UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXAME DE ANÁLISE NO $\mathbb{R}^n$

1. Seja $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ a interseção de uma sequência decrescente $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_i \supset \cdots$ de compactos não vazios. Mostre que se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e contem K, então $K_i \subset U$, para algum i.

2. Suponha que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é *positivamente homogênea de grau* k, ou seja,
$$f(tx) = t^k f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \forall t > 0. \tag{1}$$
Mostre que se f é diferenciável em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, então f satisfaz a *identidade de Euler.*:
$$\langle x, \nabla f(x) \rangle = kf(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

3. Mostre que $S = \{p \in \mathbb{R}^3;\ |p - p_0|^2 - \langle p - p_0, a\rangle^2 = r^2\}$, com $|a| = 1$ e $r > 0$, é uma superfície de classe C^∞ e
$$T_pS = \{v \in \mathbb{R}^3;\ \langle p - p_0, v\rangle = \langle p - p_0, a\rangle\langle a, v\rangle\}.$$
"S é o cilindro circular reto de raio r cujo eixo é a reta que passa por p_0 *na direção de a"*

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^1 tal que $|f'(t)| \leq k < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere a aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$. Mostre que ϕ é um difeomorfismo.

5. Sejam $f : U \to \mathbb{R}$ integrável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $B[a; r] \subset U$, a bola fechada de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$. Mostre que
$$\int_{B[a;r]} f(y)dy = \int_{B[0;1]} f(a + rx).r^n\, dx.$$