

Claudia Cavalcante Fonseca

**A teoria dos grafos como ferramenta na
classificação de álgebras de Leibniz**

Brasil

15 de março de 2016

Claudia Cavalcante Fonseca

A teoria dos grafos como ferramenta na classificação de álgebras de Leibniz

Dissertação de mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Prof^a. Dr^a. Elisa María Cañete Molero

Brasil

15 de março de 2016

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

F676t Fonseca, Cláudia Cavalcante .
A teoria dos grafos como ferramenta na classificação de álgebras de Leibniz /
Cláudia Cavalcante Fonseca. – 2016.
84 f. : il.

Orientadora: Elisa María Cañete Molero.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió,
2016.

Bibliografia: f. 82-83.

1. Álgebra. 2. Grafos. 3. Nilpotência. I. Título.

CDU: 512.554.3

A TEORIA DOS GRAFOS COMO FERRAMENTA NA CLASSIFICAÇÃO DE ÁLGEBRAS DE LEIBNIZ

Claudia Cavalcante Fonseca

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Álgebra submetida em 15 de Março de 2016 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Elisa María Cañete Molero

Banca Examinadora:

Elisa M^e Cañete Molero

Prof^ª. Dr^ª. Elisa María Cañete Molero (UFAL)

Thales Miranda de Almeida Vieira

Prof. Dr. Thales Miranda de Almeida Vieira (UFAL)

Manuela da Silva Souza

Prof^ª. Dr^ª. Manuela da Silva Souza (UFBA)

Dedico este trabalho para todos aqueles que me apoiaram o suficiente para se sentirem sinceramente orgulhosos de onde eu cheguei.

Agradecimentos

Acredito que todos que passaram por mim nesses quase 28 anos de vida deixaram um pouquinho de si mesmos, constituindo o que sou hoje.

É fato, porém, que, em todas as áreas do meu ser, alguns contribuíram mais que outros e, inclusive, me compreenderam mais que outros. Nas próximas linhas, buscarei expressar minha gratidão aos que mais me apoiaram nessa conquista, permitindo-me construir degraus em direção a um sonho.

Primeiramente, é inevitável iniciar este trabalho agradecendo aquela que mais me apoiou no mestrado. Desde o primeiro dia que a conheci como orientadora, a Professora Doutora Elisa María Cañete Molero, ou apenas *Elisa*, se mostrou acessível, responsável, justa e dedicada, me auxiliando em tudo ao seu alcance, e me levando a lugares incríveis, tanto intelectual quanto geograficamente.

Ela também me proporcionou grandes momentos, dividindo comigo sua experiência, sua pesquisa e seus companheiros de universidade e grandes amigos, que por si só, já são mais que dignos do meu agradecimento: as professoras Luisa M. Camacho, Regina Maria de Aquino e, em especial o professor Alberto Marquez, que considero um amigo muito querido e um grande mestre.

Também gostaria de agradecer aqueles que primeiro fizeram florescer meu amor por matemática, meus professores queridos do ensino fundamental e médio. Em especial, ao Professor Erásmo, Professor Micael e Professor Jonathan, que me incentivaram no desenvolvimento do raciocínio matemático com boas aulas, jogos, desafios, elogios, mas principalmente, com o brilho no olhar frente à beleza etérea da matemática. Beleza essa que me encharcava de orgulho não apenas por conhecer uma minúscula porção do todo, mas pela grandiosidade da minha própria curiosidade.

Finalmente, devo agradecer aos professores que me guiaram no meu primeiro curso superior (não finalizado) que, embora não fosse de matemática, foi igualmente encantador e, devo dizer, graças a eles. Especialmente, os professores Alejandro Freire, Jaime Evaristo, Francisco Vieira Barros (prof Chico) e Alcino Dall'Igna Júnior, que me mantêm orgulhosa até hoje só por ter estudado com professores tão ilustres e pessoas tão excepcionais.

Também devo agradecer aos professores da minha primeira formação finalizada, dessa vez em licenciatura em matemática, mais licenciatura que matemática, que promoveram em mim valores distintos de conhecimentos matemáticos, mas muito importantes para chegar onde estou. Agradeço imensamente às professoras Solange, Fátima, Paula, Kátia, Marizoli, Marinês e ao professor Rui por todos os ensinamentos,

especialmente por me mostrarem que ao invés de me sentir constrangida por não saber, devo ter orgulho da minha vontade em aprender.

Já no mestrado, meus agradecimentos mais especiais são para a prof. Maria de Andrade, que me fez estudar como nunca havia estudado e aprender como nunca havia aprendido; ao professor Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante, por me ajudar como coordenador a entrar no programa de mestrado e a me manter nele; ao professor André Contiero, por ministrar uma das disciplinas mais lindas de todo o mestrado e ao professor Ali, que sempre nos ensinava com paixão, enfatizando o princípio intuitivo em cada conceito.

Por fim, como não poderia deixar de agradecer, gostaria de manifestar minhas gratificações a todos que, mesmo antes do início de tudo, tornaram meus estudos na UFAL possíveis. Agradeço profundamente ao meu noivo, Johann Felipe Voigt, por me acompanhar a três mil quilômetros de casa, deixando seu emprego e sua família e embarcar na pesquisa científica em matemática; à minha mãe, que se orgulha como se eu fosse a melhor do mundo, me apoiando de maneira inigualável; ao meu pai, por me incentivar cognitivamente desde minha infância e me mostrar a beleza intuitiva da aritmética básica ("tabuadas") que aos meus olhos era demasiadamente entediante e impossível de ser raciocinada; aos meus sogros, Márcia Maria Voigt e Wilmar Voigt, que me deram todo o apoio, incentivo, patrocínio, e que estão me esperando de volta com os braços abertos; à Juh-chan (Julia Tholl), que me apoia integralmente e me compreende de forma única mesmo que isso signifique que vamos ficar longe um tempo se for pelo bem dos meus sonhos; ao meu irmão, Kevin Cavalcante Fonseca, que mesmo sem compreender o encanto e admiração que sinto pela matemática, virá assistir essa defesa e que foi uma das principais razões pra me trazer de volta para Alagoas; ao meu primo Derecky, por ser meu companheiro falando de matemática, análise e teoria dos números e por oferecer todo apoio que preciso. Agradeço a Kenshin (Rurouni Kenshin), Sion e Nezumi (No.6) por destruírem pequenas partes do meu "eu", permitindo-me reformar a mim mesma. Agradeço também às minhas avós, por serem como avós devem ser, amorosas, carinhosas e sorridentes. Agradeço a toda minha família, meus tios, primos e todos que, de alguma forma me apoiaram, me incentivaram, me tornaram quem sou hoje. Agradeço a todos os meus amigos, Hunter-kun, Tyk-aniki, Sidi-nee-san, Iel-kun, Aislan-kun, Flávio e o pessoal do CardCapital, simplesmente por serem meus amigos, pois eu sei como isso é difícil.

E, mesmo que eles nunca tomem conhecimento desses agradecimentos, sou eternamente grata aos meus três filhos, Sion, Ferris e Nezumi, por passarem bastante tempo rorronando em meu colo ou na frente do meu monitor enquanto eu digitava a dissertação e resolvia problemas matemáticos. Por cada porção de ar respirado, por cada passo dado, por cada miado soado, porque essa é uma das minhas forças pra continuar quando me sinto exausta.

"I'm just one hundred and one, five months and a day."

"I can't believe that!" said Alice.

"Can't you?" the Queen said in a pitying tone.

"Try again: draw a long breath, and shut your eyes." Alice laughed.

"There's no use trying," she said: "one can't believe impossible things."

"I daresay you haven't had much practice," said the Queen.

"When I was your age, I always did it for half-an-hour a day.

Why, sometimes I've believed as many as six impossible things before breakfast."

Resumo

Motivada pelo trabalho de Carriazo, Fernández e Núñez [3], o principal objetivo desta dissertação é discorrer sobre formas de associar álgebras e grafos, com o objetivo de obter informações inerentes das álgebras, em especial álgebras não associativas, na linguagem de teoria dos grafos. Este trabalho apresenta uma análise dos resultados presentes em [3], generalizando-os, e propõe novos resultados envolvendo os conceitos de solubilidade e nilpotência.

Palavras-chaves: Álgebra. Grafos. Nilpotência.

Abstract

Motivated by Carriazo, Fernández and Núñez's article [3], the main goal of this work is to discuss ways of associating algebra and graphs, in order to obtain information of algebras, in particular non-associative algebras, in graph theory language. This work presents an analysis of the results presented in [3], generalizing it, and proposes new results involving the concepts of solubility and nilpotency.

Key-words: Algebra. Graphs. Nilpotency.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de grafo	19
Figura 2 – Exemplo de grafo orientado	20
Figura 3 – Exemplo de subgrafo orientado	21
Figura 4 – Exemplo de grafo orientado ponderado	22
Figura 5 – Exemplo de passeio	23
Figura 6 – Exemplo de passeio	23
Figura 7 – Exemplo de passeio	23
Figura 8 – Exemplo de digrafo sem ciclos de comprimento ímpar e não bipartido.	24
Figura 9 – Aresta cuja existência contradiz a ordenação topológica	26
Figura 10 – Estrutura combinatória inicial da álgebra \mathcal{L}_1	29
Figura 11 – Estrutura combinatória relacionada à álgebra \mathcal{L}_1	29
Figura 12 – Grafo segundo Carriazo et al. [3] associado à álgebra \mathcal{L}_1	30
Figura 13 – Grafo segundo Carriazo et al. [3] associado à álgebra \mathcal{L}_3	30
Figura 14 – Grafo segundo Carriazo et al. [3] associado à álgebra \mathcal{L}_3	30
Figura 15 – Configurações Proibidas em [3]	31
Figura 16 – Configurações Permitidas em [3]	32
Figura 17 – Primeira configuração com ciclos de comprimento três [3]	34
Figura 18 – Segunda configuração com ciclos de comprimento três [3]	34
Figura 19 – Grafo tipo 1 associado à álgebra de Leibniz \mathcal{L}_4	37
Figura 20 – Configurações proibidas para os grafos do tipo 1 (com $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e ε não nulos)	40
Figura 21 – Configurações permitidas para os grafos do tipo 1 (com $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ e ζ não nulos)	43
Figura 22 – Configurações permitidas para os vértices adjacentes a arestas de peso duplo	49
Figura 23 – Grafo do tipo 1 associado à álgebra \mathcal{L}_5	50
Figura 24 – Ciclos de arestas de peso duplo que compartilham uma dupla de arestas paralelas	54
Figura 25 – Grafos do tipo 2 associados a \mathcal{L}_6	57
Figura 26 – Ordenação Topologica para um grafo sem ciclos	62
Figura 27 – Grafos do tipo 2 associados a \mathcal{L}_8	65
Figura 28 – Grafos do tipo 2 associados a \mathcal{L}_9	69
Figura 29 – Grafo do tipo 1 associado à álgebra \mathcal{A}_{10}	72
Figura 30 – Grafo do tipo 2 à direita associado à álgebra \mathcal{A}_{10}	73

Figura 31 – Grafo do tipo 2 à esquerda associado à álgebra \mathcal{A}_{10}	73
Figura 32 – Menu do Algraph	77
Figura 33 – Exemplo de arquivo input	77
Figura 34 – Input da álgebra \mathcal{L}_{11} no Algraph	78
Figura 35 – Matriz de adjacência do grafo tipo 1 da álgebra \mathcal{L}_{11} gerada pelo Algraph	78
Figura 37 – Input da álgebra \mathcal{L}_{12} no Algraph	80
Figura 38 – Matriz de adjacência do grafo tipo 1 da álgebra \mathcal{L}_{12} gerada pelo Algraph	80

Sumário

Introdução	12
1 Preliminares	14
1.1 Definições básicas relacionadas a Álgebras	14
1.2 Definições básicas relacionadas a Álgebras de Leibniz	16
1.2.1 Definições básicas relacionadas a Álgebras de Lie	17
1.3 Definições básicas relacionadas a Grafos	18
2 Álgebras de Lie e Grafos	28
2.1 Grafos sem ciclos de comprimento três	32
2.2 Grafos com ciclos de comprimento três	33
3 Generalizações	36
3.1 Grafo tipo 1	36
3.1.1 Demonstração dos resultados análogos aos encontrados no artigo Carriazo et al. [3] para os grafos do tipo 1	38
3.1.1.1 As configurações permitidas 21a e 21b	45
3.1.1.2 As configurações permitidas com ciclos de comprimento três e arestas de peso duplo	48
3.2 Grafo tipo 2	55
3.2.1 Principais resultados para os grafos do tipo 2	60
3.2.1.1 Resultados para a série central descendente e série derivada	61
3.2.1.2 Álgebras livres de somas	65
4 Conclusões e problemas em aberto	70
5 Apêndice	71
5.1 A matriz de adjacência	71
5.2 A construção dos grafos	75
5.3 A interface	77
Referências	82

Introdução

Em 1880, Sophus Lie apresenta características inerentes ao que em 1930 seria conhecido como *Álgebras de Lie* (mais detalhes em [12]), álgebras não-associativas e anticomutativas, cuja esfera de atuação engloba a Física (como nos campos hamiltonianos, com os parênteses de Poisson, e no estudo de sólitons, por exemplo) e outras áreas da Matemática (como as transformações infinitesimais ou grupos de Lie).

O avanço no estudo das álgebras não associativas, porém, coincide com o desenvolvimento da Mecânica Quântica, no início do século XX, quando Jordan [8] as propõe como a forma mais simples de expressar as medidas de um sistema mecânico quântico. Esta família de álgebras que, apesar de não-associativa, apresentava comutatividade, foi denominada *álgebras de Jordan*.

Em 1965 A. Bloh aborda as D-álgebras em seu trabalho "*On a generalization of the concept of Lie algebra* [7]", cuja multiplicação interna respeita os princípios de uma derivação. Apresenta-se assim a primeira generalização para as álgebras de Lie, que mais tarde serão chamadas álgebras de Leibniz. Passam-se décadas até que esta família seja redescoberta por Jean-Louis Loday em 1993, em "*Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*" [13] e tenha suas características amplamente estudadas como uma generalização das álgebras de Lie.

Eventualmente, surgiu a necessidade de classificar as álgebras não associativas a fim de conhecer propriedades inerentes a cada classe de equivalência de álgebras. Por exemplo, Jordan et al. [9] classificaram as álgebras de Jordan formalmente reais e, mais tarde, as superálgebras de Jordan sobre um corpo algebricamente fechado de característica 0 foram classificadas por Kac [10].

O estudo de classificação de álgebras de Leibniz é um problema em aberto de difícil abordagem e para trabalhar sobre ele, utilizam-se resultados como o Teorema de Levi (provado em 1905 para álgebras de Lie em [11] e em 2012 generalizado para álgebras de Leibniz em [1]), que estabelece que toda álgebra de Leibniz é o soma semidireta de um ideal solúvel e uma álgebra de Lie semissimples.

As álgebras de Lie semissimples sobre os complexos foram classificadas completamente por Killing e Cartan e esta classificação foi refinada por Dynkin [4] que, através de seus diagramas, detem a classificação atual. Um diagrama de Dynkin é constituído de um grafo cujos vértices têm entre si arestas duplas ou triplas e que se associam às álgebras de Lie permitindo uma classificação das mesmas a menos de isomorfismo.

Desde que as álgebras de Lie semissimples estão completamente classificadas (sobre

os reais e complexos), o próximo passo é a classificação das álgebras de Leibniz solúveis. E, devido à dificuldade em classificá-las, é usual que se classifiquem famílias menores de álgebras de Leibniz, como as álgebras nilpotentes. Estas, de grande importância desde o Teorema de Engel (provado em 1890 em [16] e generalizado para álgebras de Leibniz em 2001 em [15]), que caracteriza uma álgebra de Leibniz nilpotente pela nilpotência dos operadores adjuntos de todos os seus elementos.

Este trabalho baseia-se no princípio de abstrair informações das álgebras à linguagem de grafos como uma nova ferramenta para facilitar a classificação das álgebras, utilizado nos diagramas de Dynkin [4] e, mais atualmente, por Carriazo et al. [3], Falcón et al. [6], Díaz et al. [5] e Boza et al. [2], por exemplo.

O principal objetivo deste trabalho é sugerir uma nova associação de álgebras a grafos, generalizando o trabalho de Carriazo et al. [3] e propondo novos resultados a partir desta generalização.

O capítulo 1 destaca conceitos, propriedades e resultados usuais de álgebras e teoria dos grafos, que serão necessários para a compreensão do trabalho.

O capítulo 2 apresenta os conceitos e resultados obtidos no artigo de Carriazo et al. [3], o principal motivador deste trabalho.

Em seguida, o capítulo 3 abrange os principais resultados do trabalho, distribuindo-os em duas grandes seções. Na primeira delas, estabelecemos a primeira generalização que propomos para os grafos de Carriazo et al. [3], demonstrando os resultados análogos aos presentes no trabalho em questão. A segunda seção compreende a segunda generalização proposta aos grafos de Carriazo et al. [3], trazendo resultados novos, que estão, também, presentes em um artigo submetido a publicação em conjunto com os professores Alberto Marquez, Elisa María Canete Molero, Luisa M. Camacho e Regina Maria de Aquino através do Projeto *Relações entre a Teoria dos Grafos e a Teoria das álgebras associativas e não-associativas* do qual fazemos parte, com o apoio do CNPq.

Estes novos resultados incluem, mas não se restringem a uma caracterização para uma família de álgebras de Leibniz nilpotentes a partir de seus grafos associados e teoremas que relacionam características do grafo que implicam nilpotência e solubilidade em casos gerais de álgebras de Leibniz.

No último capítulo, são abordados alguns problemas em aberto e encaminhamentos para os próximos passos nesta teoria.

E finalmente, o apêndice apresenta um software feito para este trabalho com o objetivo de representar uma álgebra dada como os grafos dos diferentes tipos estudados neste trabalho. Este software foi utilizado para intuir possíveis resultados a serem comprovados e para gerar as figuras dos grafos de exemplos de álgebras presentes no trabalho.

1 Preliminares

Este capítulo será dedicado à apresentação dos conceitos básicos utilizados neste trabalho, tais como definições, notações e principais resultados necessários para a compreensão dos demais tópicos.

1.1 Definições básicas relacionadas a Álgebras

Definição 1.1.1 *Uma álgebra $\langle \mathcal{A}, +, \cdot, * \rangle$ sobre um corpo \mathbb{K} é um espaço vetorial $\langle \mathcal{A}, +, \cdot \rangle$ munido de uma operação binária $* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ bilinear.*

Observação 1.1.2 *É comum que seja omitido o sinal \cdot na operação $\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.*

Definição 1.1.3 *A dimensão e a base de uma álgebra $\langle \mathcal{A}, +, \cdot, * \rangle$ são definidas como a dimensão e a base do espaço vetorial adjacente, ou seja, $\langle \mathcal{A}, +, \cdot \rangle$.*

*Em outras palavras, uma base de $\langle \mathcal{A}, +, \cdot, * \rangle$ é um subconjunto $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathcal{A}$ no qual $\forall a \in \mathcal{A}, \exists! \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathbb{K}$ para os quais $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e_i$ e não existe $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{B}$ com esta mesma propriedade.*

*Ademais, tem-se que para todo subconjunto \mathcal{B} com essas características, a cardinalidade permanece constante e é nomeada dimensão de $\langle \mathcal{A}, +, \cdot, * \rangle$. Uma álgebra de dimensão n é dita n -dimensional.*

Observação 1.1.4 *Neste trabalho, abordaremos apenas álgebras de dimensão finita sobre o corpo dos complexos.*

Definição 1.1.5 *Seja \mathcal{A} uma álgebra. Os conjuntos abaixo são definidos como anulador à direita e à esquerda respectivamente:*

$$\begin{aligned} \text{Ann}_R(\mathcal{A}) &= \{x \in \mathcal{A} \text{ tal que } y * x = 0 \forall y \in \mathcal{A}\} \\ \text{Ann}_L(\mathcal{A}) &= \{x \in \mathcal{A} \text{ tal que } x * y = 0 \forall y \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

A intersecção entre os anuladores à direita e à esquerda é denominada Anulador de \mathcal{A} e notada por $\text{Ann}(\mathcal{A})$.

Com o intuito de tornar a próxima definição mais precisa, trataremos de uma propriedade básica das álgebras com dimensão finita.

Proposição 1.1.6 *Devido à bilinearidade da operação multiplicação interna de uma álgebra, o produto de todos os seus elementos está completamente definido pelo produto dos elementos da base.*

Demonstração

Seja \mathcal{A} uma álgebra n -dimensional sobre \mathbb{C} e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para essa álgebra. Dados $x, y \in \mathcal{A}$, tem-se:

$$\begin{aligned} x &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right), \\ y &= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j e_j \right). \end{aligned}$$

O produto entre estes dois elementos é, por definição, dado por:

$$x * y = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) * \left(\sum_{j=1}^n \beta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\alpha_i e_i * \beta_j e_j) \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\alpha_i \beta_j (e_i * e_j)) \right)$$

Portanto, definindo-se $e_i * e_j$ para cada dois elementos na base da álgebra tem-se definida completamente a multiplicação interna. ■

Com base nesta propriedade, podemos definir:

Definição 1.1.7 *Seja \mathcal{A} uma álgebra e \mathcal{B} uma base de \mathcal{A} . A tabela de multiplicação entre os elementos de \mathcal{B} é denominada Lei da álgebra \mathcal{A} .*

A definição 1.1.7, associada à unicidade das constantes na definição 1.1.3, fundamenta a próxima definição.

Definição 1.1.8 *Seja \mathcal{A} uma álgebra n -dimensional e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de \mathcal{A} . Para todo $1 \leq i, j, k \leq n$, o conjunto de $C_{i,j}^k \in \mathbb{C}$ tais que a lei da álgebra \mathcal{A} seja dada por:*

$$e_i * e_j = \sum_{k=1}^n C_{i,j}^k e_k$$

é chamado conjunto das constantes de estrutura de \mathcal{A} . Com base nas Proposições 1.1.6 e ??, podemos afirmar que para cada base de \mathcal{A} , as constantes de estrutura são únicas.

Definição 1.1.9 *Diz-se que duas álgebras \mathcal{A} e \mathcal{B} são isomorfas (utiliza-se a notação $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$) quando existe uma aplicação $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bijetiva com as seguintes propriedades:*

$\forall \alpha \in \mathbb{C}, x, y \in \mathcal{A}:$

$$\begin{aligned} F(\alpha \cdot x) &= \alpha F(x); \\ F(x + y) &= F(x) + F(y); \\ F(x * y) &= F(x) * F(y). \end{aligned}$$

Neste caso, F é chamado isomorfismo entre álgebras.

Definição 1.1.10 *Seja \bar{A} o conjunto de subálgebras de uma álgebra \mathcal{A} . A partir da multiplicação interna de \mathcal{A} , define-se a operação:*

$$\begin{aligned} * &: \bar{A} \times \bar{A} \rightarrow \bar{A} \\ (\mathcal{B}, \mathcal{C}) &\mapsto \mathcal{B} * \mathcal{C} = \langle b * c : b \in \mathcal{B} \text{ e } c \in \mathcal{C} \rangle \end{aligned}$$

A seguir, definiremos sequências de subconjuntos de uma álgebra \mathcal{A} cuja importância será evidenciada mais adiante.

Definição 1.1.11 *A sequência abaixo é denominada Série Central Descendente:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^1 &= \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^i &= \mathcal{A}^{i-1} * \mathcal{A} \end{aligned}$$

Definição 1.1.12 *A sequência abaixo é denominada Série Derivada:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(1)} &= \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^{(i)} &= \mathcal{A}^{(i-1)} * \mathcal{A}^{(i-1)} \end{aligned}$$

1.2 Definições básicas relacionadas a Álgebras de Leibniz

As definições que introduziremos nesta seção tratam de uma família de álgebras denominada *Álgebras de Leibniz* (ou álgebras de Loday), descobertas em 1965 por A. Bloh (chamadas por ele D-álgebras) em seu trabalho "*On a generalization of the concept of Lie algebra* [7]".

Definição 1.2.1 *Uma álgebra de Leibniz \mathcal{L} é uma álgebra sobre um corpo \mathbb{K} cuja multiplicação interna $[\cdot, \cdot] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, além da bilinearidade, satisfaz a identidade de Leibniz, especificada a seguir:*

$$\forall a, b, c \in \mathcal{L}, \text{ tem-se } [[a, b], c] = [a, [b, c]] + [[a, c], b].$$

Usualmente, notaremos a identidade de Leibniz como $L(a, b, c) = [[a, b], c] - [a, [b, c]] - [[a, c], b] = 0$ e denominaremos $[\cdot, \cdot]$ como produto colchete.

Definição 1.2.2 *Uma álgebra de Leibniz é dita simples quando não possui ideal próprio. É denominada semissimples quando pode ser representada pela soma direta de subálgebras simples.*

Para as duas próximas definições, considere \mathcal{L} uma álgebra de Leibniz e as duas sequências definidas na seção anterior.

Definição 1.2.3 *A álgebra \mathcal{L} é dita nilpotente se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{L}^n = \{0\}$.*

Neste caso, o menor n que satisfaz esta propriedade denomina-se índice de nilpotência de \mathcal{L} .

Definição 1.2.4 *Define-se \mathcal{L} como solúvel se existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{L}^{(m)} = \{0\}$.*

Neste caso, o menor m que satisfaz esta propriedade é nomeado índice de solubilidade de \mathcal{L} .

Das definições anteriores, descende a seguinte propriedade importante:

Observação 1.2.5 *Seja \mathcal{L} uma álgebra de Leibniz nilpotente. Então, \mathcal{L} é solúvel.*

Observação 1.2.6 *O problema de classificação das álgebras de Leibniz consiste em buscar relações que determinem classes de equivalência no conjunto de álgebras estudado. Frequentemente, os isomorfismos são utilizados como relações de equivalência e definem-se propriedades invariantes por isomorfismos para auxiliar na classificação. Dois exemplos destes invariantes definidos nesta seção são a solubilidade e a nilpotência das álgebras de Leibniz.*

1.2.1 Definições básicas relacionadas a Álgebras de Lie

As álgebras de Lie foram apresentadas por Sophus Lie em 1880 em seu artigo "*Theorie der Transformations gruppen*" [12], onde são retratadas num contexto de grupos de Lie.

Apesar do estudo das álgebras de Lie ser historicamente anterior ao das álgebras de Leibniz, optamos por esta ordem na abordagem dos conceitos, pois as definições apontadas na seção anterior podem ser diretamente aplicadas às álgebras de Lie como um subconjunto das álgebras de Leibniz.

Definição 1.2.7 *Uma álgebra de Lie \mathcal{L} é uma álgebra de Leibniz, cujo produto colchete satisfaz a anticomutatividade, definida a seguir.*

$\forall x, y \in \mathcal{A}$, tem-se $[x, y] = -[y, x]$ ou, igualmente, $[x, x] = 0$ em álgebras de Lie definidas sobre corpos de características diferentes de 2, como os complexos.

Observação 1.2.8 *No caso das álgebras de Lie, devido à propriedade anticomutativa da álgebra, a identidade de Leibniz resulta na identidade de Jacobi, dada usualmente por:*

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathcal{A}.$$

1.3 Definições básicas relacionadas a Grafos

Considera-se o princípio da teoria dos grafos o trabalho de Leonhard Euler, em 1736, sobre o problema das sete pontes de Königsberg. Neste artigo, Euler propõe e resolve o problema de atravessar todas as sete pontes existente na cidade de Königsberg, na Prússia, sem passar por uma mesma ponte duas vezes.

À ferramenta utilizada por Euler para a resolução do problema, uma representação das regiões da cidade independente de sua área e evidenciando suas propriedades topológicas, hoje denominamos grafo.

Definição 1.3.1 *Um grafo (ou grafo não orientado) G é uma tripla (V, A, Ψ) , na qual:*

- $V \neq \emptyset$ e A constituem conjuntos cujos elementos são denominados vértices e arestas respectivamente;
- $\Psi : A \rightarrow P_2(V)$ uma função incidência que, a cada aresta, associa um conjunto (binário ou unitário) de vértices ($P_2(V)$) denominados extremos da aresta.

Comumente, os grafos são representados graficamente como diagramas, de modo que seus vértices são exibidos como pontos e suas arestas como linhas ligando os pontos que representam seus extremos. No caso em que há apenas um extremo, a representação da aresta leva este a si próprio, constituindo o que se denomina laço.

Exemplo 1.3.2 *O grafo $G_1 = (V, A, \Psi)$ definido por:*

- $V = \{v_1, v_2, v_3\}$,
- $A = \{a_1, a_2, a_3\}$,
- $\Psi : A \rightarrow P_2(V)$

$$\begin{array}{ll} a_i & \mapsto v_i, & \forall 0 < i < 3 \\ a_3 & \mapsto \{v_1, v_2\} & . \end{array}$$

pode ser representado graficamente por:

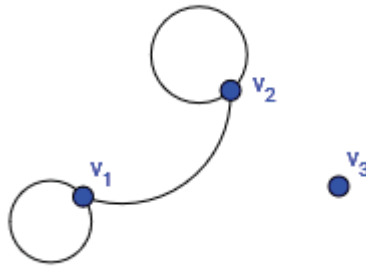


Figura 1: Exemplo de grafo

Definiremos agora, algumas relações entre os componentes do grafo, apresentadas principalmente nos livros [14] e [17].

Definição 1.3.3 *Dois vértices são chamados adjacentes quando são extremos de uma mesma aresta. Da mesma forma, duas arestas denominam-se adjacentes quando possuem um extremo em comum.*

Definição 1.3.4 *É dito que um vértice é incidente a uma aresta quando é extremo da mesma. Equivalentemente, uma aresta é incidente a cada um de seus extremos.*

Definição 1.3.5 *A quantidade de arestas incidentes a um vértice é chamada grau do vértice.*

Os grafos são uma ferramenta poderosa para simplificar problemas, traduzindo-os à sua linguagem. Porém, objetos representados como grafos frequentemente possuem outras características de importância ao problema original. Para sua abordagem, são adicionadas algumas características aos grafos já definidos.

Definição 1.3.6 *Um grafo orientado (ou digrafo) trata-se de uma tripla (V, A, Ψ) , na qual:*

- $V \neq \emptyset$ e A constituem conjuntos cujos elementos são denominados vértices e arestas respectivamente;
- $\Psi : A \rightarrow V \times V$ uma função incidência que, a cada aresta, associa um **par ordenado** de vértices, também denominados extremos da aresta.

A representação das arestas deste grafo utiliza-se de setas que originam-se no primeiro vértice do par-ordenado (denominado cauda da aresta) e finaliza no segundo (denominado cabeça da aresta).

Exemplo 1.3.7 O grafo orientado $G_2 = (V, A, \Psi)$ definido por:

- $V = \{v_1, v_2, v_3\}$,
- $A = \{a_1, a_2, a_3\}$,
- $\Psi : A \rightarrow V \times V$

$$a_i \mapsto (v_i, v_i), \quad \forall 0 < i < 3$$

$$a_3 \mapsto (v_2, v_1) .$$

pode ser representado graficamente por:

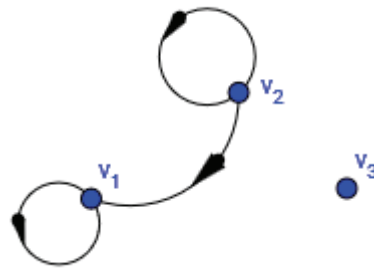


Figura 2: Exemplo de grafo orientado

A ordenação dos extremos de cada aresta oferece uma nova forma de classificar os vértices do grafo, como definimos a seguir.

Observação 1.3.8 Em um grafo orientado, o grau de entrada diferencia-se do grau de saída de um vértice. Para um vértice $e_i \in V$ de um grafo $G = (V, A, \Psi)$, o grau de entrada indica a quantidade de arestas cuja cabeça seja e_i . O grau de saída, analogamente, indica a quantidade de arestas tais que a cauda seja e_i .

Utilizaremos as notações $\delta_G^{in}(e_i)$ e $\delta_G^{out}(e_i)$ para indicar o grau de entrada e de saída de um vértice e_i do grafo G .

Definição 1.3.9 Um vértice pertencente ao conjunto de vértices de um grafo orientado é definido como fonte quando não é cabeça de quaisquer arestas.

Definição 1.3.10 Um vértice de um grafo orientado é denominado poço ou sumidouro sempre que não existam arestas que o possuam como cauda.

Também é possível definir uma classe de equivalência entre grafos como o fizemos para as álgebras.

Definição 1.3.11 Dois grafos $G = (V, A, \Psi)$ e $G' = (V', A', \Psi')$ são ditos isomorfos (representa-se $G \cong G'$) quando existe uma bijeção $f : V \rightarrow V'$ de forma que existe uma aresta $\alpha \in A : \Psi(\alpha) = \{v_i, v_j\}$ (respectivamente, $\Psi(\alpha) = \{v_i\}$) se e somente se existe uma aresta $\alpha' \in A' : \Psi'(\alpha') = \{f(v_i), f(v_j)\}$ (respectivamente, $\Psi'(\alpha') = \{f(v_i)\}$).

Definição 1.3.12 Dois digrafos $G = (V, A, \Psi)$ e $G' = (V', A', \Psi')$ são isomorfos quando existe uma bijeção $f : V \rightarrow V'$ de forma que existe uma aresta $\alpha \in A : \Psi(\alpha) = (v_i, v_j)$ se, e somente se, existe uma aresta $\alpha' \in A' : \Psi'(\alpha') = (f(v_i), f(v_j))$.

Outra relação entre grafos análoga à contenção é definida abaixo:

Definição 1.3.13 Um grafo $H = (V_H, A_H, \Psi_H)$ é denominado subgrafo de outro grafo $G = (V_G, A_G, \Psi_G)$ se as três condições abaixo são satisfeitas:

- $V_H \subset V_G$;
- $A_H \subset A_G$;
- $\Psi_H(\alpha) = \Psi_G(\alpha) \forall \alpha \in V_H$.

Exemplo 1.3.14 Seja $G_2 = (V, A, \Psi)$ como no Exemplo 1.3.7. Então, o grafo orientado representado a seguir é subgrafo de G_2 .

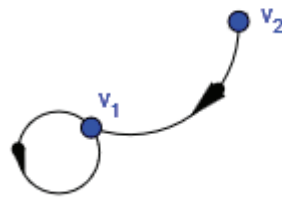


Figura 3: Exemplo de subgrafo orientado

Outra característica que pode ser adicionada aos grafos para um aumento da complexidade da representação do problema é a associação de valores a suas arestas, através da função *peso*, como abordaremos a seguir.

Definição 1.3.15 É dito que o grafo $G = (V, A, \Psi)$ é ponderado (ou que G possui pesos) quando está definida uma função $P : A \rightarrow \mathbb{C}$, denominada função peso.

É habitual dispor a imagem desta função sobre a representação da respectiva aresta no diagrama que ilustra o grafo.

Exemplo 1.3.16 Seja $G_3 = (V, A, \Psi)$ como G_2 no Exemplo 1.3.7, porém munido da função peso definida a seguir:

$$\begin{aligned} P : A &\rightarrow \mathbb{C} \\ a_1 &\mapsto 7 \\ a_2 &\mapsto 11 \\ a_3 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Então, G_3 é representado por:

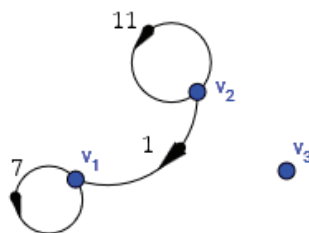


Figura 4: Exemplo de grafo orientado ponderado

Outras definições importantes envolvem classificações de grafos e seus subgrafos de acordo com a disposição de seus vértices e arestas, como veremos a seguir.

Definição 1.3.17 Duas arestas α e β são ditas paralelas quando seus extremos são os mesmos.

Definição 1.3.18 Um digrafo $G = (V, A, \Psi)$ é denominado bem-orientado se todo vértice em V é sumidouro ou fonte.

Definição 1.3.19 Um grafo $G = (V, A, \Psi)$ é dito bipartido se V pode ser dividido em dois subconjuntos $V = V_1 \cup V_2$ tais que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ de forma que todas as arestas possuem uma extremidade em V_1 e uma extremidade em V_2 .

Definição 1.3.20 Em um grafo (respectivamente, digrafo) $G = (V, A, \Psi)$, uma sequência finita e não vazia $(v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_n, v_n)$ de vértices $v_i \in V$ intercalados por arestas $a_i \in A$ é chamada passeio quando $\Psi(a_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ (respectivamente, $\Psi(a_i) = (v_{i-1}, v_i)$) $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

O comprimento de um passeio é dado pela quantidade de arestas existentes nesta sequência.

Quando $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$, este passeio é denominado caminho.

Se $a_i \neq a_j$ sempre que $i \neq j$, este passeio é denominado trilha.

Se $v_0 = v_n$, este passeio é denominado ciclo ou circuito.

Exemplo 1.3.21 *Os passeios destacados nos grafos representados abaixo são, respectivamente:*

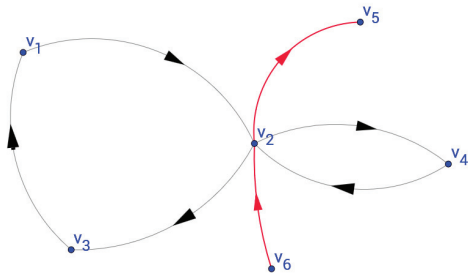


Figura 5: Exemplo de passeio

Um caminho e uma trilha de comprimento 2.

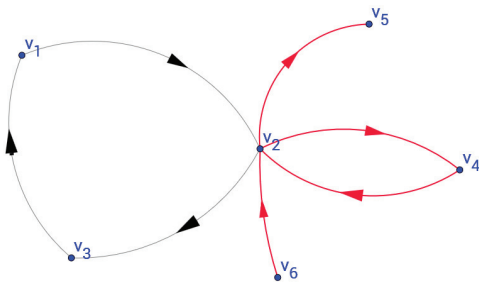


Figura 6: Exemplo de passeio

Uma trilha de comprimento 4, mas não um caminho, visto que o vértice v_2 se repete.

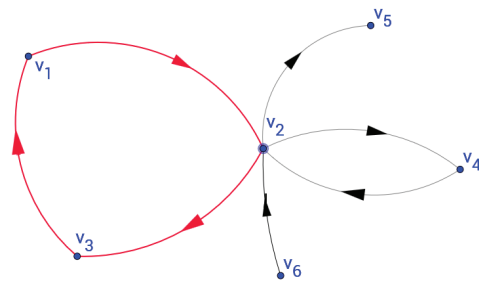


Figura 7: Exemplo de passeio

Um caminho, uma trilha e um ciclo de comprimento 3.

Proposição 1.3.22 *Um grafo não orientado é bipartido se, e somente se, não contém ciclos de comprimento ímpar. Se um grafo orientado é bipartido, ele não possui ciclos de comprimento ímpar.*

Demonstração

Seja $G = (V, A, \Psi)$ um grafo que possui um ciclo $v_1, a_1, \dots, v_m, a_m, v_1$, com m ímpar.

Suponha que V pode ser dividido em dois subconjuntos $V = V_1 \cup V_2$ tais que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ de forma que $\forall a \in A, \Psi(a)$ possui uma coordenada em V_1 e uma em V_2 .

A partir da definição de ciclo, tem-se que: $\Psi(a_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$ (respectivamente, $\Psi(a_i) = (v_i, v_{i+1})$) $\forall 1 \leq i < m$. Assim, v_i 's com índices ímpares e pares pertencem,

necessariamente a subconjuntos disjuntos distintos (V_1 e V_2) para todo $1 \leq i < m$. Suponha, sem perda de generalidade que $\forall i$ ímpar, $i \in V_1$ (portanto, $\forall i$ par, $i \in V_2$).

Da mesma forma, a definição do ciclo existente em G também garante que $\Psi(a_m) = \{v_m, v_1\}$ (respectivamente, $\Psi(a_m) = (v_m, v_1)$). Assim, v_m e v_1 devem pertencer a subconjuntos disjuntos distintos, mas $v_1 \in V_1$ e, como m é ímpar, $m - 1$ é par e, portanto, $v_{m-1} \in V_2$. Assim, m não pode pertencer a V_1 por conta da existência de a_m , nem a V_2 , por conta da existência de a_{m-1} . Assim, $V \neq V_1 \cup V_2$, o que é uma contradição.

Assim, se existe algum ciclo de comprimento ímpar em G (orientado ou não), ele não pode ser bipartido.

Se, por outro lado, não existe ciclo de comprimento ímpar em $G = (V, A, \Psi)$ não-orientado, para cada componente conexa, tome $v_i \in V$ e defina:

$$V_1 = \{v_x \in V : \exists \text{ um caminho de comprimento ímpar entre } v_x \text{ e } v_i\}$$

$$V_2 = \{v_x \in V : \exists \text{ um caminho de comprimento par entre } v_x \text{ e } v_i\}$$

Como tomamos um $v_i \in V$ a cada componente conexa, não existe caminhos entre os elementos de V_1 provenientes de v_i s diferentes e todos os elementos de V foram contemplados. Assim, basta demonstrar que V_1 e V_2 são disjuntos. Se V_1 e V_2 não forem disjuntos, tem-se que existe um v_x tal que existe um caminho de comprimento ímpar e um caminho de comprimento par entre v_x e v_i . Sejam estes $(v_i, a_1, w_1, a_2, w_2, \dots, a_n, v_x)$ e $(v_i, b_1, w_1, b_2, w_2, \dots, b_m, v_x)$ com n ímpar e m par

Assim, existe um caminho de v_i a v_i dado por $(v_i, a_1, w_1, a_2, w_2, \dots, a_n, v_x, b_m, \dots, w_2, b_2, w_1, b_1, v_i)$, ou seja, um ciclo de comprimento $n + m$. Ora, como n é ímpar e m é par, este ciclo possui comprimento ímpar, que contradiz a hipótese. ■

Se G é orientado, porém, pode-se ter G não bipartido mesmo sem ciclos de comprimento ímpar, como observa-se no exemplo abaixo.

Exemplo 1.3.23

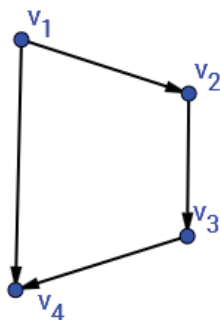


Figura 8: Exemplo de digrafo sem ciclos de comprimento ímpar e não bipartido.

Definição 1.3.24 Um grafo $G = (V, A, \Psi)$ tal que para cada dois vértices em V existe um caminho que os contém é denominado grafo conexo.

Definição 1.3.25 Um grafo que não possui ciclos é denominado acíclico.

Observação 1.3.26 Todo subgrafo de um grafo acíclico é acíclico

Lema 1.3.27 Todo digrafo $G = (V, A, \Psi)$ acíclico onde V e A são finitos possui um vértice cujo grau de entrada é nulo

Demonstração

Tome $v_1 \in V$ qualquer. Se não há arestas cuja cabeça seja v_1 , o grau de entrada de v_1 é nulo.

Se há arestas cuja cabeça é v_1 , tome a_1 uma destas arestas, v_2 a cauda dela e refaça a verificação sobre seu grau de entrada.

Repita o procedimento até que o vertice considerado não seja cabeça de alguma aresta. Como a quantidade de elementos em V é finita, se o procedimento não encerrar, em algum momento, o vértice considerado v_n já fará parte da sequência (v_1, \dots, v_{n-1}) de vértices considerados nas etapas anteriores, considere que este seja v_i .

Logo, considere a sequência: $(v_i, a_{n-1}, v_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_i, v_i)$. Esta sequência forma um ciclo.

Assim, se não há ciclos, o procedimento decide em uma quantidade finita de passos um vértice cujo grau de entrada é nulo. ■

Definição 1.3.28 Um grafo G possui ordenação topológica se seus vértices podem ser organizados em linhas horizontais de forma que para cada linha os vértices desta são cabeças apenas de arestas cujas caudas estão nas linhas superiores e caudas de arestas cujas cabeças estão nas linhas inferiores.

Proposição 1.3.29 Todo digrafo finito acíclico possui uma ordenação topológica.

Demonstração

Tome o digrafo acíclico $G_1 = (V_1, A_1, \Psi)$. Devido à ausência de ciclos, tem-se que há, pelo menos um vértice em G_1 cujo grau de entrada é nulo. Assim, defina o conjunto formado por estes como a primeira linha da ordenação topológica: $L_1 = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,n_1}\}$.

Desta definição, tem-se que não há arestas que chegam a estes vértices e, todas as arestas que saem destes chegam a linhas abaixo da primeira.

Tome G_2 o subgrafo de G_1 dado por $(V_2, A_2, \Psi|_{A_2})$, onde $V_2 = V - L_1$ e A_2 define-se pelo conjunto de arestas cuja imagem por Ψ está definida em $V_2 \times V_2$. Como G_1 é acíclico, G_2 também o é. Assim, defina os vértices em G_2 cujo grau de entrada é nulo como a segunda linha da ordenação topológica: $L_2 = \{v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,n_2}\}$.

O procedimento é finito, pois, a quantidade de vértices nos elementos da sequência V_i é finita, limitada inferiormente por 0 e decrescente, visto que sempre há vértices com grau de entrada nulo. Assim, repita-o m vezes, até que todos os vértices em V_m possuam grau de entrada nulo e, portanto, façam parte da m -ésima linha da ordenação topológica.

Resta-nos demonstrar que este algoritmo constrói uma ordenação topológica.

Suponha que haja uma aresta a_k com cauda em $v_{j,b}$ e cabeça em um vértice $v_{i,a}$ com $i < j$, como na figura abaixo.

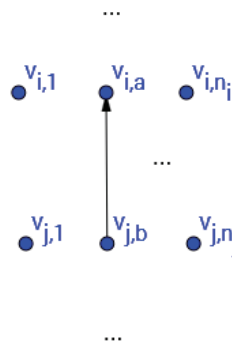


Figura 9: Aresta cuja existência contradiz a ordenação topológica

Como $v_{j,b} \in L_j$ com $i < j$, na i -ésima iteração do procedimento, não seria possível acrescentar o vértice $v_{i,a}$ a L_i , pois $v_{j,b} \in V_i$, portanto, $a_k \in A_i$ e $v_{i,a}$ não possuiria grau de entrada nulo.

Logo, arestas com cabeça numa linha superior à cauda não existem e esta organização é uma ordenação topológica.

■

Definição 1.3.30 *Um grafo acíclico e conexo é denominado árvore.*

Observação 1.3.31 *Toda árvore (grafo acíclico e conexo) é um grafo bipartido (não possui ciclos de comprimento ímpar).*

Outras formas de representação dos grafos têm sua importância, principalmente computacional, como veremos a seguir.

Definição 1.3.32 *Seja $G = (V, A, \Psi)$ um grafo, tal que $|V| = n$. Se G é não-ponderado, a matriz $n \times n$ com coeficientes em \mathbb{C} dada por:*

$$(a_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \exists \alpha \in A : \Psi(\alpha) = \{v_i, v_j\}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

é chamada matriz de adjacência de G .

Se existe uma função peso $P : A \rightarrow \mathbb{C}$ associada a G e G não possui arestas paralelas, a matriz de adjacência também pode ser definida como:

$$(a_{ij}) = \begin{cases} P(\alpha), & \text{se } \exists \alpha \in A : \Psi(\alpha) = \{v_i, v_j\}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2 Álgebras de Lie e Grafos

Este trabalho encontra suas motivações no artigo de Carriazo et al. [3], que propõe uma associação entre certas famílias de álgebras de Lie e grafos, com o objetivo de obter informações sobre características que traduzem sua solubilidade e nilpotência em propriedades de seus grafos.

Nosso objetivo é generalizar este estudo, sugerindo uma nova associação entre estruturas combinatórias e quaisquer álgebras de dimensão finita sobre o corpo dos números complexos e caracterizar propriedades algébricas na linguagem de grafos.

Nesta seção apenas apresentaremos os principais resultados obtidos em Carriazo et al. [3]. As demonstrações de resultados equivalentes serão apresentadas na Seção 3.1, onde tratamos de um dos três grafos que propomos a fim de generalizar a associação proposta por [3]

A associação proposta no artigo em questão estabelece as seguintes especificações:

Seja \mathcal{L} uma álgebra de Lie de dimensão n e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base de \mathcal{L} . O grafo $G = (V, A, \Psi)$ é dito associado a \mathcal{L} se:

- $V = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$;
- fixados e_i e e_j , a cada valor distinto para as constantes de estrutura $C_{i,j}^k \forall k \in \{1, \dots, n\} - \{i, j\}$ associa-se uma única aresta não dirigida com este valor como peso cujas extremidades são e_i e e_j ;
- as arestas que representam as constantes de estrutura $C_{i,j}^i$ são direcionadas de e_j para e_i .

Esta configuração provem de uma associação prévia da álgebra a uma estrutura combinatória seguindo o algoritmo abaixo, como originalmente apresentado em [3].

1. Para cada três elementos da base da álgebra (e_i, e_j, e_k) tais que $i < j < k$, construa uma subestrutura $G_{i,j,k}$ seguindo o algoritmo:
 - Associe cada elemento tomado a um vértice do subgrafo $G_{i,j,k}$ (adicionando e_i, e_j, e_k a $V_{i,j,k}$);
 - Se todas as constantes de estrutura proveniente de produtos entre os três elementos analisados são nulas, retorne ao primeiro passo utilizando a próxima tripla de elementos da base ainda não analisada;

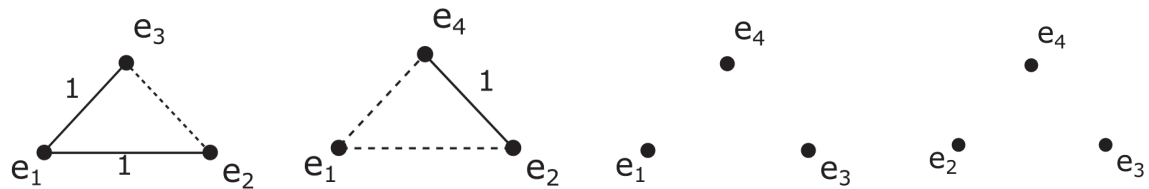
- Construa um triângulo utilizando os três vértices do grafo como vértices do triângulo tal que para cada $a, b, c \in \{i, j, k\}$ com $a < b \neq c \neq a$, se a constante de estrutura $C_{a,b}^c$ é nula, a aresta que ocorre entre os vértices e_a e e_b é representada como uma linha tracejada e denominada *aresta fantasma*. Caso a constante não seja nula, a aresta correspondente tem peso igual à constante.
2. Una todos os triângulos numa única estrutura combinatória unificando os vértices de mesmo nome e arestas idênticas (mesmo peso, vértice de entrada e de saída);
 3. A cada constante de estrutura $C_{i,j}^k$ com $i = k$ ou $j = k$, associe uma nova aresta entre e_i e e_j orientada na direção de e_k .

Observação 2.0.1 *É importante notar que como a estrutura combinatória e o grafo estão definidos apenas para álgebras de Lie, a análise das constantes de estrutura $C_{j,i}^k$ com $i \leq j$ não comportaria qualquer informação significativa para o grafo, pois $C_{i,j}^k = -C_{j,i}^k$ e $C_{i,i}^k = 0$.*

Exemplo 2.0.2 *Seja a álgebra de Lie \mathcal{L}_1 que, na base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, é definida pela lei:*

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_3; \\ [e_1, e_3] &= e_2; \\ [e_2, e_4] &= e_1. \end{aligned}$$

Tal como o algoritmo descreve, obtemos a seguinte estrutura:



(a) Vértices (e_1, e_2, e_3) (b) Vértices (e_1, e_2, e_4) (c) Vértices (e_1, e_3, e_4) (d) Vértices (e_2, e_3, e_4)

Figura 10: Estrutura combinatória inicial da álgebra \mathcal{L}_1

Após a sobreposição dos vértices de mesmo nome, tem-se a seguinte estrutura:

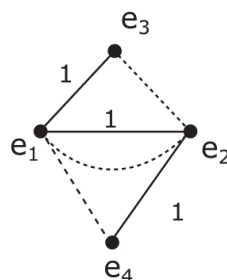


Figura 11: Estrutura combinatória relacionada à álgebra \mathcal{L}_1

E, após a supressão das arestas fantasma e paralelas com o mesmo peso, finalmente, tem-se o grafo associado à álgebra \mathcal{L}_1 :

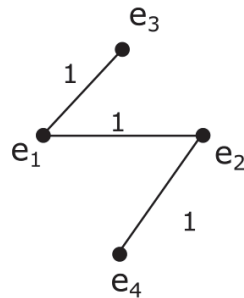


Figura 12: Grafo segundo Carriazo et al. [3] associado à álgebra \mathcal{L}_1

Observação 2.0.3 *É importante observar, porém, que não há uma relação imediata entre os grafos de álgebras isomorfas, como pode ser observado no exemplo abaixo.*

Exemplo 2.0.4 *Sejam as álgebras de Lie de dimensão 3 e seus grafos associados:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \\ [e_1, e_2] &= e_1; \\ [e_2, e_3] &= e_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 \\ [e_1, e_2] &= e_1 - e_2; \\ [e_1, e_3] &= e_3; \\ [e_2, e_3] &= e_3. \end{aligned}$$

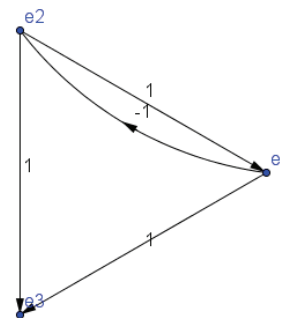
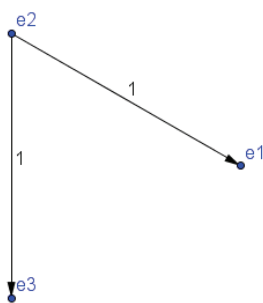


Figura 13: Grafo segundo Carriazo et al. [3] associado à álgebra \mathcal{L}_2 Figura 14: Grafo segundo Carriazo et al. [3] associado à álgebra \mathcal{L}_3

Entre \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 é possível estabelecer o isomorfismo $\Phi : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_3$ dado por:

$$\begin{aligned} \Phi(e_1) &= e_1 + e_2; \\ \Phi(e_2) &= e_2; \\ \Phi(e_3) &= e_3. \end{aligned}$$

Portanto, são álgebras isomorfas. Seus grafos associados, porém, não o são.

O estudo em Carriazo et al. [3] restringiu-se à família de álgebras cujas constantes de estrutura $C_{i,j}^k = 0, \forall i \neq k \neq j$. Ou seja, álgebras cujos produtos respeitam a lei:

$$[e_i, e_j] = C_{i,j}^i e_i + C_{i,j}^j e_j \tag{2.1}$$

De fato, enquanto as estruturas combinatórias foram analisadas para todas as álgebras de Lie, o estudo dos grafos restringe-se às álgebras desta família, devido a sua propriedade de preservação de toda a informação da álgebra através da orientação.

E esta restrição nas constantes de estrutura possibilita a obtenção, através do grafo, de informações sobre o resultado dos produtos colchetes entre os elementos da base e, conseqüentemente, sobre sua série central descendente e derivada.

Desta forma, o artigo enumera as configurações realizáveis e não-realizáveis de grafos obtidos pela conversão de álgebras pertencentes a família em questão (e com dimensão maior ou igual a 3) após examinar os casos em que se verifica a identidade de Jacobi, obtendo os seguintes resultados:

Lema 2.0.5 (Carriazo et al. [3]) *Seja \mathcal{L} uma álgebra de Lie associada ao grafo G . Então, as configurações mostradas na figura 15 são proibidas em G para quaisquer três diferentes vértices e_i, e_j, e_k (independente do peso das arestas). Em outras palavras, a ocorrência de qualquer configuração dentre as abaixo caracteriza grafos que não representam as álgebras para as quais esta associação está definida.*

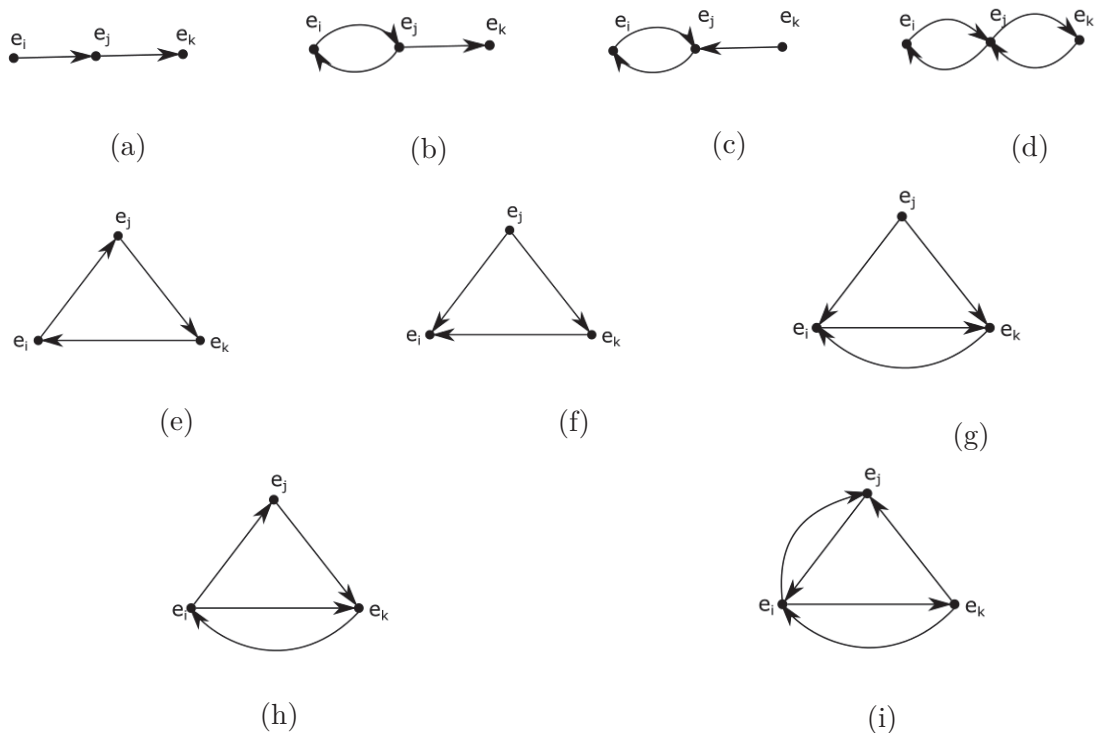


Figura 15: Configurações Proibidas em [3]

Portanto, as configurações restantes são candidatas a permitidas, como revela o corolário a seguir.

Corolário 2.0.6 (Carriazo et al. [3]) *Dados três diferentes vértices e_i , e_j e e_k em um grafo G associado a uma álgebra de Lie, eles apresentam uma das configurações na figura 16, salvo permutações entre seus rótulos.*

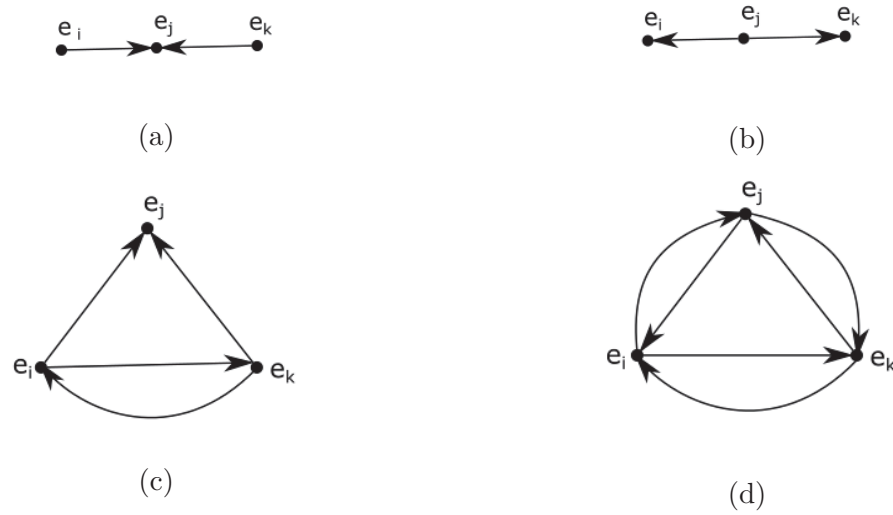


Figura 16: Configurações Permitidas em [3]

A partir desta relação, Carriazo et al. [3] trabalha sobre dois grupos de grafos gerados por álgebras buscando informações sobre sua solubilidade e nilpotência, como contemplaremos a seguir.

2.1 Grafos sem ciclos de comprimento três

Trivialmente, tem-se que cada trio de vértices adjacentes dos grafos sem ciclos de comprimento três definidos em [3] possui a configuração 16a ou 16b. Diretamente deste fato, obtem-se o seguinte Teorema:

Teorema 2.1.1 (Carriazo et al. [3]) *Seja G um grafo sem ciclos de comprimento três associado a uma álgebra de Lie de dimensão maior que dois que respeita a lei de formação (2.1). Então, G é um grafo bem-orientado.*

Além disso, qualquer grafo bem-orientado está associado a uma álgebra de Lie.

Observação 2.1.2 *É importante notar que a definição de ciclos utilizada em [3] não considera a orientação das arestas. Assim, deve-se considerar a definição de ciclos para grafos não orientados ao se analisar este capítulo.*

Corolário 2.1.3 *Dado um grafo bipartido, não-dirigido, sem arestas paralelas e ponderado cuja função peso não atinge o valor zero; é possível estabelecer uma orientação de forma que ele esteja relacionado a uma Álgebra de Lie. Iniciando o processo em um vértice qualquer, basta orientar suas arestas incidentes de forma que este seja um sumidouro (respectivamente, fonte), seus vizinhos sejam fontes (respectivamente, sumidouros) e seguir alternando os vértices da vizinhança em sumidouros e fontes. Como não ocorrem ciclos de comprimento ímpar em um grafo bipartido, não ocorrerá a necessidade de um vértice adjacente sumidouro se este já for fonte (e viceversa).*

Ademais, este tipo de grafo nos permite aferir algumas características sobre sua série derivada e série central descendente, pois, sua primeira derivada coincide com os elementos da base que correspondem aos vértices sumidouros. A partir desta observação, obtem-se o principal teorema para grafos que não possuem ciclos de comprimento três:

Teorema 2.1.4 *(Carriazo et al. [3]) Seja \mathcal{L} uma álgebra de Lie que, com a base $\{e_1, \dots, e_n\}$ associa-se a um grafo G . Suponha que G não contém ciclos de comprimento três. Então, \mathcal{L} é solúvel, com índice de solubilidade três, mas não nilpotente.*

2.2 Grafos com ciclos de comprimento três

Nos grafos em que ocorrem ciclos de comprimento três, a análise da derivada pode não ser tão trivial, posto que podem haver, também, arestas paralelas (como pode ser observado nas configurações 16c e 16d) e, portanto, vértices que não são sumidouros, tampouco, fontes representando produtos que resultam em uma combinação linear de dois elementos da base.

Portanto, nos resultados obtidos para as álgebras que geram os grafos com ciclos de comprimento três, Carriazo et al. [3] utilizam de uma abordagem mais técnica, aplicando a identidade de Jacobi aos elementos da base de álgebras cujos grafos possuam tal estrutura.

Teorema 2.2.1 *(Carriazo et al. [3]) Seja G um grafo contendo ciclos de comprimento três e associado a uma álgebra de Lie. Então, G satisfaz as seguintes condições:*

1. *Em cada ciclo de tamanho três ocorrem arestas duplas e não há arestas duplas externas a estes;*
2. *Se o ciclo de comprimento três ocorre como a configuração 16c, os vértices adjacentes aos extremos das arestas duplas não são adjacentes entre si, seguindo a configuração:*

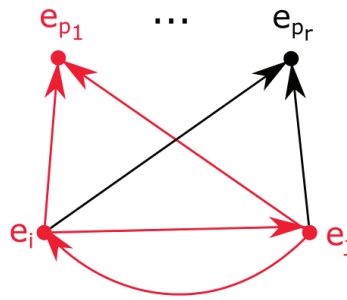


Figura 17: Primeira configuração com ciclos de comprimento três [3]

3. Se, por outro lado, verifica-se um ciclo de comprimento três correspondendo à configuração 16d, os vértices adjacentes a qualquer vértice do ciclo também são adjacentes aos outros vértices do mesmo ciclo e não são adjacentes entre si, como a configuração a seguir:

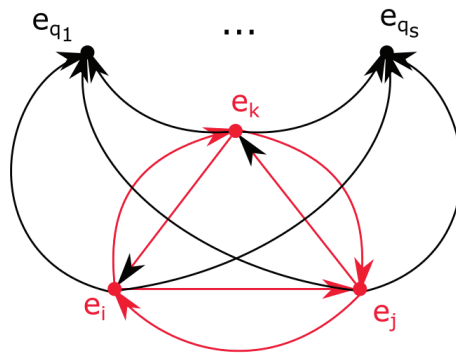


Figura 18: Segunda configuração com ciclos de comprimento três [3]

4. O subgrafo obtido pela remoção das arestas duplas de G satisfaz a condição do Teorema 2.1.1

Enfim, são obtidos os mesmos resultados em relação à solubilidade e nilpotência de grafos que satisfazem a configuração da figura 17.

Teorema 2.2.2 (Carriazo et al. [3]) *Seja G um grafo associado a uma álgebra de Lie. Se G não possui a configuração 16d, então G está associado a uma álgebra solúvel com índice de solubilidade 3 e não nilpotente.*

Entretanto, a existência da configuração presente na figura 18 condiciona sua solubilidade a alguns requisitos.

Teorema 2.2.3 (Carriazo et al. [3]) *Seja G um grafo contendo a configuração representada na figura 18 associado a uma álgebra de Lie. Então, a álgebra associada a G é solúvel se, e somente se, satisfaz alguma das equações equivalentes (utilizando a notação presente na figura):*

$$\begin{aligned}C_{i,j}^i &= -C_{j,k}^k; \\C_{i,j}^j &= C_{i,k}^k; \\C_{i,k}^i &= C_{j,k}^j.\end{aligned}$$

Neste caso, possui índice de solubilidade 3 e não é nilpotente.

Enfim, o artigo tratado nesta seção [3] foi adotado como ponto de partida para avançar no estudo de classificações de álgebras de Leibniz com novas ferramentas, que pode significar grandes avanços nesta área. Porém, um cenário ideal seria a associação que preserve isomorfismos ou, ao menos, que permita estabelecer uma relação entre isomorfismos de álgebras e de seus grafos associados.

Buscamos, então, ampliar a associação realizada por Carriazo et al. [3] a outras famílias de álgebras, através de três generalizações deste conceito.

3 Generalizações

Neste capítulo, propomos três generalizações à associação entre álgebras e grafos discutida no Capítulo 2. Estas representações, além de compreender as características presentes no trabalho de Carriazo et al. [3], proporcionam novos resultados, sendo definidas para qualquer família de álgebras, associativas ou não.

Estas generalizações, denominadas grafo tipo 1, grafo tipo 2 à direita e grafo tipo 2 à esquerda, integram um estudo realizado pelo grupo de pesquisa *Relações entre a Teoria dos Grafos e a Teoria das álgebras associativas e não-associativas*. Este estudo originou um artigo intitulado *On properties of algebras associated with graphs*, submetido à publicação em novembro de 2015.

Inicialmente, iremos apresentar os resultados relativos aos grafos do tipo 1, comprovando que generalizam os resultados apresentados no Capítulo 2. Na seção 3.2, apresentaremos os novos resultados obtidos com os grafos do tipo 2.

3.1 Grafo tipo 1

Definição 3.1.1 *Seja \mathcal{A} uma álgebra de dimensão finita e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de \mathcal{A} , cujo produto é definido pela lei*

$$e_i * e_j = \sum_{k=1}^n C_{i,j}^k e_k \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Definimos o grafo tipo 1 de \mathcal{A} como o dígrafo $G = (V, A, \Psi : A \rightarrow \mathbb{C}^2)$ munido da função $P : A \rightarrow \mathbb{C}^n$, tal que existe uma função bijetora $f : \mathcal{B} \rightarrow V$ de forma que:

- *Para cada produto não nulo $e_i * e_j$ em \mathcal{A} , $\exists! \alpha_{(i,j)} \in A : \Psi(\alpha_{(i,j)}) = (f(e_i), f(e_j))$;*
- *$\forall \alpha \in A$, $P(\alpha) = (C_{\Psi(\alpha)}^1, \dots, C_{\Psi(\alpha)}^n)$.*

É importante notar que os grafos do tipo 1 não são dígrafos ponderados, mas podem ser considerados uma generalização deste conceito, visto que a imagem da função peso não incorre sobre os complexos, mas sobre o espaço vetorial n -dimensional \mathbb{C}^n . Assim, na representação em diagramas, os resultados da aplicação da função P em cada aresta são representados sobre a mesma, analogamente aos pesos de um grafo ponderado. E, nesta analogia, denominaremos a função $P : A \rightarrow \mathbb{C}^n$ como função peso.

Proposição 3.1.2 *Existe um único grafo tipo 1 para uma álgebra \mathcal{A} , desde que fixada sua base.*

Demonstração

A demonstração construtiva será apresentada a partir da especificação do algoritmo para a construção deste grafo.

Seja \mathcal{A} uma álgebra e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de \mathcal{A} , com a lei

$$e_i * e_j = \sum_{k=1}^n C_{i,j}^k e_k.$$

- Para cada $e_i \in \mathcal{B}$, adicione um elemento e'_i ao conjunto de vértices V .
- A cada dupla e_i, e_j de elementos da base de \mathcal{A} cujo produto seja não nulo, adicione uma aresta $\alpha_{(i,j)}$ ao conjunto de arestas A e defina a função peso $P : A \rightarrow \mathbb{C}^n$ de forma que $P(\alpha_{(i,j)}) = (C_{i,j}^1, \dots, C_{i,j}^n)$.

Como o produto é bem definido, existe um único grafo que satisfaz esta definição e, se a álgebra é comutativa, cada aresta $\alpha_{(i,j)}$ é paralela a $\alpha_{(j,i)}$, que possuem o mesmo valor para a função peso. ■

Exemplo 3.1.3 Assim, uma álgebra de Leibniz \mathcal{L}_4 com uma base e_1, e_2, e_3, e_4 fixada, cuja lei é dada por:

$$\begin{aligned} [e_1, e_1] &= e_3; \\ [e_1, e_2] &= e_4; \\ [e_2, e_1] &= e_3; \\ [e_2, e_2] &= e_2; \\ [e_3, e_1] &= e_4. \end{aligned}$$

associa-se ao grafo do tipo 1 representado por:

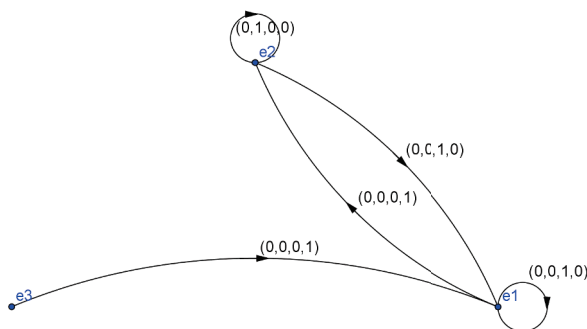


Figura 19: Grafo tipo 1 associado à álgebra de Leibniz \mathcal{L}_4

Os grafos do tipo 1 destacam características relativas aos operandos no produto definido na álgebra, portanto alguns resultados são imediatos da própria definição, como:

Observação 3.1.4 *Seja G o grafo do tipo 1 associado a uma álgebra \mathcal{A} .*

- $\dim(\mathcal{A}) = \#V$;
- se \mathcal{A} é uma álgebra de Lie, G não possui laços e os vértices isolados em G representam os elementos no anulador dessa álgebra;
- se não ocorrem laços em G , então todos os elementos de \mathcal{A} são nilpotentes;
- se \mathcal{A} é comutativa, todas as arestas possuem uma correspondente paralela, orientada no sentido contrário e com a mesma imagem pela função peso.

Proposição 3.1.5 *Sejam \mathcal{A} uma álgebra, \mathcal{B} uma base de \mathcal{A} e $G_1 = (V, A, \Psi)$ seu grafo do tipo 1 associado. Seja $x \in \mathcal{B}$. Tem-se:*

- $x \in \text{Ann}_L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \delta_{G_1}^{\text{out}}(x) = 0$;
- $x \in \text{Ann}_R(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \delta_{G_1}^{\text{in}}(x) = 0$;
- $x \in \text{Ann}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \delta_{G_1}^{\text{out}}(x) = \delta_{G_1}^{\text{in}}(x) = 0$.

Demonstração

Seja $x \in \mathcal{B}$. Pela definição do grafo tipo 1 associado a uma álgebra \mathcal{A} , existe uma aresta $\alpha \in A : \Psi(\alpha) = (x, y)$ se e somente se existe $y \in \mathcal{B} : [x, y] \neq 0$ e, portanto, se e somente se x não está no anulador à esquerda de \mathcal{A} .

Analogamente, uma aresta $\alpha \in A : \Psi(\alpha) = (y, x)$ se e somente se existe $x \in \mathcal{B} : [y, x] \neq 0$. O que demonstra o segundo item.

Finalmente, não ocorre nenhuma aresta incidente a x se e somente se não existem produtos não nulos entre x e quaisquer outros elementos da base. E, portanto, entre x e quaisquer outros elementos da álgebra (combinações lineares de elementos da base). ■

3.1.1 Demonstração dos resultados análogos aos encontrados no artigo Carriazo et al. [3] para os grafos do tipo 1

Antes de prosseguir, é apropriado perceber como as informações dos grafos em Carriazo et al. [3] são representadas nos grafos tipo 1.

Em uma primeira análise, é imediato concluir que, devido à antissimetria, grafos do tipo 1 relacionados a álgebras de Lie deverão apresentar todas suas arestas paralelas duas a duas e estas possuirão pesos opostos entre si.

Restrinjamos, então, as álgebras representadas a álgebras de Lie cujas constantes de estrutura não nulas são na forma c_{ij}^i e c_{ij}^j como no artigo de Carriazo et al. [3]. Desse modo, o peso de cada aresta $\alpha_{(i,j)} : \Psi(\alpha_{(i,j)}) = (e_i, e_j)$ possui, no máximo, duas coordenadas não nulas, a i -ésima e a j -ésima.

Ademais, é imediato que uma aresta orientada de e_i a e_j em um dos grafos definidos por Carriazo et al. [3] porta a mesma informação que uma dupla de arestas ambas com imagem pela função peso apenas com a coordenada da posição i não nula em um grafo do tipo 1. Respectivamente, a existência de arestas paralelas entre dois vértices no primeiro corresponde a uma dupla de arestas cujo peso possui duas coordenadas não nulas no segundo.

Portanto, é possível enunciar os resultados em [3] utilizando esta nova linguagem e, então, demonstrá-los.

A princípio, porém, definiremos termos afim de simplificar a notação das demonstrações posteriores:

Definição 3.1.6 *Dir-se-á aresta com peso duplo a uma aresta cuja imagem pela função peso possuir duas coordenadas não nulas.*

Definição 3.1.7 *Já a nomenclatura aresta de peso simples compreenderá o grupo de arestas cuja imagem pela função peso possua apenas uma coordenada não nula.*

Observação 3.1.8 *Dada a construção do grafo do tipo 1 para a família de álgebras cujo produto respeita a lei de formação (2.1), é imediato perceber que todas as arestas dos grafos analisados nessa seção possuirão peso duplo ou simples.*

A partir destas definições e observação, é possível obter o resultado análogo ao Lema 2.0.5.

Lema 3.1.9 *Seja \mathcal{L} uma álgebra de Lie e G o seu grafo do tipo 1 associado. Então, as configurações mostradas na figura 20 são proibidas em G para quaisquer três diferentes vértices e_i, e_j, e_k (independente do valor das coordenadas não nulas do peso das arestas).*

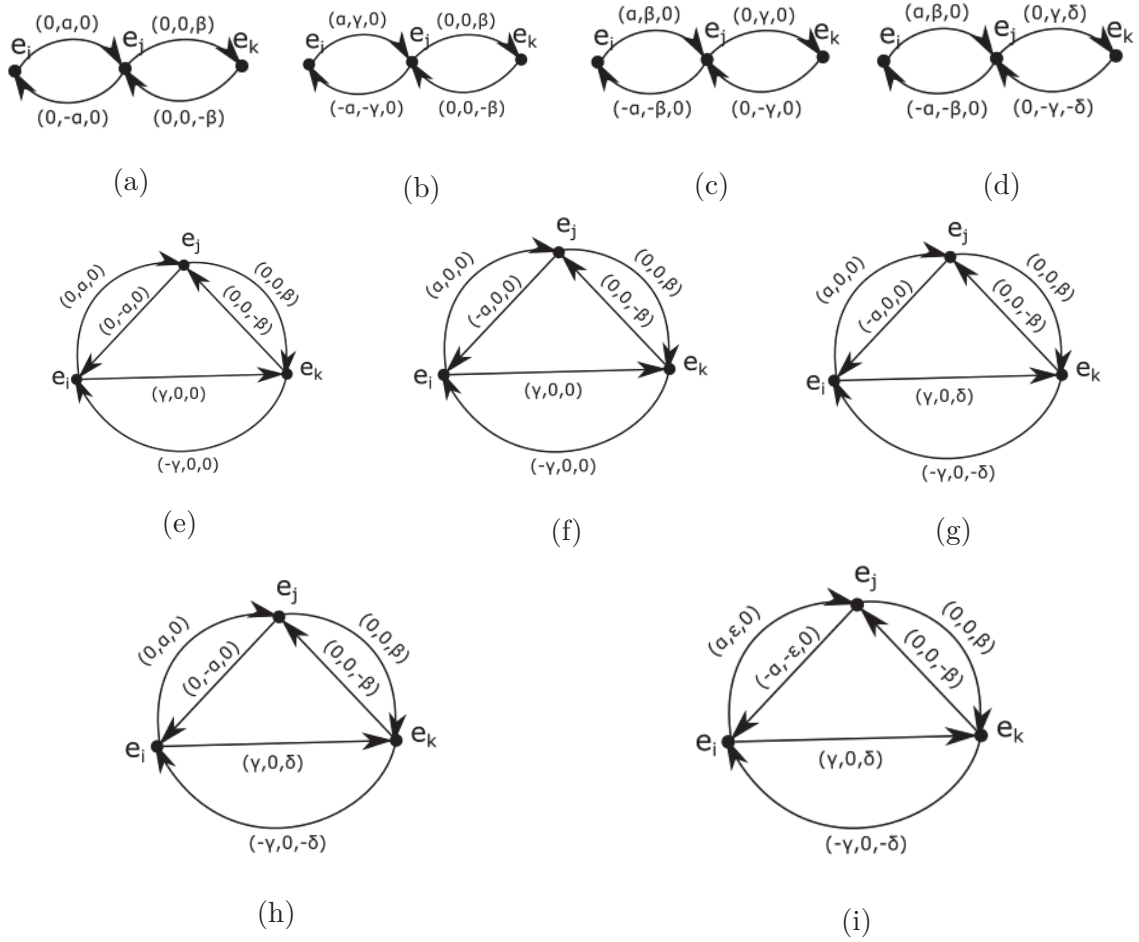


Figura 20: Configurações proibidas para os grafos do tipo 1 (com α , β , γ , δ e ε não nulos)

Observação 3.1.10 Para facilitar a compreensão da notação, na figura, em cada peso estão representados apenas as coordenadas relativas a cada trio de vértices, ordenados de forma que $i < j < k$.

Demonstração

- Seja \mathcal{L} uma álgebra de Lie na família considerada tal que a configuração 20a faça parte de seu grafo do tipo 1. Tem-se que a identidade de Jacobi dos três vértices representados em tal configuração (e_i , e_j e e_k) não é satisfeita.

$$\begin{aligned}
 J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\
 &= [\alpha e_j, e_k] + [\beta e_k, e_i] + [0, e_j] \\
 &= \alpha [e_j, e_k] + \beta [e_k, e_i] \\
 &= \alpha \beta e_k + \beta \cdot 0 \\
 &= \alpha \beta e_k \neq 0.
 \end{aligned}$$

Analogamente, tem-se a mesma impossibilidade para a existência das demais configurações no grafo tipo 1 da álgebra em questão:

- 20b;

$$\begin{aligned}
 J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\
 &= [\alpha e_i + \gamma e_j, e_k] + [\beta e_k, e_i] + [0, e_j] \\
 &= 0 + \gamma[e_j, e_k] + \beta[e_k, e_i] + 0 \\
 &= \gamma\beta e_k + 0 \neq 0.
 \end{aligned}$$

- 20c;

$$\begin{aligned}
 J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\
 &= [\alpha e_i + \beta e_j, e_k] + [\gamma e_j, e_i] + [0, e_j] \\
 &= 0 + \beta[e_j, e_k] + \gamma[e_j, e_i] + 0 \\
 &= \beta\gamma e_j + \gamma(-\alpha e_i - \beta e_j) \\
 &= -\gamma\alpha e_i \neq 0.
 \end{aligned}$$

- 20d;

$$\begin{aligned}
 J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\
 &= [\alpha e_i + \beta e_j, e_k] + [\gamma e_j + \delta e_k, e_i] + [0, e_j] \\
 &= 0 + \beta[e_j, e_k] + \gamma[e_j, e_i] + 0 \\
 &= \beta(\gamma e_j + \delta e_k) + \gamma(-\alpha e_i - \beta e_j) \\
 &= -\gamma\alpha e_i + \beta\delta e_k \neq 0.
 \end{aligned}$$

- 20e;

$$\begin{aligned}
 J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\
 &= [\alpha e_j, e_k] + [\beta e_k, e_i] + [-\gamma e_i, e_j] \\
 &= \alpha\beta e_k - \beta\gamma e_i - \gamma\alpha e_j \neq 0.
 \end{aligned}$$

- 20f;

$$\begin{aligned}
 J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\
 &= [\alpha e_i, e_k] + [\beta e_k, e_i] + [-\gamma e_i, e_j] \\
 &= \alpha\gamma e_i - \beta\gamma e_i - \gamma\alpha e_i \\
 &= -\beta\gamma e_i \neq 0.
 \end{aligned}$$

- 20g;

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\
&= [\alpha e_i, e_k] + [\beta e_k, e_i] + [-\gamma e_i - \delta e_k, e_j] \\
&= \alpha(\gamma e_i + \delta e_k) - \beta(\gamma e_i + \delta e_k) - \gamma[e_i, e_j] - \delta[e_k, e_j] \\
&= \alpha\gamma e_i + \alpha\delta e_k - \beta\gamma e_i - \beta\delta e_k - \gamma\alpha e_i + \delta\beta e_k \\
&= +\alpha\delta e_k - \beta\gamma e_i \neq 0.
\end{aligned}$$

- 20h;

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\
&= \alpha[e_j, e_k] + \beta[e_k, e_i] - \gamma[e_i, e_j] - \delta[e_k, e_j] \\
&= \alpha\beta e_k - \beta\gamma e_i - \beta\delta e_k - \gamma\alpha e_j + \delta\beta e_k \\
&= \alpha\beta e_k - \beta\gamma e_i - \gamma\alpha e_j \neq 0.
\end{aligned}$$

- 20i;

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\
&= [\alpha e_i + \varepsilon e_j, e_k] + [\beta e_k, e_i] + [-\gamma e_i - \delta e_k, e_j] \\
&= \alpha[e_i, e_k] + \varepsilon[e_j, e_k] + \beta[e_k, e_i] - \gamma[e_i, e_j] - \delta[e_k, e_j] \\
&= \alpha(\gamma e_i + \delta e_k) + \varepsilon(\beta e_k) + \beta(-\gamma e_i - \delta e_k) - \gamma(\alpha e_i + \varepsilon e_j) - \delta(-\beta e_j) \\
&= \alpha\gamma e_i + \alpha\delta e_k + \varepsilon\beta e_k - \beta\gamma e_i - \beta\delta e_k - \gamma\alpha e_i - \gamma\varepsilon e_j + \delta\beta e_j \\
&= \alpha\delta e_k + \varepsilon\beta e_k - \beta\gamma e_i - \beta\delta e_k - \gamma\varepsilon e_j + \delta\beta e_j \\
&= \underbrace{-\beta\gamma e_i}_{\neq 0} + (\delta\beta - \gamma\varepsilon)e_j + (\alpha\delta + \varepsilon\beta - \beta\delta)e_k \neq 0.
\end{aligned}$$

Como estas configurações não preservam a identidade de Jacobi, a hipótese de \mathcal{L} ser uma álgebra de Lie não é satisfeita. ■

Diretamente deste resultado, obtem-se o análogo ao Lema 2.0.6.

Corolário 3.1.11 *Dados três vértices distintos e_i , e_j e e_k em um grafo do tipo 1 associado a uma álgebra de Lie \mathcal{L} , eles apresentam uma das configurações na figura 21.*

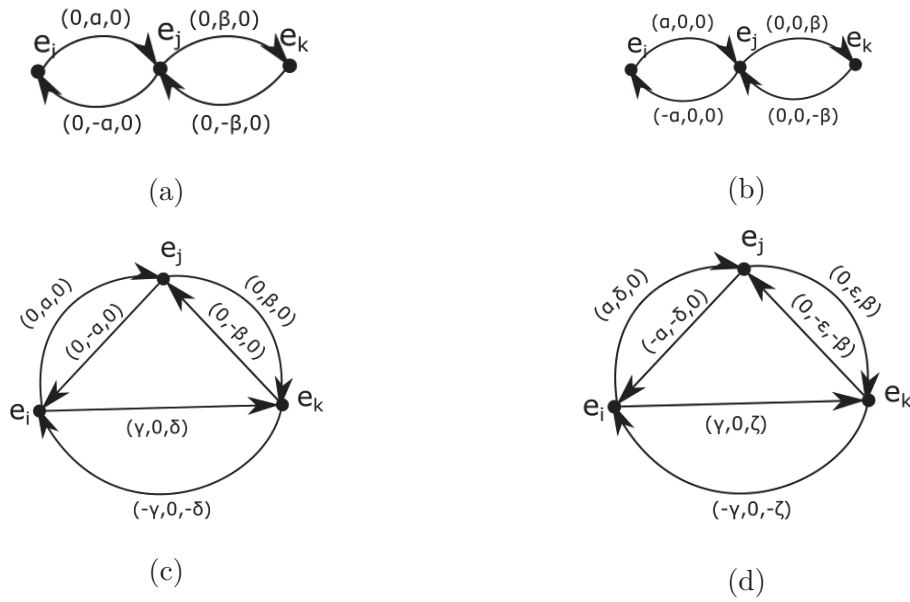


Figura 21: Configurações permitidas para os grafos do tipo 1 (com α , β , γ , δ , ϵ e ζ não nulos)

Ademais, as constantes de estrutura que participam da configuração 21c respeitam a equação $C_{i,k}^i C_{i,j}^j = C_{j,k}^j C_{i,k}^k$.

Por outro lado, as constante de estrutura compreendidas na configuração 21d submetem-se às equações:

$$\begin{cases} C_{j,k}^k C_{i,k}^i = -C_{j,k}^j C_{i,j}^i, \\ C_{i,k}^k C_{j,k}^j = C_{i,k}^i C_{i,j}^j, \\ C_{i,j}^i C_{i,k}^k = -C_{i,j}^j C_{j,k}^k. \end{cases}$$

Demonstração

Diretamente do Lema 3.1.9, tem-se que, se há configurações permitidas para os grafos tipo 1, estas não podem estar entre as da figura 20, e, portanto, precisam estar entre as referidas na figura 21.

Resta-nos provar que estas são permitidas e determinar as condições exigidas para as constantes de estrutura de \mathcal{L} .

Analisaremos caso a caso:

- Configuração 21a

$$\begin{aligned} J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\ &= [\alpha e_j, e_k] + [\beta e_j, e_i] + [0, e_j] \\ &= \alpha \beta e_j - \beta \alpha e_j + 0 = 0. \end{aligned}$$

- Configuração 21b

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\
&= [\alpha e_i, e_k] + [\beta e_k, e_i] + [0, e_j] \\
&= \alpha[e_i, e_k] + \beta[e_k, e_i] + 0 \\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

- Configuração 21c

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\
&= [\alpha e_j, e_k] + [\beta e_j, e_i] + [\gamma e_i + \delta e_k, e_j] \\
&= \alpha[e_j, e_k] + \beta[e_j, e_i] + \gamma[e_i, e_j] + \delta[e_k, e_j] \\
&= \alpha\beta e_j - \beta\alpha e_j + \gamma\alpha e_j - \delta\beta e_j.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_k) &= (\gamma\alpha - \delta\beta)e_j \\
J(e_i, e_j, e_k) &= 0 \Leftrightarrow \gamma\alpha = \beta\delta \Leftrightarrow C_{i,k}^i C_{i,j}^j = C_{j,k}^j C_{i,k}^k.
\end{aligned}$$

- Configuração 21d

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\
&= [\alpha e_i + \delta e_j, e_k] + [\varepsilon e_j + \beta e_k, e_i] - [\gamma e_i + \zeta e_k, e_j] \\
&= \alpha[e_i, e_k] + \delta[e_j, e_k] + \varepsilon[e_j, e_i] + \beta[e_k, e_i] - \gamma[e_i, e_j] - \zeta[e_k, e_j] \\
&= \alpha\gamma e_i + \alpha\zeta e_k + \delta\varepsilon e_j + \delta\beta e_k - \varepsilon\alpha e_i - \varepsilon\delta e_j - \beta\gamma e_i - \beta\zeta e_k - \gamma\alpha e_i - \gamma\delta e_j \\
&\quad + \zeta\varepsilon e_j + \zeta\beta e_k \\
&= \alpha\zeta e_k + \delta\beta e_k - \varepsilon\alpha e_i - \beta\gamma e_i - \gamma\delta e_j + \zeta\varepsilon e_j \\
&= (\alpha\zeta + \delta\beta)e_k - (\beta\gamma + \varepsilon\alpha)e_i + (\zeta\varepsilon - \gamma\delta)e_j.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
J(e_i, e_j, e_k) &= -(\beta\gamma + \varepsilon\alpha)e_i + (\zeta\varepsilon - \gamma\delta)e_j + (\alpha\zeta + \delta\beta)e_k \\
J(e_i, e_j, e_k) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta\gamma = -\varepsilon\alpha \\ \zeta\varepsilon = \gamma\delta \\ \alpha\zeta = -\delta\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{j,k}^k C_{i,k}^i = -C_{j,k}^j C_{i,j}^i \\ C_{i,k}^k C_{j,k}^j = C_{i,k}^i C_{i,j}^j \\ C_{i,j}^i C_{i,k}^k = -C_{i,j}^j C_{j,k}^k \end{cases}.
\end{aligned}$$

■

É importante observar que as identidades de Jacobi aplicadas a outras permutações de e_i , e_j e e_k são nulas sempre que $J(e_i, e_j, e_k) = 0$. Isto ocorre devido à anticomutatividade do produto colchete. Portanto, estes resultados restringem as possíveis configurações

para cada trio de vértices encontradas em grafos associados às álgebras em estudo. Nas próximas seções, analisaremos configurações globais para os grafos em questão e de que forma propriedades das álgebras se traduzem em suas respectivas representações como grafos.

3.1.1.1 As configurações permitidas 21a e 21b

Nos próximos resultados, análogos ao Teorema 2.1.1, Corolário 2.1.3 e Teorema 2.1.4, analisaremos os grafos cujos trios de vértices encontram-se dispostos de acordo com as configurações 21a e 21b apenas.

Teorema 3.1.12 *Seja $G = (V, A, \Psi)$, munido da função peso $P : A \rightarrow \mathbb{C}^n$ o grafo do tipo 1 de uma álgebra de Lie \mathcal{L} . Suponha que G não possui ciclos de comprimento três, que a dimensão de \mathcal{L} é maior do que dois e que \mathcal{L} respeita a lei de formação (2.1).*

Então, tem-se que:

- *a imagem pela função peso de cada aresta possui uma única coordenada não nula;*
- *cada vértice $e_i \in V$ é tal que $\forall \alpha \in A$ incidente a e_i , $\pi_i(P(\alpha)) = 0$ ou $\forall \alpha \in A$ incidente a e_i , $\pi_i(P(\alpha)) \neq 0$, onde $\pi_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é a projeção da i -ésima coordenada sobre os complexos.*

Além disso, qualquer grafo do tipo 1 com estas condições está associado a uma álgebra de Lie.

Demonstração

A configuração do grafo descrita na primeira parte do Teorema decorre naturalmente do Corolário 3.1.11, uma vez que se há uma aresta cujo peso possui uma dupla de coordenadas não nulas, a configuração dos vértices adjacentes a suas extremidades obrigatoriamente forma um ciclo de comprimento três (como em 21c e 21d). Portanto, cada três vértices num grafo do tipo 1 sem ciclos de comprimento três possuem a configuração descrita em 21a ou em 21b. Desta forma, a segunda condição do Teorema é satisfeita.

A recíproca do Teorema também decorre do Corolário 3.1.11, pois, ao demonstrarmos-no, provamos que quaisquer três vértices que respeitem as configurações 21a ou 21b correspondem a elementos da base da álgebra que respeitam a identidade de Jacobi, independente das demais constantes de estrutura. ■

Assim, tem-se o seguinte Corolário:

Corolário 3.1.13 *Seja $G = (V, A, \Psi)$ um grafo bipartido, sem arestas paralelas, não orientado e ponderado com uma função peso $P : A \rightarrow \mathbb{C}$, que não atinge o valor zero.*

Então, é possível estruturar um novo grafo $\bar{G} = (V, \bar{A}, \bar{\Psi})$ associado a uma função peso $\bar{P} : \bar{A} \rightarrow \mathbb{C}^n$, de forma que:

- *A cada aresta não-orientada $\alpha \in A$, existam em \bar{A} duas arestas com as mesmas extremidades de α orientadas com sentidos opostos entre si;*
- *a imagem de \bar{P} por cada dupla de arestas paralelas $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ possui uma única coordenada não nula, esta de valor absoluto igual ao valor absoluto da imagem de P sobre a aresta original em A . De forma que $\bar{P}(\bar{\alpha}) = -\bar{P}(\bar{\beta})$.*

Este é o grafo tipo 1 associado a pelo menos uma álgebra de Lie que respeita a lei de formação dada pela equação (2.1).

Demonstração

A fim de facilitar a notação, definiremos a função $\Pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}^n$, onde a i -ésima coordenada não nula corresponde à i -ésima coordenada.

Seja $G = (V, A, \Psi)$ um grafo não orientado, ponderado, bipartido e sem arestas paralelas. Apresentaremos uma prova construtiva, na qual será exposto um algoritmo para a definição de $\bar{G} = (V, \bar{A}, \bar{\Psi})$ e \bar{P} de forma a corroborar o Corolário.

1. Para cada $\alpha \in A : \Psi(\alpha) = \{i, j\}$, adicione $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\alpha}_2$ a \bar{A} , de forma que $\Psi(\bar{\alpha}_1) = (i, j)$ e $\Psi(\bar{\alpha}_2) = (j, i)$.
2. Seja $e_i \in V$.
 - a) Para cada vértice e_j adjacente a e_i , existem exatamente duas arestas $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \in \bar{A}$ e uma $\alpha \in A$ com esta dupla de vértices como extremidades. Defina $\bar{P}(\bar{\alpha}_1) = P(\alpha) \cdot \Pi(i)$ e $\bar{P}(\bar{\alpha}_2) = -1 \cdot P(\alpha) \cdot \Pi(i)$. Assim, e_i torna-se o equivalente a um sumidouro na representação de Carriazo et al. [3] (denominaremos *receptor de arestas*).
 - b) Similarmente, para cada e_k adjacente a e_j (com $i \neq k$), existem exatamente duas arestas $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \in \bar{A}$ e uma $\alpha \in A$ com esta dupla de vértices como extremidades. Defina $\bar{P}(\bar{\alpha}_1) = P(\alpha) \cdot \Pi(k)$ e $\bar{P}(\bar{\alpha}_2) = -1 \cdot P(\alpha) \cdot \Pi(k)$. Este procedimento replica o conceito de vértice-fonte do artigo [3] em um grafo tipo 1 (denominaremos *gerador de arestas*).
3. Repita o procedimento 1 e 2 em todas as componentes conexas do grafo.

4. Como o grafo é bipartido, não há ciclos de comprimento ímpar, desta forma, cada vértice e_l equivale a sumidouro ou fonte, pois, não ocorrem simultaneamente arestas com peso nulo e arestas com peso não-nulo na l -ésima coordenada.

O grafo dirigido $\bar{G} = (V, \bar{A}, \bar{\Psi})$, portanto, é o grafo tipo 1 de uma álgebra com base V . Provaremos agora que existe uma álgebra de Lie \mathcal{L} cuja lei de formação respeita a equação (2.1) que gera este grafo do tipo 1 quando na base V .

Para cada dois vértices e_i e e_j , se existir $\bar{\alpha}_1 \in \bar{A}$ de forma que $\bar{\Psi}(\bar{\alpha}_1) = (e_i, e_j)$, pela construção, existe outra aresta $\bar{\alpha}_2 \in \bar{A} : \bar{\Psi}(\bar{\alpha}_2) = (e_j, e_i)$. Defina, então, os produtos $[e_i, e_j] = \pi_i(\bar{\Psi}(\bar{\alpha}_1))e_i + \pi_j(\bar{\Psi}(\bar{\alpha}_1))e_j$ e $[e_j, e_i] = \pi_i(\bar{\Psi}(\bar{\alpha}_2))e_i + \pi_j(\bar{\Psi}(\bar{\alpha}_2))e_j$.

É imediato verificar que a lei de formação desta álgebra respeita a equação (2.1) e que a álgebra satisfaz a anticomutatividade. Por outro lado, pela construção do grafo, o produto de quaisquer três vértices $[[e_i, e_j], e_k]$ é sempre nulo, exceto se ocorre uma das configurações nas figuras 21a e 21b. Estas ocorrências serão analisadas a seguir.

Para cada (e_i, e_j, e_k) , no primeiro caso tem-se:

$$\begin{aligned} J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\ &= [\alpha e_j, e_k] + [\beta e_j, e_i] + 0 \\ &= \alpha \beta e_j - \beta \alpha e_j + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

No segundo caso, tem-se:

$$\begin{aligned} J(e_i, e_j, e_k) &= [[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] \\ &= [\alpha e_i, e_k] + [\beta e_k, e_i] + 0 \\ &= \alpha [e_i, e_k] + \beta [e_k, e_i] + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, as identidades de Jacobi são satisfeitas para cada três elementos da base, assim como a anticomutatividade. Tem-se, portanto, que \mathcal{L} , definida desta forma, consiste de uma álgebra de Lie. ■

Por outro lado, grafos como os estudados no teorema anterior possibilitam uma análise imediata de suas primeiras derivadas e a evidencição do seguinte teorema, análogo ao Teorema 2.1.4:

Teorema 3.1.14 *Seja \mathcal{L} uma álgebra de Lie que, com a base $\{e_1, \dots, e_n\}$ associa-se a um grafo G do tipo 1 que não apresenta as configurações permitidas das figuras 21c e 21d. Então, \mathcal{L} é solúvel, com índice de solubilidade três, mas não nilpotente.*

Demonstração

Da hipótese, tem-se que cada três vértices adjacentes de G apresentam a configuração 21a ou 21b.

Portanto, para cada vértice e_i , se existe uma aresta incidente tal que a projeção do peso na i -ésima posição é nula, os produtos $[e_i, e_k]$ para todo e_k na base de \mathcal{L} são nulos ou resultam em $C_{i,k}^k e_k$. Logo, e_i não pertence a $\mathcal{L}^{(2)}$.

Da mesma forma, os elementos e_j do conjunto J de vértices que apresentam uma aresta incidente com a j -ésima coordenada do peso não nula correspondem a elementos da base tais que $[e_j, e_k] = C_{j,k}^j e_j$, $\forall 1 \leq k \leq n$, portanto, pertencem à primeira derivada. E, pela construção do grafo, não há vértices adjacentes com essa característica.

Assim, não há dois vértices em $\mathcal{L}^{(2)}$ tais que o produto entre eles é não nulo. Portanto, $\mathcal{L}^{(3)}$ é nula e o índice de solubilidade é três.

Por outro lado, a nilpotência não ocorre já que para todo elemento e_j em J existe um elemento e_k na álgebra tal que $[e_j, e_k] = C_{j,k}^j e_j$, portanto, $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^3 = \dots = \mathcal{L}^m = \langle J \rangle$, $\forall m \geq 2$ e a álgebra não é nilpotente. ■

3.1.1.2 As configurações permitidas com ciclos de comprimento três e arestas de peso duplo

Os últimos resultados deste capítulo abordarão grafos que possuem trios de vértices com pelo menos uma das configurações 21c e 21d, analisando as características algébricas armazenadas em linguagem de grafos nestas estruturas. Estes, foram enunciados em suas formas originais nos Teoremas 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3.

Teorema 3.1.15) *Seja G um grafo contendo ciclos de comprimento três e associado a uma álgebra de Lie. Então, G satisfaz as seguintes condições:*

1. *Cada ciclo de tamanho três apresenta arestas com peso duplo e não há arestas com peso duplo externas a estes ciclos.*
2. *Seja α uma aresta de peso duplo com extremidades e_i e e_k . Se um vértice e_j é adjacente a e_i , ele necessariamente é, também, adjacente a e_k . Ademais, as arestas com extremidades $\{e_i, e_j\}$ ou em $\{e_k, e_j\}$ possuem a j -ésima coordenada não nula.*
3. *Os vértices adjacentes extremos de arestas com peso duplo através de arestas de peso simples (respeitando a configuração 21c) não são adjacentes entre si. Portanto, aparecem em uma das configurações a seguir:*

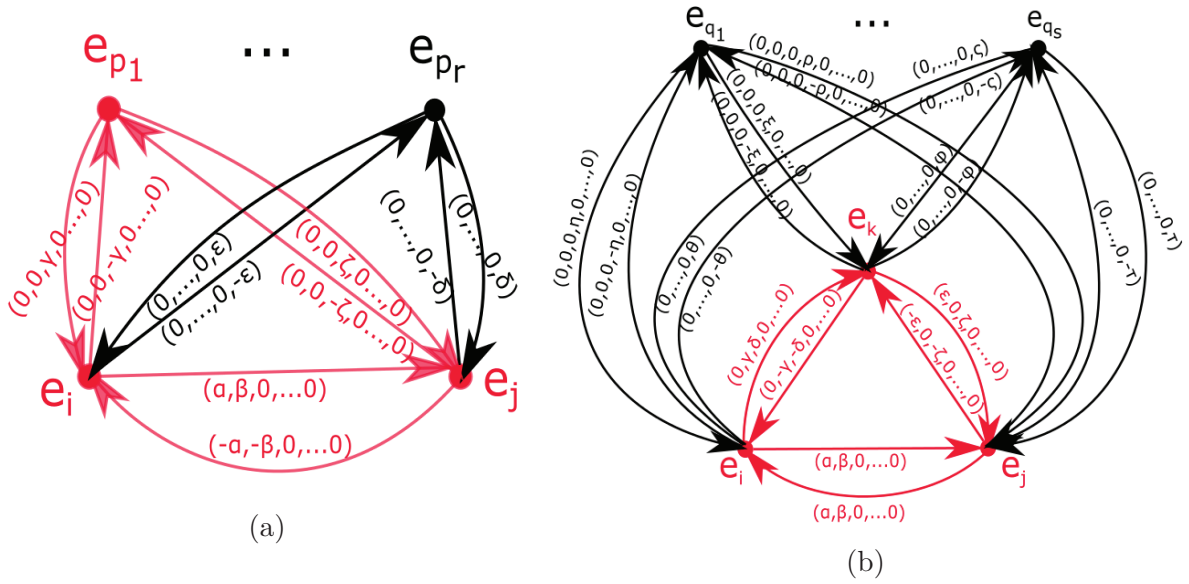


Figura 22: Configurações permitidas para os vértices adjacentes a arestas de peso duplo

4. O subgrafo obtido pela remoção das arestas com peso duplo de G satisfaz a condição do Teorema 3.1.12

Observação 3.1.16 Com o intuito de facilitar a compreensão da notação, em cada peso estão representados apenas as coordenadas relativas a cada grupo de vértices, ordenados de forma que $i < j < p_1 < \dots < p_r$ na figura 22a e de forma que $i < j < k < q_1 < \dots < q_r$ na figura 22b.

Demonstração

O primeiro e o quarto itens são diretamente obtidos das configurações permitidas na figura 21). Para a abordagem do segundo item, é suficiente perceber que, caso contrário, e_i , e_j e e_k apresentariam uma configuração proibida.

O terceiro item, além da representação gráfica do segundo, expressa a propriedade de que vértices adjacentes por uma aresta de peso simples a extremos de arestas de peso duplo não são adjacentes entre si. Este fato pode ser observado pela análise do subgrafo induzido pelos vértices e_i , e_{p_a} e e_{p_b} com $1 < a, b < r$ caso os dois últimos fossem adjacentes. Neste caso, o subgrafo em questão consistiria de um ciclo de comprimento três sem arestas de peso duplo, o que, pelo Lema 2.0.5, não é possível.

■

Observação 3.1.17 Além das configurações apresentadas na figura 22, também é possível que os vértices adjacentes às arestas de peso duplo sejam, também, adjacentes entre si

desde que todas as arestas possuam peso duplo, seguindo a configuração permitida da figura 21d, como o exemplo abaixo:

Exemplo 3.1.18 Seja \mathcal{L}_5 uma álgebra de Lie dada pela lei:

$$[e_1, e_2] = e_1 + e_2$$

$$[e_2, e_3] = e_2 - e_3$$

$$[e_3, e_4] = e_3 - e_4$$

$$[e_1, e_4] = e_1 + e_4$$

$$[e_2, e_4] = e_2 - e_4$$

$$[e_1, e_3] = e_1 + e_3$$

Então, seu grafo do tipo 1 associado é da forma:

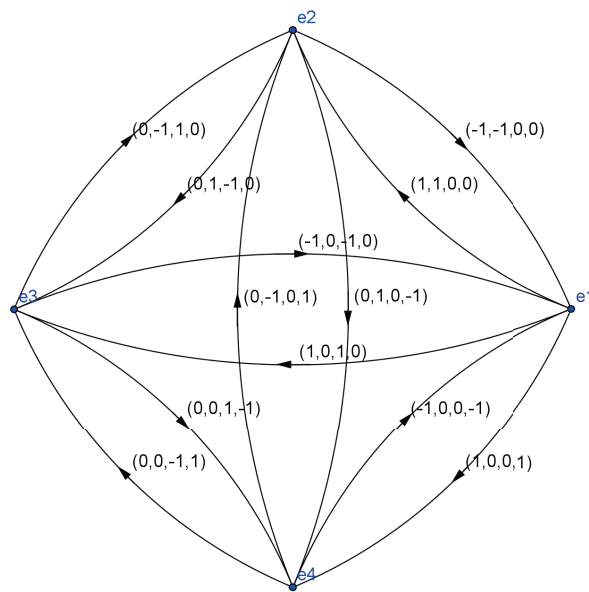


Figura 23: Grafo do tipo 1 associado à álgebra \mathcal{L}_5

A partir da especificação das possibilidades de grafos com arestas de peso duplo, iremos analisar a solubilidade e nilpotência como uma aplicação dessa relação que estabelecemos.

Teorema 3.1.19 Seja G um grafo associado a uma álgebra de Lie. Se G não possui a configuração 21d, então G está associado a uma álgebra solúvel com índice de solubilidade 3 e não nilpotente.

Demonstração

Seja $\mathcal{L} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ uma álgebra de Lie associada a um grafo $G = (V, A, \Psi)$ munido da função peso $P : A \rightarrow \mathbb{C}^n$, o qual possui as referidas hipóteses. Baseando-se no Teorema 3.1.15, pode-se afirmar que todo ciclo de comprimento três segue a configuração da figura 22a.

Ademais, como constatado na demonstração do Teorema 3.1.14, os elementos da base correspondentes aos vértices geradores de arestas não aparecem nos geradores da primeira derivada. Assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} &= \mathcal{L} \\ \mathcal{L}^{(2)} &= \langle \{e_k : e_k \text{ é receptor de arestas}\} \cup \\ &\quad \{C_{i,j}^i e_i + C_{i,j}^j e_j : \text{ existe uma aresta de peso duplo com extremidades}(e_i, e_j)\} \rangle \end{aligned}$$

Como não há arestas entre dois vértices receptores de arestas, tem-se que não há produtos não nulos entre os elementos da base de $\mathcal{L}^{(2)}$, exceto por uma combinação linear das extremidades das arestas com peso duplo e os vértices adjacentes a ambos (observando a figura 22a, percebe-se que são sempre receptores de arestas).

Como não há vértices simultaneamente extremidades de duas duplas de arestas de peso duplo, em cada componente conexa do subgrafo gerado pelos geradores de $\mathcal{L}^{(2)}$ há apenas uma dupla de arestas de peso duplo de mesmas extremidades.

Sejam estas α_1 e α_2 tais que $\Psi(\alpha_1) = (e_i, e_j)$ e $\Psi(\alpha_2) = (e_j, e_i)$ e sejam e_{p_1}, \dots, e_{p_r} os vértices não adjacentes entre si, mas adjacentes a e_i e e_j . Logo, basta-nos verificar os produtos $[C_{i,j}^i e_i + C_{i,j}^j e_j, e_{p_h}]$, $\forall p_h : 1 \leq h \leq r$. Como $J(e_i, e_j, e_{p_h})$ precisa ser satisfeita, pela configuração 21c do Corolário 3.1.11, tem-se que $C_{i,j}^i C_{i,p_h}^{p_h} = C_{p_h,j}^{p_h} C_{i,j}^j$. Portanto,

$$\begin{aligned} [C_{i,j}^i e_i + C_{i,j}^j e_j, e_{p_h}] &= \\ [C_{i,j}^i e_i, e_{p_h}] + [C_{i,j}^j e_j, e_{p_h}] &= \\ C_{i,j}^i [e_i, e_{p_h}] + C_{i,j}^j [e_j, e_{p_h}] &= \\ C_{i,j}^i C_{i,p_h}^{p_h} e_{p_h} + C_{i,j}^j C_{j,p_h}^{p_h} e_{p_h} &= \\ (C_{i,j}^i C_{i,p_h}^{p_h} + C_{i,j}^j C_{j,p_h}^{p_h}) e_{p_h} &= \\ (C_{i,j}^i C_{i,p_h}^{p_h} - C_{i,j}^j C_{p_h,j}^{p_h}) e_{p_h} &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, todos os produtos entre os elementos de $\mathcal{L}^{(2)}$ são nulos, logo $\mathcal{L}^{(3)} = 0$ e a álgebra é solúvel, com índice de solubilidade 3.

Por outro lado, da mesma forma que o Teorema 3.1.14, os elementos da base que correspondem aos receptores de arestas permanecem em todo elemento da série central descendente. Portanto, \mathcal{L} não é nilpotente. ■

Para o último Teorema desta seção, precisaremos de um lema técnico:

Lema 3.1.20 *Seja \mathcal{L} uma álgebra de Lie n -dimensional associada ao grafo G e 21dção da figura 21d. Então, para todo e_i, e_j e e_k em tal configuração, tem-se que as seguintes restrições quanto às constantes de estrutura são equivalentes:*

$$\begin{aligned} C_{i,j}^i &= -C_{j,k}^k; \\ C_{i,j}^j &= C_{i,k}^k; \\ C_{i,k}^i &= C_{j,k}^j. \end{aligned}$$

Demonstração

A partir do Teorema 3.1.11, obtem-se as equações abaixo, válidas para toda álgebra de Lie onde e_i, e_j e e_k formam um ciclo com a configuração 21d.

$$\begin{aligned} C_{j,k}^k C_{i,k}^i &= -C_{j,k}^j C_{i,j}^i; \\ C_{i,k}^k C_{j,k}^j &= C_{i,k}^i C_{i,j}^j; \\ C_{i,j}^i C_{i,k}^k &= -C_{i,j}^j C_{j,k}^k. \end{aligned}$$

Portanto, se $C_{i,j}^i = -C_{j,k}^k$, como todas as constantes são não nulas, tem-se, da primeira equação, que $C_{i,k}^i = C_{j,k}^j$.

Por outro lado, se $C_{i,k}^i = C_{j,k}^j$, observando a segunda equação, pode-se afirmar que $C_{i,k}^k = C_{i,j}^j$.

E, finalmente, se $C_{i,k}^k = C_{i,j}^j$ é satisfeita, pela terceira equação $C_{i,j}^i = -C_{j,k}^k$.

■

Portanto, para um caso geral, podemos enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 3.1.21 *Seja $G = (V, A, \Psi)$ um grafo munido da função peso $P : A \rightarrow \mathbb{C}^n$ contendo a configuração representada na figura 21d e associado a uma álgebra de Lie \mathcal{L} . Então, \mathcal{L} é solúvel se, e somente se, cada configuração 21d satisfaz alguma das equações equivalentes (utilizando a notação presente na figura):*

$$\begin{aligned} C_{i,j}^i &= -C_{j,k}^k; \\ C_{i,j}^j &= C_{i,k}^k; \\ C_{i,k}^i &= C_{j,k}^j. \end{aligned}$$

Neste caso, \mathcal{L} não é nilpotente e seu índice de solubilidade é de 3.

Demonstração

De forma análoga ao Teorema 3.1.19, tem-se que a segunda derivada de \mathcal{L} será composta, apenas, pelos produtos entre as combinações lineares dos elementos da base representados pelas respectivas extremidades de cada aresta com peso duplo e aqueles representados pelos vértices receptores de arestas.

Considerando os ciclos de comprimento três formados apenas por arestas de peso duplo que seguem as configurações 22a e 22b, tem-se que quaisquer ciclos de comprimento três diferentes de e_i , e_j e e_k possuem a configuração descrita em 22a, e, pelo Teorema 3.1.19, os produtos descritos abaixo são todos nulos:

$$\begin{aligned} [C_{i,j}^i e_i + C_{i,j}^j e_j, e_{q_h}] &= (C_{i,j}^i C_{i,q_h}^{q_h} + C_{i,j}^j C_{j,q_h}^{q_h}) e_{q_h} \\ [C_{i,k}^i e_i + C_{i,k}^k e_k, e_{q_h}] &= (C_{i,k}^i C_{i,q_h}^{q_h} + C_{i,k}^k C_{k,q_h}^{q_h}) e_{q_h} \\ [C_{j,k}^j e_j + C_{j,k}^k e_k, e_{q_h}] &= (C_{j,k}^j C_{j,q_h}^{q_h} + C_{j,k}^k C_{k,q_h}^{q_h}) e_{q_h} \end{aligned}$$

Assim, resta-nos observar os produtos:

$$\begin{aligned} [C_{i,j}^i e_i + C_{i,j}^j e_j, C_{i,k}^i e_i + C_{i,k}^k e_k] &= C_{i,j}^i C_{i,k}^i (C_{i,k}^k - C_{i,j}^j) e_i + \\ &C_{i,j}^j (C_{i,k}^k C_{j,k}^j - C_{i,k}^i C_{i,j}^j) e_j + \\ &C_{i,k}^k (C_{i,j}^i C_{i,k}^i + C_{i,j}^j C_{j,k}^k) e_k \\ &= C_{i,j}^i (C_{j,k}^j C_{i,j}^i + C_{i,k}^i C_{j,k}^k) e_i + \\ &C_{i,j}^j C_{j,k}^j (C_{i,j}^i + C_{j,k}^k) e_j + \\ &C_{j,k}^k (C_{i,j}^i C_{i,k}^k + C_{i,j}^j C_{j,k}^k) e_k \\ &= C_{i,k}^i (C_{j,k}^j C_{i,j}^j + C_{i,k}^i C_{i,k}^k) e_i + \\ &C_{j,k}^j (C_{i,k}^i C_{i,j}^j - C_{i,k}^k C_{j,k}^k) e_j + \\ &C_{j,k}^k C_{i,k}^k (C_{i,k}^i - C_{j,k}^j) e_k \end{aligned} \quad (3.1)$$

Portanto, se as condições equivalentes são satisfeitas, tem-se que as três equações são identicamente nulas.

Por outro lado, analisando os ciclos compostos apenas por arestas de peso duplo e que compartilham uma dupla de arestas paralelas entre si como no exemplo abaixo, percebe-se a necessidade de considerar a multiplicação entre os resultados de produtos de elementos representados por vértices de ciclos distintos como $[C_{i,j}^i e_i + C_{i,j}^j e_j, C_{k,l}^k e_k + C_{k,l}^l e_l]$, ainda não contemplados nos cálculos anteriores.

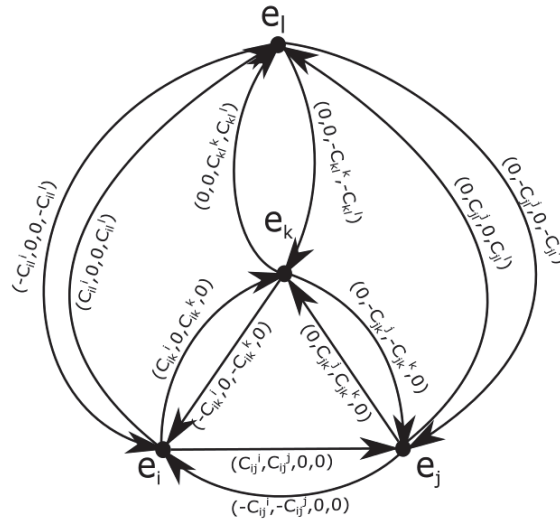


Figura 24: Ciclos de arestas de peso duplo que compartilham uma dupla de arestas paralelas

Este produto resulta em:

$$\begin{aligned}
 & [C_{i,j}^i e_i + C_{i,j}^j e_j, C_{k,l}^k e_k + C_{k,l}^l e_l] \\
 = & C_{i,j}^i C_{k,l}^k [e_i, e_k] + C_{i,j}^i C_{k,l}^l [e_i, e_l] + C_{i,j}^j C_{k,l}^k [e_j, e_k] + C_{i,j}^j C_{k,l}^l [e_j, e_l] \\
 = & C_{i,j}^i C_{k,l}^k (C_{i,k}^i e_i + C_{i,k}^k e_k) + C_{i,j}^i C_{k,l}^l (C_{i,l}^i e_i + C_{i,l}^l e_l) + C_{i,j}^j C_{k,l}^k (C_{j,k}^j e_j + C_{j,k}^k e_k) + \\
 & C_{i,j}^j C_{k,l}^l (C_{j,l}^j e_j + C_{j,l}^l e_l) \\
 = & C_{i,j}^i (C_{k,l}^k C_{i,k}^i + C_{k,l}^l C_{i,l}^i) e_i + C_{i,j}^j (C_{k,l}^k C_{j,k}^j + C_{k,l}^l C_{j,l}^j) e_j + C_{k,l}^k (C_{i,j}^i C_{i,k}^k + C_{i,j}^j C_{j,k}^k) e_k + \\
 & C_{k,l}^l (C_{i,j}^i C_{i,l}^l + C_{i,j}^j C_{j,l}^l) e_l
 \end{aligned}$$

Assim, se as condições equivalentes no enunciado deste teorema são satisfeitas para os ciclos formados por $\{e_i, e_j, e_k\}$, $\{e_i, e_j, e_l\}$, $\{e_i, e_k, e_l\}$ e $\{e_j, e_k, e_l\}$; tem-se:

$$\begin{aligned}
 C_{i,j}^i &= -C_{j,k}^k; \\
 C_{i,j}^j &= C_{i,k}^k; \\
 C_{i,k}^i &= C_{j,k}^j;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{i,j}^i &= -C_{j,l}^l; \\
 C_{i,j}^j &= C_{i,l}^l; \\
 C_{i,l}^i &= C_{j,l}^j;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{i,k}^i &= -C_{k,l}^l; \\
 C_{i,k}^k &= C_{i,l}^l; \\
 C_{i,l}^i &= C_{k,l}^k;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{j,k}^j &= -C_{k,l}^l; \\ C_{j,k}^k &= C_{j,l}^l; \\ C_{j,l}^j &= C_{k,l}^k. \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$\begin{aligned} C_{i,j}^i &= -C_{j,k}^k = -C_{j,l}^l; \\ C_{i,j}^j &= C_{i,k}^k = C_{i,l}^l; \\ C_{i,k}^i &= C_{j,k}^j = -C_{k,l}^l; \\ C_{i,l}^i &= C_{k,l}^k = C_{j,l}^j. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & [C_{i,j}^i e_i + C_{i,j}^j e_j, C_{k,l}^k e_k + C_{k,l}^l e_l] \\ &= C_{i,j}^i C_{k,l}^k (C_{i,k}^i - C_{i,k}^i) e_i + C_{i,j}^j C_{k,l}^k (C_{j,k}^j - C_{j,k}^j) e_j + C_{k,l}^k C_{i,j}^i (C_{i,j}^i - C_{i,j}^i) e_k + \\ & \quad C_{k,l}^l C_{i,j}^j (C_{i,j}^i - C_{i,j}^i) e_l \\ &= 0e_i + 0e_j + 0e_k + 0e_l = 0 \end{aligned}$$

Logo, em ambos os casos, se as condições equivalentes enunciadas são satisfeitas para cada ciclo de comprimento três formado exclusivamente por arestas de peso duplo, tem-se $\mathcal{L}^{(3)} = 0$.

Em contrapartida, se as condições equivalentes não são satisfeitas, considerando a equação 3.1, tem-se que o coeficiente de e_i na primeira equação, de e_j na segunda e de e_k na terceira são obtidos pelo produto de três números complexos não nulos e, portanto, $e_i, e_j, e_k \subseteq \mathcal{L}^{(g)} \forall g \in \mathbb{N}$ e a álgebra não é solúvel.

Ademais, não existem valores das constantes de estrutura para os quais $\mathcal{L}^{(g)}$ é nilpotente, devido à permanência dos elementos da base correspondentes aos vértices receptores de arestas em todos os elementos da série central descendente. ■

3.2 Grafo tipo 2

Enquanto o estudo dos grafos do tipo 1 evidencia características inerente aos operandos do produto da álgebra, os grafos do tipo 2 buscam destacar propriedades que envolvem também os resultados do produto, considerando a ação destes operandos, tanto à direita quanto à esquerda.

Provaremos mais adiante que os grafos do tipo 2, além de proporcionarem resultados equivalentes ao trabalho de Carriazo et al. [3], constituem uma poderosa ferramenta

para obter novos resultados sobre a nilpotência e solubilidade de álgebras de Lie e de Leibniz.

Nosso principal objetivo ao abstrair informações básicas da álgebra (como uma base e as constantes de estrutura associadas a ela) à linguagem de teoria dos grafos é construir procedimentos que verifiquem propriedades mais complexas sem verificações nos pesos das arestas.

Nesta seção, apresentamos os principais resultados deste estudo: informações sobre solubilidade e nilpotência extraídas a partir dos grafos do tipo 2 sem observar os pesos de suas arestas.

Definição 3.2.1 *Seja \mathcal{A} uma álgebra e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para \mathcal{A} , cuja lei é definida pelos produtos*

$$e_i * e_j = \sum_{k=1}^n C_{i,j}^k e_k.$$

Definimos o grafo tipo 2 à direita (respectivamente, à esquerda) de \mathcal{A} como o dígrafo $G = (V, A, \Psi : A \rightarrow \mathbb{R}^2)$ munido da função $P : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que existe uma função bijetora $f : \mathcal{B} \rightarrow V$ de forma que:

- *Para cada constante de estrutura não nula $C_{i,j}^k$, existe uma única aresta $\alpha_{(i,k)} \in A : \Psi(\alpha_{(i,k)}) = (f(e_i), f(e_k))$ (respectivamente, $\alpha_{(j,k)} \in A : \Psi(\alpha_{(j,k)}) = (f(e_j), f(e_k))$);*
- *$\forall \alpha_{(i,k)} \in A : \Psi(\alpha_{(i,k)}) = (f(e_i), f(e_k)), P(\alpha_{(i,k)}) = (C_{i,1}^k, \dots, C_{i,n}^k)$ (respectivamente, $P(\alpha_{(i,k)}) = (C_{1,i}^k, \dots, C_{n,i}^k)$).*

É importante notar que os grafos do tipo 2 (à direita e esquerda), analogamente aos grafos tipo 1, não são dígrafos ponderados, mas uma generalização, cuja função peso é representada da mesma forma.

Inicialmente, analisaremos caracterizações dos grafos do tipo 2, restrições para famílias de álgebras e propriedades imediatas da definição.

Proposição 3.2.2 *Existe um único grafo do tipo 2 à direita (respectivamente à esquerda) para uma álgebra \mathcal{A} , desde que fixada sua base.*

Demonstração

A demonstração desta propriedade é análoga à sua respectiva para o grafo tipo 1.

Seja \mathcal{A} uma álgebra de dimensão finita e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para \mathcal{A} , cuja lei é definida pelos produtos:

$$e_i * e_j = \sum_{k=1}^n C_{i,j}^k e_k.$$

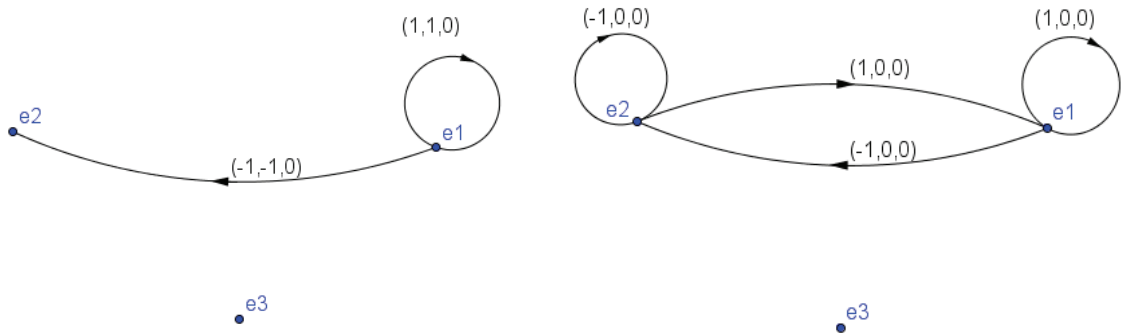
- Para cada $e_i \in \mathcal{B}$, adicione um elemento e'_i ao conjunto de vértices V .
- A cada dupla e_i, e_k de elementos da base de \mathcal{A} tais que existe $e_j \in \mathcal{B}$; $C_{i,j}^k \neq 0$, adicione uma aresta $\alpha_{(i,k)}$ de extremidades (e_i, e_k) ao conjunto de arestas A e defina a função peso $P : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de forma que $P(\alpha_{(i,k)}) = (C_{i,1}^k, \dots, C_{i,n}^k)$ (respectivamente, a cada dupla e_j, e_k na base de \mathcal{A} tais que existe $e_i \in \mathcal{B}$ tal que $C_{i,j}^k \neq 0$, adicione $\alpha_{(j,k)}$ a A de forma que $\Psi(\alpha_{(j,k)}) = (e_j, e_k)$ e $P(\alpha_{(j,k)}) = (C_{1,j}^k, \dots, C_{n,j}^k)$).

Como o algoritmo apresentado é determinístico, o grafo construído a partir da álgebra \mathcal{A} é único. ■

Exemplo 3.2.3 Seja \mathcal{L}_6 a álgebra de Leibniz 3-dimensional dada pela lei de formação:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_1 - e_2; \\ [e_1, e_1] &= e_1 - e_2. \end{aligned}$$

Aplicando o algoritmo descrito acima, tem-se que seus grafos do tipo 2 à direita e à esquerda, respectivamente, são:



(a) Grafo do tipo 2 à direita associado a \mathcal{L}_6 (b) Grafo do tipo 2 à esquerda associado a \mathcal{L}_6

Figura 25: Grafos do tipo 2 associados a \mathcal{L}_6

Proposição 3.2.4 Seja \mathcal{L} uma álgebra de Lie cujo produto respeita a lei de formação (2.1), $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de \mathcal{L} e G_2^+ , G_2^- e G seus grafos do tipo 2 à direita, à esquerda e segundo Carriazo et al. [3] associados.

Tem-se que G_2^+ , G_2^- e G são isomorfos exceto pelos laços que podem existir em G_2^+ e G_2^- .

Demonstração

A partir da definição de grafos do tipo 2 restrita à lei de formação (2.1), para cada produto $[e_i, e_j] = C_{i,j}^i e_i + C_{i,j}^j e_j$, tem-se que o oposto $[e_j, e_i]$ também está definido, como $-(C_{i,j}^i e_i + C_{i,j}^j e_j)$ devido à anticomutatividade das álgebras de Lie.

Portanto, tem-se que nos grafos do tipo 2 à direita e à esquerda, existe uma aresta orientada de e_i a e_j se, e somente se, $C_{i,j}^j \neq 0$ e uma aresta orientada de e_j a e_i se, e somente se, $C_{i,j}^i \neq 0$.

As demais possíveis arestas são laços, que ocorrem quando $C_{i,j}^i \neq 0$ em G_2^+ e quando $C_{i,j}^j \neq 0$ em G_2^- .

Da mesma forma, nos grafos segundo [3], existe uma aresta orientada de e_i a e_j se, e somente se, $C_{i,j}^j \neq 0$ e uma aresta orientada de e_j a e_i se, e somente se, $C_{i,j}^i \neq 0$.

Portanto, desconsiderando os laços de G_2^+ e G_2^- , é possível enunciar rigorosamente os mesmos resultados em [3]. ■

Proposição 3.2.5 *Seja $G = (V, A, \Psi)$ um digrafo associado a uma função peso $P : A \rightarrow \mathbb{C}^n$ de forma que $\nexists \alpha_i, \alpha_j \in A : \Psi(\alpha_i) = \Psi(\alpha_j)$. Então, existe uma álgebra \mathcal{A} de dimensão igual à cardinalidade de V de forma que o grafo do tipo 2 à direita de \mathcal{A} é igual a G .*

Demonstração

Defina $\langle \mathcal{A}, +, \cdot, * \rangle$ uma álgebra sobre os complexos de forma que o espaço vetorial $\langle \mathcal{A}, +, \cdot \rangle$ seja o espaço vetorial gerado pelos elementos em V .

Seja $V = \{e_1, \dots, e_n\}$ e, para cada $\alpha \in A$, denomine α^i a i -ésima coordenada do vetor peso de α .

Defina uma multiplicação interna entre os elementos da base de $\langle \mathcal{A}, +, \cdot \rangle$ como se segue:

$$\begin{aligned} * & : V \times V \rightarrow \mathcal{A} \\ (e_i, e_j) & \mapsto \sum_{\alpha_k \in \omega} \alpha_k^j e_k, \text{ onde } \omega = \{\alpha_k \in A : \Psi(\alpha_k) = (e_i, e_k)\} \end{aligned}$$

Esta multiplicação está bem definida, pois, por hipótese o conjunto de arestas com um determinado par ordenado como extremidades é unitário ou vazio.

Estendendo esta multiplicação interna a todos os elementos do espaço vetorial através da bilinearidade, tem-se que $\langle \mathcal{A}, +, \cdot, * \rangle$ é uma álgebra e seu grafo do tipo 2 à direita é G . ■

Observação 3.2.6 *Um resultado análogo à Proposição 3.2.5 pode ser obtido para grafos do tipo 1 e do tipo 2 à esquerda.*

Portanto, com poucas restrições, é possível obter uma álgebra a partir de um digrafo geral associando-o a uma função peso. Por outro lado, para famílias de álgebras

como as álgebras de Leibniz, isso não ocorre, portanto, existem digrafos G com a hipótese da Proposição 3.2.5 (sem arestas com o mesmo par ordenado como extremidades) aos quais é impossível associar uma função peso $P : A \rightarrow \mathbb{C}^n$ de forma que G esteja associado como grafo tipo 2 (à direita ou à esquerda) a alguma álgebra de Leibniz. Um exemplo será apresentado a seguir:

Exemplo 3.2.7 *Seja o grafo $G = (V, A, \Psi)$, onde $V = \{e_1, \dots, e_n\}$, $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e $\Psi(\alpha_i) = (e_i, e_i)$.*

Da imagem pela função $\Psi : A \rightarrow V \times V$, tem-se que se existe uma álgebra \mathcal{L} que possui G como grafo do tipo 2 à direita, a lei da álgebra é dada por:

$$[e_i, e_j] = C_{i,j}^i e_i, \quad \forall i \in 1, \dots, n$$

onde $\forall i \exists j : C_{i,j}^i \neq 0$, pois, existem exatamente n laços e não há arestas que não laços.

Se \mathcal{L} é uma álgebra de Leibniz, deve respeitar a identidade de Leibniz, que, aplicadas à sua lei, resultam nas equações abaixo. $\forall i, j, k \in 1, \dots, n$, tem-se:

$$\begin{aligned} L(i, i, i) = 0 &\Rightarrow C_{i,i}^i = 0; \\ L(j, j, j) = 0 &\Rightarrow C_{j,j}^j = 0; \\ L(k, k, k) = 0 &\Rightarrow C_{k,k}^k = 0; \\ L(i, j, i) = 0 &\Rightarrow C_{i,j}^i C_{j,i}^j = 0; \\ L(i, j, k) = 0 &\Rightarrow C_{i,j}^i C_{j,k}^j = 0; \\ L(i, k, i) = 0 &\Rightarrow C_{i,k}^i C_{k,i}^k = 0; \\ L(i, k, j) = 0 &\Rightarrow C_{i,k}^i C_{k,j}^k = 0. \end{aligned}$$

Como para todo a existe pelo menos um $b : C_{a,b}^a \neq 0$, tem-se que se $C_{i,k}^i \neq 0 \Rightarrow C_{k,i}^k = C_{k,j}^k = 0$, o que contraria a hipótese de existência. Por outro lado, se $C_{i,k}^i = 0 \Rightarrow C_{i,j}^i \neq 0 \Rightarrow C_{j,i}^j = C_{j,k}^j = 0$, o que também contraria a hipótese.

Assim, não existem álgebras de Leibniz cujo grafo associado do tipo 2 à direita seja isomorfo a G , associado a qualquer função peso. Um resultado análogo pode ser obtido para os grafos do tipo 2 à esquerda.

Proposição 3.2.8 *Sejam G_2^+ e G_2^- respectivamente os grafos do tipo 2 à direita e à esquerda associados a uma álgebra \mathcal{A} .*

- *Se \mathcal{A} é comutativa, $G_2^+ \equiv G_2^-$;*
- *se \mathcal{A} é anticomutativa, $G_2^+ \cong G_2^-$.*

Demonstração

A demonstração é imediata da definição do grafo. Se \mathcal{A} é comutativa, para qualquer base de \mathcal{A} , os produtos dos elementos de sua base (assim como os demais) respeitam a propriedade de que $x * y = y * x$.

Logo, para cada aresta $\alpha \in G_2^+$ tal que $\Psi(\alpha) = (x, z)$, tem-se que existirá também uma aresta $\beta \in G_2^-$ tal que $\Psi(\beta) = (x, z)$ com exatamente o mesmo peso. Da mesma forma, a cada aresta em G_2^- , existe uma correspondente em G_2^+ .

Por outro lado, se a álgebra é anticomutativa, os pesos das arestas serão distintos, pois $x * y = -y * x$. ■

Observação 3.2.9 *A partir da Proposição 3.2.8, tem-se diretamente que toda álgebra de Lie possui os grafos do tipo 2 à direita e à esquerda associados isomorfos. Porém, o isomorfismo de seus grafos do tipo 2 associados não garante a anticomutatividade. Por exemplo, se a álgebra é comutativa, seus grafos são isomorfos (de fato, são idênticos pela Proposição 3.2.8), e se seu produto não é trivialmente nulo, ela não é anticomutativa.*

Portanto, há álgebras de Leibniz cujos grafos do tipo 2 são isomorfos e que não são álgebras de Lie como pode-se observar no exemplo abaixo:

Exemplo 3.2.10 *Seja \mathcal{L}_7 uma álgebra de Leibniz, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base para \mathcal{L}_7 cuja lei está descrita a seguir:*

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \alpha e_3 : \\ [e_2, e_1] &= \beta e_3, \text{ com } \alpha\beta \neq 0, \alpha \neq -\beta. \end{aligned}$$

Esta álgebra satisfaz as hipóteses, porém, não é anticomutativa.

3.2.1 Principais resultados para os grafos do tipo 2

A tradução de algumas propriedades inerentes da álgebra no grafo são imediatas a partir da definição, como por exemplo:

Proposição 3.2.11 *Sejam \mathcal{A} uma álgebra, \mathcal{B} uma base de \mathcal{A} e G_2^+ e G_2^- seus grafos do tipo 2 à direita e 2 à esquerda associados. Seja $x \in \mathcal{B}$. Tem-se:*

- $x \in \text{Ann}_R(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \delta_{G_2^-}^{\text{out}}(x) = 0;$
- $x \in \text{Ann}_L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \delta_{G_2^+}^{\text{out}}(x) = 0;$
- $x \in \text{Ann}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \delta_{G_2^+}^{\text{out}}(x) = \delta_{G_2^-}^{\text{out}}(x) = 0.$

Demonstração

Seja $x \in \text{Ann}_R(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$. A partir da definição de anulador à direita, tem-se que $y * x = 0 \forall y \in \mathcal{A}$, em particular para $y \in \mathcal{B}$. Portanto, não existe aresta com cauda em x e $\delta_{G_2^+}^{\text{out}}(x) = 0$.

Ademais, para todo $x \in \mathcal{B} : \delta_{G_2^+}^{\text{out}}(x) = 0$, tem-se que $y * x = 0; \forall y \in \mathcal{B}$. Como todos os elementos de \mathcal{A} são combinações lineares de elementos em \mathcal{B} , tem-se imediatamente da bilinearidade da multiplicação interna que $z * x = 0 \forall z \in \mathcal{A}$. Portanto, $x \in \text{Ann}_R(\mathcal{A})$.

A demonstração do segundo item decorre análoga da prova do primeiro item, analisando o primeiro operando e a definição do anulador à esquerda.

Por outro lado, se $x \in \text{Ann}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$, tem-se $x \in \text{Ann}_R(\mathcal{A}) \cap \text{Ann}_L(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$, portanto, dos dois primeiros itens, tem-se: $\delta_{G_2^+}^{\text{out}}(x) = \delta_{G_2^-}^{\text{out}}(x) = 0$. Da mesma forma, se $\delta_{G_2^+}^{\text{out}}(x) = \delta_{G_2^-}^{\text{out}}(x) = 0$, então, a partir dos dois primeiros itens, podemos afirmar que $x \in \text{Ann}_R(\mathcal{A})$ e $x \in \text{Ann}_L(\mathcal{A})$, logo, $x \in \text{Ann}(\mathcal{A})$. ■

Estes resultados caracterizam subconjuntos importantes da álgebra utilizando propriedades de seus grafos associados. Na próxima seção, será analisado o comportamento de sequências importantes para as álgebras de Leibniz e de Lie a partir de informações extraídas de seus grafos.

3.2.1.1 Resultados para a série central descendente e série derivada

O comportamento da série central descendente e da série derivada determinam a solubilidade e nilpotência de álgebras de Leibniz (e, portanto, de Lie).

A decisão acerca da solubilidade das álgebras de Lie é de grande importância, principalmente devido ao teorema de Levi, que estabelece que toda álgebra de Lie se decompõe em um ideal solúvel e uma subálgebra semissimples.

Desde que todas as álgebras de Lie semissimples já foram classificadas, grande parte dos esforços da pesquisa em classificação de álgebras de Lie se voltam para a classificação das álgebras solúveis.

Assim, nesta seção, introduziremos alguns resultados analisando como se traduzem características inerentes da série central descendente e derivada em seus grafos do tipo 2 à direita e à esquerda.

Teorema 3.2.12 *Seja \mathcal{L} uma álgebra e G_2^+ seu grafo do tipo 2 à direita associado. Se G_2^+ não possui ciclos, então, sua sequência central descendente estabiliza em $\{0\}$. Em particular, se \mathcal{L} é uma álgebra de Leibniz, \mathcal{L} é nilpotente.*

Demonstração

Como G_2^+ não possui ciclos, é possível obter uma ordenação topológica como na figura abaixo:

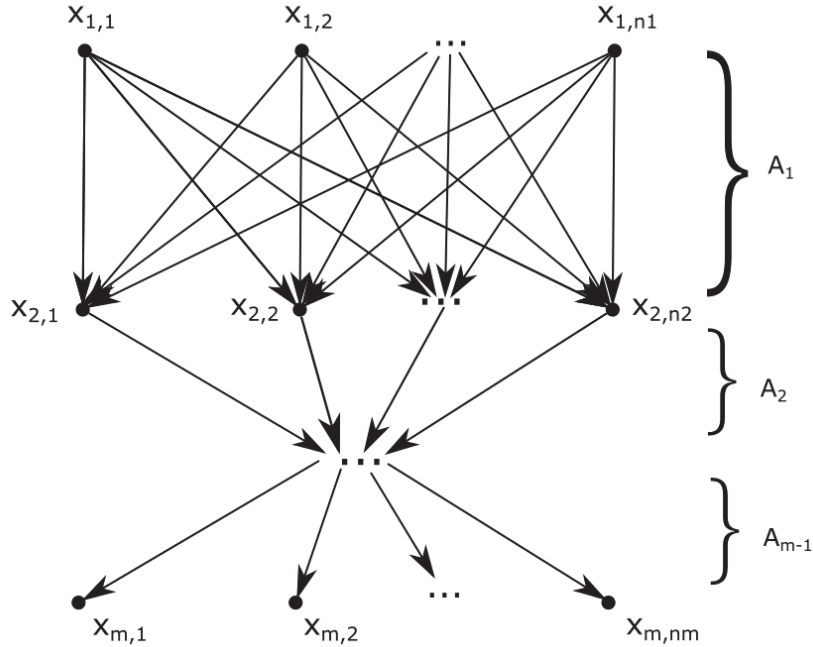


Figura 26: Ordenação Topologica para um grafo sem ciclos

Na qual denominaremos $X_{i,j}$ o j -ésimo vértice da i -ésima linha e A_k o conjunto de arestas que possui como extremidades vértices da k -ésima e $k + 1$ -ésima linhas.

Nesta notação, a lei da álgebra pode ser reescrita como:

$$X_{i,j} * X_{p,q} = \sum_{r=1}^m \left(\sum_{s=1}^{n_r} (C_{i,j;p,q}^{r,s} X_{r,s}) \right), \text{ onde } C_{i,j;p,q}^{r,s} = 0; \forall r \leq i.$$

Portanto,

$$X_{i,j} * X_{p,q} = \sum_{r=i+1}^m \left(\sum_{s=1}^{n_r} (C_{i,j;p,q}^{r,s} X_{r,s}) \right)$$

A partir destas observações, constataremos que todo $x \in \mathcal{L}^2$ é tal que $x = \sum_{r=2}^m (\sum_{s=1}^{n_r} \alpha_{r,s} X_{r,s})$.

De fato, se $x \in \mathcal{L}^2$, então $\exists y = \sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^{n_r} \beta_{r,s} X_{r,s})$ e $z = \sum_{r=1}^m (\sum_{s=1}^{n_r} \gamma_{r,s} X_{r,s})$ tais que $x = y * z$ e, portanto,

$$\begin{aligned} x = y * z &= \sum_{r=1}^m \left(\sum_{s=1}^{n_r} \beta_{r,s} X_{r,s} \right) * \sum_{u=1}^m \left(\sum_{v=1}^{n_u} \gamma_{u,v} X_{u,v} \right) \\ &= \sum_{r=1}^m \left(\sum_{s=1}^{n_r} \left(\sum_{u=1}^m \left(\sum_{v=1}^{n_u} \beta_{r,s} \gamma_{u,v} X_{r,s} * X_{u,v} \right) \right) \right) \\ &= \sum_{r=1}^m \left(\sum_{s=1}^{n_r} \left(\sum_{u=1}^m \left(\sum_{v=1}^{n_u} \beta_{r,s} \gamma_{u,v} \left(\sum_{p=r+1}^m \left(\sum_{q=1}^{n_p} C_{r,s;u,v}^{p,q} X_{p,q} \right) \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Assim, todo $x \in \mathcal{L}^2$, quando representado na base dada, possui os coeficientes que acompanham os elementos da base representados pelos vértices da primeira linha da ordenação topológica todos nulos.

Desta forma, $\forall s$ tem-se que $X_{1,s} \notin \mathcal{L}^2$.

A seguir, comprovaremos por indução sobre k que $\forall x \in \mathcal{L}^{k+1}$, $x = \sum_{i=k+1}^m \left(\sum_{j=1}^{n_i} \gamma_{i,j} X_{i,j} \right)$.

Como para cada $x \in \mathcal{L}^{k+1}$, $x = y * z$ para algum $y \in \mathcal{L}^k$ e $z \in \mathcal{L}$, temos:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=k}^m \left(\sum_{j=1}^{n_i} \xi_{i,j} X_{i,j} \right) * \left(\sum_{p=1}^m \left(\sum_{q=1}^{n_p} \sigma_{p,q} X_{p,q} \right) \right) \\ &= \sum_{i=k}^m \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{p=1}^m \left(\sum_{q=1}^{n_p} \xi_{i,j} \sigma_{p,q} X_{i,j} * X_{p,q} \right) \right) \right) \\ &= \sum_{i=k}^m \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{p=1}^m \left(\sum_{q=1}^{n_p} \xi_{i,j} \sigma_{p,q} \left(\sum_{r=i+1}^m \left(\sum_{s=1}^{n_r} C_{i,j;p,q}^{r,s} X_{r,s} \right) \right) \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Portanto, os elementos da base representados por vértices da k -ésima linha não pertencem a \mathcal{L}^{k+1} e os elementos de \mathcal{L}^{k+1} são uma combinação linear daqueles representados por vértices entre a $k + 1$ -ésima e a m -ésima linhas da ordenação topológica de G_2^+ .

Finalmente, como \mathcal{L} é uma álgebra finitamente gerada, é representada por um grafo finito. Logo, o número de linhas é, também, finito. Assim, os elementos em \mathcal{L}^m são escritos como uma combinação linear dos elementos da m -ésima linha, cuja valência de saída é nula. Consequentemente, $\mathcal{L}^{m+1} = \{0\}$.

Ademais, se \mathcal{L} é uma álgebra de Leibniz, \mathcal{L} é nilpotente. ■

Observação 3.2.13 *É importante notar que este Teorema não determina o índice de nilpotência, mas estabelece $m + 1$ (o número de linhas na ordenação topológica ou ainda o maior comprimento de caminho existente em G_2^+) como uma cota superior para o mesmo. O problema de encontrar o maior caminho em G_2^+ , em geral, possui uma complexidade NP-hard; porém, em grafos sem ciclos, este pode ser resolvido em tempo linear.*

Teorema 3.2.14 *Seja \mathcal{L} uma álgebra e G_2^- seu grafo do tipo 2 à esquerda associado. Se G_2^- não possui ciclos, então, a sequência dada por:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{[0]} &= \mathcal{L} \\ \mathcal{L}^{[i]} &= \mathcal{L} * \mathcal{L}^{[i-1]} \end{aligned}$$

estabiliza em $\{0\}$.

Demonstração

Este teorema é análogo ao Teorema 3.2.12, de forma que, enquanto a série central descendente opera multiplicações pela direita, a série definida neste teorema executa multiplicações pela esquerda. Assim, as demonstrações são análogas, procedendo também por indução, mas considerando que para todo elemento $x \in \mathcal{L}^{[k+1]}$, $x = z * y$ para algum $z \in \mathcal{L}$ e $y \in \mathcal{L}^{[k]}$. ■

Corolário 3.2.15 *Seja \mathcal{L} uma álgebra, G_2^+ e G_2^- seus grafos do tipo 2 associados à direita e à esquerda respectivamente. Se um dentre estes não possui ciclos, então, a série derivada de \mathcal{L} estabiliza em $\{0\}$. Particularmente, se \mathcal{L} é uma álgebra de Leibniz, \mathcal{L} é solúvel.*

Demonstração

A princípio, servindo-nos de indução, demonstraremos que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{L}^{(k)} \subseteq \mathcal{L}^{[k]} \cap \mathcal{L}^k.$$

De fato, para $k = 1$ há a equivalência, pois $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{[1]} = \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}$ e, com a hipótese de que é verdade para $k = i$, tem-se que:

$$\mathcal{L}^{(i+1)} = \mathcal{L}^{(i)} * \mathcal{L}^{(i)} \subseteq \mathcal{L}^i * \mathcal{L} = \mathcal{L}^{i+1}$$

e

$$\mathcal{L}^{(i+1)} = \mathcal{L}^{(i)} * \mathcal{L}^{(i)} \subseteq \mathcal{L} * \mathcal{L}^{[i]} = \mathcal{L}^{[i+1]}$$

Portanto, é verdade para $k = i + 1$.

Desta forma, se G_2^+ ou G_2^- não possui ciclos, uma das sequências dadas estabiliza em $\{0\}$, portanto, a série derivada também o faz. ■

Corolário 3.2.16 *Se \mathcal{L} é uma álgebra de Lie não nilpotente (mesmo que solúvel), então seus grafos associados do tipo 2 à direita e à esquerda, G_2^+ e G_2^- , possuem ciclos.*

Demonstração

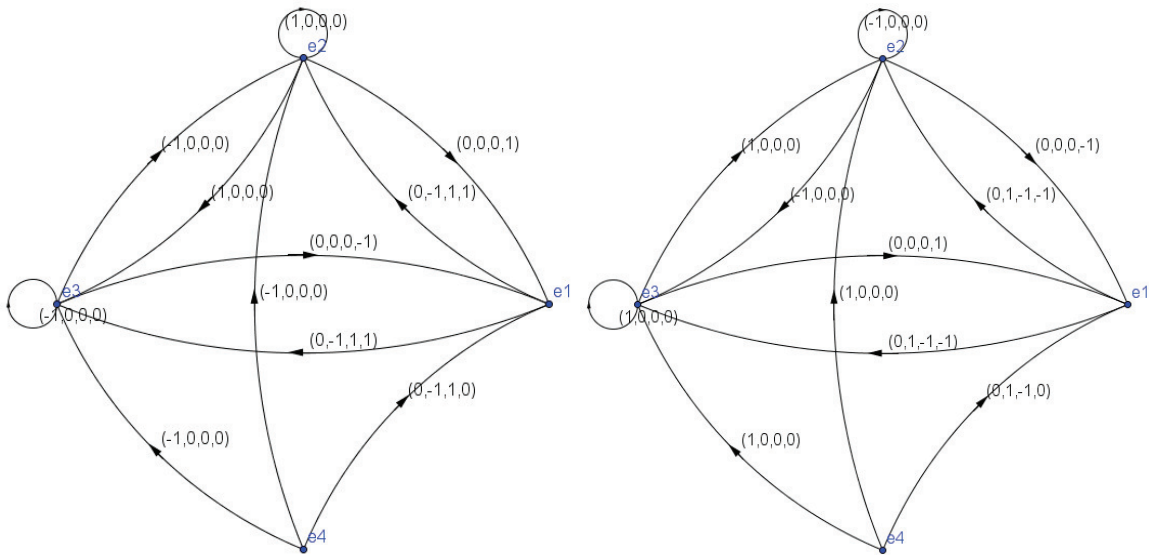
Como G_2^+ e G_2^- são isomorfos, a não existência de ciclos em um deles implica na não existência de ciclos em G_2^+ e, portanto, na nilpotência de \mathcal{L} . Portanto, ambos possuem ciclos. ■

Observação 3.2.17 *É importante salientar que nos teoremas desta seção, em geral, a recíproca não é verdadeira, como ocorre no exemplo abaixo.*

Exemplo 3.2.18 *Seja \mathcal{L}_8 uma álgebra de Lie dada pela lei de formação:*

$$\begin{aligned} [e_1, e_3] &= e_2 + e_3; \\ [e_1, e_2] &= -e_2 - e_3; \\ [e_1, e_4] &= e_2 + e_3; \\ [e_2, e_4] &= e_1; \\ [e_3, e_4] &= -e_1. \end{aligned}$$

\mathcal{L}_8 é nilpotente, com índice de nilpotência 3, mas seus grafos associados do tipo 2 possuem ciclos.



(a) Grafo do tipo 2 à direita associado a \mathcal{L}_8 (b) Grafo do tipo 2 à esquerda associado a \mathcal{L}_8

Figura 27: Grafos do tipo 2 associados a \mathcal{L}_8

Portanto, a recíproca não é válida para os Teoremas 3.2.12 e 3.2.14. E, consequentemente, para o Corolário 3.2.15.

A recíproca, porém, pode ser afirmada, para grupos menores de álgebras como abordaremos na subseção a seguir.

3.2.1.2 Álgebras livres de somas

Esta subseção engloba os principais resultados do trabalho, de forma que, para uma família de álgebras, obtemos propriedades dos grafos que caracterizam álgebras cuja série central descendente e série derivada estabilizam em $\{0\}$.

Portanto, para esta família (que definiremos a seguir), o grafo (independente dos pesos das aresta) é o bastante para afirmarmos se sua série central descendente e derivada convergem para $\{0\}$.

Definição 3.2.19 *Seja \mathcal{L} uma álgebra n -dimensional e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base desta álgebra. Então, \mathcal{L} , na base \mathcal{B} , é dita livre de somas se seu produto é dado pela lei:*

$$e_i * e_j = C_{i,j} e_k, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

A partir da definição, analisaremos algumas propriedades inerentes dos grafos associados às álgebras livre de somas.

Proposição 3.2.20 *Seja \mathcal{A} uma álgebra, $G_1 = (V, A_1, \Psi_1)$, $G_2^+ = (V, A_2^+, \Psi_2^+)$ e $G_2^- = (V, A_2^-, \Psi_2^-)$ seus grafos do tipo 1, 2 à direita e 2 à esquerda associados, respectivamente. Então, tem-se que se alguma das propriedades abaixo é satisfeita, \mathcal{A} não é livre de somas.*

- $\#A_2^+ > \#A_1$ e $\#A_2^- > \#A_1$, onde $\#$ indica a quantidade de elementos em cada conjunto;
- $\exists B \subseteq V$ tal que

$$\sum_{v \in B} \delta_{G_1}^{out}(v) < \sum_{v \in B} \delta_{G_2^-}^{out}(v)$$

- $\exists B \subseteq V$ tal que

$$\sum_{v \in B} \delta_{G_1}^{in}(v) < \sum_{v \in B} \delta_{G_2^+}^{out}(v)$$

Demonstração

A partir das definições dos grafos associados a uma álgebra \mathcal{A} , note que o número de arestas em G_1 é exatamente a quantidade de produtos não nulos na lei da álgebra (denominaremos M), enquanto que o número de arestas tanto em G_2^+ e em G_2^- é menor ou igual à quantidade de constantes de estrutura não nulas (denominaremos N).

Se \mathcal{A} é livre de somas, há uma quantidade de constante de estrutura não nulas igual ao número de produtos não nulos. Desta forma, tem-se: $\#A_1 = M = N \geq \#A_2^+$ e, analogamente, $\#A_1 = M = N \geq \#A_2^-$, o que demonstra o primeiro item.

Da mesma forma que no primeiro item, $\delta_{G_1}^{out}(v)$ (respectivamente $\delta_{G_1}^{in}(v)$) representa o número de produtos não nulos nos quais v opera à esquerda (respectivamente, à direita), e $\delta_{G_2^-}^{out}(v)$ (respectivamente, $\delta_{G_2^+}^{out}(v)$) representa a quantidade de constantes de estrutura não nulas nestes produtos. Portanto, uma argumentação análoga nos leva aos resultados dos segundo e terceiro itens. ■

Proposição 3.2.21 *Seja \mathcal{A} uma álgebra livre de somas na base \mathcal{B} e G_2^+ seu grafo do tipo 2 à direita associado. Então, $\forall e_i \in \mathcal{B}, e_i \in \mathcal{A}^2 \Leftrightarrow \delta_{G_2^+(A)}^{in}(e_i) \geq 1$.*

Demonstração

Seja $e_i \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}^2$. Então $\exists a, b \in \mathcal{A} : a * b = \alpha e_i$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$. Ademais, como \mathcal{A} é livre de somas, existem a e b com estas características em \mathcal{B} .

Assim, $\exists a, b \in \mathcal{B} : a * b = \alpha e_i$, logo, existe uma aresta em G_2^+ orientada de a em direção a e_i e, portanto, $\delta_{G_2^+}^{in}(e_i) \geq 1$.

Por outro lado, se $e_i \in \mathcal{B}$ e $\delta_{G_2^+}^{in}(e_i) \geq 1$, existe uma constante de estrutura não nula $C_{j,k}^i$. Logo, existem dois elementos $e_j, e_k \in \mathcal{B}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ tais que $e_j * e_k = \alpha e_i$. Portanto, $e_i \in \mathcal{A}^2$. ■

Os principais resultados, que justificam o estudo dessa família de álgebras, descendem, de alguma forma, da Proposição 3.2.21, pois, se tratam de uma fortificação dos Teoremas 3.2.12 e 3.2.14.

Para álgebras livres de somas, é possível obter uma caracterização da estabilização de suas séries em $\{0\}$. E, principalmente, se estas álgebras forem, também, de Leibniz, é possível determinar sua solubilidade ou não a partir de uma observação dos grafos do tipo 2 associados a elas.

Corolário 3.2.22 *Seja \mathcal{L} uma álgebra, \mathcal{B} uma base na qual \mathcal{L} é livre de somas e G_2^+ seu grafo do tipo 2 à direita associado. Então, G_2^+ não possui ciclos se, e somente se, a sequência central descendente estabiliza em $\{0\}$. Em particular, se \mathcal{L} é uma álgebra de Leibniz, G_2^+ não possui ciclos se, e somente se, \mathcal{L} é nilpotente.*

Demonstração

De acordo com o Teorema 3.2.12, se G_2^+ não possui ciclos, a referida sequência estabiliza em $\{0\}$. Portanto, basta-nos demonstrar que se \mathcal{L} é livre de somas e sua série central descendente estabiliza em $\{0\}$, G_2^+ não possui ciclos. Provaremos a afirmação contrapositiva.

Suponha que G_2^+ possui um ciclo $x_1, x_2, \dots, x_m, x_1$, onde $x_i \in \mathcal{B}$. Pela definição de G_2^+ e por conta de que \mathcal{A} é livre de somas, existem $y_j \in \mathcal{B}$ tais que:

$$\begin{aligned} x_i * y_j &= \alpha_{i+1} x_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq m \\ x_m * y_j &= \alpha_1 x_1 \end{aligned}$$

Assim, $x_i \in \mathcal{L}^k \forall k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq m$ e, portanto, a sequência não estabiliza em $\{0\}$. ■

Como visto no exemplo 3.2.18, a propriedade de livre de somas é necessária para estabelecer o Corolário 3.2.22, pois, para \mathcal{L} livre de somas, é possível precisar exatamente \mathcal{L}^i .

Analogamente, podemos enunciar a seguinte caracterização a partir do Teorema 3.2.14.

Corolário 3.2.23 *Seja \mathcal{L} uma álgebra, \mathcal{B} uma base na qual \mathcal{L} é livre de somas e G_2^- seu grafo do tipo 2 à esquerda associado. Então, G_2^- não possui ciclos se, e somente se, a sequência dada por*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{[0]} &= \mathcal{L} \\ \mathcal{L}^{[i]} &= \mathcal{L} * \mathcal{L}^{[i-1]}\end{aligned}$$

estabiliza em $\{0\}$.

Demonstração

A demonstração é análoga ao Corolário 3.2.22, de forma que os ciclos $x_1, x_2, \dots, x_m, x_1$ em G_2^- evidenciam a existência de elementos y_j em \mathcal{B} tais que:

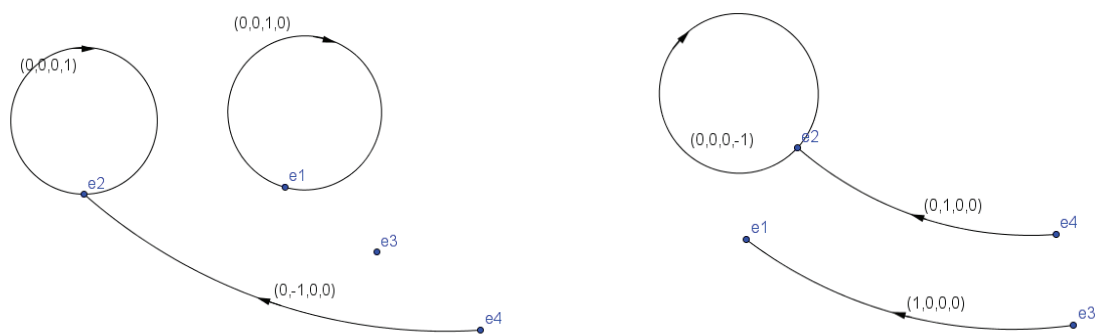
$$\begin{aligned}y_j * x_i &= \alpha_{i+1} x_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq m \\ y_j * x_m &= \alpha_i x_i\end{aligned}$$

E, portanto, $x_i \in \mathcal{L}^{[k]} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq m$ e, portanto, a sequência não estabiliza em $\{0\}$. ■

Observação 3.2.24 *O Corolário 3.2.15, porém, não pode ser intensificado de forma análoga, pois há uma contenção da referida sequência na intersecção das outras duas e não uma igualdade, como podemos observar no exemplo abaixo:*

Exemplo 3.2.25 *Seja \mathcal{L}_9 a álgebra de Leibniz 4-dimensional e livre de somas cujo produto é dado pela lei de formação:*

$$\begin{aligned}[e_1, e_3] &= e_1; \\ [e_2, e_4] &= e_2; \\ [e_4, e_2] &= -e_2.\end{aligned}$$



(a) Grafo do tipo 2 à direita associado a \mathcal{L}_9 (b) Grafo do tipo 2 à esquerda associado a \mathcal{L}_9

Figura 28: Grafos do tipo 2 associados a \mathcal{L}_9

Tem-se que \mathcal{L}_9 é solúvel e os grafos do tipo 2 associados possuem ciclos de comprimento 1. Portanto, não é verdade que toda álgebra livre de somas é solúvel possui um dos grafos associados do tipo 2 sem ciclos.

4 Conclusões e problemas em aberto

O objetivo deste trabalho é estudar maneiras de associar álgebras a grafos de forma que seja possível obter propriedades relacionadas à álgebra a partir de seus grafos associados.

Para tanto, baseamo-nos no artigo de Carriazo et al. [3] e o generalizamos, demonstrando resultados análogos aos originais sob a ótica de uma nova associação, denominada grafos do tipo 1. Por outro lado, apresentamos também novos resultados relacionados à solubilidade e nilpotência de Álgebras de Leibniz, obtidos através de uma generalização diferente para os grafos em questão, intitulada grafos do tipo 2; além de resultados mais gerais, aplicáveis a qualquer álgebra, tanto através da associação a grafos do tipo 1 quanto a grafos do tipo 2. Ainda, o apêndice deste trabalho traz uma implementação na linguagem C++ dos algoritmos de construção dos grafos, auxiliando na decisão sobre a solubilidade e nilpotência de álgebras, como no Exemplo 5.3.1 e no Exemplo 5.3.2.

É notável, porém, que para a teoria de classificação de álgebras não associativas, um resultado ideal reproduziria informações relativas a isomorfismos entre álgebras nos grafos. Portanto, uma continuidade natural para este trabalho é a análise de outras propriedades invariantes por isomorfismos de álgebras e sua repercussão nos grafos associados a elas.

Outra possível abordagem futura visando a mesma finalidade trata-se do estudo dos efeitos refletidos nos grafos a partir das mudanças de base nas álgebras associadas a eles. O estudo destas propriedades pode levar à determinação de classes de equivalência entre os grafos e desenvolver ferramentas de grande importância para a classificação de famílias de álgebras não associativas.

Seguindo este mesmo objetivo, a restrição das bases das álgebras analisadas também pode auxiliar no desenvolvimento desta teoria. Se, por exemplo, todas as álgebras de uma certa família de álgebras nilpotentes apresentam uma base na qual seu grafo do tipo 2 à direita não possui ciclos (ou uma generalização análoga para o resultado sobre as álgebras solúveis), podemos nos restringir ao estudo dos grafos nessas bases, contribuindo, então, com a classificação desta família.

Uma outra possibilidade para os próximos passos deste estudo é uma investigação das propriedades do grafo formado pela união dos grafos do tipo 1, 2 à direita e 2 à esquerda. Em uma última reunião do projeto de pesquisa que gerou esta dissertação, constatamos que há álgebras que possuem exatamente os mesmos grafos do tipo 1, 2 à direita e 2 à esquerda e, a despeito do que se almejava, não são isomorfas. Porém, é possível que, restringindo-se a famílias menores de álgebras, se obtenham resultados interessantes para a classificação das álgebras.

5 Apêndice

Com o intuito de facilitar a conversão de álgebras em grafos, elaboramos um software na linguagem de programação *C++* capaz de representar o grafo internamente (em objetos e listas, facilitando a obtenção de propriedades) e exportar um arquivo xml para a exibição de uma representação visual deste (utilizada nos exemplos neste trabalho) através do software Geogebra.

A preferência pelo software Geogebra em detrimento de uma imagem estática se deu por conta da possibilidade de deslocamento dos vértices de acordo com a necessidade do usuário para melhor visualização do grafo. Ademais, o arquivo de entrada do programa utiliza o padrão xml, o que facilita a manipulação pelo nosso software.

5.1 A matriz de adjacência

O objetivo final do *Algraph* é, a partir de uma álgebra definida pelo usuário por sua dimensão e lei, representá-la através de seus grafos associados: grafo segundo Carriazo et al. [3], grafo tipo 1 e grafo tipo 2 à direita e à esquerda.

Para tanto, o programa deve armazenar a lei da álgebra e processá-la segundo cada algoritmo representado neste trabalho.

O armazenamento computacional de grafos ponderados é usualmente realizado através da matriz de adjacência dos mesmos, porém, os grafos definidos neste trabalho possuem arestas com o mesmo par ordenado como extremidades (como ocorre nos grafos segundo Carriazo et al. [3]) ou seus pesos encontram-se em \mathbb{C}^n (como ocorre no grafo tipo 1, 2 à direita e 2 à esquerda).

Ampliaremos, então, o conceito de matriz de adjacência, já discutido nas preliminares, com a definição a seguir:

Definição 5.1.1 *A matriz de adjacência estendida (análoga à matriz de adjacência para dígrafos ponderados) de um grafo $G = (V, A, \Psi)$ munido de uma função peso $P : A \rightarrow \mathbb{C}^n$ é definida como a matriz $n \times n$ de coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{C}^n$ tal que:*

$$(a_{ij}) = \begin{cases} P(\alpha_{(i,j)}), & \text{se } \exists \alpha_{(i,j)} \in A; \Psi(\alpha_{(i,j)}) = (v_i, v_j) \forall 1 \leq i \leq k \leq n, \\ 0 \in \mathbb{C}^n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, estão definidas matrizes de adjacência para os grafos do tipo 1, do tipo 2 à direita e do tipo 2 à esquerda. Para ilustrar este conceito, veremos um exemplo.

Exemplo 5.1.2 Seja \mathcal{A}_{10} uma álgebra de dimensão 5 cuja lei na base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_5\}$ é dada por:

$$e_1 * e_2 = e_1 + e_2 - e_3,$$

$$e_2 * e_1 = e_1,$$

$$e_3 * e_5 = e_2 - e_3 + e_4,$$

$$e_4 * e_1 = e_3 + e_5.$$

- Sua matriz de adjacência estendida do grafo do tipo 1 é dada por:

$$\begin{pmatrix} (0, 0, 0, 0, 0) & (1, 1, -1, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) \\ (1, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 1, -1, 1, 0) \\ (0, 0, 1, 0, 1) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

- Seu grafo do tipo 1 associado é representado por:

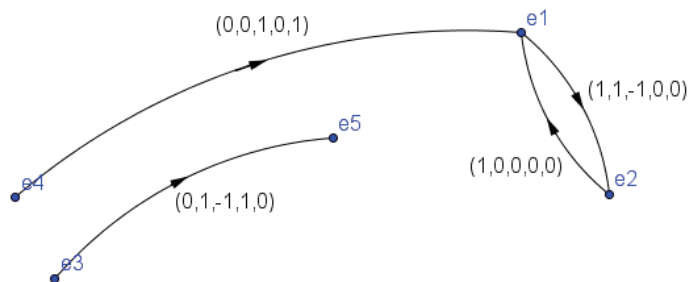


Figura 29: Grafo do tipo 1 associado à álgebra \mathcal{A}_{10}

- Sua matriz de adjacência estendida do grafo do tipo 2 à direita é dada por:

$$\begin{pmatrix} (0, 1, 0, 0, 0) & (0, 1, 0, 0, 0) & (0, -1, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) \\ (1, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 1) & (0, 0, 0, 0, -1) & (0, 0, 0, 0, 1) & (0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (1, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (1, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

- Seu grafo do tipo 2 à direita associado é representado por:

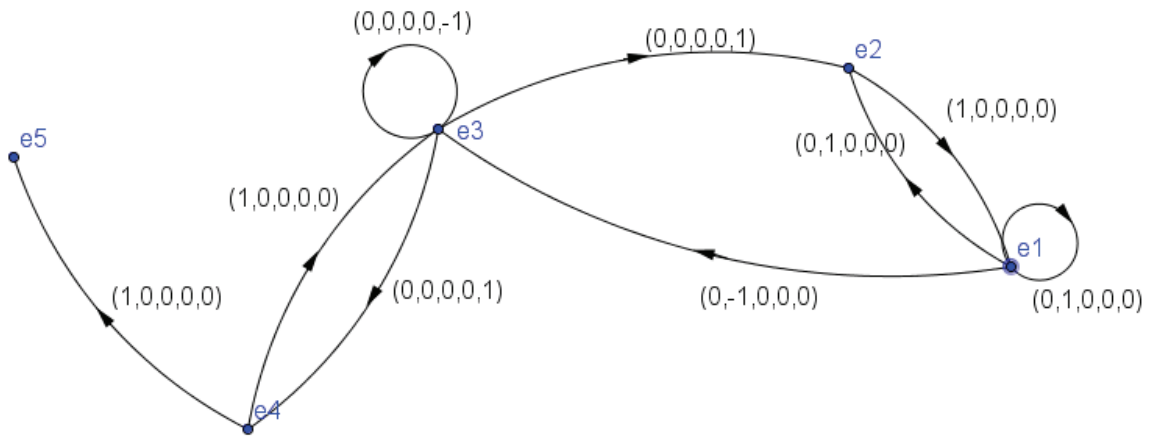


Figura 30: Grafo do tipo 2 à direita associado à álgebra \mathcal{A}_{10}

- Sua matriz de adjacência estendida do grafo do tipo 2 à esquerda é dada por:

$$\begin{pmatrix} (0, 1, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 1, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 1, 0) \\ (1, 0, 0, 0, 0) & (1, 0, 0, 0, 0) & (-1, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0) & (0, 0, 1, 0, 0) & (0, 0, -1, 0, 0) & (0, 0, 1, 0, 0) & (0, 0, 0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

- Seu grafo do tipo 2 à esquerda associado é representado por:

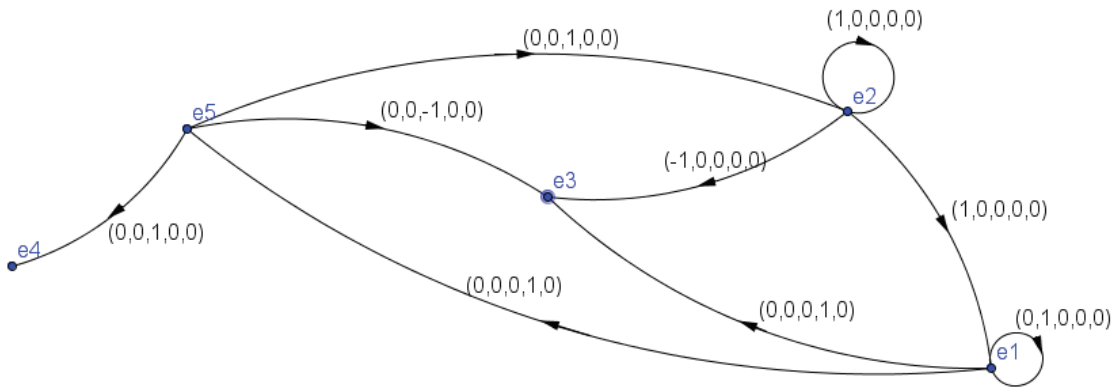


Figura 31: Grafo do tipo 2 à esquerda associado à álgebra \mathcal{A}_{10}

É notável que cada constante de estrutura não nula da álgebra ocorre como uma coordenada da matriz de adjacência estendida, tanto nos grafos do tipo 1 quanto em ambos os grafos do tipo 2. Portanto, as três matrizes de adjacência estendidas constituem-se da mesma informação.

A seguir analisaremos as condições através das quais podemos obter uma matriz de adjacência a partir de outra. Para tanto, definiremos operações análogas à transposição de matrizes nas matrizes de adjacência estendidas.

Definição 5.1.3 Para fins de notação, denote por (M_{ijk}) a k -ésima coordenada do elemento que se encontra na i -ésima linha e j -ésima coluna de uma matriz de adjacência estendida M .

Seja A a matriz de adjacência estendida de um grafo associado a uma álgebra n -dimensional. Definimos:

- B é dita transposta 1-3-2 de A (com a notação $B = A^{t132}$) se $(B_{ijk}) = (A_{ikj}) \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}$;
- C é dita transposta 2-3-1 de A (com a notação $C = A^{t231}$) se $(C_{ijk}) = (A_{jki}) \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}$;
- D é dita transposta 3-1-2 de A (com a notação $D = A^{t312}$) se $(D_{ijk}) = (A_{kij}) \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Proposição 5.1.4 Sejam, respectivamente, X , Y e Z as matrizes de adjacência estendidas dos grafos do tipo 1, 2 à direita e 2 à esquerda associados a uma álgebra \mathcal{L} na base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Então:

- $Y = X^{t132}$ e $X = Y^{t132}$
- $Z = X^{t231}$ e $X = Z^{t312}$
- $Y = (Z^{t312})^{t132}$ e $Z = (Y^{t132})^{t231}$

Demonstração

Seja $e_i * e_j = \sum_{k=1}^n C_{i,j}^k e_k$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ a lei de formação de \mathcal{L} . Basta observar que a cada constante de estrutura não nula $C_{i,j}^k$, tem-se, das definições dos grafos tipo 1, 2 à direita e 2 à esquerda, que:

$$\begin{aligned} C_{i,j}^k &= (X_{ijk}); \\ C_{i,j}^k &= (Y_{ikj}); \\ C_{i,j}^k &= (Z_{jki}). \end{aligned}$$

Logo, $(X_{ijk}) = (Y_{ikj}) = (Z_{jki}) \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}$. Assim, os dois primeiros itens estão provados.

O terceiro item, por sua vez, decorre diretamente das equações anteriores. ■

Em outras palavras, observando X como uma matriz de n^3 dimensões, constituída de n linhas de n colunas, cada uma com n coordenadas, Y pode ser obtida a partir da leitura de X , percorrendo primeiro suas colunas (fixadas linha e coordenada), depois suas

coordenadas e por último suas linhas. E, da mesma forma, Z pode ser obtida pela leitura de X , percorrendo primeiramente as linhas e, depois, coordenadas e colunas.

5.2 A construção dos grafos

Com base nesses resultados, o programa armazena a lei da álgebra na forma da matriz de adjacência estendida de seu grafo associado do tipo 1, concentrando toda a informação sobre os produtos da álgebra e permitindo a construção dos quatro grafos.

Utilizando-se do princípio evidenciado na proposição 5.1.4, o programa percorre a referida matriz de três maneiras distintas para a construção dos três grafos definidos neste trabalho, como pode ser observado nos pseudocódigos abaixo:

Criação do grafo tipo 1:

Crie o *arquivo de saída* no Geogebra

Desenhe os vértices no *arquivo de saída* numa quantidade igual à dimensão da álgebra sobre um círculo de raio 1, separados por ângulos iguais

Para i de 0 à dimensão da álgebra

Para j de 0 à dimensão da álgebra

Esvazie o vetor *label*

Para k de 0 à dimensão da álgebra

$label \leftarrow (label, matriz_de_adjacencia[i][j][k])$

Se *label* possui pelo menos um valor diferente de 0

Então Construa uma aresta orientada de e_i para e_j

Defina o valor do vetor *label* como peso da aresta

Criação do grafo tipo 2 à direita:

Crie o *arquivo de saída* no Geogebra

Desenhe os vértices no *arquivo de saída* numa quantidade igual à dimensão da álgebra sobre um círculo de raio 1, separados por ângulos iguais

Para i de 0 à dimensão da álgebra

Para k de 0 à dimensão da álgebra

Esvazie o vetor *label*

Para j de 0 à dimensão da álgebra

$label \leftarrow (label, matriz_de_adjacencia[i][j][k])$

Se *label* tiver pelo menos um valor diferente de 0

Então Construa uma aresta orientada de e_i para e_k

Defina o valor do vetor *label* como peso da aresta

Criação do grafo tipo 2 à esquerda:

Crie o *arquivo de saída* no Geogebra

Desenhe os vértices no *arquivo de saída* numa quantidade igual à dimensão da

álgebra sobre um círculo de raio 1, separados por ângulos iguais

Para j de 0 à *dimensão da álgebra*

Para k de 0 à *dimensão da álgebra*

 Esvazie o vetor *label*

Para i de 0 à *dimensão da álgebra*

$label \leftarrow (label, matriz_de_adjacencia[i][j][k])$

Se *label* tiver pelo menos um valor diferente de 0

Então Construa uma aresta orientada de e_j para e_k

 Defina o valor do vetor *label* como peso da aresta

Como pode ser observado, a construção dos três grafos se diferencia apenas pela ordem dos elementos percorridos (alternando entre linhas, colunas e coordenadas), a partir da concepção da matriz de adjacência estendida como uma matriz tridimensional.

A construção do grafo segundo o artigo de Carriazo et al. [3] encerra mais detalhes, pois, pode haver mais de duas arestas com o mesmo par de extremos dependendo da quantidade de valores distintos ocorridos nas constantes de estrutura. Desta forma, a construção destes grafos requer mais cuidado, verificando os pesos das arestas já desenhadas e definindo regras para a orientação das próximas, como no algoritmo abaixo:

Criação do grafo segundo Carriazo et al. [3]

Crie o *arquivo de saída* no Geogebra

Desenhe os vértices no *arquivo de saída* numa quantidade igual à *dimensão da álgebra* sobre um círculo de raio 1, separados por ângulos iguais

Para i de 0 à *dimensão da álgebra*

Para j de 0 à *dimensão da álgebra*

 Esvazie o vetor *Pesos*

Para k de 0 à *dimensão da álgebra*

Se $matriz_de_adjacencia[i][j][k] \neq 0$

Então Se ($i \neq k \neq j$)

Então Se $matriz_de_adjacencia[i][j][k]$ não está em *Pesos*

Então Desenhe uma aresta não dirigida de e_i a e_j

 Atribua-lhe peso $matriz_de_adjacencia[i][j][k]$

$Pesos \leftarrow (Pesos, matriz_de_adjacencia[i][j][k])$

Senão: Desenhe uma aresta de e_i a e_j orientada na direção de e_k

Observação 5.2.1 Apesar do nosso estudo englobar as álgebras sobre os complexos, para simplificar a notação utilizada no *arquivo de entrada* e a leitura do mesmo pelo programa, o *Algraph* trabalha apenas com álgebras sobre os números reais.

Porém, como o software foi desenvolvido com o objetivo de construir exemplos e validar resultados, essa restrição não compromete seus propósitos.

5.3 A interface

O Algraph inicia com o seguinte menu:

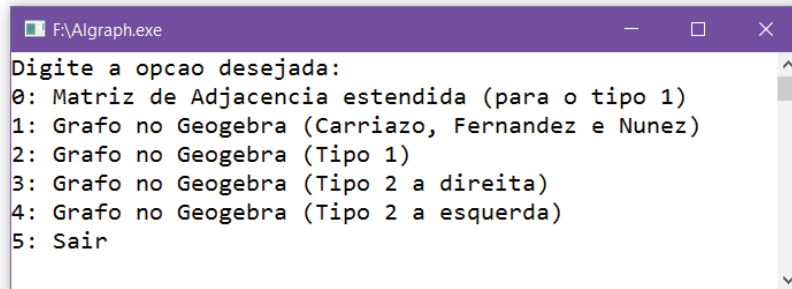


Figura 32: Menu do Algraph

Antes de executá-lo, o usuário deve editar o arquivo *input.txt* na pasta do programa segundo a configuração do exemplo abaixo:

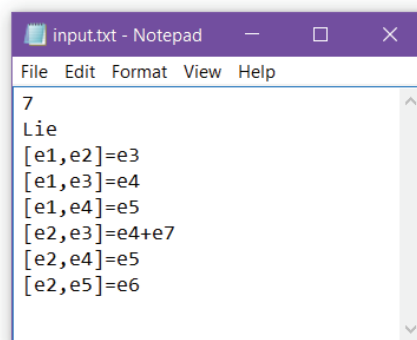


Figura 33: Exemplo de arquivo input

Na qual a primeira linha indica a dimensão da álgebra e , portanto, as dimensões da matriz de adjacência estendida e a quantidade de vértices nos grafos; a segunda linha deve ser preenchida com "Lie" caso seja necessário que o programa considere a anticomutatividade na construção do grafo, em caso contrário o programa a desconsiderará. As demais devem compor a lei da álgebra na base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

O output do programa é visualizado em um leitor de texto plano (no caso da matriz de adjacência estendida) ou no geogebra (no caso dos grafos), como nos exemplos a seguir:

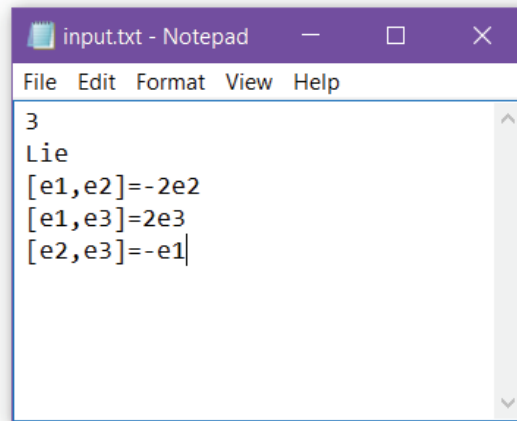
Exemplo 5.3.1 *Seja a álgebra de Lie tridimensional \mathcal{L}_{11} dada pela lei abaixo:*

$$[e_1, e_2] = -2e_2,$$

$$[e_1, e_3] = 2e_3,$$

$$[e_2, e_3] = -e_1.$$

O arquivo de entrada deve seguir a seguinte estrutura:

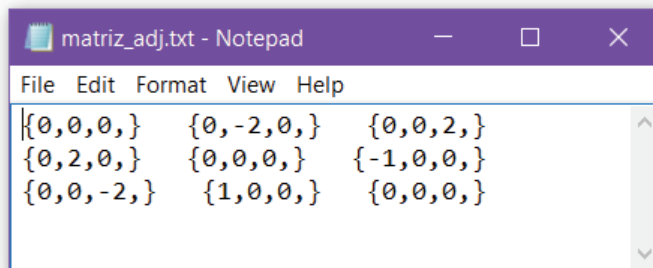


```

input.txt - Notepad
File Edit Format View Help
3
Lie
[e1,e2]=-2e2
[e1,e3]=2e3
[e2,e3]=-e1
  
```

Figura 34: Input da álgebra \mathcal{L}_{11} no Algraph

A matriz de adjacência gerada a partir da opção 0 do programa é exibida conforme figura abaixo:

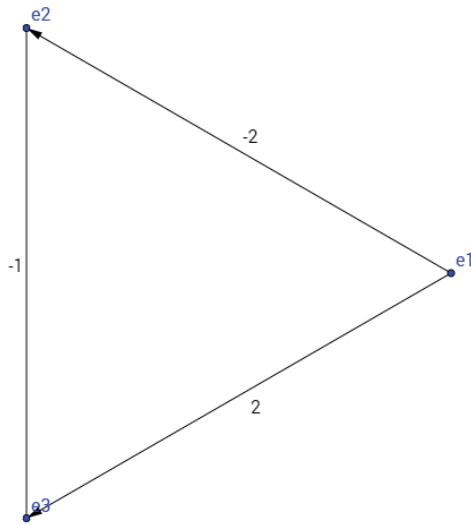


```

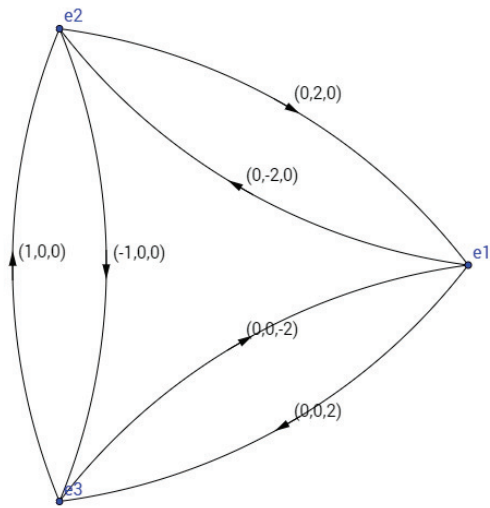
matriz_adj.txt - Notepad
File Edit Format View Help
{{0,0,0}, {0,-2,0}, {0,0,2}}
{{0,2,0}, {0,0,0}, {-1,0,0}}
{{0,0,-2}, {1,0,0}, {0,0,0}}
  
```

Figura 35: Matriz de adjacência do grafo tipo 1 da álgebra \mathcal{L}_{11} gerada pelo Algraph

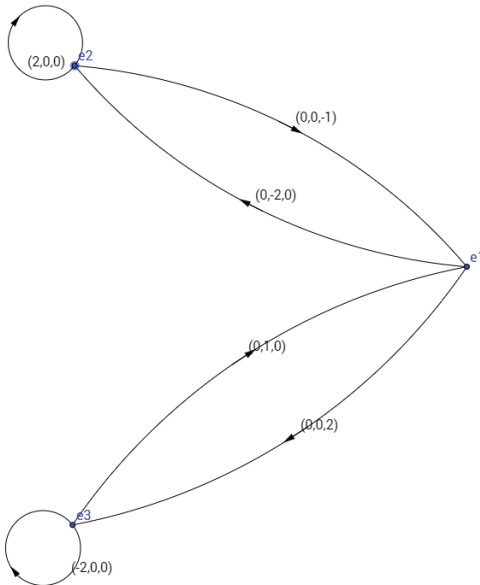
Os grafos segundo Carriazo et al. [3], tipo 1, tipo 2 à direita e tipo 2 à esquerda associados com \mathcal{L}_{11} são reproduzidos a seguir:



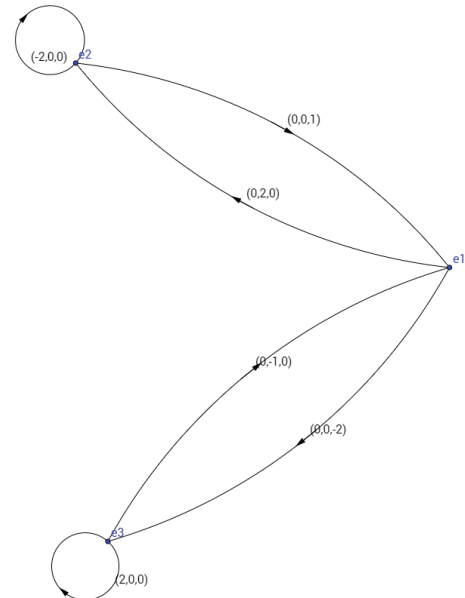
(a) Grafo segundo Carriazo et al. [3] da álgebra \mathcal{L}_{11} gerado pelo Algraph



(b) Grafo do tipo 1 associado à álgebra \mathcal{L}_{11} gerado pelo Algraph



(c) Grafo do tipo 2 à direita associado à álgebra \mathcal{L}_{11} gerado pelo Algraph



(d) Grafo do tipo 2 à esquerda associado à álgebra \mathcal{L}_{11} gerado pelo Algraph

Exemplo 5.3.2 *Seja a álgebra de Leibniz \mathcal{L}_{12} de dimensão 5 dada pela lei abaixo:*

$$\begin{aligned} [e_1, e_1] &= e_3, \\ [e_1, e_2] &= e_3 + e_4 + e_5, \\ [e_2, e_1] &= e_4 + e_5, \\ [e_3, e_1] &= -e_5, \\ [e_4, e_1] &= e_5. \end{aligned}$$

Cujo arquivo de entrada para o Algraph encontra-se representado abaixo:

```

input.txt - Notepad
File Edit Format View Help
5
Leibniz
[e1,e1]=e3
[e1,e2]=e3+e4+e5
[e2,e1]=e4+e5
[e3,e1]=-e5
[e4,e1]=e5
    
```

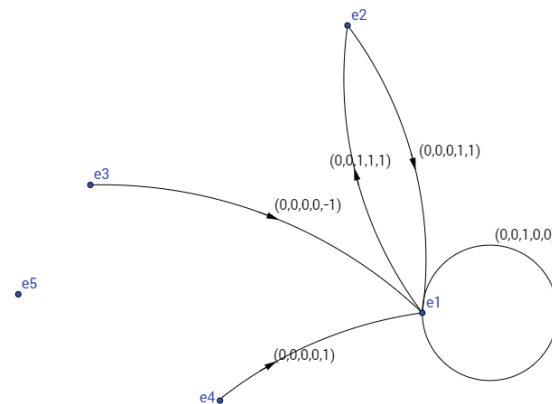
Figura 37: Input da álgebra \mathcal{L}_{12} no Algraph

A seguir, a matriz de adjacência estendida e os grafos emitidos pelo programa:

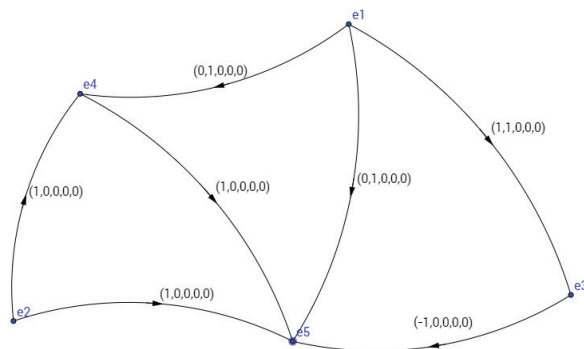
```

matriz_adj.txt - Notepad
File Edit Format View Help
{0,0,1,0,0,} {0,0,1,1,1,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,}
{0,0,0,1,1,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,}
{0,0,0,0,1,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,}
{0,0,0,0,-1,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,}
{0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,} {0,0,0,0,0,}
    
```

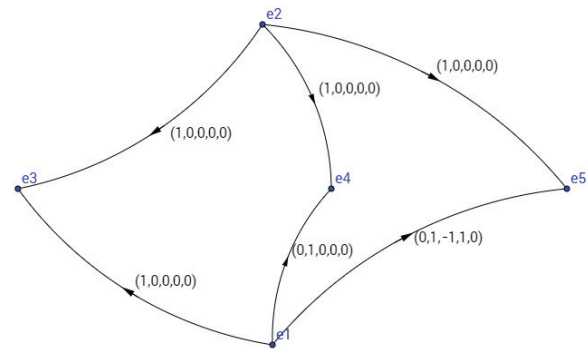
Figura 38: Matriz de adjacência do grafo tipo 1 da álgebra \mathcal{L}_{12} gerada pelo Algraph



(a) Grafo do tipo 1 associado à álgebra \mathcal{L}_{12} gerado pelo Algraph



(b) Grafo do tipo 2 à direita associado à álgebra \mathcal{L}_{12} gerado pelo Algraph



(c) Grafo do tipo 2 à esquerda associado à álgebra \mathcal{L}_{12} gerado pelo Algraph

O exemplo 5.3.1 representa uma álgebra de Lie, portanto, observando os grafos e a matriz de adjacência, facilmente percebe-se a anticomutatividade. Ademais, através dos teoremas apresentados e considerando sua característica como livre de somas, a presença de ciclos em seu grafo do tipo 2 à direita indica sua propriedade de não nilpotente. De fato, sua primeira derivada é gerada por e_1, e_2 e e_3 e, portanto, se iguala à própria álgebra.

Por outro lado, o exemplo 5.3.2 representa uma álgebra de Leibniz não anticomutativa, portanto, seus grafos do tipo 2 associados não são isomorfos e as arestas de seu grafo do tipo 1 não possuem uma correspondente oposta. O grafo descrito por Carriazo et al. [3] não foi gerado, pois o mesmo não está definido para álgebras que não as de Lie.

Outrossim, a ausência de ciclos nos grafos do tipo 2 implica na nilpotência (grafo do tipo 2 à direita) e solubilidade da álgebra em questão.

Observação 5.3.3 *Como o software Geogebra não possui a finalidade de trabalhos com grafos, ele não possui as ferramentas básicas para o desenho dos mesmos. Para a representação das arestas, utilizou-se segmentos de reta e arcos circulares com diferentes raios. Para sua orientação, o programa recorre a vetores posicionados no ponto médio dos arcos.*

Referências

- [1] Barnes, D. W. (2012). On levi's theorem for leibniz algebras. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 86(2):184–185. Citado na página 12.
- [2] Boza, L., Fedriani, E. M., Núñez, J., Pacheco, A. M., and Villar, M. T. (2014). Directed pseudo-graphs and lie algebras over finite fields. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 64:229–T. Citado na página 13.
- [3] Carriazo, A., Fernández, L. M., and J., N. (2004). Combinatorial structures associated with lie algebras of finite dimension. *Linear Algebras and Its Applications*, 389:43–61. [<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379504001302>. Acessado em 05-Dez-2015]. Citado 25 vezes nas páginas 7, 8, 9, 11, 13, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 46, 55, 57, 58, 70, 71, 76, 78, 79 e 81.
- [4] Dynkin, E. (1946). Classification of simple lie groups. *Mat. Sb.*, 18:347–352. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.
- [5] Díaz, E., Fernández-Mateos, R., Fernández-Ternero, D., and Núñez, J. (2003). Graphs associated with nilpotent lie algebras of maximal rank. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 19(2):325–338. Citado na página 13.
- [6] Falcón, O. J., Núñez, J., Pacheco, A. M., and Villar, M. T. (2011). Low-dimensional filiform lie algebras over finite fields. *Recent Researches in Applied and Computational Mathematics*, May 27–29:66–71. [<http://www.wseas.us/e-library/conferences/2011/Lanzarote/MATH/MATH-10.pdf>. Acessado em 17-Fev-2016]. Citado na página 13.
- [7] Gorbatsevich, V. V. (2013). On some basic properties of Leibniz algebras. *ArXiv e-prints*. [<http://arxiv.org/pdf/1302.3345.pdf>. Acessado em 13-Fev-2016]. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 16.
- [8] Jordan, P. (1933). Le quasi-produit serait associatif si $x, y, z=0$ pour tous x, y, z , alors qu'il vérifie seulement l'identité de jordan, c'est-à-dire $x, y, x^2=0$, pour tous x, y , voir (de) pascual jordan. *Über die Multiplikation quantenmechanischer Grössen, Zeitschrift für Physik*, 80:285–291. Citado na página 12.
- [9] Jordan, P., Neumann, J. V., and Wigner, E. (1934). On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Annals of Mathematics (Princeton)*, 35:29–64. Citado na página 12.

- [10] Kac, V. G. (1977). Classification of simple \mathbb{Z} -graded lie superalgebras and simple jordan superalgebras. *Communications in Algebra* 5. Citado na página 12.
- [11] Levi, E. E. (1905). Sulla struttura dei gruppi finiti e continui. *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, pages 551–565. Citado na página 12.
- [12] Lie, S. Theorie der transformationsgruppen i. *Mathematische Annalen*, 16(4):441–528. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 17.
- [13] Loday, J.-L. (1993). *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*. Prépublication de l’institut de recherche mathématique avancée. Université Louis Pasteur. Citado na página 12.
- [14] Lucchesi, C. L. (1979). *Introdução à Teoria dos Grafos*. XII Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro. [http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/cbm/12CBM/12_CBM_79_05.pdf]. Acessado em 05-December-2015]. Citado na página 19.
- [15] Omirov, B. A. (2001). On some classes of nilpotent leibniz algebras. *Siberian Math. J.*, 42(1):15–24. Citado na página 13.
- [16] Umlauf, K. A. (1891 (reimpressa em 2010)). Über die zusammensetzung der endlichen kontinuierlichen transformationsgruppen, insbesondere der gruppen vom range null. *Inaugural-Dissertation, Leipzig (in German)*. Citado na página 13.
- [17] Wikibooks (2014). Livro:teoria dos grafos. [https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Livro:Teoria_dos_Grafos&oldid=38596157]. Acessado em 17-Fev-2016]. Citado na página 19.