, p. 201–216, 2003. ISSN 0075-4102. Disponível em: <<https://doi.org/10.1515/crll.2003.006>>.
- ALENCAR, H.; COLARES, A. G. Integral formulas for the r -mean curvature linearized operator of a hypersurface. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 16, n. 3, p. 203–220, 1998. ISSN 0232-704X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1006555603714>>.
- ANGENENT, S. B. Shrinking doughnuts. In: **Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states, 3 (Gregynog, 1989)**. [S.l.]: Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1992, (Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., v. 7). p. 21–38.
- AREZZO, C.; SUN, J. Self-shrinkers for the mean curvature flow in arbitrary codimension. **Math. Z.**, v. 274, n. 3-4, p. 993–1027, 2013. ISSN 0025-5874. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00209-012-1104-y>>.
- ATSUJI, A. Remarks on harmonic maps into a cone from a stochastically complete manifold. **Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.**, v. 75, n. 7, p. 105–108, 1999. ISSN 0386-2194. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.pja/1148393859>>.
- BARBOSA, J. a. L. M.; COLARES, A. G. Stability of hypersurfaces with constant r -mean curvature. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 15, n. 3, p. 277–297, 1997. ISSN 0232-704X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1006514303828>>.
- BARBOSA, J. L. M.; CARMO, M. P. do. On stability of cones in \mathbb{R}^{n+1} with zero scalar curvature. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 28, n. 2, p. 107–122, 2005. ISSN 0232-704X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10455-005-0039-5>>.
- BARROS, A.; SOUSA, P. Stability of r -minimal cones in \mathbb{R}^{n+1} . **J. Geom. Phys.**, v. 58, n. 10, p. 1407–1416, 2008. ISSN 0393-0440. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2008.05.014>>.
- BESSA, G. P.; JORGE, L. P.; OLIVEIRA-FILHO, G. Half-space theorems for minimal surfaces with bounded curvature. **J. Differential Geom.**, v. 57, n. 3, p. 493–508, 2001. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1090348131>>.

BOMBIERI, E.; GIORGI, E. D.; MIRANDA, M. Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche. **Arch. Rational Mech. Anal.**, v. 32, p. 255–267, 1969. ISSN 0003-9527. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00281503>>.

BRENDLE, S. Embedded self-similar shrinkers of genus 0. **Ann. of Math. (2)**, v. 183, n. 2, p. 715–728, 2016. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<https://doi.org/10.4007/annals.2016.183.2.6>>.

CALABI, E. Quasi-surjective mappings and a generalization of Morse theory. In: **Proc. U.S.-Japan Seminar in Differential Geometry (Kyoto, 1965)**. [S.l.]: Nippon Hyoronsha, Tokyo, 1966. p. 13–16.

CAMINHA, A. On hypersurfaces into Riemannian spaces of constant sectional curvature. **Kodai Math. J.**, v. 29, n. 2, p. 185–210, 2006. ISSN 0386-5991. Disponível em: <<https://doi.org/10.2996/kmj/1151936435>>.

CAO, H.-D.; LI, H. A gap theorem for self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 46, n. 3-4, p. 879–889, 2013. ISSN 0944-2669. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00526-012-0508-1>>.

CASTRO, I.; LERMA, A. M. The Clifford torus as a self-shrinker for the Lagrangian mean curvature flow. **Int. Math. Res. Not. IMRN**, n. 6, p. 1515–1527, 2014. ISSN 1073-7928. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/imrn/rns264>>.

CAVALCANTE, M. P.; COSTA-FILHO, W. O. The halfspace theorem for minimal hypersurfaces in regions bounded by minimal cones. **Bull. Lond. Math. Soc.**, v. 51, n. 4, p. 639–644, 2019. ISSN 0024-6093. Disponível em: <<https://doi.org/10.1112/blms.12265>>.

CAVALCANTE, M. P.; ESPINAR, J. M. Halfspace type theorems for self-shrinkers. **Bull. Lond. Math. Soc.**, v. 48, n. 2, p. 242–250, 2016. ISSN 0024-6093. Disponível em: <<https://doi.org/10.1112/blms/bdv099>>.

CHENG, Q.-M. Critical points of the weighted area functional. In: **Geometry and topology of manifolds**. Springer, [Tokyo], 2016, (Springer Proc. Math. Stat., v. 154). p. 81–96. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-4-431-56021-0_4>.

CHENG, Q.-M.; PENG, Y. Complete self-shrinkers of the mean curvature flow. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 52, n. 3-4, p. 497–506, 2015. ISSN 0944-2669. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00526-014-0720-2>>.

CHENG, Q.-M.; WEI, G. Complete λ -hypersurfaces of weighted volume-preserving mean curvature flow. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 57, n. 2, p. Art. 32, 21, 2018. ISSN 0944-2669. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00526-018-1303-4>>.

CHERN, S. S. The geometry of G -structures. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v. 72, p. 167–219, 1966. ISSN 0002-9904. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1966-11473-8>>.

COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P. The Calabi-Yau conjectures for embedded surfaces. **Ann. of Math. (2)**, v. 167, n. 1, p. 211–243, 2008. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<https://doi.org/10.4007/annals.2008.167.211>>.

COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P. Generic mean curvature flow I: generic singularities. **Ann. of Math. (2)**, v. 175, n. 2, p. 755–833, 2012. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<https://doi.org/10.4007/annals.2012.175.2.7>>.

- COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P. Smooth compactness of self-shrinkers. **Comment. Math. Helv.**, v. 87, n. 2, p. 463–475, 2012. ISSN 0010-2571. Disponível em: <<https://doi.org/10.4171/CMH/260>>.
- DANIEL, B.; MEEKS III, W. H.; ROSENBERG, H. Half-space theorems for minimal surfaces in Nil_3 and Sol_3 . **J. Differential Geom.**, v. 88, n. 1, p. 41–59, 2011. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1317758868>>.
- DRUGAN, G. An immersed S^2 self-shrinker. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 367, n. 5, p. 3139–3159, 2015. ISSN 0002-9947. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-06051-0>>.
- GUO, Z. Scalar curvature of self-shrinker. **J. Math. Soc. Japan**, v. 70, n. 3, p. 1103–1110, 2018. ISSN 0025-5645. Disponível em: <<https://doi.org/10.2969/jmsj/73427342>>.
- HARDT, R.; SIMON, L. Area minimizing hypersurfaces with isolated singularities. **J. Reine Angew. Math.**, v. 362, p. 102–129, 1985. ISSN 0075-4102. Disponível em: <<https://doi.org/10.1515/crll.1985.362.102>>.
- HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E.; PÓLYA, G. **Inequalities**. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 1988. xii+324 p. (Cambridge Mathematical Library). Reprint of the 1952 edition. ISBN 0-521-35880-9.
- HOFFMAN, D.; MEEKS III, W. H. The strong halfspace theorem for minimal surfaces. **Invent. Math.**, v. 101, n. 2, p. 373–377, 1990. ISSN 0020-9910. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01231506>>.
- HOUNIE, J.; LEITE, M. L. The maximum principle for hypersurfaces with vanishing curvature functions. **J. Differential Geom.**, v. 41, n. 2, p. 247–258, 1995. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214456216>>.
- HOUNIE, J.; LEITE, M. L. Two-ended hypersurfaces with zero scalar curvature. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 48, n. 3, p. 867–882, 1999. ISSN 0022-2518. Disponível em: <<https://doi.org/10.1512/iumj.1999.48.1664>>.
- HUISKEN, G. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. **J. Differential Geom.**, v. 31, n. 1, p. 285–299, 1990. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214444099>>.
- IMPERA, D.; PIGOLA, S.; RIMOLDI, M. The frankel property for self-shrinkers from the viewpoint of elliptic pde's. **arXiv:1803.02332 [math.DG]**, 2018.
- JOACHIM, L. Minimal smoothings of area minimizing cones. **arXiv:1810.03157 [math.DG]**, 2018.
- JORGE, L. P. d. M.; XAVIER, F. A complete minimal surface in \mathbf{R}^3 between two parallel planes. **Ann. of Math. (2)**, v. 112, n. 1, p. 203–206, 1980. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1971325>>.
- LEITE, M. L. **The tangency principle for hypersurfaces with a null intermediate curvature**. [S.l.]: IMPA, Rio de Janeiro, 2000. iii+25 p. (XI Escola de Geometria Diferencial).
- LI, H.; WEI, Y. Classification and rigidity of self-shrinkers in the mean curvature flow. **J. Math. Soc. Japan**, v. 66, n. 3, p. 709–734, 2014. ISSN 0025-5645. Disponível em: <<https://doi.org/10.2969/jmsj/06630709>>.

LIMA, H. F. de; VELÁSQUEZ, M. A. A new characterization of r -stable hypersurfaces in space forms. **Arch. Math. (Brno)**, v. 47, n. 2, p. 119–131, 2011. ISSN 0044-8753.

LIRA, J. H.; SORET, M. Examples of scalar-flat hypersurfaces in \mathbb{R}^{n+1} . **Manuscripta Math.**, v. 129, n. 1, p. 55–73, 2009. ISSN 0025-2611. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00229-008-0247-y>>.

LÓPEZ, F. J. Minimal surfaces in a cone. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 20, n. 3, p. 253–299, 2001. ISSN 0232-704X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1012451110396>>.

LÓPEZ, F. J.; N, F. M.; MORALES, S. Adding handles to Nadirashvili's surfaces. **J. Differential Geom.**, v. 60, n. 1, p. 155–175, 2002. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1090351086>>.

MARI, L.; RIGOLI, M. Maps from Riemannian manifolds into non-degenerate Euclidean cones. **Rev. Mat. Iberoam.**, v. 26, n. 3, p. 1057–1074, 2010. ISSN 0213-2230. Disponível em: <<https://doi.org/10.4171/RMI/627>>.

MARQUES, F. C.; NEVES, A. Topology of the space of cycles and existence of minimal varieties. In: **Surveys in differential geometry 2016. Advances in geometry and mathematical physics**. [S.l.]: Int. Press, Somerville, MA, 2016, (Surv. Differ. Geom., v. 21). p. 165–177.

MAZET, L. A general halfspace theorem for constant mean curvature surfaces. **Amer. J. Math.**, v. 135, n. 3, p. 801–834, 2013. ISSN 0002-9327. Disponível em: <<https://doi.org/10.1353/ajm.2013.0027>>.

MAZET, L. The half space property for cmc $1/2$ graphs in $\mathbb{E}(-1, \tau)$. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 52, n. 3-4, p. 661–680, 2015. ISSN 0944-2669. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00526-014-0728-7>>.

MAZET, L.; WANDERLEY, G. A. A half-space theorem for graphs of constant mean curvature $0 < H < \frac{1}{2}$ in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. **Illinois J. Math.**, v. 59, n. 1, p. 43–53, 2015. ISSN 0019-2082. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1455203158>>.

N, F. M.; MORALES, S. On the asymptotic behavior of a complete bounded minimal surface in \mathbb{R}^3 . **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 356, n. 10, p. 3985–3994, 2004. ISSN 0002-9947. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-04-03451-8>>.

NADIRASHVILI, N. Hadamard's and Calabi-Yau's conjectures on negatively curved and minimal surfaces. **Invent. Math.**, v. 126, n. 3, p. 457–465, 1996. ISSN 0020-9910. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s002220050106>>.

OMORI, H. Isometric immersions of Riemannian manifolds. **J. Math. Soc. Japan**, v. 19, p. 205–214, 1967. ISSN 0025-5645. Disponível em: <<https://doi.org/10.2969/jmsj/01920205>>.

RANJBAR-MOTLAGH, A. On harmonic maps from stochastically complete manifolds. **Arch. Math. (Basel)**, v. 92, n. 6, p. 637–644, 2009. ISSN 0003-889X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00013-009-2539-1>>.

REILLY, R. C. Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms. **J. Differential Geometry**, v. 8, p. 465–477, 1973. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214431802>>.

RODRIGUEZ, L.; ROSENBERG, H. Half-space theorems for mean curvature one surfaces in hyperbolic space. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 126, n. 9, p. 2755–2762, 1998. ISSN 0002-9939. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04510-9>>.

ROSENBERG, H. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. **Bull. Sci. Math.**, v. 117, n. 2, p. 211–239, 1993. ISSN 0007-4497.

ROSENBERG, H.; SCHULZE, F.; SPRUCK, J. The half-space property and entire positive minimal graphs in $M \times \mathbb{R}$. **J. Differential Geom.**, v. 95, n. 2, p. 321–336, 2013. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1376053449>>.

ROSS, J. **Rigidity results of lambda hypersurfaces**. [s.n.], 2015. vi+72 p. Thesis (Ph.D.)—Johns Hopkins University. Disponível em: <<https://jscholarship.library.jhu.edu/bitstream/handle/1774.2/37986/ROSS-DISSERTATION-2015.pdf>>.

SCHOEN, R.; SIMON, L.; YAU, S. T. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. **Acta Math.**, v. 134, n. 3-4, p. 275–288, 1975. ISSN 0001-5962. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02392104>>.

SILVA, J. F. da; LIMA, H. F. de; VELÁSQUEZ, M. A. L. The stability of hypersurfaces revisited. **Monatsh. Math.**, v. 179, n. 2, p. 293–303, 2016. ISSN 0026-9255. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00605-015-0776-x>>.

SIMONS, J. Minimal varieties in riemannian manifolds. **Ann. of Math. (2)**, v. 88, p. 62–105, 1968. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/1970556>>.

SMOCZYK, K. Self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension. **Int. Math. Res. Not.**, n. 48, p. 2983–3004, 2005. ISSN 1073-7928. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/IMRN.2005.2983>>.

VASQUEZ, C. J. C. Minimal hypersurfaces in conformally flat spaces. **J. Geom.**, v. 106, n. 2, p. 363–382, 2015. ISSN 0047-2468. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00022-014-0253-z>>.

YAU, S. T. Problem section. In: **Seminar on Differential Geometry**. [S.l.]: Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982, (Ann. of Math. Stud., v. 102). p. 669–706.

APÊNDICE A – Fórmula da Primeira Variação de H_r

Neste apêndice demonstramos o Lema 2.2.1 em um contexto mais geral seguindo (LIMA; VELÁSQUEZ, 2011). A saber, considere uma imersão isométrica $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \bar{M}_c^{n+1}$ de uma variedade Riemanniana conexa e orientável M numa variedade Riemanniana orientável e simplesmente conexa \bar{M}_c com curvatura seccional constante c , com conexões Riemannianas ∇ e $\bar{\nabla}$, respectivamente. Seja N um campo normal unitário globalmente definido sobre M .

Uma variação de \mathbf{x} é uma aplicação diferenciável $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M^n \rightarrow \bar{M}_c^{n+1}$ tal que para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $F_t : M^n \rightarrow \bar{M}_c^{n+1}$ dada por $F_t(p) = F(t, p)$ é uma imersão, $F_0 = \mathbf{x}$ e $F_t|_{\partial M} = \mathbf{x}|_{\partial M}$.

O campo variacional associado à F é o campo de vetores $\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{t=0}$. Escrevendo $f = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, N_t \right\rangle$, temos

$$\frac{\partial F}{\partial t} = fN_t + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^T, \quad (15)$$

onde N_t é o campo normal unitário sobre F_t .

Sejam $p \in M$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal numa vizinhança de p , geodésico em p e que diagonaliza o operador de forma $A : T_p M \rightarrow T_p M$. Denotando por A_i a restrição de A ao subespaço $\{ger(e_i)\}^\perp$, sabe-se que $P_r(e_i) = S_r(A_i)e_i$, onde

$$S_k(A_i) = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n \\ j_1, \dots, j_k \neq i}} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_k}.$$

Mais ainda, vale a seguinte identidade

$$\text{tr}(P_r(\nabla_X A)) = X(S_{r+1}), \quad (16)$$

para todo campo de vetor tangente X sobre M , na qual $\text{tr}(\cdot)$ indica o traço do operador linear correspondente. Ver (CAMINHA, 2006).

Lema A.0.1 *O operador P_r tem divergente nulo.*

Demonstração: Por definição

$$\text{div} P_r = \sum_i (\nabla_{e_i} P_r) e_i = \sum_i (\nabla_{e_i} (S_r I - A P_{r-1})) e_i = \sum_i (\nabla_{e_i} (S_r I) - \nabla_{e_i} (A P_{r-1})) e_i.$$

Como o referencial é geodésico,

$$(\nabla_{e_i} (S_r I)) e_i = e_i (S_r) e_i,$$

isto é,

$$\sum_i (\nabla_{e_i} (S_r I)) e_i = \nabla S_r.$$

Por outro lado,

$$\nabla_{e_i} (A P_{r-1}) e_i = \nabla_{e_i} (A P_{r-1}(e_i)) - A P_{r-1} \nabla_{e_i} e_i = (\nabla_{e_i} A)(P_{r-1}(e_i)) + A \nabla_{e_i} (P_{r-1}(e_i)).$$

Usando que $\nabla_{e_i} A$ é autoadjunto e a equação de Codazzi, segue que

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_i (\nabla_{e_i} A) P_{r-1}(e_i), e_j \right\rangle &= \sum_i \langle P_{r-1}(e_i), (\nabla_{e_j} A) e_i \rangle = \sum_i \langle (\nabla_{e_j} A)(P_{r-1}(e_i)), e_i \rangle \\ &= \text{tr}((\nabla_{e_j} A) P_{r-1}). \end{aligned}$$

Por (16), vale que

$$\sum_i (\nabla_{e_i} A) P_{r-1}(e_i) = \nabla S_r.$$

Então,

$$\begin{aligned} \text{div} P_r &= \nabla S_r - \bar{\nabla} S_r - \sum_i A \nabla_{e_i} (P_{r-1}(e_i)) = - \sum_i A \nabla_{e_i} (P_{r-1}(e_i)) \\ &= - \sum_i A ((\nabla_{e_i} P_{r-1}) e_i + P_{r-1} \nabla_{e_i} e_i) = -A \sum_i (\nabla_{e_i} P_{r-1}) e_i = -A \text{div} P_{r-1}. \end{aligned}$$

Por indução sobre r , concluímos que $\text{div} P_r = 0$. \square

Nas notações acima, temos a seguinte proposição.

Proposição A.0.1 *Seja $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \bar{M}_c^{n+1}$ uma hipersuperfície da variedade Riemanniana orientável e simplesmente conexa \bar{M}_c^{n+1} de curvatura seccional constante c . Dada F uma variação de \mathbf{x} , tem-se em $t = 0$:*

$$\frac{\partial S_{r+1}}{\partial t} = L_r(f) + c \text{tr}(P_r) f + \text{tr}(A^2 P_r) f + \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)^T, \nabla S_{r+1} \right\rangle.$$

Demonstração: Por conveniência omitimos tomar $t = 0$ nos cálculos abaixo. De (16) segue que

$$\begin{aligned} S'_{r+1} &= \text{tr} \left(\frac{\partial A}{\partial t} P_r \right) \\ &= \sum_k \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} P_r e_k, e_k \right\rangle \\ &= \sum_k S_r(A_k) \langle (\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} A) e_k, e_k \rangle \\ &= \sum_k S_r(A_k) \left[\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} A e_k, e_k \rangle - \langle A \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} e_k, e_k \rangle \right] \\ &= - \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} \bar{\nabla}_{e_k} N, e_k \rangle - \sum_k S_r(A_k) \left\langle A \bar{\nabla}_{e_k} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right), e_k \right\rangle, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos $[\partial F/\partial t, e_k] = 0$. Denotando por \bar{R} o tensor curvatura de \bar{M}_c , temos

$$\bar{R}(e_k, \partial F/\partial t)N = \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} \bar{\nabla}_{e_k} N - \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} N + \bar{\nabla}_{[e_k, \frac{\partial F}{\partial t}]} N.$$

Assim, usando (15),

$$\begin{aligned} S'_{r+1} = & - \sum_k S_r(A_k) \left[\langle \bar{R}(e_k, \partial F/\partial t)N, e_k \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} N, e_k \rangle \right] \\ & - \sum_k S_k(A_k) \langle \bar{\nabla}_{e_k} (fN + (\partial F/\partial t)^T), Ae_k \rangle. \end{aligned}$$

Como \bar{M}_c tem curvatura seccional constante c , segue que

$$\begin{aligned} S'_{r+1} &= - \sum_k S_r(A_k) c \{ \langle e_k, N \rangle \langle \partial F/\partial t, e_k \rangle - \langle e_k, e_k \rangle \langle \partial F/\partial t, N \rangle \} \\ &\quad - \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} N, e_k \rangle - \sum_k S_r(A_k) \langle Ae_k, \bar{\nabla}_{e_k} fN \rangle \\ &\quad - \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{e_k} (\partial F/\partial t)^T, Ae_k \rangle \\ &= c \sum_k S_r(A_k) f - \sum_k S_r(A_k) e_k \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} N, e_k \rangle + \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} N, \bar{\nabla}_{e_k} e_k \rangle \\ &\quad - \sum_k S_r(A_k) \langle Ae_k, f \bar{\nabla}_{e_k} N \rangle - \sum_k S_r(A_k) e_k \langle Ae_k, (\partial F/\partial t)^T \rangle \\ &\quad + \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{e_k} Ae_k, (\partial F/\partial t)^T \rangle. \end{aligned}$$

Escrevendo $\frac{\partial F}{\partial t} = fN + \sum_l \alpha_l e_l$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} N, \bar{\nabla}_{e_k} e_k \rangle &= \sum_k S_r(A_k) \langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} N, \lambda_k \delta_{kk} N \rangle \\ &= \sum_k S_r(A_k) \lambda_k \langle \bar{\nabla}_{fN + \sum_l \alpha_l e_l} N, N \rangle \\ &= \sum_k S_r(A_k) \lambda_k \left\{ f \langle \bar{\nabla}_N N, N \rangle - \sum_l \alpha_l \langle Ae_l, N \rangle \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
S'_{r+1} &= c \operatorname{tr}(P_r)f + \sum_k P_r e_k \langle N, \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} e_k \rangle + f \sum_k S_r(A_k) \langle A e_k, A e_k \rangle \\
&\quad - \sum_k P_r e_k \langle A e_k, (\partial F / \partial t)^T \rangle + \sum_k S_r(A_k) \langle \nabla_{e_k} A e_k, (\partial F / \partial t)^T \rangle \\
&= c \operatorname{tr}(P_r)f + \sum_k P_r e_k \langle N, \bar{\nabla}_{e_k} \partial F / \partial t \rangle + f \sum_k \langle A P_r e_k, A e_k \rangle \\
&\quad - \sum_k P_r e_k \langle A e_k, \partial F / \partial t \rangle + \sum_k \langle \nabla_{P_r e_k} A e_k, (\partial F / \partial t)^T \rangle \\
&= c \operatorname{tr}(P_r)f + \sum_k (P_r e_k e_k(f) - P_r e_k \langle \bar{\nabla}_{e_k} N, \partial F / \partial t \rangle) \\
&\quad + \operatorname{tr}(A^2 P_r)f - \sum_k P_r e_k \langle A e_k, \partial F / \partial t \rangle + \langle \sum_k \nabla_{P_r e_k} A e_k, (\partial F / \partial t)^T \rangle.
\end{aligned}$$

Pela equação de Codazzi, chegamos em

$$\begin{aligned}
\sum_k \nabla_{P_r e_k} A e_k &= \sum_k (\nabla_{e_k} A P_r e_k + A[P_r e_k, e_k]) \\
&= \sum_k \nabla_{e_k} (S_{r+1} I - P_{r+1}) e_k + \sum_k A(\nabla_{P_r e_k} e_k - \nabla_{e_k} P_r e_k) \\
&= \sum_k e_k (S_{r+1}) e_k + \sum_k \nabla_{e_k} P_{r+1} e_k - \sum_k A \nabla_{e_k} P_r e_k \\
&= \nabla S_{r+1} + \operatorname{div}(P_{r+1}) - A(\operatorname{div} P_r) \\
&= \nabla S_{r+1},
\end{aligned}$$

pelo Lema A.0.1. Logo,

$$S'_{r+1} = c \operatorname{tr}(P_r)f + L_r f + \operatorname{tr}(A^2 P_r)f + \langle \nabla S_{r+1}, (\partial F / \partial t)^T \rangle.$$

□

APÊNDICE B – Fórmulas relacionadas à função suporte

Neste apêndice demonstramos a Proposição 3.3.1 contida no texto. Seguimos a leitura do artigo (ALENCAR; COLARES, 1998).

Proposição B.0.1 *Sejam $\mathbf{x} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada do espaço Euclidiano e N um campo normal unitário de vetores sobre M . Se $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho = \langle \mathbf{x}, N \rangle$ é a função suporte de \mathbf{x} , então*

$$(a) \quad L_r(\rho) = -(r+1)S_{r+1} - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\rho - \langle \nabla S_{r+1}, \mathbf{x}^T \rangle;$$

$$(b) \quad (\text{Fórmula de Minkowski}) \text{ Para } M \text{ fechada e cada } 0 \leq r \leq n-1,$$

$$\int_M (H_r + H_{r+1}\rho) dM = 0.$$

Demonstração: Iniciamos mostrando o item (a). Considere um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ geodésico em M . Temos,

$$\nabla_{e_i} \nabla \rho = \nabla_{e_i} \left[\sum_k e_k \langle \mathbf{x}, N \rangle e_k \right] = \sum_k [(\nabla_{e_i} \nabla_{e_k} \langle \mathbf{x}, N \rangle) e_k + e_k \langle \mathbf{x}, N \rangle \nabla_{e_i} e_k].$$

Como

$$\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \langle \mathbf{x}, N \rangle = -h_{ij} - \sum_l (\nabla_{e_l} h_{ij}) \langle \mathbf{x}, e_l \rangle - h_{ij}^2 \langle \mathbf{x}, N \rangle,$$

onde h_{ij} são as componentes da segunda forma fundamental A , tem-se

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_i} \nabla \langle \mathbf{x}, N \rangle, P_r(e_j) \rangle &= - \sum_k h_{ik} \langle e_k, P_r(e_j) \rangle - \langle \mathbf{x}, N \rangle \sum_k h_{ik}^2 \langle e_k, P_r(e_j) \rangle \\ &\quad - \sum_{k,l} (\nabla_{e_l} h_{ik}) \langle \mathbf{x}, e_l \rangle \langle e_k, P_r(e_j) \rangle. \end{aligned}$$

Segue da definição do operador L_r que

$$\begin{aligned} L_r(\rho) &= -\text{tr}(AP_r) - \text{tr}(A^2 P_r)\rho - \text{tr}\left(\sum_l (P_r \nabla_{e_l} h_{ik}) \langle \mathbf{x}, e_l \rangle\right) \\ &= -\text{tr}(AP_r) - \text{tr}(A^2 P_r)\rho - \text{tr}\left(\sum_l (P_r \nabla_{\langle \mathbf{x}, e_l \rangle e_l} h_{ik})\right) \\ &= -\text{tr}(AP_r) - \text{tr}(A^2 P_r)\rho - \text{tr}((P_r \nabla_{\mathbf{x}} h_{ik})) \\ &= -(r+1)S_{r+1} - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\rho - \langle \nabla S_{r+1}, \mathbf{x} \rangle, \end{aligned}$$

onde os traços estão calculados em (REILLY, 1973).

Agora passamos ao item (b). Considere a função $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f = (1/2)|\mathbf{x}|^2$. Temos que $\nabla f = \mathbf{x}^T$, onde

$$\mathbf{x}^T = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, N \rangle N$$

representa a componente tangente da imersão \mathbf{x} . Logo, para cada campo tangente X sobre M resulta que

$$\nabla_X(\nabla f) = X + \langle \mathbf{x}, N \rangle A(X).$$

Portanto,

$$L_r(f) = \text{tr}(P_r) + \langle \mathbf{x}, N \rangle \text{tr}(AP_r) = c_r H_r + \langle \mathbf{x}, N \rangle c_r H_{r+1} = c_r (H_r + H_{r+1} \rho).$$

Aplicando o teorema da divergência nesta igualdade, concluímos que

$$\int_M (H_r + H_{r+1} \rho) dM = 0, \quad r = 0, \dots, n-1.$$

Com isso encerramos a demonstração. □