UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

IURY RAFAEL DOMINGOS DE OLIVEIRA

ESFERAS MÍNIMAS DE ÁREA 4π E RIGIDEZ

Maceió
2016

IURY RAFAEL DOMINGOS DE OLIVEIRA

ESFERAS MÍNIMAS DE ÁREA 4π E RIGIDEZ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrúcio Cavalcante

Maceió
2016

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária Responsável: Janaina Xisto de Barros Lima

O48e Oliveira, Iury Rafael Domingos de.
Esferas mínimas de área 4π e rigidez / Iury Rafael Domingos de Oliveira. – 2016.
57 f.

Orientador: Marcos Petrúcio Cavalcante.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 53-54.
Apêndices: f. 55-57.

1. Área de esfera mínima. 2. Rigidez de 3-variedades. 3. Cúspide hiperbólica. 4. Geometria diferencial. I. Título.

CDU: 514.76

Folha de Aprovação

Iury Rafael Domingos de Oliveira

Esferas mínimas de área 4π e rigidez

Dissertação de Mestrado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Maceió, 12 de agosto de 2016.

Marcos P. de A. Cavalcante

Prof. Dr. Marcos Petrúcio Cavalcante (UFAL)
(Orientador)

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório - UFAL
(Examinador Interno)

Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa - UFMG
(Examinador Externo)

Ao meu pai, Israel (in memoriam),

e minhas mães, Lúcia e Pastora.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por sua misericórdia e graça que se renovam a cada manhã em minha vida. A Ele que, através dos olhos de Jesus Cristo, me amou e me chamou.

Agradeço a minha família, em especial a minha mãe e a minha avó, Maria Lúcia e Maria Pastora, que apesar dos infortúnios da vida, lutaram e proporcionaram que eu chegasse até aqui, com amor e educação.

Agradeço a minha namorada e melhor amiga, Maria Letícia, pelo seu amor, paciência, incentivo e tempo que dela foi tomado por conta de teoremas/demonstrações não finalizados, e a sua família pelo carinho e apoio.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Petrúcio Cavalcante, pelas inúmeras conversas e conselhos valiosos à minha formação, assim como a todo corpo docente do Instituto de Matemática UFAL.

Agradeço a eterna turma do CAMAT-UFAL, por fazer do Instituto de Matemática um ambiente divertido, saudável e motivador nos primeiros anos da minha formação. Aos amigos e então companheiros de turma, Micael Dantas, Diego Adauto e Manuel Ceaca, pelos momentos de conversa e incentivo, assim como ao Anderson Lima, Abraão Mendes e Moreno Bonutti pela pronta ajuda durante essa jornada, compartilhando de suas experiências.

Agradeço a CAPES e a FAPEAL pelo suporte financeiro, que contribuiu para a realização desse trabalho.

"O temor ao SENHOR é o princípio de toda a sabedoria,
e o conhecimento do Santo a prudência."
Provérbios 9:10

RESUMO

Seja M uma 3-variedade Riemanniana completa com curvatura seccional entre 0 e 1. Se Σ é uma 2-esfera mínima mergulhada em M com área 4π, então M é isométrica a esfera $\mathbb{S}_1^3$ ou a um quociente de $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$, com a métrica produto. Se M é uma 3-variedade Riemanniana completa com curvatura seccional limitada superiormente por -1 e existe um 2-toro T^2 mergulhado em M com curvatura média constante igual a 1, então T separa M e o seu lado convexo e médio é isométrico a uma cúspide hiperbólica, isto é, é isométrico a $T^2 \times \mathbb{R}$ munido da métrica $e^{-2t}d\sigma_0^2 + dt^2$, onde $d\sigma_0^2$ é uma métrica plana em T^2, e tem curvatura constante -1.

Palavras-chave: Área de esfera mínima, rigidez de 3-variedades, cúspide hiperbólica.

ABSTRACT

Let be M a complete Riemannian 3-manifold with secctional curvature between 0 and 1. If Σ is an embedded minimal 2-sphere in M with area 4π then M is isometric to the unit 3-sphere $\mathbb{S}_1^3$ or to a quocient of $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$, with the product metric. If M is a complete Riemannian 3-manifold with sectional curvature bounded above by -1 and there is a 2-torus T^2 embedded in M with mean curvature 1 then T^2 separates M and its mean convex side is isometric to a hyperbolic cups, *i.e.*, is isometric to a $T^2 \times \mathbb{R}$ with the metric $e^{-2t}d\sigma_0^2 + dt^2$, where $d\sigma_0^2$ is flat on T^2, and has constant curvature -1.

Keywords: Area of minimal sphere, rigidity of 3-manifolds, hyperbolic cusp.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Seja M uma 3-variedade Riemanniana completa. É sabido que limitações na curvatura escalar de M fornece algumas informações sobre o espaço de superfícies mínimas. Vários teoremas de rigidez foram obtidos assumindo a existência de superfícies que minimizam área, em um sentido particular, no espaço ambiente adicionada à condições nas curvaturas de M (Cf. [18], [3] e [4]).

A caráter motivacional, consideramos o caso $n = 2$ e apresentamos um teorema de ridigez de esferas atribuído a E. Calabi, provado em [2]. O teorema trata sobre a determinação de uma cota inferior para o comprimento das geodésicas, considerando que a curvatura seccional do ambiente está entre 0 e 1. Além disso, o resultado caracteriza o ambiente quando supomos a existência de uma geodésica que atinge a cota inferior para comprimento das geodésicas.

Teorema 1 (E. Calabi, [2])**.** *Seja (Σ^2, g) uma esfera 2-dimensional, com métrica de classe C^2, cuja a curvatura Gaussiana de Σ satisfaz $0 \leq K_\Sigma \leq 1$. Então toda geodésica simples fechada γ em Σ tem comprimento maior ou igual a 2π. Se o comprimento de γ é 2π então (Σ^2, g) é isométrica a esfera redonda $(\mathbb{S}^2_1, g_0)$ e γ é um grande círculo.*

Com isso em mente, seja M uma 3-variedade Riemanniana completa com curvatura seccional entre 0 e 1. Supondo a existência de uma 2-esfera mínima mergulhada Σ^2 em M, pelo teorema de Gauss-Bonnet e pela Equação de Gauss, obtemos

$$4\pi = \int_\Sigma K_\Sigma d\Sigma = \int_\Sigma (\det(A) + K) d\Sigma \leq \int_\Sigma d\Sigma = A(\Sigma),$$

onde o Operador de Weingarten A tem determinante não-positivo, pois Σ^2 é mínima. Dessa forma, se Σ^2 tem área 4π demonstraremos o teorema abaixo como o principal resultado deste trabalho devido a Mazet e Rosenberg.

Teorema 2 (Mazet e Rosenberg, [19])**.** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão 3, cuja curvatura seccional $K_M = K$ satisfaz $0 \leq K \leq 1$. Suponha que existe Σ^2 esfera mínima mergulhada em M com área 4π. Então a variedade M é isométrica a esfera $\mathbb{S}^3_1$ ou a um quociente de $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$.*

Na mesma linha do Teorema 2, foi provado em [19] outro teorema de ridigez para o caso que a 3-variedade Riemanniana completa M tem curvatura seccional limitada superiormente por -1. De fato, dizemos que $T^2 \times \mathbb{R}_+$ é um cúspide hiperbólica 3-dimensional se T^2 é um 2-toro e $T^2 \times \mathbb{R}_+$ está munido da métrica Riemanniana $e^{-2t} d\sigma_0^2 + dt^2$, onde

$d\sigma_0^2$ é uma métrica plana em T^2. Dessa maneira, supondo que existe um 2-toro T^2 mergulhado em M com curvatura média constante igual a 1, apresentaremos também a prova do seguinte resultado.

Teorema 3 (Mazet e Rosenberg, [19]). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão 3, cuja curvatura seccional $K_M = K$ satisfaz $K \leq -1$. Suponha que existe um 2-toro T^2 mergulhado em M com curvatura média constante igual a 1. Então T separa M e o seu lado convexo e médio é isométrico a uma cúspide hiperbólica.*

1 PRÓLOGO À GEOMETRIA RIEMANNIANA

Neste capítulo, recordaremos alguns conceitos necessários para o desenvolvimento e compreensão do presente texto. Deste modo, assumiremos alguns fatos básicos de geometria Riemanniana. Além disso, fixaremos notações e convenções a serem utilizadas. Salvo menção contrária, os conceitos e resultados aqui apresentados podem ser encontrados com riqueza de detalhes em [7], [11] e [13].

Ao longo de todo trabalho, as palavras “diferenciável” e “suave” significarão “possuir derivadas contínuas de todas as ordens” e $I \subset \mathbb{R}$ representará um intervalo da reta.

1.1 Definições e fatos básicos

Considere (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. Então, cada ponto $p \in M$ está associado a um produto interno $g_p = \langle\ ,\ \rangle_p$ (o índice p será omitido quando não houver ambiguidades) no espaço tangente a M, denotado por T_pM, onde tal associação varia diferenciavelmente no sentido que se $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ é um sistema de coordenadas locais de uma vizinhança U de p, então

$$g_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$$

é uma aplicação diferenciável em U, com $q \in U$. As funções g_{ij} são os coeficientes da matriz da métrica $g = [g_{ij}]_{ij}$ nas coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ de $p \in M$, e denotaremos por g^{ij} os coeficientes da matriz inversa de g, isto é, $(g_{ij})^{-1} = g^{ij}$.

Além disso, $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ é um referencial móvel em U, isto é, para cada $q \in U$, $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(q), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(q)\}$ é uma base para o espaço tangente T_qM no sistema de coordenadas $\mathbf{x}$, e neste sistema a métrica g é escrita na forma

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j,$$

onde $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ é a base dual de $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ para cada $q \in U$, e $dx_i dx_j$ representa o produto exterior de dx_i por dx_j.

Denotaremos por TM e T_1M, o fibrado tangente de M e fibrado tangente de unitário de M, respectivamente. Isto é,

$$TM = \{(p, v)\ :\ p \in M,\ v \in T_pM\}$$

e

$$T_1M = \{(p, v) \in TM \ : \ |v| = 1\}.$$

Dada $c : [a, b] \to M$ curva diferenciável em (M^n, g), definimos o comprimento de c por

$$\begin{aligned} \ell(c) &= \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \left| \frac{dc}{dt} \right| dt, \end{aligned}$$

Se a curva c possuir velocidade constante igual a 1, isto é, $\left|\frac{dc}{dt}\right| = 1$ para todo $t \in [a, b]$, diremos que c é uma curva normalizada e claramente teremos que $\ell(c) = b - a$. De modo análogo, se $c : [a, b] \to M$ é uma curva diferenciável por partes em (M^n, g), definimos

$$l(c) = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{i} \left| \frac{dc}{dt} \right| dt,$$

onde $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ e $c_{|(t_{i-1}, t_i)}$ é diferenciável.

Sabemos que uma métrica Riemanniana permite definir uma noção de volume em uma variedade Riemanniana orientada. Dessa maneira supondo que (M^n, g) é uma variedade Riemanniana orientada, dado $p \in M$ e $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ coordenadas locais de uma vizinhança U de p na orientação de M, definimos o elemento de volume de M, dM, como a $n-$forma positiva dada por

$$dM = \sqrt{\det g} dx_1 \dots dx_n.$$

Portanto se R é um aberto conexo com fecho compacto contido em $\mathbf{x}(U)$, tal que $\mathbf{x}^{-1}(R)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$ então o volume de R é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(R) &= \int_R dM \\ &= \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det g} dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Para o conjunto de todos os campos de vetores diferenciáveis em M e para o anel das funções reais diferenciáveis definidas em M, usaremos as notações $\mathcal{X}(M)$ e $C^\infty(M)$, respectivamente.

A conexão de Levi-Civita da variedade Riemanniana (M^n, g) será denotada por ∇ e a derivada covariante de $V \in \mathcal{X}(M)$, ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$, será denotada por $\frac{DV}{dt}$.

Relembramos que uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma geodésica se, para todo $t \in I$,

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0.$$

Se $[a,b] \subseteq I$ então a restrição de γ a $[a,b]$ é dita geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Uma propriedade fundamental das geodésicas é que dado $p \in M$ e $v \in T_pM$, existe uma única geodésica γ passando por p com velocidade v. Isto segue do fato que definindo condições para a geodésica, temos que

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$$

é uma equação diferencial de 2ª ordem, no parâmetro t de γ, onde p e v são exatamente as condições iniciais requeridas para a existência e unicidade de γ.

A partir do Teorema de Existência e Unicidade de EDO's, é possível definir a aplicação Exponencial da maneira seguinte: Dado $p \in M$, existe $\mathcal{U} \subset TM$ aberto tal que a aplicação $\exp : \mathcal{U} \to M$ dada por

$$\begin{aligned}\exp(q,v) &= \gamma(1,q,v)\\ &= \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right).\end{aligned}$$

Isto é, cada ponto $(q,v) \in \mathcal{U}$ é associado a uma geodésica $\gamma = \gamma(1,q,v) : (-2,2) \to M$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. A aplicação Exponencial é diferenciável e, na maior parte do texto, utilizaremos a restrição de exp a um aberto do espaço tangente T_qM, ou seja, $\exp_q : B(0,\varepsilon) \subset T_qM \to M$ dada por

$$\exp_q(v) = \exp(q,v),$$

onde $B(0,\varepsilon)$ é a bola aberta de centro na origem de T_qM e raio $\varepsilon > 0$.

Dentre os vários resultados que envolvem a aplicação Exponencial, por exemplo tratando-se da regularização de geodésicas e minimização de comprimentos em apropriados tipos de vizinhanças, citamos abaixo dois resultados importantes.

Proposição 1.1. *Dado $q \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q : B(0,\varepsilon) \subset T_qM \to M$ é um difeomorfismo de $B(0,\varepsilon)$ sobre um aberto de M.*

Demonstração. Cf. [11, Capítulo 3, Proposição 2.9]. □

Lema 1.1 (Gauss)**.** *Sejam $p \in M$ e $v \in T_pM$ tais que $\exp_p v$ esteja definida. Considere $w \in T_pM \approx T_v(T_pM)$. Então*

$$\Big\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \Big\rangle = \langle v, w \rangle\,.$$

Demonstração. Cf. [11, Capítulo 3, Lema 3.5]. □

Uma das principais noções em geometria Riemanniana, senão a principal, é a noção de curvatura, que intuitivamente mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser Euclidiana.

A curvatura R de uma variedade Riemanniana (M^n, g) é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M).$$

Associado a curvatura R, temos definido o tensor Curvatura

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M),$$

dado por

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= \langle R(X,Y)Z, W \rangle \\ &= \left\langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, W \right\rangle. \end{aligned}$$

A curvatura e o tensor de curvatura gozam de interessantes propriedades simétricas, além da multilinearidade com respeito a funções em $C^\infty(M)$.

Intimamente relacionado com a curvatura R, temos a curvatura sectional, definida por Riemann a partir de uma generalização natural da curvatura Gaussiana de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^n$, vejamos. Dado $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real definido por

$$K(p,\sigma) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{|X \wedge Y|^2}$$

é chamado de curvatura seccional de σ em $p \in M$, onde $\{X, Y\} \in T_pM$ é uma base do plano σ e $|X \wedge Y| = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$. Quando não existirem ambiguidades, denotaremos $K(p,\sigma)$ por $K(X,Y)$.

Ao fazermos algumas operações aritméticas com as curvaturas seccionais, estas dão origem à novas noções de curvatura, e duas destas noções em particular são muito importantes, a saber:

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \mathrm{tr}\{z \mapsto R(x,z)x\}$$

e

$$\mathcal{R}(p) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}_p(z_j, z_j)$$

são as curvaturas de Ricci em p na direção de x e a curvatura escalar em p, respectivamente. Dados $x, y \in T_pM$, definimos também o tensor de Ricci em p como

$$\mathrm{Ric}_p(x,y) = \mathrm{tr}\{z \mapsto R(x,z)y\}.$$

Recordamos que dados $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert real de dimensão finita, $A : V \to V$ operador linear auto-adjunto e $B : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilinear associada a A, isto é, $\langle A(X), Y\rangle = B(X, Y)$, o traço do operador linear A é definido como

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i,j}^{n} g^{ij} B(X_i, X_j),$$

onde $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ é uma base de V e $g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle$. Ressaltamos que o traço de um operador não depende da base escolhida, cf. [16].

Desta forma, em um sistema de coordenadas locais $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ em uma vizinhança de $p \in M$, o tensor de Ricci em $(x, y) \in T_pM \times T_pM$ é dado por

$$\mathrm{Ric}_p(x, y) = \sum_{i,j}^{n} g^{ij} \left\langle R\left(x, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) y, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Assim, se $\{z_1, \ldots, z_{n-1}, x = z_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, são válidas as seguintes expressões

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_p(x, x) &= \sum_{i,i\neq n}^{n} \left\langle R\left(x, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) x, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= \sum_{i,i\neq n}^{n} K\left(x, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(p) &= \sum_{j}^{n} \mathrm{Ric}_p(z_j, z_j) \\ &= \sum_{j}^{n} \sum_{i,i\neq j}^{n} \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= \sum_{j}^{n} \sum_{i,i\neq j}^{n} K\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right). \end{aligned}$$

Com a notação acima, se (M^n, g) é a esfera unitária (S^n, g_0) munida com a métrica canônica então $K = 1$, e a denotaremos por $\mathbb{S}^n_1$.

1.2 Imersões Isométricas

Sejam M^n e Σ^k variedades diferenciáveis de dimensões n e k, respectivamente, tal que $k < n$, e considere $f : \Sigma \to M$ uma imersão. Suponha que M^n está munida de uma métrica Riemanniana $g = \langle \cdot , \cdot \rangle$, então diremos que f é uma imersão isométrica se

$$(f^*g)_p(x, y) = \langle df_p(x), df_p(y)\rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in \Sigma$ e $x, y \in T_p\Sigma$. Dessa forma, se $f : \Sigma \to M$ é uma imersão então o pull-back da métrica g de M é uma métrica em Σ, logo f é uma imersão isométrica. Em particular, toda imersão isométrica é uma imersão e, dessa forma, localmente um mergulho.

Seja $f : \Sigma \to M$ uma imersão isométrica. Como usualmente, sempre que não houver perigo de confusão, identificaremos $p \in \Sigma$ com $f(p) \in M$, $x \in T_p\Sigma$ com $df_p(x) \in T_{f(p)}M$ e f^*g com $g = \langle \cdot , \cdot \rangle$.

Considere $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de M. Se X e Y são campos de vetores em Σ, tais que $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ são suas respectivas extensões locais em M, então $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T$ é a conexão de Levi-Civita de Σ. Como $\nabla_X Y$ não depende das extensões escolhidas, escreveremos apenas $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T$.

Fixado $p \in \Sigma$ e dado $\eta \in (T_p\Sigma)^\perp$, a aplicação $\mathrm{II}_\eta : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathrm{II}_\eta(X, Y) = \langle B(X, Y), \eta \rangle ,$$

é a segunda forma fundamental da imersão f, onde $B(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ é uma aplicação bilinear simétrica, e portanto II_η também o é. Dessa forma, nos referiremos a B também como segunda forma fundamental da imersão. Dado $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal em $T_p\Sigma$, definimos a norma ao quadrado da segunda forma fundamental por

$$|B|^2 = \sum_{i,j=1}^{k} |B(E_i, E_j)|^2.$$

Conforme abordado em [11], a forma quadrática associada a II_η está relacionada com uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$, chamada de Operador de Weingarten, dada por

$$A_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T,$$

onde N é uma extensão local de η normal a Σ.

A partir dos objetos definidos é possível obter equações que relacionam a curvatura de Σ e a curvatura de M. Tais equações são chamadas de equações fundamentais de uma imersão isométrica.

Proposição 1.2. *As seguintes equações se verificam:*

1. *Equação de Gauss*

$$\left\langle \bar{R}(X, Y)Z, T \right\rangle = \langle R(X, Y)Z, T\rangle - \langle B(Y, T), B(X, Z)\rangle + \langle B(X, T), B(Y, Z)\rangle$$

2. *Equação de Ricci*

$$\left\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \zeta \right\rangle - \left\langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \right\rangle = \langle [A_\eta, A_\zeta]X, Y\rangle$$

3. *Equação de Codazzi*

$$(\bar{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) = X(B(Y,Z,\eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(X, Y, \nabla_X^{\perp} \eta)$$

onde $[A_\eta, A_\zeta]$ *indica o operador* $A_\eta \circ A_\zeta - A_\zeta \circ A_\eta$.

Demonstração. Cf. [11, Capítulo 6, Proposições 3.1 e 3.4]. □

Na proposição acima, $\bar{\nabla}_X B$ é a derivada covariante da segunda forma fundamental considerada como um tensor e $\nabla_X^{\perp}\eta$ a componente normal de $\bar{\nabla}_X \eta$, chamada de conexão normal. De fato, $\nabla^{\perp}$ possui as propriedades usuais de uma conexão, logo a partir de $\nabla^{\perp}$ fica bem definida a noção de curvatura normal $R^{\perp}$ da imersão. De modo mais explícito, a Equação de Gauss mostra como as curvaturas seccionais de Σ e M variam em termos da segunda forma fundamental.

Lema 1.2 (Equação de Gauss)**.** *Sejam* $p \in \Sigma$ *e* $X, Y \in T_p\Sigma$ *vetores ortonormais. Então*

$$K(X,Y) = \bar{K}(X,Y) + \langle B(X,X), B(Y,Y) \rangle - |B(X,Y)|^2.$$

Demonstração. Cf. [11, Capítulo 6, Teorema 2.5]. □

Sejam $f : \Sigma^n \to M^{n+1}$ uma imersão isométrica e $\eta \in (T_p\Sigma)^{\perp}$, com $|\eta| = 1$. Considere $\{X_1, \ldots, X_n\}$ base ortonormal de $T_p\Sigma$ constituída de autovetores de $A_\eta = A$. Assim temos que $A(X_i) = \lambda_i X_i$ e $B(X_i, X_j) = \delta_{ij}\lambda_i\eta$, logo a equação de Gauss assume a forma

$$K(X_i, X_j) = \bar{K}(X_i, X_j) + \lambda_i\lambda_j.$$

Em particular, se $n = 2$ temos a seguinte relação

$$K(X_1, X_2) = \bar{K}(X_1, X_2) + \det(A).$$

No caso que $M^3 = \mathbb{R}^3$, a curvatura Gaussiana coincide com a curvatura seccional em Σ^2, o que implica o Teorema Egregium de Gauss.

Relembramos que uma imersão isométrica $f : \Sigma^k \to M^n$, com $k < n$, é totalmente geodésica se para todo $\eta \in (T_p\Sigma)^{\perp}$ a segunda forma fundamental II_η é nula, em todo ponto $p \in \Sigma$. Note que isto é equivalente a dizer que dado $p \in \Sigma$ o Operador de Weingarten A_η da imersão é identicamente zero para todo $\eta \in (T_p\Sigma)^{\perp}$.

Uma noção mais fraca que a noção de totalmente geodésica é a de mínima. Dizemos que uma imersão isométrica $f : \Sigma^k \to M^n$, com $k < n$, é mínima se para todo $p \in \Sigma$ e todo $\eta \in (T_p\Sigma)^{\perp}$ temos que $\operatorname{tr} A_\eta = 0$. Tal condição é equivalente a pedir que o vetor

$$\vec{H}(p) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-k} (\operatorname{tr} A_i)\eta_i$$

seja identicamente zero, para todo $p \in \Sigma$, onde $\{\eta_1, \ldots, \eta_{n-k}\}$ é um referencial ortonormal em $(T_p\Sigma)^\perp$ e $A_i := A_{\eta_i}$. O vetor $\overrightarrow{H}$ não depende do referencial escolhido e é chamado de vetor curvatura média da imersão f. Quando mencionarmos a curvatura média da imersão f, estaremos nos referindo a

$$H(p) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n-k} (\operatorname{tr} A_i).$$

Retornando ao caso de codimensão 1, dada uma imersão isométrica $f : \Sigma^n \to M^{n+1}$, note que o vetor curvatura média independe da orientação normal escolhida. De fato, dados $p \in \Sigma$, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ referencial ortonormal em $T_p\Sigma$ e $\eta \in (T_p\Sigma)^\perp$, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A_{-\eta} &= \sum_{i=1}^{n} \langle A_{-\eta}(E_i), E_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \langle A_{\eta}(E_i), E_i \rangle \\ &= -\operatorname{tr} A_\eta. \end{aligned}$$

Portanto temos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H}_{-\eta} &= \frac{1}{n} \operatorname{tr} A_{-\eta}(-\eta) \\ &= \overrightarrow{H}_\eta. \end{aligned}$$

Além disso, dizemos que f é totalmente umbílica, se para todo $p \in \Sigma$, a segunda forma fundamental B de f satisfaz

$$\langle B(X,Y), \eta \rangle (p) = \lambda(p) \langle X, Y \rangle ,$$

com $\lambda(p) \in \mathbb{R}$, $X, Y \in T_p\Sigma$ e $\eta \in \mathcal{X}(\Sigma)^\perp$. Note que isso é equivalente a dizer que

$$-(\bar{\nabla}_X N)^T(p) = \lambda(p) X,$$

isto é, $A_\eta = \lambda(p)\,\mathrm{id}$, para todo $X \in T_p\Sigma$, onde N é uma extensão local de η. Desse modo, temos que a curvatura média da imersão f é dada por

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{n} \operatorname{tr}(\lambda(p)\,\mathrm{id}) \\ &= \lambda(p). \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.3 Variedades completas

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana conexa por caminhos. É conveniente estabelecer uma distância em M. Então dados $p, q \in M$, seja $\Omega_{p,q}$ o conjuntos de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando p à q. Definimos a distância intrínseca $d(p,q)$ como

$$d(p,q) = \inf_{\alpha \in \Omega_{p,q}} \ell(\alpha).$$

Temos que (M, d) é um espaço métrico e a topologia induzida por d coincide com a topologia induzida pelo altas de M. Nesse âmbito, o principal resultado relacionado é o Teorema de Hopf-Rinow, que relaciona a completude de M como espaço métrico e a estendabilidade das geodésicas de M, cf. [11].

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa e considere $\gamma : [0, l] \to M$ uma geodésica normalizada de M partindo de $p \in M$, $\gamma(0) = p$. Se t é suficientemente pequeno, então $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$, isto é, a geodésica γ minimiza distância em $[0, t]$. Se $\gamma([0, t_1])$ não é uma geodésica minimizante, então o mesmo acontece para $\gamma([0, s])$, com $s > t_1$. Dessa forma, o conjunto dos números $t > 0$ tais que $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ é da forma $[0, t_0]$ ou $[0, +\infty)$. No primeiro caso, $\gamma(t_0)$ é chamado de ponto mínimo de p ao longo de γ, no segundo caso dizemos que ponto mínimo não existe.

Estamos interessados na distância de p ao seu ponto mínimo ao longo de γ. De fato, temos que essa distância depende continuamente da direção inicial de γ, vejamos.

Considere a função $f : T_1M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definida por

$$f(\gamma(0), \gamma'(0)) = \begin{cases} t_0, & \text{se } \gamma(t_0) \text{ é o ponto mínimo de } \gamma(0) \text{ ao longo de } \gamma. \\ 0, & \text{se o ponto mínimo ao longo de } \gamma \text{ não existe.} \end{cases}$$

Com a topologia em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ cuja a base de abertos é dada pelos intervalos abertos de $\mathbb{R}$ juntamente com os conjuntos da forma $[a, \infty] = [a, \infty) \cup \{\infty\}$, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.3. *A função f, como definida acima, é contínua.*

Demonstração. Cf. [11, Capítulo 8, Proposição 2.9]. □

1.4 Operadores em Variedades Riemannianas

Nesta seção definiremos algumas funções importantes que serão utilizadas ao longo do presente texto.

Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana, $X \in \mathcal{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$.

Definição 1.1. *O gradiente de f sobre M é o campo vetorial suave* $\operatorname{grad} f$ *em M tal que*

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{grad} f, X\rangle_p &= X_p(f)\\ &= df_p(X),\end{aligned}$$

para todo $p \in M$ e $X \in \mathcal{X}(M)$.

Note que supondo a existência do campo gradiente de f e fixado $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ um sistema de coordendas locais em M, podemos escrever o gradiente de f como

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad} f)_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad X = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

donde obtemos que

$$\langle \operatorname{grad} f, X\rangle_p = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} (\operatorname{grad} f)_i a_j.$$

Pela definição de gradiente, temos que

$$df(X) = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Sendo assim, definindo

$$\operatorname{grad} f := \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1.2}$$

temos que $\operatorname{grad} f$ fica unicamente determinado por tal expressão, portanto segue da mesma a existência. De agora em diante, denotaremos o gradiente de f por ∇f.

Definição 1.2. *A divergência de um campo de vetores X em M é a função diferenciável* $\operatorname{div} X : M^n \to \mathbb{R}$ *dada, para cada $p \in M$, por*

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}\{Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)\}.$$

Fixado $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ um sistema de coordendas locais em M e escrevendo o campo de vetores $X \in \mathcal{X}(M)$ como

$$X = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

temos que a função divergência é dada por

$$\operatorname{div} X = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle. \tag{1.3}$$

Se considerarmos um referencial ortonormal $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ em M, a divergência do campo X é expressa por

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle X, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle X, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i) - \left\langle X, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \right).\end{aligned}$$

Além disso, se $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ é um referencial geodésico em M, isto é, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$, a divergência do campo X é dada por

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i).$$

Definição 1.3. *O Laplaciano de uma função f sobre M é a função diferenciável $\Delta : M \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Em um sistema de coordenadas locais de M, digamos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, o laplaciano de uma função diferenciável f é dado por

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle. \tag{1.4}$$

Se $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ é um referencial geodésico em M, então

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right), \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}
\end{aligned}$$

Proposição 1.4 (Contração da Equação de Ricci)**.** *Seja $f : \Sigma^n \to M^{n+1}$ uma imersão isométrica e $N \in \mathcal{X}(\Sigma)^\perp$ campo normal unitário. Então, se $Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$, vale que*

$$\operatorname{Ric}(Y, N) = ndH(Y) - div_\Sigma(Y),$$

onde o divergente de Y sobre Σ é dado por $\operatorname{div}_\Sigma(Y) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} (\bar{\nabla}_{\partial_i} B)(Y, \partial_j, N).$

Demonstração. De fato, seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial geodésico em Σ. Pela equação de Ricci temos que

$$\left\langle \bar{R}(e_i, Y)e_i, N \right\rangle = (\bar{\nabla}_Y B)(e_i, e_i, N) - (\bar{\nabla}_{e_i} B)(Y, e_i, N).$$

Note que

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_Y B)(e_i, e_i, N) &= Y(B(e_i, e_i, N)) - B(\nabla_Y e_i, e_i, N) - B(e_i, \nabla_Y e_i, N) - B(e_i, e_i, \nabla_Y^\perp N) \\
&= Y(\langle B(e_i, e_i), N \rangle) - B(e_i, e_i, \nabla_Y^\perp N) \\
&= Y\Big(\left\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \right\rangle \Big) - \left\langle (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N, (\bar{\nabla}_Y N)^N \right\rangle \\
&= Y\Big(\left\langle -\bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \right\rangle \Big) - \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \right\rangle \left\langle \bar{\nabla}_Y N, N \right\rangle \\
&= Y\Big(\langle A(e_i), e_i \rangle \Big) - \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, N \right\rangle \frac{1}{2} Y(\langle N, N \rangle) \\
&= Y\Big(\langle A(e_i), e_i \rangle \Big).
\end{aligned}$$

Portanto temos a igualdade

$$\left\langle \bar{R}(e_i, Y)e_i, N \right\rangle = Y\Big(\langle A(e_i), e_i \rangle \Big) - (\bar{\nabla}_{e_i} B)(Y, e_i, N).$$

Realizando a soma em i, isto é, variando os vetores do referencial geodésico de Σ, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(Y, N) &= Y\left(\sum_{i=1}^{n} \langle A(e_i), e_i \rangle \right) - \sum_{i=1}^{n} (\bar{\nabla}_{e_i} B)(Y, e_i, N) \\
&= Y(nH) - \sum_{i=1}^{n} (\bar{\nabla}_{e_i} B)(Y, e_i, N) \\
&= ndH(Y) - \sum_{i=1}^{n} (\bar{\nabla}_{e_i} B)(Y, e_i, N).
\end{aligned}$$

□

2 ESTUDO DAS VARIAÇÕES

Neste capítulo estamos interessados no estudo da evolução da área e da curvatura média de uma variação suave $\phi : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$. A seguinte exposição tem como principais referências [1], [9] e [10].

2.1 Primeira Variação da Área

Considere M^n e Σ^k variedades Riemannianas, com $k < n$, tal que Σ é orientada pelo elemento de volume $d\Sigma$ e seja $f : \Sigma \to M$ uma imersão isométrica.

Uma aplicação diferenciável $\phi : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma variação suave de Σ com suporte compacto e bordo fixo, se

1. $\phi = f$ fora de um conjunto compacto de Σ;
2. $\phi(p, 0) = f(p)$;
3. $\phi(p, t) = p$ para todo $p \in \partial\Sigma$;

e se além disso, ϕ induz uma família $\{\phi_t\}_t$ a 1-parâmetro de deformações de Σ, tal que, a aplicação $\phi_t : \Sigma \to M$, dada por $\phi_t(p) = \phi(p, t)$ é uma imersão, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Chamamos de campo variacional de ϕ o campo de vetores

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{t=0}$$

e dizemos que ϕ é uma variação normal se o campo variacional de ϕ é normal a Σ.

De agora em diante, o índice t será utilizado para denotar quantidades associadas a $\Sigma_t = \phi_t(\Sigma)$.

Dado $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas em Σ, denotando $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ temos que $\phi_t \circ \mathbf{x}$ é um sistema de coordenadas locais em Σ_t tal que

$$g_{ij}(t) = \langle \partial_i \phi_t, \partial_j \phi_t \rangle .$$

Supondo que Σ tem volume finito, temos que o elemento de volume de Σ_t é a k-forma positiva dada por

$$d\Sigma_t = \sqrt{\det g(t)} dx_1 \ldots dx_k,$$

isto é, $d\Sigma_t$ é o elemento de volume da métrica induzida em Σ por ϕ_t, e a área de Σ_t é dada por

$$A(\Sigma_t) = \int_{(\phi_t \circ \mathbf{x})^{-1}(\Sigma_t)} \sqrt{\det g(t)} dx_1 \dots dx_k,$$

onde $g(t)$ denota a matriz $[g_{ij}(t)]$.

Nesta seção estamos interessados em calcular a primeira derivada de $A(\Sigma_t)$.

Primeiramente, observe que se $B : \mathbb{R} \to M_k(\mathbb{R})$ é uma aplicação suave de $\mathbb{R}$ sobre o conjunto $M_k(\mathbb{R})$ das matrizes de coeficientes reais e ordem k, então pela Fórmula de Jacobi, cf. [17, Capítulo 8, Teorema 1], temos que

$$\frac{d}{dt} \det B(t) = \operatorname{tr}\Big(\operatorname{adj}(B(t)) \frac{d}{dt} B(t) \Big),$$

onde $\operatorname{adj} B(t)$ é a matriz adjunta de $B(t)$. Se para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que $B(t)$ é invertível, então

$$\operatorname{adj} B(t) = \det(B(t))(B(t))^{-1}.$$

Portanto, a Fórmula de Jacobi se escreve da seguinte maneira

$$\frac{d}{dt} \det B(t) = \det(B(t)) \operatorname{tr}\Big((B(t))^{-1} \frac{d}{dt} B(t) \Big). \tag{2.1}$$

Como para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ temos que a matriz $[g_{ij}(t)]$ é invertível, então pela equação (2.1), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\det(g(t)) \Big) &= \det(g(t)) \operatorname{tr}\Big(g^{-1}(t) \frac{d}{dt} g(t) \Big) \\ &= \det(g(t)) \Bigg(\sum_{ij} g^{ij}(t) \frac{d}{dt} g_{ij}(t) \Bigg). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Porém, note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{ij}(t) &= \frac{d}{dt} \langle \partial_i \phi_t, \partial_j \phi_t \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_t \phi} \partial_i \phi_t, \partial_j \phi_t \rangle + \langle \partial_i \phi_t, \nabla_{\partial_t \phi} \partial_j \phi_t \rangle . \end{aligned}$$

Pela simetria e pela compatibilidade da conexão Riemanniana, temos que

$$\frac{d}{dt} g_{ij}(t) = \langle \nabla_{\partial_i \phi_t} \partial_t \phi, \partial_j \phi_t \rangle + \Big\langle \partial_i \phi_t, \nabla_{\partial_j \phi_t} \partial_t \phi \Big\rangle .$$

Portanto, podemos reescrever a equação (2.2) como

$$\frac{d}{dt} \det(g(t)) = 2 \det(g(t)) \Bigg(\sum_{ij} g^{ij}(t) \langle \nabla_{\partial_i \phi_t} \partial_t \phi, \partial_j \phi_t \rangle \Bigg).$$

Pela equação (1.3), temos que

$$\frac{d}{dt} \det(g(t)) = 2 \det(g(t)) \operatorname{div}_{\Sigma_t}(\partial_t \phi) \tag{2.3}$$

onde div_{Σ_t} é o divergente sobre Σ_t. Dessa maneira, segue da equação (2.3),

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(d\Sigma_t) &= \frac{d}{dt}\Big(\sqrt{\det(g(t))}\Big)dx_1 \dots dx_k \\
&= \frac{\mathrm{div}_{\Sigma_t}(\partial_t \phi)}{\sqrt{\det(g(t))}} \det(g(t)) dx_1 \dots dx_k \\
&= \mathrm{div}_{\Sigma_t}(\partial_t \phi)\sqrt{\det(g(t))} dx_1 \dots dx_k \\
&= \mathrm{div}_{\Sigma_t}(\partial_t \phi) d\Sigma_t.
\end{aligned}
$$

Portanto, sob as hipóteses supracitadas, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1 (Fórmula da primeira variação)**.**

$$
\frac{\partial}{\partial t} A(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} \mathrm{div}_{\Sigma_t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) d\Sigma_t.
$$

Observe que se $X \in \mathcal{X}(M)$, então podemos decompor o campo vetorial X em suas componentes normais e tangentes ao longo de Σ como $X = X^T + X^N$. Dessa maneira, o divergente sobre Σ satisfaz

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}_\Sigma(X) &= \mathrm{div}_\Sigma(X^T + X^N) \\
&= \mathrm{div}_\Sigma(X^T) + \sum_{ij} g^{ij} \left\langle \nabla_{\partial_i} X^N, \partial_j \right\rangle \\
&= \mathrm{div}_\Sigma(X^T) - \sum_{ij} g^{ij} \left\langle X^N, \nabla^N_{\partial_i} \partial_j \right\rangle \\
&= \mathrm{div}_\Sigma(X^T) - \left\langle X^N, \sum_{ij} g^{ij} \nabla^N_{\partial_i} \partial_j \right\rangle \\
&= \mathrm{div}_\Sigma(X^T) - \left\langle X^N, \sum_{ij} B(\partial_i, \partial_j) \right\rangle \\
&= \mathrm{div}_\Sigma(X^T) - k \left\langle X^N, \vec{H} \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Assim sendo, obtemos

$$
\frac{\partial}{\partial t}(d\Sigma_t) = \left(\mathrm{div}_{\Sigma_t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}^T\right) - k \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}^N, \vec{H}_t \right\rangle \right) d\Sigma_t
$$

e

$$
\frac{\partial}{\partial t} A(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} \left(\mathrm{div}_{\Sigma_t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}^T\right) - k \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}^N, \vec{H}_t \right\rangle \right) d\Sigma_t.
$$

Um corolário interessante segue quando consideramos uma variação suave ϕ com as hipóteses acima e supomos que $\partial\Sigma = \emptyset$. Daí, pelo Teorema da Divergência, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\Sigma_t} \mathrm{div}_{\Sigma_t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}^T\right) d\Sigma_t &= \int_{\partial\Sigma_t} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}^T, \nu \right\rangle d\sigma_t \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por conseguinte, sob as hipóteses anteriormente citadas, se $\partial\Sigma = \emptyset$ obtemos:

Corolário 2.1.

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\Sigma_t) = -k\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}^N, \vec{H}_t \right\rangle d\Sigma_t \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}A(\Sigma_t) = -k\int_{\Sigma_t}\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}^N, \vec{H}_t \right\rangle d\Sigma_t. \tag{2.5}$$

2.2 Primeira Variação da Curvatura Média

Nesta seção estamos interessados em calcular a fórmula da primeira variação da curvatura média. Por simplicidade, vamos considerar apenas o caso de codimensão 1.

Seja $f : \Sigma^n \to M^{n+1}$ uma imersão isométrica e N um campo local de vetores normais unitário em Σ.

Considere $\phi : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma variação suave de Σ com suporte compacto e bordo fixo. Fixado $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em Σ, utilizaremos novamente o índice t para denotar quantidades associadas a $\Sigma_t = \phi_t(\Sigma)$.

No que segue, faremos uso da convenção de somas de Einstein. Por exemplo, temos que

$$H = \frac{1}{n}g^{ij}\langle B_{ij}, N\rangle$$

é a curvatura média de Σ, onde $B_{ij} := B(\partial_i, \partial_j)$, para $1 \le i, j \le n$. Para facilitar a notação, considere nesta seção

$$\partial_i := \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad \partial_t := \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, podemos decompor o campo variacional de ϕ em suas componentes tangentes e normais ao longo de Σ_t,

$$\partial_t = \partial_t^\top + \rho_t N_t,$$

onde ρ_t é a função definida por $\rho_t = \langle \partial_t, N_t\rangle$.

Para cumprimos o objetivo de estudar a evolução da curvatura média da variação ϕ, precisaremos calcular a derivada em relação a variável t de objetos geométricos envolvidos.

De fato, omitindo o ponto t e transpondo para a notação adotada acima, como $(\phi_t \circ \mathbf{x})$ é um sistema de coordenadas locais em Σ_t e pela equação (2.2), temos que as seguintes equações:

$$\partial_t g_{ij} = \langle \nabla_{\partial_t} \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial_t} \partial_j \rangle\,, \tag{2.6}$$

$$\partial_t g^{ij} = -2g^{ik} g^{jl} \langle \nabla_{\partial_k} \partial_t, \partial_l \rangle\,, \tag{2.7}$$

$$\partial_t (\det g) = (g^{ij} \partial_t) \det g. \tag{2.8}$$

Dessa maneira, como $nH_t = g^{ij} \langle -\nabla \partial_i N, \partial_j \rangle$, temos que

$$n\partial_t H_t = \partial_t g^{ij} \langle \nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j \rangle + g^{ij} \langle -\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j \rangle + g^{ij} \langle -\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_t} \partial_j \rangle\,.$$

Porém, pela equação (2.7), temos

$$n\partial_t H_t = -2g^{ik} g^{jl} \langle \nabla_{\partial_k} \partial_t, \partial_l \rangle \langle -\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j \rangle + g^{ij} \langle -\nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j \rangle + g^{ij} \langle -\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_t} \partial_j \rangle\,.$$

Como $(f \circ \mathbf{x})$ é um sistema de coordenadas locais em Σ_t, então

$$\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_t} N_t - \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_i} N_i = R(\partial_t, \partial_i) N_t.$$

Logo,

$$\begin{aligned} n\partial_t H_t = -2g^{ik} g^{jl} \langle \nabla_{\partial_k} \partial_t, \partial_l \rangle \langle -\nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j \rangle + g^{ij} \langle R(\partial_t, \partial_i) N_t, \partial_j \rangle \\ - g^{ij} \langle \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_t} N_t, \partial_j \rangle + g^{ij} \langle -\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_t} \partial_j \rangle\,. \end{aligned}$$

Porém, note que escrevendo em coordenadas $\nabla_{\partial_i} N_t$ temos

$$\nabla_{\partial_i} N_t = g^{jl} \langle \nabla_{\partial_i} N_t, \partial_j \rangle \partial_l, \tag{2.9}$$

então, utilizando a equação anterior e trocando k por j,

$$\begin{aligned} n\partial_t H_t &= 2g^{ij} \left\langle \nabla_{\partial_j} \partial_t, \nabla_{\partial_i} N_t \right\rangle + \mathrm{Ric}(\partial_t, N_t) - g^{ij} \langle \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_t} N_t, \partial_j \rangle + g^{ij} \langle -\nabla_{\partial_i} N_t, \nabla_{\partial_t} \partial_j \rangle \\ &= g^{ij} \left\langle \nabla_{\partial_j} \partial_t, \nabla_{\partial_i} N_t \right\rangle + \mathrm{Ric}(\partial_t, N_t) - g^{ij} \langle \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_t} N_t, \partial_j \rangle\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_t} N_t &= g^{jl} \langle \nabla_{\partial_t} N_t, \partial_j \rangle \partial_l \\ &= -g^{jl} \langle N_t, \nabla_{\partial_t} \partial_j \rangle \partial_l \\ &= -g^{jl} \left\langle N_t, \nabla_{\partial_j} \partial_t \right\rangle \partial_l. \end{aligned}$$

Note que como $\langle N_t, N_t \rangle = 1$, temos que $\nabla_{\partial_i} N_t$ e $\nabla_{\partial_t} N_t$ são tangentes a Σ_t. Então decompondo $\partial_t = \partial_p^\top + \rho_t N_t$, temos

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\partial_t} N_t &= -g^{jl}\left\langle N_t, \nabla_{\partial_j}\partial_t\right\rangle \partial_l \\
&= -g^{jl}\left\langle N_t, \nabla_{\partial_j}(\partial_t^\top + \rho_t N_t)\right\rangle \partial_l \\
&= -g^{jl}\left\langle N_t, \nabla_{\partial_j}\partial_t^\top\right\rangle \partial_l - g^{jl}\left\langle N_t, \nabla_{\partial_j}\rho_t N_t\right\rangle \partial_l \\
&= -g^{jl}\,\mathrm{II}_t(\partial_j, \partial_t^\top)\partial_l - g^{jl}\partial_j(\rho_t)\partial_l - g^{jl}\rho_t \left\langle N_t, \nabla_{\partial_l} N_t\right\rangle \partial_l \\
&= -g^{jl}\,\mathrm{II}_t(\partial_j, \partial_t^\top)\partial_l - g^{jl}\partial_j(\rho_t)\partial_l,
\end{aligned}
$$

onde II_t é a segunda forma fundamental de Σ_t. Pela simetria de II_t e sabendo por (1.2) que $\nabla^{\Sigma_t} = g^{jl}\partial_j(\rho_t)\partial_l$ é o gradiente de ρ_t em Σ_t nas coordenadas $(\phi_t \circ \mathbf{x})$, então

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\partial_t} N_t &= -g^{jl}\,\mathrm{II}_t(\partial_j, \partial_t^\top)\partial_l - g^{jl}\partial_j(\rho_t)\partial_l \\
&= -g^{jl}\,\mathrm{II}_t(\partial_t^\top, \partial_j)\partial_l - \nabla^{\Sigma_t}\rho_t \\
&= -g^{jl}\left\langle \nabla_{\partial_t^\top}\partial_j, N_t\right\rangle \partial_l - \nabla^{\Sigma_t}\rho_t \\
&= g^{jl}\left\langle \nabla_{\partial_t^\top}\partial_l N_t, \partial_j\right\rangle - \nabla^{\Sigma_t}\rho_t \\
&= \nabla_{\partial_t^\top} N_t - \nabla^{\Sigma_t}\rho_t.
\end{aligned}
$$

Tomando $\nabla_{\partial_t} N_t = \nabla_{\partial_t^\top} N_t - \nabla^{\Sigma_t}\rho_t$ na equação (2.10), segue que

$$
n\partial_t H_t = g^{ij}\left\langle \nabla_{\partial_j}\partial_t, \nabla_{\partial_i} N_t\right\rangle + \mathrm{Ric}(\partial_t, N_t) - g^{ij}\left\langle \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_t^\top} N_t, \partial_j\right\rangle + g^{ij}\left\langle \nabla_{\partial_i}\nabla^{\Sigma_t}\rho_t, \partial_j\right\rangle. \tag{2.11}
$$

Fazendo $\partial_t = \partial_t^\top + \rho_t N_t$, obtemos

$$
\begin{aligned}
n\partial_t H_t = g^{ij}\left\langle \nabla_{\partial_j}\partial_t^\top, \nabla_{\partial_i} N_t\right\rangle + g^{ij}\left\langle \nabla_{\partial_j} N_t, \nabla_{\partial_i} N_t\right\rangle \rho_t + \mathrm{Ric}(\partial_t^\top, N_t) + \mathrm{Ric}(N_t, N_t)\rho_t \\
- g^{ij}\left\langle \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_t^\top} N_t, \partial_j\right\rangle + g^{ij}\left\langle \nabla_{\partial_i}\nabla^{\Sigma_t}\rho_t, \partial_j\right\rangle, \quad (2.12)
\end{aligned}
$$

donde,

$$
\begin{aligned}
n\partial_t H_t = \mathrm{Ric}(\partial_t^\top, N_t) + g^{ij}\left\langle \nabla_{\partial_j}\partial_t^\top, \nabla_{\partial_i} N_t\right\rangle - g^{ij}\left\langle \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_t^\top} N_t, \partial_j\right\rangle \\
+ (\mathrm{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2 + \Delta_{\Sigma_t})\rho_t. \quad (2.13)
\end{aligned}
$$

Pela compatibilidade da métrica, e denotando $L_{\Sigma_t} := \mathrm{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2 + \Delta_{\Sigma_t}$, temos

$$
\begin{aligned}
n\partial_t H_t = \mathrm{Ric}(\partial_t^\top, N_t) + g^{ij}\left\langle \nabla_{\partial_j}\partial_t^\top, \nabla_{\partial_i} N_t\right\rangle - g^{ij}\partial_i\Big(\left\langle \nabla_{\partial_t^\top} N_t, \partial_j\right\rangle\Big) \\
+ g^{ij}\left\langle \nabla_{\partial_t^\top} N_t, \nabla_{\partial_i}\partial_j\right\rangle + L_{\Sigma_t}\rho_t. \quad (2.14)
\end{aligned}
$$

Pela simetria da segunda forma fundamental, considere as seguintes equações:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{\partial_t^\top} N_t, \nabla_{\partial_i}\partial_j\right\rangle &= \left\langle \nabla_{\partial_t^\top} N_t, (\nabla_{\partial_i}\partial_j)^\top + \left\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, N_t\right\rangle N_t\right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_{\partial_t^\top} N_t, (\nabla_{\partial_i}\partial_j)^\top\right\rangle + \left\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, N_t\right\rangle \left\langle \nabla_{\partial_t^\top} N_t, N_t\right\rangle \\
&= -\left\langle \nabla_{\partial_t^\top}(\nabla_{\partial_i}\partial_j)^\top, N_t\right\rangle + \left\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, N_t\right\rangle \frac{1}{2}\partial_t^\top \left\langle N_t, N_t\right\rangle \\
&= -\left\langle \nabla_{\partial_t^\top}(\nabla_{\partial_i}\partial_j)^\top, N_t\right\rangle.
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

e

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{\partial_j}\partial_t^\top, \nabla_{\partial_i}N_t \right\rangle &= \partial_j\Big(\left\langle \partial_t^\top, \nabla_{\partial_i}N_t \right\rangle \Big) - \left\langle \partial_t^\top, \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}N_t \right\rangle \\
&= \partial_j\Big(\left\langle \partial_t^\top, \nabla_{\partial_i}N_t \right\rangle \Big) - \left\langle \partial_t^\top, \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}N_t \right\rangle \\
&= \partial_j\Big(\left\langle \partial_t^\top, \nabla_{\partial_i}N_t \right\rangle \Big) - \partial_i\Big(\left\langle \partial_t^\top, \nabla_{\partial_j}N_t \right\rangle \Big) + \left\langle \nabla_{\partial_i}\partial_t^\top, \nabla_{\partial_j}N_t \right\rangle \\
&= \left\langle (\nabla_{\partial_i}\partial_t^\top)^\top, \nabla_{\partial_j}N_t \right\rangle \\
&= \left\langle \partial_j, \nabla_{(\nabla_{\partial_i}\partial_t^\top)^\top}N_t \right\rangle \\
&= -\left\langle \nabla_{(\nabla_{\partial_i}\partial_t^\top)^\top}\partial_j, N_t \right\rangle. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Substituindo as equações (2.15) e (2.16) na equação (2.14), obtemos

$$\begin{aligned}
n\partial_t H_t = \mathrm{Ric}(\partial_t^\top, N_t) \\
+ g^{ij}\Bigg(\partial_i\Big(\left\langle \nabla_{\partial_t^\top}\partial_j, N_t \right\rangle \Big) - \left\langle \nabla_{(\nabla_{\partial_i}\partial_t^\top)^T}\partial_j, N_t \right\rangle - \left\langle \nabla_{\partial_t^\top}(\nabla_{\partial_i}\partial_j)^T, N_t \right\rangle \Bigg) \\
+ L_{\Sigma_t}\rho_t. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Sendo $\nabla_{\partial_i}N_t$ é tangente a Σ_t, então

$$\left\langle \nabla_{\partial_j^\top}\partial_j, \nabla^\perp_{\partial_i}N_t \right\rangle = 0.$$

Dessa forma, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, temos que

$$(\nabla_{\partial_i}B)(\partial_t^\top, \partial_j, N_t) = \partial_i\Big(\left\langle \nabla_{\partial_t^\top}\partial_j, N_t \right\rangle \Big) - \left\langle \nabla_{(\nabla_{\partial_i}\partial_t^\top)^T}\partial_j, N_t \right\rangle - \left\langle \nabla_{\partial_t^\top}(\nabla_{\partial_i}\partial_j)^T, N_t \right\rangle.$$

Portanto,

$$n\partial_t H_t = \mathrm{Ric}(\partial_t^\top, N_t) + \mathrm{div}_{\Sigma_t} B(\partial_t^\top) + L_{\Sigma_t}\rho_t. \qquad (2.18)$$

Pela contração da equação de Codazzi (1.4), temos que

$$ndH(\partial_t^\top) = \mathrm{Ric}(\partial_t^\top, N_t) + div_{\Sigma_t}B(\partial_t^\top).$$

Substituindo na equação (2.18), segue o seguinte resultado:

Teorema 2.2 (Fórmula da variação da curvatura média)**.**

$$\frac{\partial H}{\partial t} = dH(\partial_t^\top) + \frac{1}{n}L_{\Sigma_t}\rho_t.$$

3 RESULTADO DE RIGIDEZ EM DIMENSÃO 2

O objetivo principal deste capítulo é provar um teorema de ridigez para superfícies, a partir da limitação da curvatura Gaussiana, obtendo uma cota inferior para os comprimentos de geodésicas fechadas em uma 2-variedade compacta simplesmente conexa. Tal teorema foi provado em [2] e os autores atribuem o resultado a E. Calabi.

3.1 Lema técnico

Na presente seção, provaremos um lema de EDO's que será usado de maneira fundamental na prova do teorema de E. Calabi. De modo à simplificar notação, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ denotaremos por $[\alpha, \beta]$ (respec. $(\alpha, \beta]$) o intervalo $[\alpha, \beta]$ (respec. $(\alpha, \beta]$) se $\beta < +\infty$ ou o intervalo $[\alpha, \beta)$ (respec. (α, β)) se $\beta = +\infty$.

Lema 3.1. *Seja $K \in L^\infty([0, +\infty))$ tal que $0 \leq K(t) \leq 1$, para todo $t \in [0, +\infty)$. Considere y uma solução do problema*

$$y''(t) + K(t)y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{3.1}$$

Denote por β o menor zero positivo de y, isto é, $y(\beta) = 0$ e $y(t) \neq 0$ para $t \in (0, \beta)$, sendo possível que $\beta = +\infty$, ou seja $y(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, +\infty)$.

Então $0 \leq -y'(t) \leq 1$, para todo $t \in [0, \beta]$. Se $y'(t_0) = -1$ para algum $t_0 \in [0, \beta]$, então $t_0 = \beta < +\infty$, $\pi/2 \leq t_0 = \beta$,

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \beta - \pi/2] \\ \cos(t - (\beta - \pi/2)), & t \in (\beta - \pi/2, \beta] \end{cases} \quad e \quad K(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \beta - \pi/2] \\ 1, & t \in (\beta - \pi/2, \beta] \end{cases}.$$

Mais ainda, se $K(t)$ é contínua e $y'(t_0) = -1$ para algum $t_0 \in [0, \beta]$, então $t_0 = \beta = \pi/2$,

$$y(t) = \cos(t) \quad e \quad K(t) = 1, \quad \forall t \in [0, \pi/2].$$

Demonstração. Dado $t \in [0, \beta]$, temos que $y'' = -Ky \leq 0$ pois $K \geq 0$ e $y \geq 0$ em $[0, \beta]$, já que $y(0) = 1$. Dessa forma, y' é uma função não-crescente em $[0, \beta]$. Como $y'(0) = 0$, segue-se que $y' \leq 0$ para todo $t \in [0, \beta]$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\left(y^2 + (y')^2\right)' &= 2yy' + 2y'y'' \\
&= 2yy' - 2y'Ky \\
&= 2yy'(1-K) \\
&\leq 0,
\end{aligned}
$$

em $[0, \beta)$, pois $y' \leq 0$, $y \geq 0$ e $K \leq 1$ nesse intervalo. Dessa maneira, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{d}{ds}\Big(((y(s))^2 + (y'(s))^2\Big)ds &= \Big[(y(s))^2 + (y'(s))^2\Big]_0^t \\
&= (y(t))^2 + (y'(t))^2 - 1 \\
&\leq 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, para $t \in [0, \beta]$,

$$
(y(t))^2 + (y'(t))^2 \leq 1. \tag{3.2}
$$

Por outro lado, a equação (3.2) implica que $-1 \leq y' \leq 1$ em $[0, \beta]$. Como $y' \leq 0$ nesse mesmo intervalo, segue que $0 \leq -y' \leq 1$, em $[0, \beta]$.

Suponha que existe $t_0 \in [0, \beta]$ tal que $y'(t_0) = -1$. Então, pela equação (3.2), $y(t_0) = 0$ onde $t_0 \neq 0$ pois $y(0) = 1$. Portanto pela definição de β, temos que $\beta = t_0 < +\infty$.

Sendo $K \in L^\infty([0, +\infty))$ e y suficientemente regular, pela equação (3.2), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^\beta 2y(s)y'(s)(1 - K(s))ds &= \int_0^\beta \frac{d}{ds}\Big(((y(s))^2 + (y'(s))^2\Big)ds \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Mas $2yy'(1-K) \leq 0$ em $[0, \beta]$, logo $2yy'(1-K) = 0$ em $[0, \beta]$. Como $y > 0$ em $[0, \beta)$, então $y'(1-K) \equiv 0$ em $[0, \beta)$.

Pelo que foi visto acima, y' é não-decrescente e $-1 \leq y' \leq 0$ em $[0, \beta)$, então existe $t_1 \in [0, \beta)$ tal que $y' \equiv 0$ em $[0, t_1]$ e $-1 < y' < 0$ em (t_1, β). De fato, sempre podemos tomar $t_1 = 0$ e se existe $t_2 \in (t_1, \beta)$ tal que $y'(t_2) = -1$, novamente pela equação (3.2), obtemos que $y(t_2) = 0$, mas isso contradiz a minimalidade de β.

Dessa maneira, como $y(0) = 1$ e $y' \equiv 0$ em $[0, t_1]$, então $y \equiv 1$ em $[0, t_1]$, donde $K \equiv 0$ em $[0, t_1]$, pois y satisfaz a equação (3.1). Por outro lado, como $-1 < y' < 0$ em (t_1, β) e

$y'(1-K) \equiv 0$ em $[0, \beta)$ então $K \equiv 1$ em (t_1, β).

Considere o seguinte problema

$$y'' = y', \quad y'(t_1) = 0, \quad y(t_1) = 1.$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de EDO's, $y(t) = \cos(t - t_1)$ em $\mathbb{R}$. Como $y(\beta) = \cos(\beta - t_1) = 0$, então, pela definição de β, $t_1 = \beta - \pi/2 \geq 0$. Como $y'(\beta) = -1$ e vale que $y'(1-K) \equiv 0$, então $K(\beta) \equiv 1$. Portanto,

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \beta - \pi/2] \\ \cos(t - (\beta - \pi/2)), & t \in (\beta - \pi/2, \beta] \end{cases} \quad \text{e} \quad K(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \beta - \pi/2] \\ 1, & t \in (\beta - \pi/2, \beta] \end{cases}.$$

Se K é contínua, então ou $K \equiv 0$ ou $K \equiv 1$ em $[0, \beta]$. Se $K \equiv 0$, então $y \equiv 1$ em $[0, \beta]$. Mas existe $t_0 \in [0, \beta]$ com $y'(t_0) = -1$, por hipótese. Absurdo.

Logo $K \equiv 1$ em $[0, \beta]$, o que implica que $y(t) = \cos(t - (\beta - \pi/2))$ em $[0, \beta]$. Como $y(0) = 1$, então $\beta = \pi/2 + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Sendo β o menor zero positivo de y, então $\beta = \pi/2$.

□

3.2 O teorema de rigidez de E. Calabi

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana tal que a métrica $g \in C^2$ com cuvartura seccional positiva. A determinação de uma cota inferior para a distância de um ponto ao seu cut locus depende da determinação de uma conta inferior para os comprimentos das geodésicas fechadas de M. Desse modo, considerando $n = 2$, apresentaremos um teorema de rigidez que trata sobre a determinação de uma cota inferior para o comprimento das geodésicas. O seguinte resultado provado em [2] e é atribuído a E. Calabi.

Teorema 3.1 (E. Calabi, [2]). *Seja (Σ^2, g) uma esfera 2-dimensional, com métrica Riemanniana de classe C^2, cuja a curvatura Gaussiana K de Σ satisfaz $0 \leq K \leq 1$. Então toda geodésica simples fechada γ em Σ tem comprimento maior ou igual a 2π. Se o comprimento de γ é 2π, então (Σ^2, g) é isométrica a esfera redonda $(\mathbb{S}^2_1, g_0)$ e γ é um grande círculo.*

Demonstração. Seja $c : [0, l] \to \Sigma^2$ uma parametrização por comprimento de arco da geodésica γ. Considere $\eta(0) = \eta(c(0)) \in T_{c(0)}\Sigma^2$ vetor unitário e ortogonal a $c'(0) \in T_{c(0)}\Sigma^2$. Fazendo o transporte paralelo de $\eta(0)$ ao longo de c, sendo Σ^2 orientável, temos bem definido um campo normal unitário η a geodésica γ, ao longo de c.

Para cada $s \in [0, l]$, considere a geodésica α_s partindo de $c(s)$ dada por

$$t \mapsto \exp_{c(s)} t\eta(s), \quad t \in [0, +\infty).$$

Como Σ^2 é compacta então o diâmetro de Σ^2 é finito, logo, para cada $s \in [0, l]$, existe o ponto mínimo de $c(s)$ ao longo da geodésica α_s. Seja $\beta(s)$ a distância de $c(s)$ ao seu ponto mínimo ao longo da geodésica α_s. Pela Proposição 1.3, segue que $\beta : [0, l] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, pois $\beta = f \circ \theta$, onde $\theta : [0, l] \to T_1\Sigma^2$ é uma aplicação contínua dada por

$$\begin{aligned} s \ \mapsto \ \theta(s) \ &= (\alpha_s(0), \alpha_s'(0)) \\ &= (c(s), \eta(s)), \end{aligned}$$

e f é a função contínua dada na Proposição 1.3.

Denote por M a região de Σ^2 limitada pela geodésica γ com normal unitário interior η e considere a seguinte aplicação

$$F(s, t) = \exp_{c(s)}(t\eta(s)), \quad 0 \leq s \leq L, \quad 0 \leq t \leq \beta(s).$$

Segue que (s, t) é um sistema de coordenadas da região M, chamado de coordenadas de Fermi. De fato, sendo a geodésica γ uma subvariedade fechada de Σ^2, dado $q \in M \setminus \gamma$ existe $p_q \in \gamma$ tal que

$$d(p_q, q) = \operatorname{dist}(q, \gamma).$$

Pelo Teorema de Hopf-Rinow, existe $\alpha : [0, a] \to \Sigma^2$ geodésica minimizante normalizada tal que $\alpha(0) = p_q$ e $\alpha(a) = q$, onde $a = \operatorname{dist}(q, p_q)$.

Afirmação. $\alpha'(0)$ é ortogonal a $T_{p_q}\gamma$.

Suponha, por contradição, que $\alpha'(0)$ não é ortogonal a $T_{p_q}\gamma$. Sem perda de generalidade, seja $v \in T_{p_q}\gamma$ tal que $\langle \alpha'(0), v \rangle > 0$ e considere $v(t)$ o transporte paralelo de v ao longo da geodésica α, com $v(0) = v$. Considere o seguinte campo de vetores ao longo de α,

$$X(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2a} t\right) v(t).$$

Observe que $X(0) = v$ e $X(a) = 0$. Pela Fórmula da Primeira Variação da Energia,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E'(0) &= -\int_0^a \left\langle X(t), \frac{D}{dt}\frac{d\alpha}{dt}(t) \right\rangle dt - \left\langle X(0), \frac{d\alpha}{dt}(0) \right\rangle + \left\langle X(a), \frac{d\alpha}{dt}(a) \right\rangle \\ &= -\langle v, \alpha'(0) \rangle \\ &< 0. \end{aligned}$$

Isto é, E é decrescente em uma vizinhança de 0. Logo existe uma curva ζ da variação com energia menor que a energia de α, ligando q a um ponto de γ, distinto de p_q.

Porém, isto contradiz o fato de $\ell(\alpha) = \mathrm{dist}(p, \gamma)$, pois como α é geodésica minimizante normalizada, temos que

$$\ell^2(\zeta) \leq E(\zeta) < E(\alpha) = \ell^2(\alpha).$$

Portanto, $\alpha'(0)$ é ortogonal a $T_{p_q}\gamma$, o que conclui a afirmação.

Seja $s_q \in [0, l]$ tal que $c(s_q) = p_q$ e $\eta(s_q)$ vetor normal unitário, como definido acima. Sendo $\dim(T_{c(s_q)}\gamma)^\perp = 1$, então $\alpha'(0) = \eta(s_q)$. Logo, pelo Teorema de Existência e Unicidade de EDO's, temos que

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \exp_{c(s_q)} t\eta(s_q)\\ &= \alpha_{s_q}(t),\end{aligned}$$

donde $\alpha_{s_q}(a) = q$, sendo assim $F(s_q, a) = q$, onde $a = \mathrm{dist}(q, c(s_q))$. Pela arbitrariedade de $q \in M \setminus \gamma$, isto mostra que (s, t) é um sistema de coordenadas da região M.

Agora estaremos interessados em calcular a métrica, a curvatura Gaussiana e o elemento de volume de M segundo as coordenadas (s, t). Iniciaremos pelos coeficientes da métrica. De fato, omitindo o ponto s, por definição, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) &= dF_{(s,t)}(1,0)\\ &= d(\exp_c)_{(t\eta)}(t\eta').\end{aligned}$$

Daí, segue que coeficiente g_{11} é dado por

$$g_{11} = \left|\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)\right|^2 > 0,$$

pois F é um sistema de coordenadas de M. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}(s,t) &= dF_{(s,t)}(0,1)\\ &= d(\exp_c)_{(t\eta)}(\eta).\end{aligned}$$

Pelo Lema de Gauss 1.1, obtemos que

$$\begin{aligned}g_{22} &= \left\langle d(\exp_c)_{(t\eta)}(\eta), d(\exp_c)_{(t\eta)}(\eta)\right\rangle\\ &= \frac{1}{t^2}\left\langle d(\exp_c)_{(t\eta)}(t\eta), d(\exp_c)_{(t\eta)}(t\eta)\right\rangle\\ &= \langle \eta, \eta\rangle\\ &= 1,\end{aligned}$$

sempre que $t \neq 0$. Se $t = 0$, segue diretamente da Proposição 1.1 que $g_{22} = 1$. Ademais, novamente pelo Lema de Gauss, para $t \neq 0$, temos

$$
\begin{aligned}
g_{12} &= \left\langle d(\exp_c)_{(t\eta)}(t\eta'), d(\exp_c)_{(t\eta)}(\eta) \right\rangle \\
&= \frac{1}{t} \left\langle d(\exp_c)_{(t\eta)}(\eta'), d(\exp_c)_{(t\eta)}(t\eta) \right\rangle \\
&= \langle \eta, \eta' \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

pois $|\eta| = 1$. Para $t = 0$ segue diretamente da definição que $g_{12} = 0$. Portanto, nas coordenadas (s, t) temos que

$$g = E^2 ds^2 + dt^2, \quad \text{onde} \quad E(s,t) := \left| \frac{\partial F}{\partial s}(s,t) \right|.$$

Daí, segue que $\sqrt{\det g} = E$. Logo o elemento de área nas coordenadas (s, t) é dado por

$$dA = E ds dt.$$

Como (s, t) coordenadas ortogonais em M vale a seguinte caracterização, cf. [12, Capítulo 4, Seção 3, Exercício 1],

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left\{ \left(\frac{(g_{11})_t}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right)_t + \left(\frac{(g_{22})_s}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \right)_s \right\}.$$

Denote $\dfrac{\partial F}{\partial s}$ por $\partial_s F$. Como $f_{22} = 1$ então

$$
\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{2E} \left(\frac{(|\partial_s F|^2)_t}{|\partial_s F|} \right)_t \\
&= -\frac{1}{2E} \left(\frac{2|\partial_s F||\partial_s F|_t}{|\partial_s F|} \right)_t \\
&= -\frac{1}{E} \left| \frac{\partial F}{\partial s} \right|_{tt} \\
&= -\frac{E_{tt}}{E}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a curvatura Gaussiana satisfaz

$$E_{tt} + KE = 0.$$

Mostraremos agora que a função E satisfaz as consições requeridas para o Lema 3.1. De fato, se $\alpha : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ é um caminho diferenciável, satisfazendo $\alpha(0) = (s, 0)$ e

$\alpha'(0) = (1, 0)$, então

$$\begin{aligned} dF_{(s,0)}(1,0) &= \frac{d}{dh}\Big|_{h=0} F \circ \alpha(h) \\ &= \frac{d}{dh}\Big|_{h=0} \exp_{c(s+h)} 0 \\ &= \frac{d}{dh}\Big|_{h=0} c(s+h) \\ &= c'(s). \end{aligned}$$

Logo, $E(s, 0) \equiv 1$ para todo $s \in [0, l]$, pois c é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco. Por conseguinte, temos que $E_t(s, 0) \equiv 0$, pois calculando a derivada de E com relação a variável t, temos que

$$E_t = \frac{\frac{d}{dt} \langle \partial_s F, \partial_s F \rangle}{2\left|\partial_s F\right|},$$

donde para $t = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \partial_s F, \partial_s F \rangle &= 2 \langle \nabla_{\partial_t F} \partial_s F, \partial_s F \rangle \Big|_{t=0} \\ &= 2 \langle \nabla_\eta c', c' \rangle \\ &= \eta(\langle c', c' \rangle) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois c é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco. Então fixado $s \in [0, l]$, defina

$$y(t) := E(s, t).$$

Dessa forma a função y satisfaz temos que $y'' + Ky = 0$, com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, como no Lema 3.1. Pelo Teorema de Gauss-Bonnet, temos que

$$2\pi = \int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds,$$

onde k_g é curvatura geodésica de ∂M. Como F é sobrejetiva temos que o bordo de M é formado apenas pela geodésica γ, sendo assim $k_g = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} 2\pi &= \int_M K dA \\ &= \int_0^l \int_0^{\beta(s)} -\frac{E_{tt}}{E} E dt ds \\ &= \int_0^l -E_t \Big|_0^{\beta(s)} ds \\ &= \int_0^l -E_t(s, \beta(s)) ds \end{aligned}$$

Como $E(s,t) > 0$, então pelo Lema 3.1 temos que $0 \leq -E_t \leq 1$ para todo $0 \leq s \leq l$, já que neste caso $\beta(s)$ não é um zero de E. Dessa maneira, segue que

$$\begin{aligned}2\pi &= \int_0^l -E_t(s,\beta(s))ds \\ &\leq \int_0^l ds \\ &= l.\end{aligned}$$

Portanto, toda geodésica simples fechada em Σ^2 tem comprimento maior ou igual a 2π.

Se vale a igualdade $l = 2\pi$, então $-E_t(s,\beta(s)) = 1$, para todo $s \in [0,l]$. Como a métrica $g \in C^2$ temos que a curvatura Gaussiana K é contínua. Logo, pelo Lema 3.1, temos que

$$\beta(s) = \pi/2, \quad K(s,t) = 1 \quad \text{e} \quad E(s,t) = \cos(t)$$

para todo $s \in [0,l]$ e $t \in [0,\pi/2]$. Portanto M é isométrica a um hemisfério de $\mathbb{S}^2_1$. Fazendo o mesmo estudo para a região de Σ^2 limitada por γ com normal interior $-\eta$, encontramos outro hemisfério de $\mathbb{S}^2_1$. Como Σ^2 é compacta, simplesmente conexa e $K = 1$, pelo Teorema das Formas Espaciais, (Σ^2, g) é isométrica a esfera redonda $(\mathbb{S}^2_1, g_0)$ e $\gamma \subset \Sigma^2$ é um grande círculo. □

Observação 3.1. É possível definir uma noção de curvatura quando a métrica é apenas de classe $C^{1,1}$. Neste caso, quando $\ell(\gamma) = 2\pi$ além da esfera $\mathbb{S}^2_1$, Σ^2 pode ser isométrica à um cilindro fechado por dois hemisférios de $\mathbb{S}^2_1$. Uma breve discussão sobre tal caso está presente no apêndice.

4 RESULTADOS DE RIGIDEZ EM DIMENSÃO 3

Este capítulo é dedicado à prova de dois teoremas de rigidez, devido à L. Mazet e H. Rosenberg, apresentados em [19].

4.1 Curvatura positiva

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional K entre 0 e 1. De fato, supondo a existência de uma 2-esfera mínima mergulhada Σ^2 em M, pelo Teorema de Gauss-Bonnet e pela Equação de Gauss, obtemos

$$4\pi = \int_\Sigma K_\Sigma d\Sigma = \int_\Sigma (\det(A) + K) d\Sigma \leq \int_\Sigma d\Sigma = A(\Sigma),$$

onde o Operador de Weingarten A tem determinante não-positivo, pois Σ^2 é mínima. Dessa forma, suponha que Σ^2 tem área 4π. Demonstraremos o teorema abaixo como o principal resultado deste trabalho.

Teorema 4.1 (Mazet e Rosenberg, [19]). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão 3, cuja curvatura seccional $K_M = K$ satisfaz $0 \leq K \leq 1$. Suponha que existe Σ^2 esfera mínima mergulhada em M com área 4π. Então a variedade M é isométrica a esfera $\mathbb{S}^3_1$ ou a um quociente de $\mathbb{S}^2_1 \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. Inicialmente note que como Σ é uma esfera mergulhada em M, segue que Σ é orientável, então existe N campo de vetores normais unitários ao longo de Σ. Considere a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \Sigma \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & M \\ & (p,t) & \longmapsto & \phi(p,t) = \exp_p(tN(p)). \end{array}$$

Como M é completa, temos que ϕ está bem definida, para todo $t \in [0, +\infty)$ e além disso ϕ é suave. Pela compacidade de Σ, segue do Teorema da Vizinhança Tubular, cf. [6, Teorema 12.13] e [5, Teorema 6.3.2], que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\phi\big|_{\Sigma \times [0,\varepsilon)}$ é um mergulho. Dessa maneira, considere

$$\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon > 0 \ : \ \phi \text{ é uma imersão em } \Sigma \times [0, \varepsilon)\}.$$

Claramente temos que $\varepsilon_0 > 0$ e que ε_0 pode assumir $+\infty$. Assim, defina uma família de imersões $\{\phi_t\}_{t \in [0,\varepsilon_0)}$, dadas por $\phi_t = \phi(\cdot, t) : \Sigma \to M$, para cada $t \in [0, \varepsilon_0)$.

Seja $ds^2 = \phi^* g$ o pull-back da métrica Riemanniana de M em $\Sigma \times [0, \varepsilon_0)$ e denote por ∇ a conexão de Levi-Civita de M. Podemos escrever esta métrica como $ds^2 = d\sigma_t^2 + dt^2$, onde $d\sigma_t^2$ é uma família de métricas suaves em Σ.

De fato, é suficiente mostrar que para cada $(p, t) \in \Sigma \times [0, \varepsilon_0)$ se $X \in T_p\Sigma$ e $\partial t \in T_t[0, \varepsilon_0)$, então $ds^2(X, \partial t) = 0$ e $ds^2(t_1\partial t, t_2\partial t) = t_1 t_2$, onde $\{\partial t\}$ base unitária de $T_t[0, \varepsilon_0)$ com t_1 e t_2 números reais quaisquer.

Considere as extensões canônicas de $X \in T_p\Sigma$ e $\partial t \in T_t[0, \varepsilon_0)$ à $T_{(p,t)}\Big(\Sigma \times [0, \varepsilon_0)\Big) \simeq T_p\Sigma \times T_t[0, \varepsilon_0)$. Temos que tais extensões satisfazem

$$[X, \partial t] = 0,$$

onde salientamos que o colchete de Lie independe da métrica. Seja $\gamma_p : [0, \varepsilon_0) \to M$ geodésica em M dada por $\gamma_p(t) = \phi(p, t)$. Note que a derivada de γ_p é dada por

$$\begin{aligned} \gamma_p'(t) &= \frac{d}{dt}\phi(p, t) \\ &= d(\exp_p)_{tN(p)} N(p). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\alpha : (t - \delta, t + \delta) \to \Sigma \times [0, \varepsilon_0)$ é um caminho diferenciável dado por $\alpha(s) = (p, s)$, Então temos que $\alpha(t) = (p, t)$ e $\alpha'(t) = (0, 1) \simeq \partial t$, via a identificação canônica. Daí,

$$\begin{aligned} d\phi(\partial t) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} \phi(\alpha(s)) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} \phi(p, s) \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} \exp_p sN(p) \\ &= d(\exp_p)_{tN(p)} N(p). \end{aligned}$$

Logo $\gamma_p' = d\phi(\partial t)$. Então, derivando ao longo da geodésica γ_p, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ds^2(X, \partial t) &= \frac{d}{dt} \phi^* g(X, \partial t) \\ &= \frac{d}{dt} \langle d\phi(X), d\phi(\partial t) \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \left\langle d\phi(X), \gamma_p' \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\gamma_p'} d\phi(X), \gamma_p' \right\rangle. \end{aligned}$$

Porém, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= d\phi[X, \partial t] \\
&= [d\phi(X), d\phi(\partial t)] \\
&= [d\phi(X), \gamma_p'] \\
&= \nabla_{d\phi(X)}\gamma_p' - \nabla_{\gamma_p'} d\phi(X).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

logo, pela igualdade acima,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi^* g(X, \partial t) &= \left\langle \nabla_{\gamma_p'} d\phi(X), \gamma_p' \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_{d\phi(X)}\gamma_p', \gamma_p' \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} d\phi(X)\Big(\left\langle \gamma_p', \gamma_p' \right\rangle \Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim sendo $\phi^* g(X, \partial t)$ é constante ao longo de γ_p'. Para $t = 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi^* g(X, \partial t)\Big|_{t=0} &= \langle d\phi(X), d\phi(\partial t) \rangle \Big|_{t=0} \\
&= \left\langle X, \gamma_p'(0) \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $ds^2(X, \partial t) = 0$. Por outro lado, se $t_1\partial t, t_2\partial t \in T_t[0, \varepsilon_0)$ então, pelo Lema de Gauss, temos que

$$\begin{aligned}
ds^2(t_1, t_2) &= \left\langle d(\exp_p)_{t_1 N(p)} N(p), d(\exp_p)_{t_2 N(p)} N(p) \right\rangle \\
&= t_1 t_2.
\end{aligned}$$

Portanto, $ds^2 = d\sigma_t^2 + dt^2$, onde $d\sigma_t^2 = \phi_t^* g$, para cada $t \in [0, \varepsilon_0)$.

Com esta métrica, a aplicação ϕ torna-se uma isometria local entre $\Sigma \times [0, \varepsilon_0)$ e M, consequentemente, $(\Sigma \times [0, \varepsilon_0), ds^2)$ tem curvatura seccional entre 0 e 1.

Identifique $d\phi(\partial t)$ com ∂t e denote $\phi(\Sigma \times \{t\})$ por Σ_t. Pela igualdade $ds^2(X, \partial t) = 0$, temos que ∂t é um campo normal unitário a Σ_t, para todo $(p, t) \in \Sigma \times [0, \varepsilon_0)$ e $X \in T_p\Sigma$. Além disso, Σ_0 é mínima e tem área 4π, já que $\phi_0 = \mathrm{id}_\Sigma$.

Afirmação. A métrica ds_0^2 tem curvatura seccional constante igual a 1, portanto (Σ, ds_0^2) é isométrica a $\mathbb{S}_1^2$. Além disso, valem os seguintes casos:

1. $\varepsilon_0 = \pi/2$ e $d\sigma_t^2 = \operatorname{sen}^2 t\, d\sigma_0^2$ ou

2. $\varepsilon_0 = +\infty$ e $d\sigma_t^2 = d\sigma_0^2$.

Para simplificar a notação, identificaremos $\Sigma \times \{t\}$ com $\Sigma_t = \phi(\Sigma \times \{t\})$ e cada vetor $V \in T_{(p,t)}\big(\Sigma \times [0, \varepsilon_0)\big)$ com $d\phi_{(p,t)}V \in T_{\phi(p,t)}M$. Dessa forma, fixado $t \in [0, \varepsilon_0)$, para cada $p \in \Sigma$, sejam

$$\mathrm{II}_t : T_p\Sigma_t \times T_p\Sigma_t \to \mathbb{R} \ \text{ e } \ A_t : T_p\Sigma_t \to T_p\Sigma_t$$

a segunda forma fundamental e o operador de Weingarten da imersão $\phi_t : \Sigma \to M$ com respeito a ∂t, respectivamente, dados por

$$\mathrm{II}_t(X, Y) = \langle B_t(X, Y), \partial t\rangle \ \text{ e } \ A_t(X) = -(\nabla_X \partial t)^T,$$

onde $B_t(X, Y) = (\nabla_X Y)^N$. Considere

$$H(p, t) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A_t$$

a curvatura média de Σ_t no ponto $\phi(p, t)$ com respeito ao vetor normal unitário ∂t.

Como A_t é auto-adjunto, existe $\{e_{1,t}, e_{2,t}\}$ base ortonormal de $T_p\Sigma_t$ formada por autovetores que diagonaliza de A_t. Sejam $k_1(p, t)$ e $k_2(p, t)$ tais que

$$A_t(e_{1,t}) = k_1(p, t) \text{ e } \ A_t(e_{2,t}) = k_2(p, t).$$

Os autovalores $k_1(p, t)$ e $k_2(p, t)$ são as curvaturas principais de Σ_t no ponto $\phi(p, t)$, donde vale que $H(p, t) = \frac{1}{2}(k_1(p, t) + k_2(p, t))$.

Para cada $(p, t) \in \Sigma \times [0, \varepsilon_0)$, defina

$$\lambda(p, t) = \sqrt{(H(p, t))^2 - k_1(p, t)k_2(p, t)} \geq 0.$$

Segue diretamente que $k_1(p, t) = H(p, t) + \lambda(p, t)$ e $k_2(p, t) = H(p, t) - \lambda(p, t)$. Pela Equação de Gauss, temos que

$$\begin{aligned} K_{\Sigma_t} &= K_t + \langle B_t(e_{1,t}, e_{1,t}), B_t(e_{2,t}, e_{2,t})\rangle - \langle B_t(e_{1,t}, e_{2,t}), B_t(e_{1,t}, e_{2,t})\rangle \\ &= K_t + k_1k_2 \\ &= K_t + (H + \lambda)(H - \lambda) \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde K_{Σ_t} é a curvatura seccional (intrínseca) de Σ_t e K_t é a curvatura seccional em M de $T_p\Sigma_t$. Note que se Σ_t é umbílica em $\phi(p, t)$ então $H + \lambda = H - \lambda$ em (p, t), portanto $\lambda = 0$ em $\phi(p, t)$.

Como Σ_t é uma esfera, pelo Teorema de Gauss-Bonnet,

$$\begin{aligned} 4\pi &= \int_{\Sigma_t} K_{\Sigma_t} d\Sigma_t \\ &= \int_{\Sigma_t} \Big(K_t + (H + \lambda)(H - \lambda)\Big) d\Sigma_t \\ &= \int_{\Sigma_t} \Big(K_t + H^2 - \lambda^2\Big) d\Sigma_t, \end{aligned}$$

onde $d\Sigma_t$ é a forma de volume de $\Sigma_t \subset M$. Como por hipótese temos que $K_t \leq 1$, então

$$\begin{aligned} 4\pi &\leq \int_{\Sigma_t} \Big(1 + H^2 - \lambda^2\Big) d\Sigma_t \\ &= \int_{\Sigma_t} d\Sigma_t + \int_{\Sigma_t} \Big(H^2 - \lambda^2\Big) d\Sigma_t \\ &= A(\Sigma_t) + \int_{\Sigma_t} \Big(H^2 - \lambda^2\Big) d\Sigma_t, \end{aligned}$$

onde $A(\Sigma_t)$ é a área de Σ_t. Dessa maneira, obtemos a seguinte desigualdade

$$\int_{\Sigma_t} \lambda^2 d\Sigma_t \leq \int_{\Sigma_t} H^2 d\Sigma_t + A(\Sigma_t) - 4\pi. \tag{4.3}$$

Defina a função $F : [0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ por

$$F(t) = \int_{\Sigma_t} H^2 d\Sigma_t + A(\Sigma_t) - 4\pi.$$

Afirmação 1 F é identicamente nula em $[0, \varepsilon_0)$.

De fato, inicialmente temos que $F(0) = 0$, pois Σ_0 é mínima e tem área igual a 4π. Logo, pela desigualdade (4.3), temos que $\lambda(p, 0) = 0$, para todo $p \in \Sigma$ e portanto Σ_0 é umbílica. O Teorema de Gauss-Bonnet implica que

$$\int_{\Sigma_0} (K_t - 1) d\Sigma_0 = 0,$$

mas $0 \leq K_t \leq 1$ por hipótese, por conseguinte $K_t \equiv 1$. Assim, pela equação (4.2), temos que $K_{\Sigma_0} = 1$. Sendo Σ_0 compacta e simplesmente conexa então, Pelo Teorema das Formas Espaciais, cf. [11, Capítulo 8, Teorema 4.1], $(\Sigma_0, d\sigma_0^2)$ é isométrica a $\mathbb{S}^2_1$.

Como $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \partial t$ é um campo normal unitário a Σ_t e $\vec{H}_t$ é o vetor curvatura média de Σ_t na direção de ∂_t, temos que $\vec{H}_t = H\partial t$. Então pelas equações (2.4) e (2.5), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} A(\Sigma_t) = -\int_{\Sigma_t} 2H d\Sigma_t$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\Sigma_t) = -2H d\Sigma_t.$$

Por outro lado, como ∂t é um campo normal unitário a Σ_t então, em (2.2), $\rho_t = 1$ e $\partial t^\top = 0$. Portanto

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) + |A_t|^2\Big), \tag{4.4}$$

onde Ric é o Tensor de Ricci de $\Sigma\times[0,\varepsilon_0)$ e A_t o operador de Weingarten da imersão ϕ_t. Note que como $K\geq 0$, então $\mathrm{Ric}(\partial t,\partial t)\geq 0$ e sendo $H(p,0)=0$, para todo $p\in\Sigma$, obtemos que $H\geq 0$, para cada $p\in\Sigma$.

Calculemos e estimemos agora a derivada de F:

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= \frac{d}{dt}\bigg(\int_{\Sigma_t} H^2 d\Sigma_t + A(\Sigma_t) - 4\pi\bigg)\\
&= \int_{\Sigma_t}\Big(2H\frac{\partial H}{\partial t} - 2H^3\Big)d\Sigma_t - \int_{\Sigma_t} 2H d\Sigma_t\\
&= \int_{\Sigma_t} H\Big(\mathrm{Ric}(\partial t,\partial t) + |A_t|^2 - 2H^2 - 2\Big)d\Sigma_t\\
&= \int_{\Sigma_t} H\Big((\mathrm{Ric}(\partial t,\partial t)-2) + (H+\lambda)^2 + (H-\lambda)^2 - 2H^2\Big)d\Sigma_t\\
&= \int_{\Sigma_t} H\Big((\mathrm{Ric}(\partial t,\partial t)-2) + 2\lambda^2\Big)d\Sigma_t \qquad (4.5)\\
&\leq 2\int_{\Sigma_t} H\lambda^2 d\Sigma_t.
\end{aligned}
$$

Dado $\varepsilon<\varepsilon_0$, existe $C>0$ tal que $H\leq C$ em $\Sigma\times[0,\varepsilon]$. Usando a desigualdade (4.3), temos que em $[0,\varepsilon]$,

$$
\begin{aligned}
F'(t) &\leq 2\int_{\Sigma_t} H\lambda^2 d\Sigma_t\\
&\leq 2C\int_{\Sigma_t}\lambda^2 d\Sigma_t\\
&\leq 2CF(t).
\end{aligned}
$$

Resolvendo esta inequação diferencial em $[0,\varepsilon]$, temos que

$$
\begin{aligned}
F(t) &\leq F(0)e^{2Ct}\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

pois $F(0)=0$. Quando tomamos ε suficientemente próximo de ε_0, temos que $F\leq 0$ em $[0,\varepsilon_0)$, donde novamente pela desigualdade (4.3), temos $\lambda=0$. Portanto $F=0$ em $[0,\varepsilon_0)$, o que demonstra a Afirmação 1.

A primeira consequência da Afirmação 1 é que todas as subvariedades Σ_t são umbílicas, pois $\lambda=0$. Segue também que a igualdade (4.5) é nula e assume a forma

$$\int_{\Sigma_t} H(\mathrm{Ric}(\partial t,\partial t)-2)d\Sigma_t = 0.$$

Como $H\geq 0$ e $(\mathrm{Ric}(\partial t)-2)\leq 0$, para quaisquer $(p,t)\in\Sigma\times[0,\varepsilon_0)$, então $H(\mathrm{Ric}(\partial t)-2)\leq 0$, portanto

$$H(\mathrm{Ric}(\partial t,\partial t)-2)=0,\quad \text{para todo } (p,t)\in\Sigma\times[0,\varepsilon_0). \qquad (4.6)$$

Mais ainda, a umbilicidade e a equação (4.4) implicam que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) + H^2 \geq 0.$$

Como H é crescente na variável t, então se H é positiva em (p,t), H permanece positiva em (p,s), com $s \geq t$. Mostraremos a seguir que essa propriedade é mantida na variável p, isto é, se H é positiva em (p,t), com $t > 0$, então H é positiva em Σ_t.

Afirmação 2 Seja $(p,t) \in \Sigma \times (0, \varepsilon_0)$ tal que $H(p,t) > 0$. Então $H(q,t) > 0$ para todo $q \in \Sigma$.

De fato, suponha que $H(p,t) > 0$, para $t > 0$ e considere o conjunto

$$\Omega = \{q \in \Sigma \ : \ H(q,t) > 0\}.$$

Temos que Ω é um subconjunto não-vazio ($p \in \Omega$) e aberto em Σ. Seja $q \in \Omega$, então como $H(q,t) > 0$, pela igualdade (4.6), temos que $\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t)(q,t) = 2$. Pela continuidade, temos que $\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t)(r,t) = 2$, para todo $r \in \overline{\Omega}$. Dessa maneira, fixado $r \in \overline{\Omega}$, existe $\delta > 0$ tal que, se $s \in (t-\delta, t)$ então $\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t)(r,s) > 0$, por continuidade. Pela igualdade (4.4), temos que $\frac{\partial H}{\partial s}(r,s) > 0$, o que implica que $H(r,s) > 0$, donde $H(r,t) > 0$. Portanto, $r \in \Omega$. Pela conexidade de Σ, temos que $\Sigma = \Omega$.

Diante da Afirmação 2, suponha que existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $H(p,t) = 0$ para $(p,t) \in \Sigma \times [0, \varepsilon_1]$ e $H(p,t) > 0$ para $(p,t) \in \Sigma \times (\varepsilon_1, \varepsilon_0)$. Pela equação (4.4) de evolução de H, temos que $\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) = 0$ e $|A_t| = 0$ em $\Sigma \times [0, \varepsilon_1]$. Porém, pela equação (4.6), temos que $\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) = 2$ em $\Sigma \times (\varepsilon_1, \varepsilon_0)$. Dessa maneira, pela continuidade do $\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t)$ temos a seguinte dicotomia:

1. $H = 0$ e $\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) = 0$ em $\Sigma \times [0, \varepsilon_0)$.
2. $H > 0$ e $\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) = 2$ em $\Sigma \times (0, \varepsilon_0)$.

De fato, considere $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ um sistema de coordenadas locais em Σ. Denote por

$$\partial_i := \frac{\partial \phi_t}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad g_{ij,t} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle\,, \quad \text{com} \quad i = 1, 2,$$

e defina a aplicação diferenciável $g_{ij} : [0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} g_{ij}(t) &= d\sigma_t^2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= \langle \partial_i, \partial_j \rangle\,, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

No primeiro caso temos que $|A_t|^2 = 2H^2 - 2\lambda^2 = 0$, isto é, para cada $t \in [0, \varepsilon_0)$, Σ_t é totalmente geodésica. Dessa maneira, $A_t(\partial_i) = -(\nabla_{\partial_i}\partial t)^T = 0$. Por outro lado, $|\partial t| = 1$ implica que $(\nabla_{\partial_i}\partial t)^N = 0$, donde temos que $\nabla_{\partial_i}\partial t = 0$. Devido a igualdade (4.1) temos que $\nabla_{\partial t}\partial_i = 0$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g_{ij}(t) &= \langle \nabla_{\partial t}\partial_i, \partial_j\rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial t}\partial_j\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por conseguinte, temos que $g_{ij}(t)$ é constante, para todo $t \in [0, \varepsilon_0)$. Tomando $t = 0$, temos que $d\sigma_t^2 = d\sigma_0^2$, para todo $t \in [0, \varepsilon_0)$. Como ϕ deixa de ser uma imersão quando $d\sigma_t^2 = \phi_t^* g$ torna-se singular, temos que se $X \in T_p\Sigma_t$ então

$$|d\phi_t(X)|^2 = d\sigma_0^2(X, X) = 0 \iff X = 0.$$

Logo, $d\phi_t$ é injetiva para todo $t \in [0, +\infty)$, portanto $\varepsilon_0 = +\infty$. Dessa maneira, $\Sigma \times \mathbb{R}_+$ com a métrica $ds^2 = d\sigma_0^2 + dt^2$ é isométrica a $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}_+$ e a aplicação ϕ é uma isometria local de $\Sigma \times \mathbb{R}_+$ em M.

No segundo caso, a equação (4.4) de evolução de H juntamente com a condição inicial $H(p, 0) = 0$, definem, para cada $p \in \Sigma$, um problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = 1 + H^2, \\ H(p, 0) = 0. \end{cases}$$

Pela Teoria de EDO's, o problema acima tem solução unicamente determinada e dada por $H(p, t) = \tan(t)$, para cada $p \in \Sigma$. Como para cada $t \in [0, \varepsilon_0)$, Σ_t é totalmente umbílica, temos que

$$\langle B_t(\partial_i, \partial_j), \partial t\rangle = \lambda(p, t) \langle \partial_i, \partial_j\rangle,$$

donde

$$-\nabla_{\partial_i}\partial t = \lambda(p, t)\partial_i,$$

para todo $i = 1, 2$. Porém, por (1.1), temos que $H(p, t) = \lambda(p)$, logo segue que $\nabla_{\partial_i}\partial t = -\tan(t)\partial_i$. Daí,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g_{ij}(t) &= \langle \nabla_{\partial t}\partial_i, \partial_j\rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial t}\partial_j\rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_i}\partial t, \partial_j\rangle + \left\langle \partial_i, \nabla_{\partial_j}\partial t\right\rangle \\ &= -2\tan(t)g_{ij}(t).\end{aligned}$$

Denotando $f(t) := g_{ij}(t)$, pela equação acima temos a seguinte EDO

$$f'(t) = -2\tan(t)f(t).$$

A solução da EDO acima depende da condição inicial $f(0)$ e é dada por

$$f(t) = \cos^2(t) f(0),$$

isto é, temos que $d\sigma_t^2 = \cos^2(t) d\sigma_0^2$. Se $X \in T_p\Sigma_t$ então

$$|d\phi_t(X)|^2 = \cos^2(t) d\sigma_0^2(X,X) = 0 \iff t = \frac{(2k-1)\pi}{2} \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{ou} \quad X = 0.$$

Logo $d\phi_t$ é injetiva para $t \in [0, \pi/2)$. Além disso $\phi(p, \pi/2)$ é um ponto, portanto $\Sigma \times [0, \pi/2]$ com a métrica $ds^2 = \cos^2(t) d\sigma_0^2 + dt^2$ é isométrica a um hemisfério de $\mathbb{S}_1^3$ e a aplicação ϕ é uma isometria local deste hemisfério em M.

De modo análogo, para $\phi : \Sigma \times \mathbb{R}_- \to M$, no primeiro caso e no segundo caso temos que ϕ é uma isometria local. Sendo ϕ injetiva em Σ, então em ambos os casos as isometrias são globais. Como $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}_1^3$ são simplesmente conexas, temos que ϕ é o recobrimento universal de M M é $\mathbb{S}_1^3$ ou um quociente de $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$. □

Observação 4.1. Se M é uma 3-variedade Riemanniana com curvatura seccional entre 0 e 1, e Σ^2 é uma 2-esfera mínima mergulhada em M, vimos que

$$\begin{aligned} 4\pi &= \int_\Sigma (H^2 - \lambda^2 + K_t) d\Sigma \\ &= \int_\Sigma (-\lambda^2 + K_t) d\Sigma \\ &\leq A(\Sigma). \end{aligned}$$

Se $A(\Sigma) = 4\pi$ então $-\lambda^2 + K_t = 1$. Como $K_t \leq 1$ temos que $\lambda = 0$ e $K_t = 1$, ou seja, Σ é totalmente geodésica e isométrica a $\mathbb{S}_1^2$.

Observação 4.2. É possível obter uma estimativa para área de uma 2-esfera Σ de cuvatura média constante H_0 mergulhada uma 3-variedade Riemanniana M com curvatura seccional entre 0 e 1. De fato, com a mesma notação da demonstração acima, temos

$$\begin{aligned} 4\pi &= \int_\Sigma (H^2 - \lambda^2 + K_t) d\Sigma \\ &\leq \int_\Sigma (H_0^2 + 1) d\Sigma \\ &= (1 + H_0^2) A(\Sigma), \end{aligned}$$

logo obtemos a limitação inferior para área de Σ, dada por $\frac{4\pi}{1+H_0^2} \leq A(\Sigma)$.

4.2 Curvatura negativa

Dizemos que $T^2 \times \mathbb{R}_+$ é um cúspide hiperbólica 3-dimensional se T^2 é um 2-toro e $T^2 \times \mathbb{R}_+$ está munido da métrica Riemanniana $e^{-2t} d\sigma_0^2 + dt^2$, onde $d\sigma_0^2$ é uma métrica plana em T^2. Na mesma linha do teorema anterior, foi provado em [19] um teorema de ridigez para o caso que a 3-variedade Riemanniana completa M tem curvatura seccional limitada superiormente por -1. Apresentaremos agora a prova deste resultado.

Teorema 4.2 (Mazet e Rosenberg, [19]). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão 3, cuja curvatura seccional $K_M = K$ satisfaz $K \leq -1$. Suponha que existe um 2-toro T^2 mergulhado em M com curvatura média constante igual a 1. Então T separa M e o seu lado convexo em média é isométrico a uma cúspide hiperbólica.*

Demonstração. A prova utiliza ideias análogas da demonstração do teorema anterior. De fato, sendo T um toro mergulhado em M, segue que T é orientável, então existe N é um campo de vetores normais unitários ao longo de T. Considere $\phi : T \times [0, +\infty) \to M$ dada por $\phi(p, t) = \exp_p(tN(p))$. Defina

$$\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon > 0 \ : \ \phi \ \text{ é uma imersão em } T \times [0, \varepsilon) \ \}.$$

Claramente temos que $\varepsilon_0 > 0$ e que ε_0 pode assumir $+\infty$. Assim, considere a família de imersões $\{\phi_t\}_{t \in [0, \varepsilon_0)}$, dadas por $\phi_t = \phi(\cdot, t) : T \to M$, para cada $t \in [0, \varepsilon_0)$. Seja $ds^2 = \phi^* g$ o pull-back da métrica Riemanniana de M em $T \times [0, \varepsilon_0)$ e denote por ∇ a conexão de Levi-Civita de M.

De modo análogo feito na demonstração do teorema anterior, podemos escrever esta métrica como $ds^2 = d\sigma_t^2 + dt^2$, onde $d\sigma_t^2$ é uma família de métricas suaves em T. Com esta métrica, a aplicação ϕ torna-se uma isometria local entre $T \times [0, \varepsilon_0)$ e M, consequentemente, $(T \times [0, \varepsilon_0), ds^2)$ tem curvatura seccional $K \leq -1$.

Pela igualdade $ds^2(X, \partial t) = 0$ temos que ∂t é um campo normal unitário a T_t e além disso, T_0 é um toro com curvatura média constante igual a 1.

Para simplificar a notação, identificaremos $T \times \{t\}$ com $T_t = \phi(T \times \{t\})$ e cada vetor $V \in T_{(p,t)}\big(T \times [0, \varepsilon_0)\big)$ com $d\phi_{(p,t)} V \in T_{\phi(p,t)} M$. Dessa forma, fixado $t \in [0, \varepsilon_0)$, para cada $p \in T$, sejam

$$\mathrm{II}_t : T_p T_t \times T_p T_t \to \mathbb{R} \ \text{ e } \ A_t : T_p T_t \to T_p T_t$$

a segunda forma fundamental e o operador de Weingarten da imersão $\phi_t : T \to M$ com respeito a ∂t, respectivamente. Considere

$$H(p, t) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} T_t$$

a curvatura média de T_t no ponto $\phi(p, t)$ com respeito ao vetor normal unitário ∂t.

Como T_t é auto-adjunto, existe $\{e_{1,t}, e_{2,t}\}$ base ortonormal de T_pT_t formada por autovetores que diagonaliza de A_t. Sejam $k_1(p,t)$ e $k_2(p,t)$ tais que

$$A_t(e_{1,t}) = k_1(p,t) \text{ e } \ A_t(e_{2,t}) = k_2(p,t).$$

Os autovalores $k_1(p,t)$ e $k_2(p,t)$ são as curvaturas principais de T_t no ponto $\phi(p,t)$, donde vale que $H(p,t) = \frac{1}{2}(k_1(p,t) + k_2(p,t))$.

Para cada $(p,t) \in T \times [0, \varepsilon_0)$, defina

$$\lambda(p,t) = \sqrt{(H(p,t))^2 - k_1(p,t)k_2(p,t)} \geq 0.$$

Segue diretamente que $k_1(p,t) = H(p,t) + \lambda(p,t)$ e $k_2(p,t) = H(p,t) - \lambda(p,t)$. Note que se T_t é umbílica em $\phi(p,t)$ então $H + \lambda = H - \lambda$ em (p,t), portanto $\lambda = 0$ em $\phi(p,t)$. Pela Equação de Gauss, temos que

$$K_{T_t} = K_t + (H + \lambda)(H - \lambda)$$

onde K_{T_t} é a curvatura seccional (intrínseca) de T_t e K_t é a curvatura seccional em M de T_pT_t. Como T_t é um toro, pelo Teorema de Gauss-Bonnet,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{T_t} K_{T_t} dT_t \\ &= \int_{T_t} \Big(K_t + H^2 - \lambda^2\Big) dT_t, \end{aligned}$$

onde dT_t é a forma de volume de $T_t \subset M$. Como por hipótese temos que $K_t \leq -1$, então

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{T_t} \Big(-1 + H^2 - \lambda^2\Big) dT_t \\ &= -A(T_t) + \int_{T_t} \Big(H^2 - \lambda^2\Big) dT_t, \end{aligned}$$

onde $A(T_t)$ é a área de T_t. Dessa maneira, obtemos a seguinte desigualdade

$$\int_{T_t} \lambda^2 dT_t \leq \int_{T_t} H^2 dT_t - A(T_t).$$

Defina a função $F : [0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ por

$$F(t) = \int_{T_t} H^2 dT_t - A(T_t).$$

Afirmação 1 F é identicamente nula em $[0, \varepsilon_0)$.

De fato, inicialmente temos que $F(0) = 0$, pois $H(p,0) = 1$ para todo $p \in T$, e portanto $f(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$. Como $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \partial t$ é um campo normal unitário a T_t e $\overrightarrow{H}_t$ é o vetor curvatura média de t_t na direção de ∂_t temos que $\overrightarrow{H}_t = H\partial t$. Então pelas equações (2.4) e (2.5), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} A(T_t) = -\int_{T_t} 2H dT_t$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}(dT_t) = -2H dT_t.$$

Por outro lado, como ∂_t é um campo normal unitário a T_t então, em (2.2), $\rho_t = 1$ e $\partial t^\top = 0$. Portanto

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) + |A_t|^2\Big),$$

onde Ric é o Tensor de Ricci de $T \times [0, \varepsilon_0)$ e A_t o operador de Weingarten da imersão ϕ_t. Note que $K \leq -1$, então $\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) \leq -2$. Calculemos e estimemos agora a derivada de F:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\int_{T_t} H^2 dT_t - A(T_t)\right) \\ &= \int_{T_t} \Big(2H\frac{\partial H}{\partial t} - 2H^3\Big) dT_t + \int_{T_t} 2H dT_t \\ &= \int_{T_t} H\Big(\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) + |A_t|^2 - 2H^2 + 2\Big) dT_t \\ &= \int_{T_t} H\Big((\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) + 2) + 2\lambda^2\Big) dT_t \\ &\leq 2\int_{T_t} H\lambda^2 dT_t. \end{aligned}$$

Como $H(p, 0) = 1$ para todo $p \in T$, por continuidade, considere $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ tal que $0 < H \leq C$ em $T \times [0, \varepsilon]$. Sendo $\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) + 2 \leq 0$, temos que

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq 2\int_{T_t} H\lambda^2 dT_t \\ &\leq 2C\int_{T_t} \lambda^2 dT_t \\ &\leq 2CF(t). \end{aligned}$$

Resolvendo esta inequação diferencial em $[0, \varepsilon]$, temos que

$$\begin{aligned} F(t) &\leq F(0)e^{2Ct} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $F(0) = 0$. Isto implica que F é identicamente nula em $[0, \varepsilon]$ e dessa forma $\lambda = 0$ em $[0, \varepsilon]$, isto é, todas as subvariedades T_t são umbílicas. Segue também que

$$\int_{T_t} H(\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) + 2) dT_t = 0.$$

Como $H > 0$ e $\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) + 2 \leq 0$ em $[0, \varepsilon]$, temos que $\operatorname{Ric}(\partial t, \partial t) = -2$. Assim, a equação de evolução da curvatura média assume a forma $\frac{\partial H}{\partial t} = -1 + H^2$, logo, para cada $p \in T$, temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = -1 + H^2, \\ H(p, 0) = 1. \end{cases}$$

Pela Teoria de EDO's, o problema acima tem solução unicamente determinada e dada por $H(p,t) = 1$, para $(p,t) \in T \times [0,\varepsilon]$. Quando tomamos ε suficientemente próximo de ε_0, temos que $F(t) = 0$ em $[0,\varepsilon_0)$ e que $H(p,t) = 1$ e $\mathrm{Ric}(\partial t, \partial t) = -2$ em $T \times [0, \varepsilon_0)$.

Dessa maneira, como

$$\int_{T_t} (H^2 - K_t) dT_t = 0$$

e $K_t \leq -1$, temos que $K_t \equiv 1$ pois $(H^2 - K_t) \leq 0$, para todo $t \in [0,\varepsilon_0)$. Isto é, dado $(p,t) \in T \times [0,\varepsilon_0)$, para qualquer plano bi-dimensional em $T_{(p,t)}(T \times [0,\varepsilon_0))$, a curvatura seccional de $T \times [0,\varepsilon_0)$ com a métrica ds^2, a curvatura seccional de $T \times [0,\varepsilon_0)$ é $K_t = -1$. Mais ainda, pela Equação de Gauss,

$$\begin{aligned} K_{T_0} &= H^2 - \lambda^2 + K_0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, a métrica $d\sigma_0^2$ é plana. Além disso, considerando $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ um sistema de coordenadas locais em T e definindo a aplicação diferenciável $g_{ij} : [0,\varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} g_{ij}(t) &= d\sigma_t^2\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

onde

$$\partial_i := \frac{\partial \phi_t}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad g_{ij,t} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \quad \text{com} \quad i = 1, 2,$$

para cada $t \in [0,\varepsilon_0)$. Como T_t é totalmente umbílica então temos que $\nabla_{\partial_i} \partial t = \nabla_{\partial t} \partial_i = -\partial_i$. Dessa maneira, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{ij}(t) &= \langle \nabla_{\partial t} \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial t} \partial_j \rangle \\ &= -2 g_{ij}(t). \end{aligned}$$

Denotando $f(t) := g_{ij}(t)$, pela equação acima temos a seguinte EDO

$$f'(t) = -2f(t).$$

A solução da EDO acima depende da condição inicial $f(0)$ e é dada por

$$f(t) = e^{-2t} f(0),$$

isto é, temos que $d\sigma_t^2 = e^{-2t} d\sigma_0^2$. Como ϕ deixa de ser uma imersão quando $d\sigma_t^2 = \phi_t^* g$ torna-se singular, temos que se $X \in T_p\Sigma_t$ então

$$|d\phi_t(X)|^2 = e^{-2t} d\sigma_0^2(X, X) = 0 \iff X = 0.$$

Logo, $d\phi_t$ é injetiva para todo $t \in [0, +\infty)$, portanto $\varepsilon_0 = +\infty$. Assim, ϕ é uma imersão de $T \times \mathbb{R}_+$ em M e $T \times \mathbb{R}_+$ com a métrica $ds^2 = e^{-2t} d\sigma_0^2 + dt^2$ é uma cúspide hiperbólica. Dessa maneira, ϕ é uma isometria local desta cúspide hiperbólica em M.

Para finalizar a prova é suficiente mostrar que ϕ é injetiva. De fato, se ϕ não é injetiva, então seja

$$\varepsilon_1 = \inf\{\varepsilon > 0 \ : \ \phi \ \text{ não é injetiva em } \ T \times [0, \varepsilon]\}.$$

Isto implica que existem $p, q \in T$ tal que vale uma, e somente uma, das seguintes afirmações

- $\phi(p, 0) = \phi(q, \varepsilon_1)$ ou
- $\phi(p, \varepsilon_1) = \phi(q, \varepsilon_1)$, com $p \neq q$.

Sejam U e V vizinhanças abertas de $(p, 0)$ em T_0 (ou (p, ε_1) em T_{ε_1}) e (q, ε_1) em T_{ε_1}, respectivamente, tais que ϕ é uma aplicação injetiva. Como ε_1 é mínimo, então $\phi(U)$ e $\phi(V)$ são surperfícies de curvatura média constante 1 em M, que são tangentes no ponto $\phi(p, \varepsilon_1)$. Mais ainda, no primeiro caso, $\phi(U)$ está contida no lado médio e convexo de $\phi(V)$, donde pelo Princípio do Máximo, $\phi(U) = \phi(V)$. Dessa maneira, $\phi(T_0) = \phi(T_{\varepsilon_1})$, o que é impossível pois essas surperfícies não possuem a mesma área. No segundo caso, $\phi(U)$ está contida no lado médio e convexo de $\phi(V)$ e então ϕ não é injetiva em T_s, para s suficientemente próximo de t, com $s < t$, o que é uma contradição. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] Ambrózio, Lucas. *Constant mean curvature foliations and scalar curvature rigidity of three-manilfods*, PhD Thesis, IMPA, 2014.

[2] Andersson, L. e Howard, R. *Comparison and rigidity theorems in semi-Riemannian geometry*, Comm. Anal. Geom., Volume 6, Number 4, pg. 819-877, 1998.

[3] Bray H., Brendle S., e Neves A. *Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds*, Commun.Anal.Geom., 18, 821-830, 2010.

[4] Brendle S. *Rigidity phenomena involving scalar curvature* Int. Press, Boston, MA,. 15. Surveys Diff.Geom., 17, 179-202, 2012.

[5] Burns, Keith e Gidea, Marian. *Differential Geometry and Topology: With a View to Dynamical Systems*, Studies in Advanced Mathematics, Chapman and Hall/CRC, 2005.

[6] Bröcker, Th. e Jänich, K. *Introduction to Differential Topology*, Cambridge University Press, 1982. Originally published in German as Einführung in die Differential topologie by Springer-Verlag, 1973. Translated by C.B. and M. J. Thomas.

[7] Caminha, Antônio. *Tópicos de Geometria Diferencial*, Coleção Fronteiras da Matemática, SBM, 2014.

[8] Chavel, Isaac. *Riemannian Geometry: A Modern introduction*, Second Edition, Cambridge University Press.

[9] Colding, Tobias H. e Minicozzi II, Wiliam P. *A course in minimal surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2011.

[10] Dajczer, Marcos. *Submanifolds and Isometric Immersions*, Mathematics Lecture Series, Publish Or Perish, 1990.

[11] do Carmo, Manfredo Perdigão. *Geometria Riemanniana*, 5 ed., Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 2011.

[12] do Carmo, Manfredo Perdigão. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Coleção Textos Universitários, SBM, 5.ed., Rio de Janeiro, 2012.

[13] do Carmo, Manfredo Perdigão. *Formas Diferenciais e Aplicações*, Coleção Fronteiras da Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2015.

[14] Federer, Hebert. *Geometric Measure Theory*, Classics in Mathematics, Springer, 1969.

[15] Klingenberg, W. *Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung*, Comm. Math. Helv., Volume 35, pg. 47-54, 1961.

[16] Lages, Elon. *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2016.

[17] Magnus, J.R. e Neudecker, H. *Matrix Differential Calculus with applications in Statistics and Econometrics*, Wileyy Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Third Edition, 2007.

[18] Marques, Fernando C. e Neves, André. *Rigidity of min-max minimal spheres in three-manifolds*, Duke Math. J. 161 (2012), no. 14, 2725–2752.

[19] Mazet, L. e Rosenberg, H. *On minimal spheres of area 4π and rigidity*, Comment. Math. Helv., Volume 89, pg. 921-928, 2014.

[20] Soutomayor, Jorge. *Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Textos Universitários do IME-USP, Livraria da Física, São Paulo, 2011.

A TEOREMA DE E. CALABI

A.1 Caso $g \in C^{1,1}$

Seja (Σ^n, g) uma variedade Riemanniana. É possível definir uma noção de curvatura quando a métrica g é apenas de classe $C^{1,1}$. Isto se dá pelo fato que as derivadas parciais da métrica g são funções lipchitzianas definidas em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema de Hademacher [14, Teorema 3.1.6], tais derivadas são diferenciáveis em quase todo do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Dessa forma, a curvatura seccional existe e fica bem definida, no sentido clássico, em quase todo ponto de U. Enunciemos então o Teorema de Calabi para o caso $g \in C^{1,1}$.

Teorema A.1 (E. Calabi, [2]). *Seja (Σ^2, g) uma esfera 2-dimensional, com métrica Riemanniana de classe $C^{1,1}$, cuja a curvatura Gaussiana K de Σ satisfaz $0 \leq K \leq 1$. Então toda geodésica simples fechada γ em Σ tem comprimento maior ou igual a 2π. Se o comprimento de γ é 2π, então (Σ^2, g) é isométrica a esfera redonda $(\mathbb{S}^2_1, g_0)$ e γ é um grande círculo ou (Σ^2, g) é isométrica a um cilindro circular de circunferência 2π fechado por dois hemisférios de $\mathbb{S}^2_1$ e γ é um círculo deste cilindro.*

Demonstração. Note que a demonstração apresentada na Seção 3.2 continua válida para obtermos a cota inferior para o comprimento das geodésicas.

Dessa maneira, se vale a igualdade $l = 2\pi$, então $-E_t(s, \beta(s)) = 1$, para todo $s \in [0, l]$. Pelo Lema 3.1 temos que $\beta(s) < +\infty$ e $\pi/2 \leq \beta(s)$ para todo $s \in [0, l]$ e

$$K(s,t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \beta(s) - \pi/2 \\ 1, & \beta(s) - \pi/2 < t \leq \beta(s). \end{cases}$$

Sejam $M_{+1} \subseteq M$, dado por

$$M_{+1} = \text{int}\{x \in M \ : \ K(x) = +1\},$$

e $s_0 \in [0, 2\pi]$ tal que β assume um máximo global em s_0. Considere

$$B(x_0, \pi/2) = \left\{ y \in M \ : \ \mathrm{dist}(x_0, y) < \frac{\pi}{2}, \quad \text{onde} \quad x_0 = \exp_{c(s_0)} \beta(s_0)\eta(s_0) \right\}.$$

Afirmação. $B(x_0, \varepsilon) \subseteq M_{+1}$.

Note inicialmente que dado $s \in [0, 2\pi]$, então $y = \exp_{c(s)}(\beta(s) - \pi/2)\eta(s) \in \partial M_{+1}$. Como $\alpha_s(t) = \exp_{c(s)} t\eta(s)$ é geodésica minimizante normalizada então, pelo mesmo argumento usado acima,

$$\mathrm{dist}(\gamma, y) = \beta(s) - \pi/2.$$

De fato, se $B(x_0, \varepsilon) \nsubseteq M_{+1}$ então existe $y \in B(x_0, \varepsilon) \cap \partial M_{+1}$ tal que

$$\mathrm{dist}(\gamma, y) = \beta(s) - \pi/2.$$

Pela desigualdade triangular, obtemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}(\gamma, x_0) &\leq \mathrm{dist}(x_0, y) + \mathrm{dist}(\gamma, y) \\
&< \frac{\pi}{2} + \left(\beta(s) - \frac{\pi}{2} \right) \\
&= \beta(s).
\end{aligned}$$

Mas $\mathrm{dist}(\gamma, x_0) = \beta(s_0)$, dessa maneira $\beta(s_0) < \beta_(s)$, o que contraria a maximalidade de $\beta(s_0)$. Assim, pelo Teorema de Gauss-Bonnet,

$$\begin{aligned}
2\pi &= \int_{M_{+1}} K dA \\
&= A(M_{+1}) \\
&\geq A(B(x_0, \pi/2)) \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Portanto, $A(M_{+1}) = A(B(x_0, \pi/2))$. Sendo $B(x_0, \pi/2) \subseteq M_{+1}$ tal que $A(B(x_0, \pi/2)) = A(M_{+1})$ então $M_{+1} = B(x_0, \pi/2)$, pois caso contrário, sendo M_{+1} um subconjunto aberto de Σ^2, existem $y \in M_{+1} \setminus B(x_0, \pi/2)$ e uma vizinhança aberta J-mensurável de y, V_y, tais que $V_y \subset M_{+1} \setminus B(x_0, \pi/2)$ com

$$\int_{V_y} K dA = A(V_y) > 0.$$

Mas isso contradiz o fato de $A(B(x_0, \pi/2)) = A(M_{+1})$, já que $V_y \not\subset B(x_0, \pi/2)$.

Assim, segue que a aplicação $s \mapsto \beta(s)$ é constante e deste modo a região M limitada por γ com normal interior η é um cilindro circular de circunferência 2π, fechado em um dos lados por um hemisfério de $\mathbb{S}^2_1$. Aplicando o mesmo argumento para a região limitada por γ com normal interior $-\eta$ temos que (Σ^2, g) é formada por dois destes cilindros, fechados por hemisférios de $\mathbb{S}^2_1$, colados ao longo de γ, o que equivale a afirmação do teorema. $\square$