UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

VITOR DE LIMA ALVES

O TEOREMA DE RUELLE

Maceió
2017

VITOR DE LIMA ALVES

O TEOREMA DE RUELLE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins de Oliveira

Maceió
2017

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

A472t Alves, Vitor de Lima.
O teorema de Ruelle / Vitor de Lima Alves. – 2017.
43 f.

Orientador: Krerley Irraciel Martins de Oliveira.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 43.

1. Teoria ergódica. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Estado de equilíbrio. I. Título.

CDU: 519.218.84

Folha de Aprovação

VITOR DE LIMA ALVES

O TEOREMA DE RUELLE

Dissertação de Mestrado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas na área de Sistemas Dinâmicos.

Trabalho aprovado. Maceió, 02 de Maio de 2017.

Krerley Oliveira

Prof. Dr.Krerley Irraciel Martins de Oliveira (UFAL)
(Orientador)

Ali Golmakani

Prof. Dr. Ali Golmakani- UFAL
(Examinador Interno)

Wagner Ranter Gouveia da Silva

Prof. Dr. Wagner Ranter Gouveia da Silva - UFAL
(Examinador Externo)

SUMÁRIO

Resumo

Neste trabalho, nós vamos estudar um belo resultado que é conhecido como *Teorema de Ruelle*. O resultado afirma que dados uma transformação expansora topologicamente exata num espaço métrico compacto e um potencial Hölder, existe um único estado de equilíbrio para este potencial. Antes disso, mostraremos que dada uma aplicação expansora numa variedade riemanniana compacta com jacobiano Hölder, existe uma única medida ergódica μ absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue da variedade. Para finalizarmos, provaremos que se tomarmos no caso da em que o espaço é uma variedade o potencial como sendo o jacobiano, então o estado de equilíbrio será μ.

Palavras-Chave: Teoria Ergódica; Sistemas Dinâmicos; Estado de Equilíbrio.

Abstract

In this work, we are going to study a beautiful result that is called *Ruelle's Theorem*. The result states that given a topologically exact expanding map and a Hölder Potencial in a compact metric space, then there exists an unique equilibrium state for this potencial. Before, we will show that given an expanding map in a compact riemannian manifold with Holder jacobian, then there exists an unique ergodic measure μ absolutely continuous with relation to the Lebesgue measure of the manifold. Finally, we will show that if consider the case in the Ruelle's Theorem in that the compact metric space is a manifold and the jacobain as potencial, then the ergodic measure μ is the equilibrium state for this case.

Keywords: Ergodic Theory; Dynamical Systems; Equilibrium State

INTRODUÇÃO

Em 1975, P. Walters mostrou o seguinte resultado:

$$P(\psi, f) = \sup\{h_\mu(f) + \int \psi \; d\mu : \; \mu \in \mathcal{M}_1(f)\}, \tag{1}$$

onde $P(\psi, f)$ é a pressão do potencial ψ relativamente a f.

A primeira pergunta que surge do resultado acima é se para todos f e ψ sempre existe alguma medida de probabilidade que atinge o supremo na igualdade acima. Uma tal medida é chamada de *Estado de Equilíbrio*. Gurevič e Walters mostraram exemplos no qual o supremo não é atingido. Visto isso, outra pergunta que surge é a seguinte: Sob quais hipóteses em f e em ψ existe uma medida de probabilidade acima μ tal que o supremo acima é atingido? David Ruelle respondeu esta pergunta para uma classe importante de sistemas dinâmicos, que são as transformações expansoras topologicamente exata em espaços métricos compactos. Além desta hipótese, assumiu que o potencial é Hölder, que é uma condição técnica. Este resultado ficou conhecido como *Teorema de Ruelle* e tem o seguinte enunciado:

Seja $f : M \to M$ uma transformação expansora topologicamente exata. Seja $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial Hölder. Existe um único estado de equilíbrio ergódico para ϕ. Além disso, esta medida está suportada em todo M.

Para provarmos este resultado, vamos começar estudando o Operador de Perron-Frobenius $\mathcal{L} : C^0(M) \to C^0(M)$ e utilizar o fato do dual $C^0(M)*$ está biunivocamente associado aos espaços das medidas borelianas em M para mostrar que $\mathcal{L}*$ admite uma automedida ν associada a um autovalor positivo λ. Depois, mostraremos que esta automedida é um *Estado de Gibbs*. Usando resultados preliminares à demonstração de que a automedida é um Estado de Gibbs e o teorema de Ascoli-Arzelá, mostraremos que $\mathcal{L}$ admite uma autofunção h associada ao autovalor λ. A medida $\mu = h\nu$. Para concluirmos, mostraremos que $h_\mu f + \int \phi \; d\mu = \log \lambda$. Para mostrarmos que $\log \lambda = P(f, \phi)$ utilizando a Fórmula de Rohklin. A unicidade seguirá pelo fato de que todos os estados de equilíbrios para esta dinâmica são equivalentes e que se nós temos duas medidas equivalente, onde uma é ergódica e a outra é invariante, então elas são iguais.

Antes disso, no primeiro capítulo, nós vamos mostrar o seguinte resultado:

Seja $f : M \to M$ uma aplicação expansora em uma variedade compacta e conexa M. Se o jacobiano det df é Holder, então f admite uma probabilidade invariante μ, que também é ergódica e absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue m.

Como aplicação do Teorema de Ruelle, vamos mostrar que a medida μ obtida no resultado acima é o estado de equilíbrio para o potencial $\phi = -\log|\det df|$. Para finalizar, mostraremos que a entropia $h_\mu f = \int \log|\det df|\ d\mu$.

1 TRANSFORMAÇÕES EXPANSORAS

1.1 Transformações Expansoras em Variedades Compactas

Neste capítulo, chamaremos de *medida de Lebesgue* de uma variedade Riemanniana M à medida de volume associada a métrica de M.

Definição 1.1. *Dadas uma variedade Riemanniana Compacta M e $f : M \to M$ uma aplicação de classe C^1, dizemos que f é expansora se existe $\sigma > 1$ tal que*

$$||df_p v|| \geq \sigma ||v|| \tag{1.1}$$

para todos $p \in M$ e $v \in T_pM$.

Em particular, f é um difeomorfismo local.

Exemplo 1.1 (Endomorfismos Lineares do Toro)**.** *O toro de dimensão n é definido como sendo $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, isto é, é o conjunto das classes de equivalência definida em $\mathbb{R}^n$ por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{R}^n$. Temos que a projeção $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ dada por $\pi(x) = [x]$ dá a $\mathbb{T}^n$ uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão n. . Agora, seja A uma matriz n x n com coeficientes inteiros e invertível. Temos que $A(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$. Logo, A induz uma aplicação*

$$f_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n, \quad f_A([x]) = [A(x)].$$

Primeiro, podemos notar que $\pi \circ A = f_A \circ \pi$. Suponhamos agora que todos os autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sejam reais e tais que $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \ldots,\ n$. Seja σ real tal que $1 < \sigma <$ $\min|\lambda_i|$*. Tomando a base que deixa a transformação linear A na forma canônica de Jordan, podemos tomar o produto interno que deixa essa base ortonormal. Esse produto satisfaz $|Av| \geq \sigma|v|$. Além disso, sabemos que pi induz uma métrica riemanniana em $\mathbb{T}^n$ que torna π uma isometria local, onde estamos tomando em $\mathbb{R}^n$ a norma induzida pelo produto interno definido acima. Como π é uma isometria local, temos que dado $[x] \in \mathbb{T}^n$, π^{-1} está definido numa vizinhança de W de $[x]$ e também é uma isometria local. Sejam $V = \pi^{-1}(W)$. Logo, dado $[x] \in \mathbb{T}^n$ e $v \in T_{[x]}\mathbb{T}^n$, temos que, reduzindo W se necessário,*

$$\sigma|v| = \sigma\left|d\pi^{-1}([x])v\right| \leq \left|A(d\pi^{-1}([x])v)\right| = \left|d\pi^{-1}_{f_A([x])} df_A([x])v\right| = \left|df_A([x])v\right|.$$

Portanto, f_A é uma transformação expansora.

Seja $(M, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Dada $f : M \to M$ uma aplicação mensurável, dizemos que μ é invariante por f ou que f preserva μ se $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$, para todo A mensurável.

O objetivo deste capítulo é provar o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Seja $f : M \to M$ uma aplicação expansora em uma variedade compacta e conexa M. Se o jacobiano $\det df$ é Holder, então f admite uma probabilidade invariante μ, que também é ergódica e absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue m.*

A definição de medida invariante foi dada no apêndice.

A prova deste teorema seguirá como consequência de alguns resultados preliminares.

Lema 1.1. *Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo local em uma variedade compacta e conexa M e $\sigma > 0$ um minorante para $||df^{-1}||^{-1}$. Então existe $k \geq 1$ tal que $\#f^{-1}(y) = k$, para todo $y \in M$. Ademais, existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in f^{-1}(y)$, existe uma aplicação $h : B(y, r) \to M$ de classe C^1 tal que $f \circ h = id$, $h(y) = x$ e*

$$d(h(y_1), h(y_2)) \leq \sigma d(y_1, y_2), \tag{1.2}$$

para todos $y_1, y_2 \in B(y, r)$

Demonstração. Como f é um difeomorfismo local, então ela é uma aplicação aberta. Além disso, como M é compacta e de Hausdorff, segue-se que f é uma aplicação fechada. Como M é conexo, temos que $f(M) = M$. M compacto implica que a imagem inversa $f^{-1}(y)$ é um conjunto compacto, para todo $y \in M$. Logo, f é uma aplicação própria. Como f é própria, sobrejetiva e M é conexa, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\#f^{-1}(y) = n$, para todo $y \in M$. Além disso, f é uma aplicação de recobrimento.

Pelo teorema da função inversa, para todo $x \in M$, existe uma vizinhança $V(x)$ de x e $r(x) > 0$ tal que $f|_{V(x)}$ é um difeomorfismo sobre a bola de centro $y = f(x)$ e raio $r(x)$. Como f é um recobrimento, podemos tomar $V(x)$ e $V(z)$ satisfazendo $V(x) \cap V(z) = \emptyset$, para todos $x, y \in f^{-1}(y)$, onde $y \in M$. Afirmamos que r pode ser tomado de forma independente de x. De fato, temos que a família $\{B(f(x), \frac{r(x)}{2}\}_{x \in M}$ forma uma cobertura de M, pois f é sobrejetiva. Como M é compacto, existem $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ tais que $\{B(f(x_i), \frac{r(x_i)}{2}\}_{i=1}^k$ e $\{V(x_i)\}_{i=1}^k$ são coberturas de M. Seja $r = \min_i \frac{r(x_i)}{2}$. Dado $x \in M$, existe x_j tal que $y \in B(f(x_j), \frac{r(x_j)}{2})$ e $x \in V(x_j)$, onde $y = f(x)$. Daí, $B(y, r) \subset B(f(x_k), r_{x_k})$. Logo, existe uma vizinhança $W(x)$ de x tal que $f|_{W(x)}$ é um difeomorfismo sobre $B(y, r)$. Portanto, podemos tomar r uniforme.

Defina $h = (f|_{V(x)})^{-1}$. Temos que $||dh_z|| = ||df^{-1}_{h(z)}|| \leq \sigma^{-1}$, para todo $z \in B(y, r)$. Pela desigualdade do valor médio, temos que

$$d(h(z_1), h(z_2)) \leq \sigma^{-1} d(z_1, z_2), \tag{1.3}$$

para todos $z_1, z_2 \in B(y, r)$.

$\square$

Todas as aplicações h que satisfazem as hipóteses do lema acima são chamadas de *ramos inversos* de f. O número k de pré-imagens é chamado de *grau* da aplicação f.

Se f é uma aplicação expansora, então, como $\sigma > 1$, temos que os ramos inversos são contrações. Daí, podemos definir ramos inversos h^n de qualquer iterado f^n da seguinte forma: dado $y \in M$ e $x \in f^{-n}(y)$, sejam $h_1, h_2, \ldots, h_n$ ramos inversos de f com

$$h_i(f^{n-i+1}(x)) = f^{n-i}(x), \tag{1.4}$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Como cada h_i é uma contração, segue-se que a sua imagem está contida numa bola de raio menos que r e centro $f^{n-i}(x)$. Logo, h^n está bem definida. Temos também que $f^n \circ h^n = \text{id}$, $h^n(y) = x$ e

$$d(h^n(y_1), h^n(y_2) \leq \sigma^{-n} d(y_1, y_2) \tag{1.5}$$

Agora vamos usar a hipótese de que o Jacobiano é Holder. Primeiro, notemos que $|\det\ df_p|$ é maior que 0 para todo $p \in M$, pois M é compacto. Além disso, $|\log\ |\det\ f_p|$ possui limitações inferior e superior maiores do que 0 e infinito, respectivamente. Logo, $|\log\ |\det\ f_p|$ é Holder, ou seja, existem constantes positivas C e $v > 0$ tais que

$$|\log|\det df_p| - \log|\log df_q|| \leq C d(p, q)^v, \tag{1.6}$$

para todos $p,\ q \in M$.

Lema 1.2 (Lema da distorção)**.** *Existe $C_1 > 0$ tal que, qualquer $n \geq 1$, qualquer $q \in M$ e qualquer ramo inverso $h^n : B(q, r) \to M$ de f^n, tem-se*

$$log\left|\frac{det\ dh^n(y_1)}{det\ dh^n(y_2)}\right| \leq C_1 d(y_1, y_2)^v \leq C_1 (2r)^v,$$

para todos $y_1, y_2 \in B(q, r)$.

Demonstração. Vamos escrever $h^i = h_i \circ \cdots h_1$, para todo $1 \leq i \leq n$, bem como $h^0 = \text{id}$. Pela regra da cadeia, temos que

$$dh^n_{y_j} = \sum_{i=1}^{n} dh^i(h^{i-1}(y_j)), \tag{1.7}$$

$j = 1, 2$. Daí, como o determinante de um produto de matrizes é o produto dos determinantes, segue-se que

$$\log\left|\frac{\det\ dh^n_{y_1}}{\det\ dh^n_{y_2}}\right| = \sum_{i=1}^{n} \log\left|\det\ dh_i(h^{i-1}(y_1))\right| - \sum_{i=1}^{n} \log\left|\det\ dh_i(h^{i-1}(y_2))\right| \tag{1.8}$$

Sabemos que det $dh_i = ((\det\ ) \circ h_i)^{-1}$. Daí, segue pelo Lema 1.1 e por 1.8 que

$$\log \left| \frac{\det\ dh^n_{y_1}}{\det\ dh^n_{y_2}} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} Cd(h^i(y_1), h^i(y_2)^v \leq \sum_{i=1}^{n} C\sigma^{-iv} d(y_1, y_2).$$

Agora, basta tomar $C_1 = \sum_{i=1}^{n} C\sigma^{-iv}$ e o lema está provado. □

Corolário 1.1. *Existe $C_2 > 0$ tal que, para todo $y \in M$ e quaisquer conjuntos mensuráveis $B_1, B_2 \subset B(y, r)$ tem-se*

$$\frac{1}{C_2} \frac{m(B_1)}{m(B_2)} \leq \frac{m(h^n(B_1))}{m(h^n(B_2))} \leq C_2 \frac{m(B_1)}{m(B_2)}.$$

Demonstração. Pelo teorema da mudança de variáveis, temos que

$$m(h^n(B_i)) = \int_{B_i} |\det\ dh^n(y)|\, dm,$$

para $i = 1, 2$. Daí, pelo Lema 1.2,

$$m(h^n(B_1)) \leq \exp\left(C_1(2r)^v\right) |\det\ dh^n(y)| m(B_1), \tag{1.9}$$

$$m(h^n(B_2)) \geq \exp\left(-C_1(2r)^v\right) |\det\ dh^n(y)| m(B_2). \tag{1.10}$$

Agora, tomando $C_2 = \exp\left(2C_1(2r)^v\right)$ e dividindo as desigualdades, temos que:

$$\frac{m(h^n(B_1))}{m(h^n(B_2))} \leq C_2 \frac{m(B_1)}{m(B_2)}$$

Agora, basta trocarmos os pápeis de B_1 e B_2 e o corolário está provado.

□

O próximo corolário dá uma desigualdade muito importante para o nosso resultado.

Corolário 1.2. *Existe $C_3 > 0$ tal que $(f^n_* m)(B) \leq C_3 m(B)$, para todo mensurável $B \subset M$, onde $(f^n_* m)(B)$ é definido por $(f^n_* m)(B)) = m(f^{-n}(B))$.*

Demonstração. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $B \subset B_0 = B(y, r)$, para algum $y \in M$. Pelo Corolário 2.1, temos que

$$\frac{m(h^n(B))}{m(h^n(B_0))} \leq C_2 \frac{m(B)}{m(B_0)}.$$

Note que $m(f^{-n}(B))$ é igual a soma das medidas de todos os ramos inversos $m(h^n(B))$, pois $f^n \circ h^n = \text{id}$ e, além disso, as imagens de ramos inversos distintos são distintas, pois caso contrário existiria um ponto $z \in B$ cuja quantidade de pré-imagens menor que o grau de f^n. Daí,

$$\frac{(f^n_* m)(B)}{(f^n_* m)(B_0)} \leq C_2 \frac{m(B)}{m(B_0)}. \tag{1.11}$$

Sabemos que $(f_*^n(B_0)) \leq 1$. Além disso, sabemos que o volume de bolas são com o mesmo raio são iguais. Daí, $m(B_0) = \alpha$, onde α não depende de y. Agora, tomando $C_3 = C_2\alpha^{-1}$, temos que

$$(f_*^n m)(B) \leq C_3 m(B).$$

□

1.2 Topologia Fraca*

Todas as demonstrações omitidas nesta seção podem ser encontradas em [[KOMV]]. Para continuarmos a prova do Teorema 1.1, vamos introduzir uma métrica no conjunto das probabilidade num espaço métrico qualquer M e falar sobre uma prova alternativa para o Teorema A.1, Nesta seção. M denotará um espaço métrico qualquer. Seja $\mathcal{M}_1(M)$ o conjunto das medidas borelianas de probabilidade em M. Dada $\mu \in \mathcal{M}$, um conjunto de funções $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ contínuas e limitadas e $\epsilon > 0$, seja

$$V(\mu, \Phi, \epsilon) = \{v \in \mathcal{M}_1(M) : \left| \int \phi_i \; dv - \int \phi_i \; d\mu \right|, \text{ para todo i } \}.$$

Como a interseção de dois conjuntos dessa forma contém um conjunto desssa forma e $\mu \in V(\mu, \Phi, \epsilon)$, temos que a família $\{V(\mu, \Phi, \epsilon)\}$ pode ser tomada como base de uma topologia. A esta topologia nós daremos o nome de *Topologia fraca**. Uma observação importante é que esta topologia é Hausdorff, o que implica que a noção de convergência de sequências está bem definida.

Proposição 1.1. *Uma sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para uma medida $\mu \in \mathcal{M}(M)$ se, e somente se,*

$$\int \phi \; d\mu_n \to \int \phi \; d\mu,$$

para toda $\phi : M \to \mathbb{R}$ contínua e limitada.

Chamamos de conjunto de continuidade de uma probabilidade μ todo boreliano B cujo bordo tem medida nula para μ. Dada uma família $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ de borelianos de continuidade de μ, seja

$$V_c(\mu, \mathcal{B}, \epsilon) = \{\nu \in \mathcal{M}_1(M) : |\mu(B_i) - \nu(B_i)| < \epsilon, \quad \text{para todo } i\}. \tag{1.12}$$

Temos que conjuntos da forma $V_c(\mu, \mathcal{B}, \epsilon)$ formam uma base de uma topologia em $\mathcal{M}_1(M)$. Esta topologia é Hausdorff. Além disso, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$, para todo conjunto de continuidade de μ.

Proposição 1.2. *A topologia gerada por (2.12) é equivalente à topologia fraca*.*

Uma das perguntas mais interessantes que podemos fazer é perguntar se a topologia fraca* é metrizável, isto é, se existe uma métrica d tal que a topologia gerada por esta métrica é equivalente a topologia fraca*. Uma das condições suficientes para que isso aconteça é que o M seja separável.

Dados $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(M)$, defina $D(\mu, \nu)$ como sendo o ínfimo dos $\delta > 0$ tais que

$$\mu(B) < \nu(B^\delta) + \delta \text{ e } \nu(B) < \mu(B^\delta) + \delta,$$

para todo boreliano B,onde $B^\delta = \{x \in M : d(x, B) < \delta\}$.

D é uma métrica, pois se $D(\mu, \nu) = 0$, então $\mu(F) = \nu(F)$, para todo fechado $F \subset M$. Como elas coincidem nos fechados, segue-se que elas são iguais. Agora, sejam η, μ, ν. Se $\delta_1, \delta_2 > 0$ são tais que $\mu(B) < \nu(B^{\delta_1}) + \delta_1,\ \nu(B^{\delta_1}) < \eta(B^{\delta_1+\delta_2}) + \delta_2$, para todo boreliano B, então $\mu(B) < \eta(B^{\delta_1+\delta_2}) + \delta_1 + \delta_2$. De maneira análoga, provamos que se $\delta_1, \delta_2 > 0$ satisfazem $\eta(B) < \nu(B^{\delta_1}) + \delta_1,\ \nu(B^{\delta_1}) < \mu(B^{\delta_1+\delta_2}) + \delta_2$ para todo boreliano B, então $\eta(B) < \mu(B^{\delta_1+\delta_2}) + \delta_1 + \delta_2$. Logo, $D(\mu, \eta) \leq D(\mu, \nu) + D(\nu, \eta)$. Portanto, D é uma métrica.

Esta métrica é chamada de *métrica de Levy-Prohosov.*

Proposição 1.3. *Se M é um espaço métrico separável, então a topologia induzida pela métrica D é equivalente a topologia fraca* em $\mathcal{M}_1(M)$.*

Dada uma medida μ em M e uma aplicação mensurável $f : M \to M$, podemos definir a medida $f_*\nu$ da seguinte maneira:

$$f_*\nu(B) = \nu(f^{-1}(B)) \tag{1.13}$$

para todo boreliano B. Assim, podemos definir a função $f_* : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}_1(M)$, que associa a cada $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ à medida $f_*\mu \in \mathcal{M}_1(M)$.

Proposição 1.4. *Seja $f : M \to M$ contínua. Temos que $f_* : \mathcal{M}_1(M) \to \mathcal{M}_1(M)$ é contínua com relação à topologia fraca*.*

Quando M é compacto, a topologia fraca* tem uma propriedade interessante, que é a seguinte:

Teorema 1.2. *Se M é compacto, então $\mathcal{M}_1(M)$ é compacto na topologia fraca*.*

Dado um espaço métrico M, seja $f : M \to M$ uma aplicação contínua, sabemos que a partir de f, de todo natural n e de uma medida boreliana de probabilidade ν, podemos definir uma medida $f_*^n\nu$, definida por $f_*^n\nu(B) = \nu(f^{-n}(B))$, para todo boreliano B. A partir dessa sequência, podemos definir outra sequência da seguinte forma

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_*^j\nu. \tag{1.14}$$

A partir disso, enunciamos o

Teorema 1.3. *Se M é um espaço métrico compacto, então todo ponto de acumulação de uma sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como em (1.14) é uma medida boreliana de probabilidade invariante por f, isto é, f_* tem ponto fixo.*

1.3 Conclusão da Prova do Teorema 1.1

Proposição 1.5. *Seja μ uma medida finita num espaço métrico M. Para todo F fechado, existe um conjunto finito ou infinito enumerável E tal que*

$$\mu\{x \in M : d(x,F) = r\} = 0, \text{ para todo } r \in (0,\infty) \setminus E.$$

Demonstração. Seja $F^r = \{x \in M : d(x,F) = r\}$. Primeiro, note que se $r_1 \neq r_2$, então $F^{r_1} \cap F^{r_2} = \emptyset$. Suponha que exista $E \subset (0,\infty)$ não-enumerável tal que $\mu(F^r) \neq 0$, para todo $r \in E$. Como E é não-enumerável, existe $s \in E$ tal que s é ponto de acumulação de E, isto é, existe $(r_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $\lim_{i\to\infty} r_i = s$. Segue daí que $\lim_{i\to\infty} \mu(F^{r_i}) = \mu(F^s)$. Além disso, sabemos que

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F^{r_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F^{r_i}) \leq \mu(M) < \infty. \tag{1.15}$$

Logo, $\lim_{i\to\infty} \mu(F^{r_i}) = 0$, o que implica $\mu(F^s) = 0$, o que é um absurdo. Portanto, E é finito ou infinito enumerável. □

Sabemos que dado um espaço mensurável X, μ uma medida em X e $\phi : X \to \mathbb{R}$ integrável com respeito à μ, então podemos definir a medida $(\phi\nu)$, que é definida por $\phi\nu(B) = \int_B \phi d\nu$.

Lema 1.3. *Seja ν uma probabilidade num espaço métrico compacto N e $\phi : N \to [0,\infty)$ contínua. Seja $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de probabilidades em N que converge para μ na topologia fraca*. Se $\mu_i \leq \phi\nu$, para todo i, então $\mu \leq (\phi\nu)$.*

Demonstração. Seja B um boreliano qualquer.Como ϕ é limitada, existe S maior que 1 tal que $|\phi| \leq$ Como todo espaço métrico compacto é separável e completo, para todo $\epsilon > 0$ existe $K_\epsilon \subset B$ tal que $\mu(B)(B \setminus K_\epsilon) < \epsilon S^{-1} < \epsilon$. Logo, $(\phi\mu)(B \setminus K_\epsilon) < S\epsilon S^{-1} = \epsilon$. Seja agora uma vizinhança aberta A_ϵ uma vizinhança de K_ϵ da forma $A_\epsilon = \{x \in N : d(x,N) < r\}$, de modo que r seja suficiente para que $\mu(A_\epsilon \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ e $(\phi\nu)(A_\epsilon \setminus K_\epsilon) < \epsilon$. Pela Proposição 1.5, podemos tomar r de modo que o bordo de A_ϵ tenha medida nula. Logo, A_ϵ é um conjunto de continuidade com respeito a μ.Daí, como a topologia gerada pelos conjuntos definidos em (1.12) é equivalente à topologia fraca*, temos que A_ϵ é um conjunto de continuidade com respeito a μ. Logo, $\lim \mu_i = \mu$ implica que $\mu(A_\epsilon) = \lim \mu_i(A_\epsilon) \leq (\phi\nu)(A_\epsilon)$. Como $\lim_{\epsilon\to 0} \mu(K_\epsilon) = \mu(B)$ e $\lim_{\epsilon\to 0} (\mu(A_\epsilon) - \mu(K_\epsilon)) = 0$, segue-se que $\lim_{\epsilon\to 0} \mu(A_\epsilon) = \mu(B)$. De forma análoga, temos que $\lim_{\epsilon\to 0} (\phi\nu)(A_\epsilon) = (\phi\nu)(B)$. Portanto, $\mu(B) \leq (\phi\nu)(B)$, como queríamos demonstrar. □

Vamos aplicar este lema ao nosso caso:

Corolário 1.3. *Seja $f : M \to M$ uma transformação expansora numa variedade compacta e conexa, então existe uma medida invariante μ invariante por f absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue.*

Demonstração. Considere a sequência $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f_*^i m)$. Pelo Corolário 1.2, temos que $\mu_n \leq C_3 m$. Sabemos que todo ponto de acumulação de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma medida invariante. Seja μ um ponto de acumulação desta sequência. Pelo Lema 1.3, segue-se que $\mu \leq C_3 m$, ou seja, μ é absolutamente contínua com relação a medida de Lebesgue m. □

Agora resta mostrar que a medida μ construída no Corolário 1.3 é a única probabilidade invariante absolutamente contínua com relação à medida de lebesgue m e que, além disso, μ é ergódica para f.

Fixada uma partição $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_s\}$ de M e interior não-vazio e diâmetro menor do que r, para cada $n \geq 1$, definimos $\mathcal{P}_n$ como sendo a partição formadas pelas imagens de U_i, onde $1 \leq i \leq s$, pelos seus respectivos ramos inversos. Afirmamos que $\mathcal{P}_n$ é uma partição. De fato, por construção, as imagens de dois ramos inversos de U_i são distintas. Sejam h_i^n e h_j^n ramos inversos de U_i e U_j, respectivamente. Temos que, pelo teorema da mudança de variáveis,

$$\int_{f^n\left(h_i^n(U_i)\cap h_j^n(U_j)\right)} dm = \int_{U_i\cap U_j} |\det\, df^n| dm = 0$$

Como M é compacta, $|\det\, df^n|$ é limitado inferiormente por uma constante positiva. Daí, $m\left(h_i^n(U_i) \cap h_j^n(U_j)\right) = 0$. Segue-se de (1.5) que $\operatorname{diam}(\mathcal{P}_n) \leq r\sigma^{-n}$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\mathcal{P}_n) = 0$.

Lema 1.4. *Seja $\mathcal{P}_n$, $n \geq 1$, uma sequência de partições num espaço métrico compacto tal que $\lim_{n\to\infty} diam(\mathcal{P}_n) = 0$. Para todo mensurável B tal que $\nu(B) > 0$, onde ν é uma probabilidade neste espaço métrico. Então existem $V_n \in \mathcal{P}_n$, tais que*

$$\nu(V_n) > 0 \quad e \quad \frac{\nu(B\cap V_n)}{\nu(V_n)} \to 1.$$

Demonstração. Tome $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < \nu(B)$. Como o espaço métrico é compacto, existe um compacto $K_\epsilon \subset B$ tal que $\nu(B \setminus K_\epsilon) < \epsilon$. Como $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}\,(\mathcal{P}_n) = 0$, definindo como $K_{\epsilon,n}$ a união de todos os elementos de $\mathcal{P}_n$ que intersectam K_ϵ, temos que $\nu(K_{\epsilon,n} \setminus K_\epsilon) < \epsilon$ para n suficientemente grande. Suponha que

$$\nu(K_\epsilon \cap V_n) \leq \frac{\nu(B) - \epsilon}{\nu(B) + \epsilon}\nu(V_n),$$

para todo $V_n \in \mathcal{P}_n$ que intersecta K_ϵ. Daí,

$$\begin{aligned}
\nu(K_\epsilon) &= \sum_{V_n \in K_{n,\epsilon}} \nu(K_\epsilon \cap V_n) \\
&\leq \sum_{V_n \in K_{n,\epsilon}} \frac{\nu(B) - \epsilon}{\nu(B) + \epsilon} \nu(V_n) \\
&= \frac{\nu(B) - \epsilon}{\nu(B) + \epsilon} \nu(K_{\epsilon,n}) \\
&\leq \frac{\nu(B) - \epsilon}{\nu(B) + \epsilon} (\nu(K_\epsilon) + \epsilon) \\
&\leq \nu(B) - \epsilon \\
&< \nu(K_\epsilon),
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Daí, existe $V_n \in \mathcal{P}$ tal que

$$\nu(V_n) \geq \nu(V_n \cap B) \geq \nu(K_\epsilon \cap V_n) > \frac{\nu(B) - \epsilon}{\nu(B) + \epsilon} \nu(V_n).$$

Logo, $\nu(V_n) > 0$. Além disso,

$$1 \geq \frac{\nu(V_n \cap B)}{\nu(V_n)} \geq \frac{\nu(B) - \epsilon}{\nu(B) + \epsilon}.$$

Portanto, fazendo $\epsilon \to 0$ obtemos o desejado.

$\square$

Dada uma aplicação $g : N \to N$, dizemos que um conjunto $A \subset N$ é invariante por f se $g(A) = A$ μ-quase todo ponto, ou, equivalentemente, $g^{-1}(A) = A$ μ-quase todo ponto.

Lema 1.5. *Dada uma partição $\mathcal{P} = \{U_1, \ldots, U_s\}$ Se um conjunto $A \subset M$ é invariante por f, então existe U_i tal que A tem medida de Lebesgue total em U_i.*

Demonstração. Pelo Lema 1.4, existe $V_n \in \mathcal{P}_n$ tal que $\frac{V_n \setminus A}{V_n}$ converge para 0 quando $n \to \infty$. Seja $U_{i(n)} = f^n(V_n)$. Como A é invariante e $f^n \setminus f(A) \subset f^n(V_n \setminus A)$ e A é invariante, temos que, pelo Corolário 1.1,

$$\frac{m(U_{i(n)} \setminus A)}{m(U_{i(n)})} \leq \frac{m(f^n(V_n \setminus A))}{m(f^n(V_n))} \leq C_2 \frac{m(V_n \setminus A)}{m(V_n)}.$$

Logo, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{m(U_{i(n)} \setminus A)}{m(U_{i(n)})} = 0$. Como existem infinitos i's, temos que existe i tal que $i(n) = i$, para infinitos valores de n. Portanto, tomando esta subsequência obtemos o desejado.

$\square$

Lema 1.6. *f é topologicamente exata, ou seja, dado um aberto $U \subset M$, existe $N \geq 1$ tal que $f^N(U) = M$.*

Demonstração. Seja $x \in U$ e $s > 0$ tal que $B(x,s) \subset U$. Suponha, sem perda de generalidade, que $s < r$. Seja $N > 0$ tal que $F^N(U) \neq M$. Dado $y \in M \setminus f^N(B(x,r))$, seja $\gamma : [a,b] \to M$ uma geodésica minimizante tal que $\gamma(a) = f^n(x)$ e $\gamma(b) = y$. Como f^n é um recobrimento, seja $\gamma_n : [a,b] \to M$ o levantamento de γ por f^n tal que $\gamma_n(b) = y_n$, onde $y_n \in M \setminus U$. Como $\gamma([a,b])$ é compacto em M, existem $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ tais que $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) < s$, $i = 0, \ldots k-1$. Sendo h_i^n os ramos inversos de $B(\gamma(t_i), s)$ tais que $h_i^n(\gamma(t_i)) = \gamma_n(t_i)$. Logo,

$$d(\gamma_n(t_i), \gamma_n(t_{i+1})) \leq \sigma^{-n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}).$$

Como γ é uma geodésica minimizante, temos que $\sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = d(f^n(x), y) \leq$ diam (M). Daí, temos que

$$s \leq d(x, y_n) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \leq \sigma^{-n} \text{diam } (M).$$

Portanto, N é limitado superiormente. Com isto, provamos o lema. $\square$

Corolário 1.4. *Se $A \subset M$ é um conjunto invariante com medida de Lebesgue positiva, então A tem medida de Lebesgue total.*

Demonstração. Seja U_i um elemento da partição $\mathcal{P}$ tal que $m(U_i \setminus A) = 0$. Denotando por U o interior de U_i, temos que $m(U \setminus A) = 0$. Pelo lema 2.6, existe $N \geq 1$ tal que $f^N(U) = M$. Logo, $M \setminus A = f^N(U) \setminus f^N(A) \subset f^N(U \setminus A)$. Pelo teorema da mudança de variáveis, temos que

$$m(f^N(U \setminus A)) = \int_{f^N(M \setminus A)} 1 \; dm = \int_{U \setminus A} |\text{det} df^n(x)| \; dm = 0.$$

Portanto, $m(A) = 1$. $\square$

Corolário 1.5. *Seja μ uma probabilidade invariante por absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue m. Então μ é ergódica. Além disso, μ é única.*

Demonstração. Seja $A \subset M$ invariante por f. Então $m(A) = 0$ ou $m(A^c) = 0$. Se μ é absolutamente contínua com relação à m, então $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$. Portanto, μ é ergódica. Agora, sejam μ e ν duas probabilidades invariantes por f e ergódicas. Dado $E \subset M$ mensurável, temos que

$$\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_E(f^j(x))) = \nu(E),$$

para algum $x \in E$. Portanto, $\mu = \nu$. $\square$

1.4 Aplicações Expansoras em Espaços Métricos Compactos

Definição 1.2. *Dado um espaço métrico compacto M, dizemos que uma transformação contínua $f : M \to M$ é expansora se existem $\sigma > 1$ e $\rho > 0$ tais que, para todo $p \in M$, nós temos que a restrição de f à bola $B(x, \rho)$ contém uma vizinhança de $B(f(p), \rho)$ e, além disso,*

$$d(f(x), f(y)) \geq \sigma d(x, y), \ \forall x, y \in B(p, \rho) \tag{1.16}$$

Exemplo 1.2. *Seja $J \subset [0, 1]$ uma família finita de intervalos compactos disjuntos e $f : J \to [0, 1]$ tal que a restrição de f a cada componente conexa de J seja um difeomorfismo. Suponha que exista $\sigma > 1$ tal que $|f'(x)| \geq 1$ para todo $x \in J$. Tomando ρ menor que a distância mínima entre duas componentes conexas de J, temos que toda bola de raio ρ em J está contida em uma única componente conexa de J. Logo, f é uma transformação expansora.*

Proposição 1.6. *Se M é uma variedade Riemanniana compacta e conexa, então toda aplicação diferenciável expansora no sentido da definição 1.1 é expansora no sentido da Definição 1.2.*

Demonstração. Afirmamos que existe $s > 0$ tal que, para todo $p \in M$, a restrição de f à bola $B(p, s)$ é um difeomorfismo sobre a sua imagem. De fato, para todo $p \in M$, pelo teorema da função inversa, existe $s(p) > 0$ tal que f restrito à $B(p, s(p))$ é um difeomorfismo sobre a sua imagem. Considere a cobertura $\bigcup_{p \in M} B(p, \frac{s(p)}{2})$ Como M é compacto, existem $p_1, \ldots, p_k$ tais que $\bigcup_{i=1}^{k} B(p_i, \frac{s(p_i)}{2}) = M$. Seja $s = \min_i \frac{s(p_i)}{2}$. Para todo $p \in M$, temos que existe i tal que $B(p, s) \subset B(p_i, s(p_i))$. Segue daí que f restrito à $B(p, s)$ é um difeomorfismo sobre a sua imagem. Seja $k = \sup_{x \in M} ||df(p)||$ e seja $\rho > 0$ tal que $2k\rho < s$. Dado $y \in B(f(p), \sigma\rho)$, seja $\gamma : [0, 1] \to B(f(p), \sigma\rho)$ uma geodésica minimizante que liga $f(p)$ à y. Seja $\alpha : [0, 1] \to M$ o levantamento de γ por f e seja $\delta > 0$ tal que $\alpha(\delta) \in B(p, \rho)$. Denotando por $l(\beta)$ o comprimento de uma curva qualquer β, temos que

$$\begin{aligned}
d(p, \alpha(\delta)) &\leq l(\alpha|_{[0,\delta]}) \\
&= \int ||\alpha'||dt \\
&\leq \sigma^{-1} \int ||df.\alpha'||dt \\
&= \sigma^{-1} \int ||\gamma'||dt \\
&= \sigma^{-1} \delta d(f(p), y) \\
&< \delta\rho \\
&\leq \rho.
\end{aligned}$$

Logo, podemos tomar $\delta = 1$, de onde concluímos que $B(f(p), \sigma\rho) \subset f(B(p, \rho))$. Dado $x, y \in B(p, \rho)$, temos que $d(f(x), f(y)) < 2k\rho$. Seja $\gamma : [0, 1] \to B(f(p), 2k\rho)$ uma geódesica minimizante ligando $f(x)$ à $f(y)$. Seja $\alpha : [0, 1] \to B(p, 2k\rho)$ o levantamento de γ por f, temos que

$$d(f(x), f(y))) = l(\gamma) \geq \sigma l(\alpha) \geq \sigma d(x, y),$$

o que encerra a demonstração. □

Proposição 1.7. *Seja $f : M \to M$ uma aplicação expansora num espaço métrico compacto. Temos que $f^{-1}(y)$ é finito, para todo $y \in M$.*

Demonstração. Considere uma cobertura finita de M formada por bolas de raio ρ. Dado um ponto $y \in M$, temos que y tem no máximo uma pré-imagem em cada uma dessas bolas, pois f restringida a uma bola da cobertura é injetiva. Portanto, $f^{-1}(y)$ é finito, para todo $y \in M$. □

Dada uma aplicação expansora $f : M \to M$. Temos que f restrita a um compacto $K \subset B(p, \rho)$ é um homeomorfismo, para todo $p \in M$. Defina $K = f^{-1}(\bar{B}(f(p), \rho))$. Assim podemos definir o ramo *ramo inverso* de f em p como sendo a inversa de f $h : B(f(p), \rho) \to \bar{B}(p, \rho)$. Temos que $h(f(p)) = p$ e a (2.16) implica

$$d(z, w) \leq \sigma^{-1} d(h(z), h(w)),\ \forall z, w \in B(f(p), \rho).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, podemos definir o *ramo inverso* de f^n em p como sendo a composição

$$h_p^n = h_{f^{n-1}(p)} \circ \cdots \circ h_p : \bar{B}(f^n(p), \rho) \to B(p, \rho).$$

A definição de h_p^n faz sentido, pois cada ramo inverso da composição é uma contração. Primeiro, notemos que $h_p^n(f^n(p)) = p$ e $f^n \circ h_p^n = \mathrm{id}$. Mais geralmente, temos que $f^j \circ h_p^n = h_{f^j}^{n-j}$, para $j = 0, \ldots, n-1$. Daí, temos que

$$d(f^j \circ h_p^n(z), f^j \circ h_p^n(w), \leq \sigma^{n-j} d(z, w),$$

para todo $z, w \in B(f^n(p), \rho)$ e $0 \leq j \leq n$.

2 TEOREMA DE RUELLE

Todas as demonstrações omitidas nas Seções 2.1 e 2.2 podem ser encontradas em [[KOMV]].

2.1 Entropia

2.1.1 Entropia de uma Partição

Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade, onde $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra de M e μ uma medida de probabilidade. Seja $\{\mathcal{P}_i\}_{i\geq 1}$ uma família enumerável de partições de M. Definimos

$$\bigvee_i \mathcal{P}_i = \{\cap P_i : \ P_i \in \mathcal{P}_i\}$$

Dada uma partição $\mathcal{P}$ de M e $x \in M$, denotamos por $\mathcal{P}(x)$ o elemento de $\mathcal{P}$ que contém x.

Seja $I_{\mathcal{P}} : M \to \mathbb{R}$ por $I_{\mathcal{P}}(x) = -\log(\mu(\mathcal{P}(x)))$. Agora, definimos a entropia da partição $\mathcal{P}$ como

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \int I_{\mathcal{P}} \ d\mu = \sum_{P\in\mathcal{P}} -\mu P \log(\mu(P)).$$

Exemplo 2.1. *Considere o intervalo* $[0, 1]$ *munido da medida de Lebesgue. Dado* $n \in \mathcal{N}$*, considere a partição* $\mathcal{P}^n$ *formada pelos subintervalos* $((i-1)/10^n, i/10^n]$*, onde* $i = 1, \cdots, 10^n$*. Temos então que*

$$H_\mu(\mathcal{P}^n) = \sum_{i=1}^{10^n} -10^{-n} \log 10^{-n} = n \log 10.$$

2.1.2 Entropia de um Sistema Dinâmico

Nesta subseção, vamos assumir que a probabilidade mu é uma probabilidade invariante por f. Dada uma partição $\mathcal{P}$, definimos a partição $\mathcal{P}^n$ como

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}).$$

Considerando a sequência $(H_\mu(\mathcal{P}^n))_{n\in\mathbb{N}}$, temos que $H_\mu(\mathcal{P}^{m+n}) \leq H_\mu(\mathcal{P}^m) + H_\mu(\mathcal{P}^n)$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(H_\mu(\mathcal{P}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ é subaditiva. Assim, definimos a entropia de f com relação a μ e a partição $\mathcal{P}$ por

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_n \frac{H_\mu(\mathcal{P}^n)}{n}.$$

Definimos também a entropia de f com respeito a medida μ por

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P}),$$

onde o supremo está sendo tomado no conjunto de todas partições com entropia finita.

Exemplo 2.2. *Dada a aplicação* $f : [0,1] \to [0,1]$ *definida por* $f(x) = 10x - [10x]$. *Temos que* f *preserva a medida de Lebesgue. Considerando a partição* $\mathcal{P}$ *formada pelos subintervalos* $(i-1)/10, i/10]$, *onde* $i = 1, \cdots, 10$, *temos que* $\mathcal{P}^n$ *é a partição formada pelos intervalos da forma* $(i-1)/10^n, i/10^n$, *onde* $i = 1, \cdots, 10^n$. *Pelo exemplo anterior, temos que*

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) = \log 10$$

2.1.3 Fórmula de Rokhlin

Dada uma função mensurável $f : M \to M$. Dizemos que f é localmente invertível se existe uma cobertura enumerável $\{U_k\}_k$ de conjuntos mensuráveis tais que a restrição de f a cada U_k é uma bijeção com inversa mensurável. Chamamos os subconjuntos mensuráveis de U_k de *domínios de invertibilidade.*

Dada uma probabilidade ν em M, dizemos que uma função $\zeta : M \to \mathbb{R}$ é um jacobiano de f com relação a medida ν se

$$\nu f(A) = \int_A \zeta \, d\nu,$$

para todo domínio de invertibilidade A.

Uma medida ν é não-singular com relação a uma aplicação localmente invertível f se $\nu(A) = 0$ implica $\nu(f(A)) = 0$, para todo domínio de invertibilidade A.

Proposição 2.1. *Seja* $f : M \to M$ *uma aplicação mensurável localmente invertível e* ν *uma probabilidade não-singular com respeito a* f. *Temos que existe um único jacobiano de* f *com relação a* ν, *o qual denotaremos por* $J_\nu f$.

O próximo teorema é fundamental para obtermos o resultado central deste capítulo.

Teorema 2.1 (Fórmula de Rokhlin)**.** *Seja* $f : M \to M$ *uma aplicação mensurável localmente invertível e* ν *uma probabilidade invariante por* f. *Se existe uma partição* $\mathcal{P}$ *tal que* $\bigcup_n \mathcal{P}^n$ *gera a a* σ*-álgebra de* M *e todo* $P \in \mathcal{P}$ *é domínio de invertibilidade, então*

$$h_\mu(f) = \int J_\mu f d\mu.$$

2.2 Pressão

2.2.1 Definição e Princípio Variacional

Seja M um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ uma aplicação contínua. Um potencial de M é qualquer aplicação $\psi : M \to \mathbb{R}$. Dada uma cobertura α de M formada por abertos e $n \geq 1$, definimos

$$\alpha^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha).$$

Agora, considere a função $\psi_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \psi \circ f^i$. Dado $C \subset M$, denotamos

$$\psi_n(C) = \sup\{\psi_n(x) : \ x \in C\}.$$

Dada a cobertura aberta α, vamos definir

$$P_n(f, \psi, \alpha) = \inf\{\sum_{U\gamma} e^{\psi_n(U)} : \gamma \text{ é uma cobertura finita de } \alpha\}$$

Uma das propriedades da sequência $(\log P_n(f, \psi, \alpha)_{n \geq 1}$ é que ela é subaditiva. Assim, o limite

$$P(f, \psi, \alpha) = \lim_n \frac{\log P_n(f, \psi, \alpha)}{n}$$

existe. A pressão do potencial ψ com respeito a função f é o limite de $P(\psi, f)$ de $P(f, \psi, \alpha)$ quando o diâmetro de α vai para 0. O próximo resultado relaciona o conceito de pressão com o conceito de entropia

Teorema 2.2 (Princípio Variacional)**.** *Seja $f : M \to M$ uma aplicação contínua num espaço métrico compacto e $\mathcal{M}(f)$ o conjunto das probabilidades invariantes por f. Então, para todo potencial psi : $M \to \mathbb{R}$, temos que*

$$P(\psi, f) = \sup\{h_\mu(f) + \int \psi \, d\mu : \ \mu \in \mathcal{M}f\}. \tag{2.1}$$

2.2.2 Estado de Equilíbrio e o Teorema de Ruelle

Uma probabilidade invariante μ é um *estado de equilíbrio* para um potencial ψ se ela satisfaz

$$h_\mu(f) + \int \psi \, d\mu = P(\psi, f).$$

O conjunto dos estados de equilíbrio será denotado por $E(f, \psi)$.

Definição 2.1. *Dado um espaço topológico M. Uma aplicação $f : M \to M$ contínua. Dizemos que f é topologicamente exata se dado um aberto $U \subset M$, existe $N \geq 1$ tal que $f^N(U) = M$.*

Definição 2.2. *Dado um espaço topológico M e uma probabilidade boreliana ν de M, então o suporte de ν, que será denotado por supp(ν) é definido por*

$$\textit{supp}(\nu) = \{x \in M : \exists N_x \textit{ tal que } x \in N_x \textit{ e } \nu(N_x) > 0\}.$$

Agora, vamos enunciar o teorema principal deste trabalho.

Teorema 2.3 (Teorema de Ruelle)**.** *Seja $f : M \to M$ uma função expansora topologicamente exata. Seja $\phi : M \to \mathbb{R}$ um potencial Hölder. Existe um único estado de equilíbrio ergódico para ϕ. Além disso, esta medida está suportada em todo M.*

As próximas seções serão destinadas para a demonstração deste teorema e aplicações dele.

2.3 O Operador de Transferência

A partir desta seção, $\rho > 0$ e $\sigma > 1$ são as constantes da Definição 1.2. Vamos denotar por $S_n\phi$ as somas orbitais de ϕ:

$$S_n\phi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i(x))$$

Sejam f e ϕ as aplicações definidas Teorema 2.3. Definimos o operador $\mathcal{L} : C^0(M) \to C^0(M)$, :

$$\mathcal{L}g(y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} e^{\phi(x)} g(y).$$

O operador $\mathcal{L}$ é conhecido como Operador Transferência ou Operador de Ruelle-Perron-Frobenius

Primeiro, note que $\mathcal{L}$ é linear. Além disso, $\mathcal{L}g$ é contínua, para toda $g \in C^0(M)$,pois se $h_i : B(y, \rho) \to M$ são os ramos inversos de de y por f, então

$$\mathcal{L}g = \sum_i (e^\phi g) \circ h_i,$$

que é contínua.

Afirmamos que $\mathcal{L}$ é um operador contínuo. Com efeito,

$$||\mathcal{L}g|| = \sup|\mathcal{L}g| \leq \text{grau}(f)e^{\sup\ \phi}\sup\ |g| = \text{grau}(f)e^{\sup\phi}||g||$$

Além disso, $\mathcal{L}$ é um operador positivo, ou seja, se $g \in C^0(M)^+$, então $\mathcal{L}g \geq 0$. Daí, aplicando o Teorema A.1, existem $\lambda > 0$ e $\Phi \in C^0(M)^+$ tal que

$$\mathcal{L}^*\Phi = \lambda\Phi, \tag{2.2}$$

onde $\Phi(g) \geq 0$, para todo $g \geq 0$. Pelo teorema de Riesz-Markov, existe uma medida de probabilidade ν tal que $\Phi(g) = \int g\ d\nu$. Aplicando este resultado em (2.1), temos que

$$\int \mathcal{L}g\ d\nu = \Phi(\mathcal{L}g) = \mathcal{L}^*(\Phi(g)) = \lambda\Phi(g) = \lambda \int g\ d\nu,\ \forall g \in C^0(M). \tag{2.3}$$

Lema 2.1. *$f : M \to M$ admite jacobiano relativamente à ν, dado por $J_\nu f = \lambda e^{-\phi}$.*

Demonstração. Seja A um domínio de invertibilidade de f. Considere uma sequência de funções contínuas $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para $\mathcal{X}_A$ e tal que $|g_n| \leq 1,\ \forall n$. Temos que

$$\mathcal{L}(e^{-\phi}g_n)(y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} g_n(x).$$

Logo, $|L(e^{-\phi}g_n)| \leq \text{grau}(f)$. Como A é domínio de invertibilidade, temos que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(e^{-\phi}g_n)(y) = \mathcal{X}_{f(A)}(y)$. Pelo teorema da convergência dominada e por (3.2), temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int \lambda e^{-\phi} g_n \, d\nu = \nu(f(A)).$$

Também pelo teorema da convergência dominada, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int \lambda e^{-\phi} g_n \, d\nu = \int_A \lambda e^{-\phi} \, d\nu.$$

Portanto,

$$\int_A \lambda e^{-\phi} \, d\nu = \nu(f(A)).$$

□

Lema 2.2. *A medida ν está suportada em todo M.*

Demonstração. Primeiro, o fato de f ser expansora implica que ela é um difeomorfismo local. Logo, f é aberta, o que implica que $f(U)$ é aberto, logo mensurável. Como f é um difeomorfismo local e M compacto, podemos cobrir U com uma união finita de domínios de invertibilidade A. Segue daí que

$$\nu(f(A)) = \int_{f(A)} J_\nu f \, d\nu = 0 \tag{2.4}$$

De onde concluímos que $\nu(f(U)) = 0$, de onde, usando indução, concluímos que $\nu(f^m(U)) = 0, \forall m \in \mathbb{N}$. Como f é topologicamente exata, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) = M$. Portanto, $\nu(M) = 0$, o que é um absurdo. Com isso concluímos a demonstração. □

2.4 Estado de Gibbs

Uma medida é um *estado de Gibbs* se existem constantes $K \geq 1$ e $P \in \mathbb{R}$ tais que:

$$K_3^{-1} \leq \frac{\nu(B(x,n,\epsilon))}{\exp(S_n\phi(x) - nP)} \leq K_3.$$

, para todo $x \in M$ e $n \in \mathbb{R}$.

Como ϕ é Hölder, existem $K_0 > 0$ e $\alpha > 0$ tais que

$$|\phi(z) - \phi(w)| \leq K_0 d(z,w)^\alpha, \ \forall z, w \in M.$$

Lema 2.3. *Existe $K_1 > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, todo $x \in M$ e todo $y \in B(x,n,\rho)$, tem-se*

$$|S_n\phi(x) - S_n\phi(y)| \leq K_1 d(f^n(x), f^n(y))^\alpha.$$

Demonstração. Temos que $d(f^j(x), f^j(y)) < \rho$, para todo $j = 0, \ldots, n-1$. Segue daí que o ramo inverso $h_j : B(f^n(x), \rho) \to M$ é que satisfaz $h_j(f^n(x)) = f^{n-j}(x)$ também satisfaz $h_j(f^n(y)) = f^{n-j}(y)$. Daí,

$$d(f^{n-j}(x), f^{n-j}(x)) \leq \sigma^{-j} d(f^n(x), f^n(y)), j = 1, \ldots, n.$$

□

Então,

$$\begin{aligned} |S_n\phi(x) - S_n\phi(y)| &\leq \sum_{j=1}^{n} |\phi^{n-j}(x) - \phi^{n-j}(y)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} K_0 \sigma^{-\alpha j} d(f^n(x), f^n(y))^\alpha. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora, basta tomar $K_1 = \sum_{j=1}^{\infty} K_0 \sigma^{-aj}$ e obtemos o desejado.

Corolário 2.1. *Existe $K_2 > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, todo $x \in M$ e todo $y \in B(x, n+1, \rho)$ tem-se*

$$K_2^{-1} \leq \frac{J_\nu f^n(x)}{J_\nu f^n(y)} \leq K_2.$$

Demonstração. Sabemos que $J_\nu f^n(z) = \lambda^n e^{-S_n\phi(z)}$, para todo $z \in M$ e todo $n \geq 1$. Logo,

$$\left| \log \frac{J_\nu f^n(x)}{J_\nu f^n(y)} \right| = |S_n\phi(x) - S_n\phi(y)| \leq K_1 d(f^n(x), f^n(y)) \leq K_1 \rho^\alpha.$$

Agora, basta tomar $K_2 = e^{K_1 \rho^\alpha}$. □

Dada $g : M \to M$ contínua. Dados $x \in M$, $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, chamamos *bola dinâmica* de comprimento n, raio ϵ e centro x ao conjunto

$$B(x, n, \epsilon) = \{y \in M : d(f^j(x), f^j(y)) < \epsilon \ \forall j = 0, \ldots, n-1\} = \bigcap_{j=0}^{n-1} B(f^j(x), \epsilon).$$

Lema 2.4. *Para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $K_3(\epsilon)$ tal que, se $P = Log\ \lambda$, então*

$$K_3^{-1} \leq \frac{\nu(B(x, n, \epsilon))}{exp(S_n\phi(x) - nP)} \leq K_3.$$

Demonstração. Sendo $\epsilon < \rho$, $f|_B(y, \epsilon)$ é injetiva para todo $y \in M$ e $f^n|_{B(x,n,\epsilon)}$ é injetiva para todo $x \in M$ e todo $n \geq 1$. Logo,

$$\nu(f^n((B(x, n, \epsilon))) = \int_{B(x,n,\epsilon)} J_\nu f^n(y) d\nu(y).$$

Como

$$K_2 J_\nu f^n(x) \geq J_\nu f^n(y) \geq K_2^{-1} J_\nu f^n(x),$$

temos que

$$K_2^{-1}\nu(f^n(B(x,n,\epsilon))) \leq J_\nu f^n x \nu(B(x,n,\epsilon)) \leq K_2 \nu(f^n(B(x,n,\epsilon))).$$

Sabemos que $J_\nu f^n(x) = \exp(nP - S_n\phi(x))$ e $f^n(B(x,n,\epsilon)) = f(B(f^{n-1}(x),\epsilon))$. Logo,

$$\nu(f^n(B(x,n,\epsilon))) = \int_{B(f^{n-1}(x),\epsilon)} J_\nu f(y) d\nu(y).$$

O lado esquerdo da desigualdade acima é limitado por 1. Além disso, $J_\nu f$ e $B(y,\epsilon)$ são limitados inferiormente por constantes maiores do que 0. Logo, o lado esquerdo da igualdade acima é limitado inferiormente por uma constante $a > 0$. Portanto,

$$K_2^{-1} a \leq \frac{\nu(B(x,n,\epsilon))}{\exp(S_n\phi(x) - nP)} \leq K_2.$$

Tomando $K_3 = \max\{K_2 a^{-1}, K_2\}$, obtemos o desejado.

□

Lema 2.5. *Existe $K_4 > 0$ tal que*

$$-K_4 d(y_1,y_2)^\alpha \leq \log \frac{\mathcal{L}^n 1(y_1)}{\mathcal{L}^n 1(y_2)} \leq K_4 d(y_1,y_2)^\alpha,$$

para todo $n \geq 1$ e todos $y_1, y_2 \in M$ tais que $d(y_1,y_2) < \rho$.

Demonstração. Sabemos que $\mathcal{L}^n g = \sum_i (e^{S_n\phi} g) \circ h_i^n$, em toda bola $B(y,\rho/2)$. Logo,

$$\mathcal{L}^n 1(y_k) = \sum_i e^{S_n\phi(h_i^n(y_k))}.$$

Pelo Lema 2.3, temos que

$$|S_n\phi(y_1) - S_n\phi(y_2)| \leq K_1 d(y_1,y_2)^\alpha$$

Daí,

$$e^{-K_1 d(y_1,y_2)^\alpha} \leq \frac{\mathcal{L}^n(y_1)}{\mathcal{L}^n(y_1)} \leq e^{K_1 d(y_1,y_2)^\alpha}.$$

Agora, basta escolher $K_4 \geq K_1$. □

Corolário 2.2. *Existe $K_5 > 0$ tal que*

$$K_5^{-1} \leq \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(x) \leq K_5,$$

para todo $n \geq 1$ e todo $x \in M$.

Demonstração. Temos que

$$\int \mathcal{L}^n 1 d\nu = \int \lambda^n d\nu = \lambda^n.$$

Em particular, para todo $n \geq 1$, temos

$$\min_{y\in M} \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y) \leq 1 \leq \max_{y\in M} \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y). \tag{2.6}$$

Como f é topologicamente exata, para todo todo $x \in M$, existe N tal que $f^N(B(x,\rho))$. Logo, dados $x, y \in M$, existe $x' \in B(x,\rho)$ tal que $f^N(x') = y$. Então,

$$\mathcal{L}^{n+N} 1(y) = \sum_{z\in f^{-N}(y)} e^{S_N\phi(z)}\mathcal{L}^n 1(z) \geq e^{S_N\phi(x')}\mathcal{L}^n 1(x') \geq e^{-cN}\mathcal{L}^n(x'), \tag{2.7}$$

onde $c = \sup|\phi|$. Pelo Lema 2.5 nós temos que $\mathcal{L}^n(x') \geq \mathcal{L}^n(x)\exp(-K_4\rho^\alpha)$. Tome $K \geq \exp(K_4\rho^\alpha)e^{cN}\lambda^n$. Logo,

$$\mathcal{L}^{n+N} 1(y) \geq \exp(-K_4\rho^\alpha)e^{-cN}\mathcal{L}^n 1(x) \leq K^{-1}\lambda^N\mathcal{L}^n 1(x),$$

para todo $x, y \in M$. Daí, para todo $n \geq 1$, temos que

$$\min \lambda^{-n+N}\mathcal{L}^{n+N} 1 \geq \max K^{-1}\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1. \tag{2.8}$$

Combinando (2.5) e (2.7), temos que

$$\max \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1 \leq K \min \lambda^{-n+N} \leq K, \ \forall n \geq 1$$
$$\min \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1 \geq K^{-1} \max \lambda^{-n+N}\mathcal{L}^{n-N} 1 \geq K^{-1}, \forall n > N.$$

Para concluir a prova, temos que analisar o caso em que $n = 1, \ldots, N$. Veja que $\mathcal{L}^n$ é positivo. Como M é compacto, o mínimo de $\mathcal{L}^n 1$ é positivo para todo n. Portanto, existe $K_5 \geq K$ tal que $\min \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1$, para $n = 1, \ldots, N$. □

Lema 2.6. *Existe $K_6 > 0$ tal que*

$$|\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(x) - \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y)| \leq K_6 d(x,y)^\alpha,$$

para todo $n \geq 1$ e para todos $x, y \in M$.

Demonstração. Suponha $d(x,y) < \rho$. Pelo lema 3.5, temos que

$$\mathcal{L}^n(x) \leq \mathcal{L}^n(y)\exp(K_4 d(x,y)^\alpha). \tag{2.9}$$

Em particular, a sequência $\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1$ é equicontínua.

Logo,

$$\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(x) - \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y) \leq (\exp(K_4 d(x,y)^\alpha) - 1)\,\mathcal{L}^n 1(y).$$

Tomando $K > 0$ tal que $|\exp(K_4 t) - 1 \leq K|t|$, para todo $|t| \leq \rho^\alpha$, usando o Corolário 2.2, temos que

$$\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(x) - \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y) \leq K_5 K d(x,y)^\alpha.$$

trocando x por y na desigualdade acima, temos que

$$|\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(x) - \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y)| \leq K K_5 d(x,y)^\alpha.$$

Se $d(x,y) > \rho$, então, pelo Corolário 2.2, temos que

$$|\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(x) - \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1(y)| \leq 2K_5 \leq 2K_5 \rho^{-\alpha} d(x,y)^\alpha.$$

Portanto, basta tomar $K_6 = \max\{KK_5, 2K_5\rho^{-\alpha}\}$. Como K não depende de n, segue-se que a sequência $\lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1$ é equicontínua.

□

Concluímos a partir dos resultados anteriores que a sequência

$$h_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{-i}\mathcal{L}^i 1.$$

é equicontínua. Agora, vamos relembrar o seguinte resultado clássico:

Teorema 2.4 (Ascoli-Arzelá)**.** *Se $f_n : N \to \mathbb{R}$ é uma sequência de funções equicontínua definidas num espaço métrico compacto N, então existe uma subsequência $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente para uma função contínua $f : N \to \mathbb{R}$.*

A partir deste resultado, concluímos que existe uma subsequência $(h_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que esta sequência converge uniformemente para uma função contínua $h : M \to \mathbb{R}$.

Lema 2.7. *A função h satisfaz $\mathcal{L}h = \lambda h$. Além disso, $\int h d\nu = 1$,*

$$K_5^{-1} \leq h(x) \leq K_5 \text{ e } |h(x) - h(y)| \leq K_6 d(x,y)^\alpha, \ \forall x, y \in M. \tag{2.10}$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h &= \lim_i \mathcal{L}h_{n_i} = \lim_i \frac{1}{n_i}\sum_{j=o}^{n_i-1} \lambda^{-i}\mathcal{L}^{j+1} = \lim_i \frac{\lambda}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} \lambda^{-j}\mathcal{L}^j 1 \\ &= \lim_i \frac{\lambda}{n_i}\sum_{j=0}^{n_i-1} \lambda^{-j}\mathcal{L}^{-j} 1 + \frac{\lambda}{n_i}(\lambda^{-n_i}\mathcal{L}^{n_i} - 1). \end{aligned}$$

O lado esquerdo da última igualdade converge para λh. Pelo Corolário 2.2, $\lambda^{-n_i}\mathcal{L}^{n_i}1$ é limitado. Logo, o lado direito da última igualdade converge para 0. Portanto, $\mathcal{L}h = \lambda h$. Além disso, temos que $\int \lambda^{-n}\mathcal{L}^n 1 d\nu = \int 1 d\nu = 1$. Logo, $\int h_n d\nu = 1$, para todo n. Como a sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, podemos aplicar o teorema da convergência dominada para obter que $\int h d\nu = 1$. As outras propriedades de h seguem do Corolário 2.2 e do Lema 2.6, respectivamente. □

Defina a medida $\mu = h\nu$ por

$$\mu(E) = \int_A h d\nu,$$

para cada mensurável $A \subset M$. Pelo Lema 2.7 2egue-se que μ é uma medida de probabilidade. Além disso, segue do Lema 2.7 que

$$K_5^{-1}\nu(A) \leq \mu(A) \leq K_5\nu(A),$$

para todo mensurável $A \in M$. Segue daí que μ e ν são equivalentes. Logo, pelo Lema 2.2, temos que μ está suportada em todo M. Tomando $L = K_3K_5$, temos que, pelo Lema 2.4,

$$L^{-1} \leq \frac{\mu(B(x,n,\epsilon))}{\exp(S_n\phi(x) - nP)} \leq L,$$

para todo $x \in M$, $n \geq 1$ e $\epsilon < \rho$.

Lema 2.8. *A probabilidade μ é invariante por f. Além disso, f admite um jacobiano relativamente a μ, que é dado por $J_\mu f = \lambda e^{-\phi}(h \circ f)/h$.*

Demonstração. Afirmamos que $(L)((g_1 \circ f)g_2) = g_1\mathcal{L}g_2$. De fato, para todo $y \in M$, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}((g_1 \circ f)g_2)(y) &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} e^{\phi(x)} g_1(f(x))g_2(x) \\ &= g_1(y) \sum_{x \in f^{-1}(y)} e^{\phi(x)} g_2(x) = g_1(y)\mathcal{L}g_2(y).\end{aligned}$$

Segue daí que, para toda função contínua g, tem-se

$$\begin{aligned}\int (g \circ f) d\mu &= \int (g \circ f)h \; d\nu = \lambda^{-1} \int \mathcal{L}((g \circ f)h) \; d\nu \\ &= \lambda^{-1} \int g\mathcal{L}h \; d\nu = \int gh \; d\nu = \int g \; d\mu..\end{aligned}$$

Isto mostra que μ é invariante por f. Seja A um domínio de invertibilidade de f. Temos que

$$\mu(f(A)) = \int_{f(A)} 1 \; d\mu = \int_{f(A)} h \; d\nu = \int_A J_\nu f \frac{(h \circ f)}{h} \; d\mu.$$

Segue pelo Lema 2.1 que

$$J_\mu f = J_\nu f \frac{h \circ f}{h} = \lambda e^{-\phi} \frac{(h \circ f)}{h},$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Corolário 2.3. *A medida invariante μ satisfaz $h_\mu(f) + \int \phi \; d\mu = P$.*

Demonstração. Pela Fórmula de Rokhlkin e pelo Lema 2.8, temos que

$$h_\mu f = \int \log\ J_\mu f d\mu = \log\ \lambda - \int \phi\ d\mu + \int (\log\ h \circ f - \log\ h)\,.$$

Como $h \geq K_5^{-1}$, temos que a última parcela da igualdade acima é igual a 0. Portanto, $h_\mu f + \int \phi\ d\mu = P$, como queríamos demonstrar. □

Considere qualquer medida η invariante por f que satisfaz

$$h_\eta f + \int \phi\ d\eta \geq P.$$

Seja $g_\eta = \frac{1}{J_\eta f}$ e $g = \lambda^{-1} e^\phi h/h \circ f$. Temos que

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x) = \frac{1}{\lambda h(y)} \sum_{x \in f^{-1}(y)} e^{\phi(x)} h(x) = \frac{\mathcal{L}h(y)}{\lambda h(y)} = 1,\ \forall y \in M. \tag{2.11}$$

Vamos apresentar algumas propriedades envolvendo o jacobiano de medidas invariantes por f:

Proposição 2.2. *Seja η uma medida invariante por f. Temos que*

$$\int_{f(A)} \psi\ d\eta = \int_A (\psi \circ f) J_\eta f\ d\eta,$$

para todo domínio de invertibilidade A e toda função integrável ψ.

Demonstração. Vamos provar primeiro que a afirmação é válida para funções características. Seja E mensurável. Temos que

$$\begin{aligned} \int_{f(A)} \chi_E\ d\eta &= \int_{f(A) \cap E} d\eta \\ &= \int_{A \cap f^{-1}(E)} J_\eta f\ d\eta \\ &= \int_A \chi_{f^{-1}(E)} J_\eta f\ d\eta \\ &= \int_A (\chi_E \circ f) J_\eta f\ d\eta. \end{aligned}$$

Por linearidade, podemos estender o resultado para funções simples. Como ϕ é integrável, podemos ver as suas partes positiva e negativa como limites de sequências monótonas de funções simples. Aplicando o teorema da convergência dominada, obtemos o resultado. □

Corolário 2.4. *Nas mesmas condições da proposição 3.1, temos que*

$$\int_A \psi\ d\eta = \int_{f(A)} (\psi / J_\eta f) \circ (f|A)^{-1}\ d\eta$$

Demonstração. Pela proposição acima, temos que

$$\int_{f(A)} (\psi/J_\eta f) \circ (f|A)^{-1} \, d\eta = \int_A (\psi/J_\eta f) \circ (f|A)^{-1} \circ f) J_\eta f \, d\eta = \int_A \psi \, d\eta.$$

□

Corolário 2.5. *Nas mesmas condições da Proposição 2.2, temos que*

$$\int \psi \, d\eta = \int \sum_{z \in f^{-1}(x)} \frac{\psi}{J_\eta f}(z) \, d\eta(x).$$

Corolário 2.6. *Temos que*

$$\sum_{z \in f^{-1}(x)} \frac{1}{J_\eta f}(z) = 1, \; \eta - \textit{quase todo ponto } x \in M$$

Demonstração. Dado $E \subset M$ mensurável. Colocando $\chi_E \circ f$ no lugar de ψ no corolário acima, temos que

$$\eta(f^{-1}(E)) = \eta(E) = \int_E \sum_{z \in f^{-1}(x)} \frac{1}{J_\eta f}(z) \, d\eta.$$

A igualdade desejada segue diretamente do teorema de Radón-Nikodým. □

Segue do Corolário 2.6 que

$$\sum_{z \in f^{-1}(x)} g_\eta(z) = 1.$$

Usando a Fórmula de Rokhlin, temos que

$$0 \leq S = h_\eta f + \int \phi \, d\eta - P \, d\eta = \int -\log(g_\eta) + \phi - \log \lambda \, d\eta.$$

Usando a definição de g e o fato de η ser invariante por f, temos que

$$S = \int -\log g_\eta + \log g - \log h \circ f + \log h \, d\eta = \int \log \frac{g}{g_\eta} \, d\eta$$

Pelo corolário 2.5, temos que

$$\int \log \frac{g}{g_\eta} \, d\eta = \int (\sum_{z \in f^{-1}(x)} g_\eta(z) \log \frac{g}{g_\eta}(z)) \, d\eta$$

Sabemos que a função log é côncava. Aplicando a desigualdade de Jensen, o Corolário 2.6 e a igualdade 2.11, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{z \in f^{-1}(x)} g_\eta(z) \log \frac{g}{g_\eta}(z) &\leq \log \sum_{z \in f^{-1}(x)} g_\eta(z) \frac{g}{g_\eta}(z) \\ &= \log \sum_{z \in f^{-1}(x)} g(z) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$h_\eta f + \int \phi \, d\eta = P.$$

Portanto, segue pelo princípio variacional para pressão que $P(f, \phi) = \log \lambda$.

Corolário 2.7. *Se η é estado de equilíbrio, então*

$$J_\eta f = \frac{\lambda e^{\phi}(h \circ f)}{h} \quad e \quad \int \frac{1}{h}\mathcal{L}\xi \; d\eta = \int \frac{\lambda}{h}\xi \; d\eta.$$

Demonstração. Na desigualdade de Jensen, a igualdade só é válida se $\frac{g_\eta(x)}{g(x)}$ for constante e igual a

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x) = 1,$$

para todo $y \in M$ $\eta-$quase todo ponto e $x \in f^{-1}(y)$. Segue daí que $g(x) = g_\eta(x)$ η-quase todo ponto. Logo, $1/g = \lambda e^{-\phi}(h \circ f)/h$ é um Jacobiano de f relativamente a η. □

Como f admite jacobiano com relação a η, segue que supp $\eta = M$.

Corolário 2.8. *Existe $K_7 > 0$ tal que para todo estado de equilíbrio η, todo $n \geq 1$ e todo $y \in B(x, n+1, \rho)$ vale*

$$K_7^{-1} \leq \frac{J_\eta f(x)}{J_\eta f(y)} \leq K_7.$$

Demonstração. Temos que, pelo Corolário 2.7,

$$J_\eta f^n = \lambda e^{-S_n\phi}\frac{h \circ f^n}{h} = J_\nu f^n \frac{h \circ f^n}{h}.$$

Pelo Corolário 2.1 e pelo Lema 2.7, temos que

$$K_2^{-2}K_5^{-4} \leq \frac{J_\eta f^n(x)}{J_\eta f^n(y)} = \frac{J_\nu(x)h(f^n(x))h(y)}{J_\nu(y)h(f^n(y))h(x)} \leq K_2^2 K_5^4.$$

Portanto, basta tomar $K_7 \geq K_2 K_5$. □

Lema 2.9. *Todos os estados de equilíbrio de ϕ são equivalentes.*

Demonstração. Sejam η_1 e η_2 estados de equilíbrio, $\mathcal{P}$ uma partição finita de M tal que todo $P \in \mathcal{P}$ tem interior não-vazio e diâmetro menor que ρ. Como supp $\eta_1 =$ supp $\eta_2 = M$, temos que existe $C > 0$ tal que

$$C^{-1} \leq \frac{\eta_1(P)}{\eta_2(P)} \leq C,$$

para todo $P \in \mathcal{P}$. Seja $\mathcal{Q}_n$ a partição formada pelas imagens $h^n(P)$ dos ramos inversos h^n de f^n. Temos que, pela definição de Jacobiano,

$$\eta_i(P) = \int_{h^n(P)} J_{\eta_i} f^n \; d\eta_i, \; i = 1, 2.$$

Pelo Corolário 2.7, temos que

$$K_7^{-1} J_{\eta_i} f^n(x) \leq \frac{\eta_i(P)}{\eta_i(h^n(P))} \leq K_7 J_{\eta_i} f^n(x), \; i = 1, 2,$$

para todo $x \in h^n(P)$. Pelo Corolário 2.7, temos que $J_{\eta_1} f = J_{\eta_2} f$. Logo,

$$K_7^{-2} \leq \frac{\eta_2(P)\eta_1(h^n(P))}{\eta_1(P)\eta_2(h^n(P)} \leq K_7^2.$$

Portanto, basta tomar $C_1 = CK_7^2$ para obtermos

$$C_1^{-1} \leq \frac{\eta_1(h^n(P))}{\eta_2(h^n(P))} \leq C_1. \tag{2.12}$$

Sabemos que diam $\mathcal{Q}_n < \sigma^{-n}\rho$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty}$ diam $\mathcal{Q}_n = 0$. Dado $\delta > 0$ e B mensurável, existem F compacto e A abertos tais que $F \subset B \subset A$ e $\eta_i(A \setminus F) < \delta$. Seja Q_n o subconjunto de $\mathcal{Q}_n$ que intersecta F. Podemos supor n suficiente grande para que $Q_n \subset A$. Logo,

$$\eta_1(B) \leq \eta_1(A) < \eta_1(Q_n) + \delta \quad \text{e} \quad \eta_2(B) \geq \eta_2(F) > \eta_2(Q_n) - \delta. \tag{2.13}$$

Segue de (2.11) que $\eta_1(Q_n) \leq C_1\eta_2(Q_n)$, pois Q_n é formado por união disjunta de elementos de $\mathcal{Q}_n$. Daí, combinando (2.11) e (2.12), temos que

$$\eta_1(B) \leq C_1(\eta_2 + \delta) + \delta.$$

Como δ foi tomado de maneira arbitrária, segue-se que $\eta_1(B) \leq C_1\eta_2(B)$. Invertendo os papeis de η_1 e η_2, obtemos que $\eta_2(B) \leq C_1^{-1}\eta_1(B)$, para todo $B \subset M$ mensurável.

□

Antes de concluirmos a prova, vamos assumir os seguintes resultados, que podem ser encontrados em [[KOMV]] seguinte resultado:

Lema 2.10. *Se μ e ν são probabilidades invariantes, com μ ergódica e ν absolutamente contínua com relação à μ, então $\mu = \nu$.*

Lema 2.11. *Se $E(f, \phi)$ for não-vazio, então existe um estado de equilíbrio ergódico.*

Segue desses dois lemas e do Lema 2.9 a unicidade do estado de equilíbrio.

2.5 Aplicação em Variedades Diferenciáveis

Vamos aplicar os resultados acima no caso do Teorema 1.1 quando tomamos como potencial a função $\phi = -\log|\det Df(x)|$. Vamos mostrar primeiro que $\mathcal{L}^*(m) = m$, onde m é a medida de Lebesgue de M. Seja E um conjunto mensurável contido na imagem de um ramo inverso $h_i : B(y, \rho) \to M$. Temos então que

$$\mathcal{L}^* m(E) = \int_E d(\mathcal{L}^* m) = \int_E \mathcal{L}1 dm = \int \mathcal{X}_E \sum \frac{1}{|\det df|} \circ h_i \; dm.$$

Segue do Teorema da mudança de variáveis que

$$\mathcal{L}^* m(E) = \int_{h_i^{-1}(E)} \frac{1}{|\det df|}\, dm = m(E),$$

Agora, pelo que foi visto nas seções anteriores, vamos encontrar função positiva h tal que $\nu = hm$ será uma medida invariante por f, absolutamente contínua com relação a medida de Lebesgue m e o estado de equilíbrio do potencial ϕ. Portanto, segue pelas unicidades do Teorema 1.1 e do Teorema de Ruelle a medida obtida no Teorema 1.1 é o estado de equilíbrio do potencial ϕ. Além disso. como $P(\phi, f) = \log 1 = 0$, segue que

$$h_\nu f = \int \log |\det\ df|\ d\nu.$$

A EXISTÊNCIA DE MEDIDAS INVARIANTES

Nosso objetivo neste apêndice é mostrar a existência de medidas invariantes para dinâmicas contínuas num espaço métrico compacto usando elementos de Análise Funcional.

A.1 Cones

Definição A.1. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que um conjunto $K \subset X$ é um cone se:*

1. *K é convexo, isto é, $tx + (1-t)y \in K$, para todos $x, y \in K$ e $0 \leq t \leq 1$.*
2. *K é fechado.*
3. *$tx \in K$, para todo $x \in K$ e todo $t \geq 0$.*
4. *$K \cap (-K) = 0$.*

Vamos sempre admitir que $K \neq \{0\}$.

Exemplo A.1. *Seja M um espaço métrico compacto, $C^+_{\mathbb{R}}(M) = \{f \in C_{\mathbb{R}} \ : \ f(x) \geq 0, \forall x \in M\}$ é um cone em $C_{\mathbb{R}}(M)$.*

Exemplo A.2. *O conjunto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x^2 + y^2)^{1/2} \leq z\}$ é um cone em $\mathbb{R}^3$.*

Seja $K \subset X$ um cone. Dizemos que $x \leq y$ se, e somente se, $y - x \in K$. Vê-se que "$\leq$" é uma relação de ordem parcial. Além disso, dizemos que $x < y$ se $y - x \in K$ e $x \neq y$.

Definição A.2. *Seja $K \subset X$ um cone e "$\leq$"a ordem induzida por K. Dizemos que:*

1. *K é normal se $\inf\{|x + y| \ : \ x, y \in K \cap \partial B[0; 1]\} > 0$*
2. *A norma $| \ |$ de X é monótona se $0 \leq x \leq y$ implica $|x| \leq |y|$, e semi-monótona se existe $r > 0$ tal que $0 \leq x \leq y$ implica $|x| \leq r|y|$. r será chamado de constante de monotonicidade.*

Proposição A.1. *Seja $K \subset X$ um cone. Temos que K é normal se, e somente se, a norma $| \ \|$ é semi-monótona.*

Demonstração. Suponha que a norma $| \ |$ é semi-monótona e seja r a constante de monotonicidade. Se $x, y \in K \cap \partial B$, então $1 = |x| \leq r|x + y|$. Isto prova a volta.

Suponha que $|.|$ não seja semi-monótona. Isto implica que existem sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $0 < x_n < y_n$ e $|x_n| > n|y_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina as seguintes sequências :

$$v_n = \frac{x_n}{|x_n|}, \; w_n = \frac{y_n}{|y_n|} \;, \; z_n = \frac{\frac{1}{n}w_n - v_n}{|\frac{1}{n}w_n - v_n|}. \tag{A.1}$$

Afirmamos que $z_n \in K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito,

$$\frac{1}{n}w_n - v_n = \frac{|x_n|y_n - n|y_n|x_n}{n|x_n||y_n|}. \tag{A.2}$$

Logo, nos resta mostrar que $(|x_n|y_n - n|y_n|x_n) \in K$. Porém, isto segue do fato de que $0 < x_n < y_n$ e $|x_n| > n|y_n|$.

Logo, $v_n, z_n \in K$ e:

$$|v_n + z_n| = \left| \frac{x_n}{|x_n|} + \frac{\frac{1}{n}\frac{y_n}{|y_n|} - \frac{x_n}{|x_n|}}{\left|\frac{1}{n}\frac{y_n}{|y_n|} - \frac{x_n}{|x_n|}\right|} \right| \tag{A.3}$$

$$\leq \left| \frac{1}{n\left|\frac{y_n}{n|y_n|} - \frac{x_n}{|x_n|}\right|} \right| + \left| 1 - \frac{1}{\left|\frac{y_n}{n|y_n|} - \frac{x_n}{|x_n|}\right|} \right|. \tag{A.4}$$

Como valem as seguintes desigualdades:

$$\left| \frac{1}{n\left|\frac{y_n}{n|y_n|} - \frac{x_n}{|x_n|}\right|} \right| = \frac{|y_n||x_n|}{||x_n|y_n - n|y_n|x_n|} \leq \frac{1}{n-1} \tag{A.5}$$

e

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{\left|\frac{y_n}{n|y_n|} - \frac{x_n}{|x_n|}\right|} = \frac{n|y_n||x_n|}{||x_n|y_n - n|y_n|x_n|} \leq \frac{n}{n-1}, \tag{A.6}$$

temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n\left|\frac{y_n}{n|y_n|} - \frac{x_n}{|x_n|}\right|} \right| = 0 \;\text{ e }\; \left| \frac{1}{n\left|\frac{y_n}{n|y_n|} - \frac{x_n}{|x_n|}\right|} \right| = 1. \tag{A.7}$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} |v_n + z_n| = 0. \tag{A.8}$$

Portanto, K não é normal. Isto prova a outra parte.

□

A.2 Operadores Positivos

Definição A.3. *Um operador $T \in \mathcal{L}(X)$ é positivo em K se $TK \subset K$.*

Exemplo A.3. *Seja A uma matriz nxn uma matriz com entradas positivas. Se considerarmos em $\mathbb{R}^n$ o cone $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0\}$ nós temos que o operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por $T(x) = Ax$ é positivo. Um resultado conhecido como Teorema de Perron-Frobenius afirma que T tem um autovetor positivo associado a um autovalor positivo.*

Dado um operador $T \in \mathcal{L}(X)$. Definimos o conjunto resolvente como sendo

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I \text{ é } \text{ injetivo}\}.$$

O espectro de T é o conjunto $\sigma T = \mathbb{R} \setminus \rho T$. O raio espectral de T, que vamos denotar por $r(T)$, é definido por

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Quando o espaço X é Banach, nós temos que o raio espectral coincide com o limite $\lim\limits_{n\to\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$.

Definição A.4. *Um funcional linear $g \in X^*$ é dito positivo com relação ao cone K se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in K$.*

O próximo teorema vai nos ajudar a provar a existência de medidas invariantes para funções contínuas em espaços métricos compactos. Sua demonstração pode ser vista em [[Deim]].

Teorema A.1. *Seja $K \subset X$ um cone normal com $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$. Se $T : X \to X$ é positivo em K com $r(T) > 0$, então $r(T)$ é autovalor do operador adjunto $T^* : X^* \to X^*$, com autofunção positivo ϕ.*

A.3 Existência de Medidas Invariantes

Definição A.5. *Seja $(M, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f : M \to M$ uma função mensurável. Dizemos que f preserva μ ou que μ é invariante por f se*

$$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E),\ \forall E \in \mathcal{M}. \tag{A.9}$$

Proposição A.2. *Seja $f : M \to M$ mensurável e μ uma medida em M. Nós temos que f preserva μ se, e somente se,*

$$\int \phi \; d\mu = \int \phi \circ f \; d\mu, \tag{A.10}$$

para toda $\phi : M \to \mathbb{R}$ contínua , então f preserva μ.

Uma das perguntas que podemos fazer é a seguinte: Dado um espaço mensurável $(M, \mathcal{M})$ e uma função $f : M \to M$ mensurável, existe alguma medida μ em $(M, \mathcal{M})$ tal que f preserva μ?

O próximo resultado nos dá uma resposta afirmativa para um caso particular.

Teorema A.2. *Seja M um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ é uma aplicação contínua. Então existe uma medida de probabilidade μ em M tal que f preserva μ.*

Antes de provar o teorema acima, vamos precisar estudar algumas ferramentas.

Seja M um espaço métrico compacto. Sabemos que o conjunto $C^0(M)$ das funções contínuas reais em M, munido da norma

$$||\phi|| = \sup\{|\phi(x)| : x \in M\} \tag{A.11}$$

é um espaço de Banach.

Proposição A.3. *O conjunto*

$$C^0_+(M) = \{\phi \in C^0(M) : \ \phi(x) \geq 0, \ \forall x \in M\} \tag{A.12}$$

é um cone normal em $C^0(M)$.

Demonstração. Se $0 \leq f \leq g$, então $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in M$. Logo, $||f|| \leq ||g||$, ou seja, o cone é normal. □

Definição A.6. *Dado $f : M \to M$ mensurável, definimos*

$$U_f : C^0(M) \to C^0(M), \ U_f(\phi) = \phi \circ f. \tag{A.13}$$

U_f é chamado de operador de Koopman.

Proposição A.4. *U_f é um operador linear, limitado e positivo em $C^0_+(M)$.*

Demonstração. U_f ser um operador linear e positivo são claras. Dado $g \in C^0(M)$, temos que para qualquer $x \in M$, tem-se

$$||U_f(g)|| = ||g \circ f|| \leq ||g||.||f||.$$

□

Antes de provarmos o teorema A.1, vamos enunciar um clássico resultado de Teoria da Medida, que é conhecido como Teorema de Riesz-Markov.

Teorema A.3. *Dado um espaço métrico compacto. Seja $\Phi : C^0(M) \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo positivo em $C^0_+(M)$. Então existe uma medida μ em M tal que*

$$\int \phi \ d\mu = \Phi(\phi), \tag{A.14}$$

para todo $\phi \in C^0(M)$. Além disso, μ é de probabilidade se , e somente se $\Phi(1) = 1$.

A.4 Prova do Teorema A.2

Primeiro, vamos provar que $r(U_f) = 1$. Com efeito $||U_f^n(\phi)|| \leq ||\phi||$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $\phi \in C^0(M)$. Além disso, $U_f^n(1) = 1$. Daí, $||U_f^n|| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde concluímos que $r(U_f) = 1$.

Como $C_+^0(M)$ é um cone normal, podemos aplicar o teorema A.1, temos que existe $\Phi \in C^0(M)^*$ positivo em $C_+^0(M)$ tal que $\Phi = \Phi \circ f$. Pelo Teorema A.3, existe medida μ em M tal que

$$\int \phi \; d\mu = \Phi(\phi), \tag{A.15}$$

para todo $\phi \in C^0(M)$. Portanto, temos que

$$\int \phi \; d\mu = \Phi(\phi) = \Phi(\phi \circ f) = \int \phi \circ f \; d\mu, \tag{A.16}$$

para toda $\phi \in C^0(M)$, isto é, μ é invariante.

Além disso, $\Phi(1) = 1$. Logo, μ é de probabilidade.

O próximo exemplo nos mostrará que hipótese de M ser compacto é necessária.

Exemplo A.4. *Seja $f : (0, 1] \to (0, 1]$ definida por $f(x) = x/2$. Se existisse alguma medida finita μ invariante por f, então f seria recorrente para todo $x \in (0, 1]$, μ-q.t.p.. Mas isto é um absurdo, pois para todo $x \in 0$, tem $\lim_n f^n(x) = 0$.*

REFERÊNCIAS

[KOMV] Oliveira, Krerley, Viana, Marcelo.(2014) Fundamentos de Teoria Ergódica, SBM, 2014.

[Deim] Deimling, Klaus.(1943) Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag.

[ReedSimon] Simon, Barry, Reed, Michael. (1972) Methods of Modern Mathematical Physics, Vol 1: Functional Analysis, Academic Express, Inc..

[Shub] Shub, Michael. (1987) Global Stability of Dynamical Systems. Springer-Verlag.