

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MICAEL DANTAS MACENA

**CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES AUTO-SIMILARES REDUTORAS
DE GÊNERO ZERO**

Maceió
2016

MICAEL DANTAS MACENA

**CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES AUTO-SIMILARES REDUTORAS
DE GÊNERO ZERO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

Maceió
2016

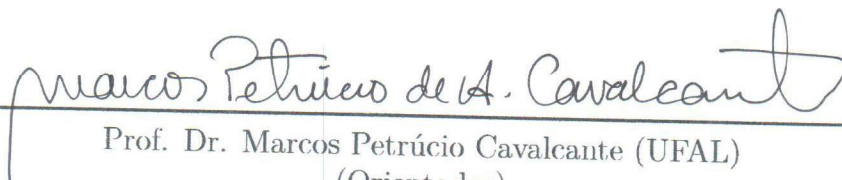
Folha de Aprovação


Micael Dantas Macena


Classificação de Superfícies Auto-Similares Redutoras de Gênero Zero

Dissertação de Mestrado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas na área de Geometria Diferencial.

Trabalho aprovado. Maceió, 10 de março de 2016.


Prof. Dr. Marcos Petrucio Cavalcante (UFAL)
(Orientador)


Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva - UFAL
(Examinador Interno)


Prof. Dr. Detang Zhou - UFF
(Examinador Externo)

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

M141c Macena, Micael Dantas.
Classificação de superfícies auto-similares redutoras de gênero zero / Micael Dantas Macena. – 2016.
55f.

Orientador: Marcos Petrúcio Cavalcante.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Maceió, 2011.

Bibliografia: f. 47-48.
Apêndices: f. 49-52.

1. Superfícies (Matemática). 2. Curvatura média – Fluxo. 3. Superfícies auto-similares redutoras. 4. Superfícies auto-similares redutoras compactas – Classificação.
I. Título.

CDU: 517.518.18

*A meu Pai (In Memoriam), mãe, avó, grande irmão e minhas irmãs, minha Esposa
Eliene, e os demais familiares e amigos em geral...*

When there's a shadow, you follow the sun.
When there is love, then you look for the one.
And for the promises, there is the sky.
And for the heavens are those who can fly.
If you really want to, you can hear me say
Only if you want to will you find a way.
If you really want to you can seize the day.
Only if you want to will you fly away.

[...]

I walk the maze of moments
But everywhere I turn to
Begins a new beginning
But never finds a finish
I walk to the horizon
And there I find another
It all seems so surprising
And then I find that I know

Enya

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tudo e por todos que apareceram no meu caminho. Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas por proporcionar a oportunidade de fazer um mestrado em minha própria terra. Ao meu orientador, Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante, pela orientação e conversas sobre matemática quando possível e também pelos cursos que fiz com ele. Aos Professores Márcio Henrique Batista, Luíz Guillermo, Krerley Oliveira, Feliciano Aguiar, Abraão Mendes, Maria de Andrade e Carlo Pietro por proporcionar bons cursos durante minha formação. A meu irmão e minhas irmãs, mãe, avó e familiares, por acreditarem em mim sempre e torcerem por mim também. A meu Pai pelos ensinamentos e limites. A minha esposa amada Eliene e sua maravilhosa família por entenderem minha ausência mesmo presente. Aos meus amigos que, com toda certeza, posso chamar a todos de colaboradores, citando alguns mas não tirando a importância dos que não foram citados: Alcides Júnior, Jamerson, Davi Lima, Isnaldo Barbosa, Diego Alves, Iury Domingos, Eduardo Santana, Wagner Xavier dentre outros. Aos técnicos do Instituto de Matemática pelo suporte quando necessário e Capes que me financiou durante esse mestrado.

RESUMO

O objetivo deste trabalho consiste em provar um importante teorema que foi recentemente demonstrado por Simon Brendle e que confirma uma conjetura famosa cuja afirmação era: A única superfície auto-similar redutora, compacta, mergulhada no \mathbb{R}^3 e de gênero zero é a esfera redonda.

Palavras-chave: Superfície Auto-Similar Redutora, Fluxo da Curvatura Média, Classificação das Superfícies Auto-similar Redutoras Compactas.

ABSTRACT

The objective of this work is to prove an important theorem that was recently proved by Simon Brendle and that confirms a conjecture which its assertive was: The only compact embedded self-similar shrinker surface of genus zero in \mathbb{R}^3 is the round sphere.

Keywords: Self-similar Shrinker Surface , Mean Curvature Flow, Classification of Compact Self-similar Shrinker Surfaces.

SUMÁRIO

1	PRELIMINARES	10
1.1	Operadores de 1ª Ordem: O Gradiente e a Divergência em Hipersuperfícies.	10
1.2	Operadores de 2ª Ordem: O Laplaciano e o Hessiano em Hi- persuperfícies	12
2	SUPERFÍCIES AUTO-SIMILARES REDUTORAS	15
2.1	O Fluxo de Curvatura Média	15
2.2	Superfícies Auto-Similares Redutoras	15
2.3	Primeira Variação do Funcional \mathcal{F}	17
2.4	Segunda Variação do Funcional \mathcal{F}	20
2.5	Superfícies Auto-Similares Redutoras como Superfícies Mínimas	24
2.6	Alguns Exemplos	27
3	UMA CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES COMPACTAS AUTO-SIMILARES REDUTORAS	29
3.1	O Caso de Gênero Zero	35
	REFERÊNCIAS	49
A	CÁLCULO DO JACOBIANO DE UMA FAMÍLIA DE DIFE- OMORFISMOS	51

INTRODUÇÃO

As superfícies auto-similares redutoras são soluções para um determinado fluxo, dito *fluxo de curvatura média*. Muitos resultados concernentes a tais tipos de superfícies foram provados recentemente, e um desses resultados, devido a Simon Brendle, vem a confirmar uma conjectura sobre superfícies auto-similares redutoras cujo enunciado diz o seguinte:

Teorema 3.1.1(Brendle, 16'): *A única superfície auto-similar redutora, compacta, mergulhada no \mathbb{R}^3 e de gênero zero é a esfera redonda.*

Este é o objeto com o qual a presente dissertação se envolverá. E para isso, o texto se desenvolve em três capítulos cujos conteúdos daremos uma breve descrição a seguir.

No Capítulo 1, damos um apanhado de ferramentas que usaremos nos dois capítulos seguintes. Nesse capítulo a pretensão de ser rigorosamente linear em sua exposição não foi seguida. Aí se apresentam os operadores diferenciais mais elementares, todos definidos em hipersuperfícies. Também expomos (sem demonstração) uma das formas do Princípio do Máximo que se usa com frequência em estudos de Geometria Diferencial.

No Capítulo 2, fazemos uma apresentação das superfícies auto-similares redutoras e as deixamos caracterizadas como as superfícies $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ que satisfazem $H = \frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle$, onde $x \in \Sigma$ e ν é o vetor normal a Σ em x . Ainda nesse capítulo, expomos outro modo de caracterizar essas superfícies; como pontos críticos de um certo funcional \mathcal{F} . Depois calculamos a segunda variação desse funcional, levando a uma definição de superfícies auto-similares redutoras estáveis. Nisso uma determinada desigualdade desempenha papel crucial, a dita *Desigualdade de estabilidade*. Depois vemos que tais superfícies podem ser vistas como superfícies mínimas para uma determinada métrica conforme, e além do mais, as auto-similares redutoras estáveis são mínimas estáveis nessa métrica conforme. Exemplos básicos são dados na última seção desse capítulo.

No Capítulo 3 é que começamos a prova do Teorema 3.1.1, e para isso, provamos um Teorema devido a G.Huisken, o qual afirma que se uma hipersuperfície M em \mathbb{R}^{n+1} é auto-similar redutora, compacta, conexa e com curvatura média não-negativa, então M é uma esfera redonda. Finalmente, partimos para a prova do Teorema 3.1.1 (Brendle) que é por contradição, levando em conta o teorema supracitado devido a Huisken.

1 PRELIMINARES

Este capítulo serve para apresentar alguns resultados e fixar notações que utilizaremos ao longo do nosso texto. A principal referência para Geometria Riemanniana foi [8].

1.1 Operadores de 1ª Ordem: O Gradiente e a Divergência em Hipersuperfícies.

Seja Σ uma variedade diferenciável n -dimensional. Seja $F : \Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de Σ no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , considere em Σ a métrica Riemanniana induzida por \mathbb{R}^{n+1} de forma que $F : \Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ se torne uma imersão isométrica. O espaço tangente a Σ em num ponto p é denotado por $T_p\Sigma$. O campo normal a Σ será denotado por ν . Como usualmente, dado um referencial $\{e_1, \dots, e_n\}$, denotaremos os coeficientes da métrica induzida pela métrica do espaço ambiente por g_{ij} e os coeficientes de sua matriz inversa, isto é $g^{-1} = (g_{ij})^{-1}$, por g^{ij} . A segunda forma fundamental será denotada por A . Com isto, temos o seguinte:

$$g_{ij} = \langle \bar{\nabla}_{e_i} F, \bar{\nabla}_{e_j} F \rangle,$$

para uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p\Sigma$ e os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por

$$h_{ij} = \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, \bar{\nabla}_{e_j} F \rangle.$$

A norma ao quadrado da segunda forma fundamental é dada por

$$|A|^2 = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}^2.$$

A curvatura média será de suma importância para nós. Ela será denotada por H , e o vetor curvatura média será denotado por \vec{H} , onde $\vec{H} = -H\nu$. Temos

$$H = \operatorname{div}_M \nu = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} h_{ij}.$$

Observe que estamos utilizando a curvatura média não normalizada. Assim, por exemplo a curvatura média de uma esfera de raio r , $S^n(r)$, é $H = \frac{n}{r}$. Além disso, considerando um $\lambda > 0$, se uma superfície $\Sigma_\lambda = \lambda \cdot \Sigma := \lambda \cdot F(\Sigma)$, onde $F : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão de Σ no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , então a imersão de Σ_λ é dada por $\lambda \cdot F$, assim, temos $(g_\lambda)_{ij} = \langle \bar{\nabla}_{e_i}(\lambda \cdot F), \bar{\nabla}_{e_j}(\lambda \cdot F) \rangle = \lambda^2 \langle \bar{\nabla}_{e_i} F, \bar{\nabla}_{e_j} F \rangle = \lambda^2 \cdot g_{ij}$, portanto $g_\lambda^{ij} = \lambda^{-2} \cdot g^{ij}$ e também, $(h_\lambda)_{ij} = \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, \bar{\nabla}_{e_j}(\lambda \cdot F) \rangle = \lambda \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, \bar{\nabla}_{e_j} F \rangle = \lambda \cdot h_{ij}$. Donde vem

$$H_\lambda = \sum_{ij} (g_\lambda)^{ij} \cdot (h_\lambda)_{ij} = \sum_{ij} \lambda^{-2} g^{ij} \cdot \lambda h_{ij} = \lambda^{-1} \cdot H \quad (1.1)$$

Dado um campo de vetores $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, a parte tangente a Σ será denotada por X^\top , ou seja,

$$X^\top = \sum_{i=1}^n \langle X, e_i \rangle e_i$$

e a parte normal a Σ é dada por

$$X^\perp = \langle X, \nu \rangle \nu = X - X^\top.$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial em $T\Sigma$.

Tendo que, para uma hipersuperfície $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e um campo suave $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$, o divergente de X sobre Σ é dado por $\operatorname{div}_\Sigma X = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle$, então temos o seguinte lema que usaremos logo em breve.

Lema 1.1. *Dados uma função $f \in C^\infty(\Sigma)$, Σ^n uma hipersuperfície em \mathbb{R}^{n+1} , e um campo suave de vetores $X : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, o divergente satisfaz a igualdade abaixo:*

$$\operatorname{div}_\Sigma(f \cdot X) = f \cdot \operatorname{div}_\Sigma X + \langle X, \nabla_\Sigma f \rangle.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Sigma(f \cdot X) &= \sum_i \left\langle \bar{\nabla}_{e_i}(f \cdot X), e_i \right\rangle \\ &= \sum_i \left\langle f \bar{\nabla}_{e_i} X + e_i(f) X, e_i \right\rangle \\ &= f \sum_i \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \right\rangle + \sum_i e_i(f) \langle X, e_i \rangle \\ &= f \operatorname{div}_\Sigma X + \left\langle X, \sum_i e_i(f) e_i \right\rangle \\ &= f \operatorname{div}_\Sigma X + \langle X, \nabla_\Sigma f \rangle. \end{aligned}$$

□

Outro resultado que usaremos em breve é o que segue abaixo.

Lema 1.2. *Seja Σ^n uma hipersuperfície no \mathbb{R}^{n+1} possivelmente com bordo. Se $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é um campo de vetores com suporte compacto em Σ , e que se anula no $\partial\Sigma$, então*

$$\int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma X = - \int_\Sigma \langle X, \vec{H} \rangle$$

onde \vec{H} é o campo curvatura média da hipersuperfície Σ .

Demonstração. Observe que o campo X pode ser decomposto na forma $X = X^\top + X^\perp$, então $\operatorname{div}_\Sigma X = \operatorname{div}_\Sigma X^\top + \operatorname{div}_\Sigma X^\perp$. Como $X^\perp = \langle X, \nu \rangle \nu$, pomos $f = \langle X, \nu \rangle$ no Lema 1.1, e então, ficamos com

$$\operatorname{div}_\Sigma X^\perp = \operatorname{div}_\Sigma(f\nu) = f \operatorname{div}_\Sigma \nu + \langle \nu, \nabla_\Sigma f \rangle = f \operatorname{div}_\Sigma \nu + 0 = fH = -\langle X, \vec{H} \rangle$$

agora, observe que a componente tangencial pode ser considerada como um campo $X^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e então podemos utilizar o teorema da divergência para dimensão n que pode ser encontrado em [1]. Obtemos

$$\int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X^\top = \int_{\partial\Sigma} \langle X^\top, \vec{N} \rangle = 0$$

onde \vec{N} é o vetor normal ao longo do $\partial\Sigma$, e o lado direito dando nulo porque X se anula no bordo de Σ , já que $X \equiv 0$ em $\partial\Sigma$ quando $\partial\Sigma \neq \emptyset$, em particular sua componente tangencial em $\partial\Sigma$ também se anula. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X^\top + \operatorname{div}_{\Sigma} X^\perp \\ &= 0 - \int_{\Sigma} \langle X, \vec{H} \rangle \end{aligned}$$

como queríamos. □

1.2 Operadores de 2ª Ordem: O Laplaciano e o Hessiano em Hipersuperfícies

Na presente seção veremos como calcular o Gradiente, o Laplaciano e o Hessiano de uma aplicação definida no \mathbb{R}^n restrita a uma hipersuperfície Σ no \mathbb{R}^n . Isto nos será útil no Capítulo 3.

Seja $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície e seja $f \in C^\infty(\Sigma)$. O operador Laplaciano sobre Σ é definido como

$$\Delta_{\Sigma} f = \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_{\Sigma} f).$$

Sejam $p \in \Sigma$ e U uma vizinhança de p em M , um referencial $\{e_1, \dots, e_n\}$ em $\mathfrak{X}(U)$ é dito geodésico em p quando é ortonormal em cada $q \in U$ e além disso $\nabla_{e_i} e_j(q) = 0$.

Agora definiremos o *Hessiano* de uma função $f \in C^\infty(\Sigma)$. Para cada ponto $p \in \Sigma$, definimos o *Hessiano* de f em p como a aplicação

$$\nabla^2 f_p : T_p \Sigma \times T_p \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por $\nabla^2 f_p(v, w) = \langle \nabla_v(\nabla_{\Sigma} f), w \rangle$ para todo par de vetores tangentes $v, w \in T_p \Sigma$. Como a derivada covariante em $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ pode ser dada em termos da derivada Euclidiana usual pela seguinte igualdade $\nabla_v X = dX_p(v) - \langle dX_p(v), \nu(p) \rangle \nu(p)$ então, para o campo $X = \nabla_{\Sigma} f$, temos $\nabla_v(\nabla_{\Sigma} f) = d(\nabla_{\Sigma} f)_p(v) - \langle d(\nabla_{\Sigma} f)_p(v), \nu(p) \rangle \nu(p)$, portanto,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(v, w) &= \langle \nabla_v(\nabla_{\Sigma} f), w \rangle \\ &= \langle d(\nabla_{\Sigma} f)_p(v) - \langle d(\nabla_{\Sigma} f)_p(v), \nu(p) \rangle \nu(p), w \rangle \\ &= \langle d(\nabla_{\Sigma} f)_p(v), w \rangle. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Assim, observe que para uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p\Sigma$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_\Sigma f &= \operatorname{div}_\Sigma(\nabla_\Sigma f) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(\nabla_\Sigma f), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle d(\nabla_\Sigma f)_p(e_i), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla^2 f(e_i, e_i).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

O Laplaciano também satisfaz a seguinte igualdade

$$\Delta_\Sigma(fg) = f\Delta_\Sigma g + g\Delta_\Sigma f + 2\langle \nabla_\Sigma f, \nabla_\Sigma g \rangle \tag{1.4}$$

para quaisquer $f, g \in C^2(\Sigma)$, cuja prova pode ser encontrada em [8].

Agora veremos como calcular o gradiente e o Hessiano de uma função sobre Σ que é a restrição de uma função definida em todo o ambiente. Antes, cabe ressaltar que para uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos por $\bar{\nabla}F$ o gradiente no ambiente \mathbb{R}^n e $\nabla_\Sigma F$ a parte tangente a Σ desse gradiente, já a parte normal será denotada por $(\nabla_\Sigma F)^\perp$. Assim, temos

$$\bar{\nabla}F = \nabla_\Sigma F + (\nabla_\Sigma F)^\perp.$$

A observação a ser feita é que a conexão de Levi-Civita no \mathbb{R}^n , $\bar{\nabla}$, é a própria derivação usual do espaço Euclidiano. Por isso, as vezes usamos a própria notação d no lugar de $\bar{\nabla}$. Como no que segue.

Sejam $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular. Denotemos por f a restrição de F a Σ . Temos $f \in C^\infty(\Sigma)$ e seu gradiente é a parte tangente do gradiente euclidiano da F . Por questão de simplicidade, omitiremos o ponto p , então

$$\nabla_\Sigma f = \nabla_\Sigma F = \bar{\nabla}F - \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle \nu.$$

Por outro lado, para calcular o Hessiano de f em p , temos que calcular $\nabla^2 f(v, w) = \langle d(\nabla_\Sigma f)(v), w \rangle$, para cada $v, w \in T_p\Sigma$. Devemos calcular a derivada $d(\nabla f)$. Temos, portanto

$$\begin{aligned}
d(\nabla_\Sigma f)(v) &= v(\nabla_\Sigma f) \\
&= d(\bar{\nabla}F - \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle \nu)(v) \\
&= d(\bar{\nabla}F)(v) - v(U)\nu - U \cdot v(\nu) \\
&= d(\bar{\nabla}F)(v) - v(U)\nu - U \cdot d\nu(v)
\end{aligned}$$

onde $U = \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(v, w) &= \langle d(\nabla_\Sigma f)(v), w \rangle \\
&= \langle d(\bar{\nabla}F)(v) - v(U)\nu - U d\nu(v), w \rangle \\
&= \langle d(\bar{\nabla}F)(v), w \rangle - U \langle d\nu(v), w \rangle
\end{aligned}$$

qualquer que seja $w \in T_p\Sigma$. Note que $\langle d(\bar{\nabla}F)_p(v), w \rangle$ é o Hessiano Euclidiano de F em $p \in \Sigma$, calculado nos vetores $v, w \in T_p\Sigma$. Usamos a notação $\bar{D}^2F_p(v, w)$, para o Hessiano Euclidiano da F em p , aplicado em v e w . Ficamos, então com

$$\nabla^2 f(v, w) = \bar{D}^2F(v, w) - \langle d\nu(v), w \rangle \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle. \quad (1.5)$$

No nosso texto, usaremos também o Princípio do Máximo ou Princípio da Tangência, para o caso particular de hipersuperfícies mínimas, que é uma consequência do Princípio do Máximo de E.Hopf, o leitor interessado em uma prova deste princípio pode consultar ([18]).

Teorema 1.2.1 (Princípio do Máximo). *Sejam M_1 e M_2 hipersuperfícies mínimas em \mathbb{R}^{n+1} e $p \in M_1 \cap M_2$ um ponto de tangência. Se M_2 está em um dos lados de M_1 em uma vizinhança conexa V de p , então M_1 e M_2 coincidem em V .*

Para finalizar esta seção vamos recordar um importante resultado devido a Cheng (cf. [10]). Antes precisamos de mais uma definição:

Definição 1.2.2. *Seja u uma solução de uma equação elítica sobre uma variedade M . O conjunto $u^{-1}(0) = \{x \in M \mid u(x) = 0\}$ é dito conjunto nodal de u . Quando a $\dim M = 2$, o conjunto nodal $u^{-1}(0)$ é dito linhas nodais de u . Cada componente conexa de $M \setminus u^{-1}(0)$ é dita um domínio nodal de u .*

O teorema de Cheng abaixo descreve a geometria dos conjuntos nodais:

Teorema 1.2.3 (Cheng). *Seja M uma variedade riemanniana de dimensão 2. Então, para cada solução da equação $(\Delta_M + h)u = 0$, com $h \in C^\infty(M)$, vale as seguintes afirmações:*

- (i) *Os pontos críticos no conjunto das linhas nodais são isolados;*
- (ii) *A interseção das linhas nodais formam um sistema equiangular;*
- (iii) *As linhas nodais consistem de um número finito de subvariedades (1-dimensional) fechadas, imersas de classe $C^2(M)$*
- (iv) *As curvaturas geodésicas nas interseções das linhas nodais é zero.*

2 SUPERFÍCIES AUTO-SIMILARES REDUTORAS

2.1 O Fluxo de Curvatura Média

Consideremos uma família $\{\Sigma_t\}_t$ de hipersuperfícies suaves imersas no \mathbb{R}^{n+1} . Podemos ver isso como uma família de imersões a um parâmetro $X : \Sigma \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$, de modo que $X(\Sigma, t) = \Sigma_t$. Mas, em verdade, omitiremos as imersões $X(\Sigma, t)$ e usaremos apenas Σ_t ; com o índice sub-escrito mencionando as imersões.

Segundo [2] uma família de superfícies suaves $\{\Sigma_t\}_t$ move-se pelo fluxo de curvatura média quando vale a seguinte equação

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = -H_t \cdot \nu_t.$$

ou seja, a velocidade de cada ponto da família é dada pela curvatura média (escalar) H_t e o movimento é dado na direção do $-\nu_t$.

Observe que esse processo não depende da escolha de ν , pois, trocando ν por seu oposto, o sinal da curvatura média escalar $H = \operatorname{div}_\Sigma(\nu)$ também vai mudar. Em todo o nosso texto as parametrizações não nos serão relevantes, por isso desconsideramos qualquer movimento tangencial dentro das Σ_t , ou seja, assumimos que as Σ_t 's são parametrizadas de modo que $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) \in T_x \Sigma_t^\perp$.

Os exemplos básicos de soluções para esse fluxo são as superfícies mínimas, onde $H \equiv 0$, que são soluções estacionárias para tal fluxo. Ou seja, elas não evoluem com o passar do tempo; e também as superfícies *auto-similares*, ou seja, aquelas que movem-se por homotetias. É justo por isso, tendem a expandirem-se ou contraírem-se (reduzirem-se), mas entre expandir ou contrair, não mudam seu formato, o leitor pode encontrar mais informações sobre esse comportamento das soluções para o fluxo de curvatura média em [4].

2.2 Superfícies Auto-Similares Redutoras

Uma superfície Σ é dita *auto-similar redutora* quando a seguinte família de superfícies regulares, $\Sigma_t = \sqrt{-t} \cdot \Sigma$, com $t \in [-1, 0]$, move-se pelo fluxo de curvatura média. Note que essa é uma família que move-se por homotetias, veja por exemplo [4], onde o coeficiente de homotetia é dado por $\lambda(t) = \sqrt{-t}$. O lema que segue caracteriza as superfícies auto-similares redutoras.

Lema 2.1. *Suponha que uma superfície $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ satisfaz*

$$H = \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle$$

então a família $\Sigma_t = \sqrt{-t} \cdot \Sigma$ move-se pelo fluxo de curvatura média, e para cada t , tem-se

$$H_t = -\frac{\langle x, \nu_t \rangle}{2t}.$$

Reciprocamente, suponha que uma família de superfícies Σ_t move-se sob o fluxo de curvatura média. Então, Σ_t é auto-similar redutora, significando $\Sigma_t = \sqrt{-t} \cdot \Sigma_{-1}$, se e somente se, $H_t = -\frac{\langle x, \nu_t \rangle}{2t}$ para todo t .

Demonstração. Se Σ satisfaz $H = \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle$, então para cada $p \in \Sigma$ e $t < 0$, queremos mostrar que $\Sigma_t = \sqrt{-t} \cdot \Sigma$ move-se pelo fluxo da curvatura média. Pondo $x(p, t) = \sqrt{-t} \cdot p$, vemos que

$$\nu_t(x(p, t)) = \nu(p)$$

e além disso, de 1.1 temos

$$H_t(x(p, t)) = \frac{1}{\sqrt{-t}} \cdot H(p)$$

agora, observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{-t} \cdot p) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-t}} \cdot p \end{aligned}$$

e sua velocidade na componente normal é dada por $(\frac{\partial x}{\partial t})^\perp$, mas como estamos supondo que $(\frac{\partial x}{\partial t})^\top = 0$, então $\frac{\partial x}{\partial t} = (\frac{\partial x}{\partial t})^\perp$ logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial t}, \nu_t \right\rangle \cdot \nu_t \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-t}} \cdot \langle p, \nu \rangle \nu \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-t}} \cdot \frac{1}{2} \langle p, \nu \rangle \cdot \nu \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-t}} H \cdot \nu \\ &= -H_t \cdot \nu_t \end{aligned}$$

portanto, a família Σ_t move-se sob o fluxo de curvatura média. Agora, verifiquemos que vale a igualdade $H_t = -\frac{\langle x, \nu_t \rangle}{2t}$ para todo t . Como já temos $H_t = \frac{1}{\sqrt{-t}} \cdot H$, $H = \frac{1}{2} \langle p, \nu \rangle$ e $x = x(p, t) = \sqrt{-t} \cdot p$, obtemos

$$\begin{aligned} H_t &= \frac{1}{2\sqrt{-t}} \cdot \langle p, \nu \rangle \\ &= \frac{\langle \sqrt{-t} \cdot p, \nu_t \rangle}{2(\sqrt{-t})^2} \\ &= -\frac{\langle x, \nu_t \rangle}{2t} \end{aligned}$$

como queríamos.

Reciprocamente, suponhamos que a família Σ_t move-se pelo fluxo de curvatura média, ou seja, $\{\Sigma_t\}_t$ satisfaz $\frac{\partial x}{\partial t} = -H_t \cdot \nu_t$. Então, se vale a igualdade $H_t = -\frac{\langle x, \nu_t \rangle}{2t}$, para todo t , em particular, para $t = -1$ teremos $H = \frac{\langle x, \nu \rangle}{2}$, e o que provamos na primeira parte desse lema garante que a família $\Sigma_t = \sqrt{-t} \cdot \Sigma$ move-se pelo fluxo de curvatura média, portanto Σ é auto-similar redutora. Agora, suponhamos que Σ_t move-se sob o fluxo de curvatura média e além disso é auto-similar redutora, i.e, $\Sigma_t = \sqrt{-t} \cdot \Sigma$. Então, podemos escrever:

$$\Sigma_{-1} = \frac{1}{\sqrt{-t}} \cdot \Sigma_t$$

logo, para um ponto $p \in \Sigma_{-1}$, temos $p = \frac{x}{\sqrt{-t}}$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} p \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{\sqrt{-t}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-t}} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{x}{2 \cdot (-t)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

portanto, multiplicando a igualdade acima por $(-t)^{\frac{3}{2}}$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (-t)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{-t}} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{x}{2 \cdot (-t)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= -t \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{x}{2} \end{aligned}$$

como estamos supondo que Σ_t move-se pelo fluxo de curvatura média, então

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -H_t \cdot \nu_t$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} H_t &= -\left\langle \frac{\partial x}{\partial t}, \nu_t \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2t} \langle x, \nu_t \rangle. \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. □

2.3 Primeira Variação do Funcional \mathcal{F}

Por conta desse último Lema alguns textos, como em [5], dizem que uma superfície $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é auto-similar redutora quando sua curvatura média satisfaz $H = \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle$. Veremos agora outro modo de caracterizar as superfícies auto-similares redutoras, descrito em [4]. Inicialmente, consideramos um funcional

$$\mathcal{F}(\Sigma) = \int_{\Sigma} u(x) dv$$

onde $dv = \sqrt{\det g} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ é o elemento de volume na métrica g de Σ e pedimos que as superfícies auto-similar redutoras sejam pontos críticos do funcional acima. Com isso procuramos determinar o integrando $u(x)$

Baseados no texto [6], para determinar a primeira e segunda variações do funcional \mathcal{F} precisaremos do Jacobiano de uma família de difeomorfismos de classe C^2 , digamos $\{\phi_s\}_s$, onde $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, que satisfaz o que segue:

$$\phi_s(x) = x + sX(x) + \frac{s^2}{2}Z(x) + \mathcal{O}(s^3)$$

sendo $X = \left. \frac{\partial \phi_s(x)}{\partial s} \right|_{s=0}$ e $Z = \left. \frac{\partial^2 \phi_s(x)}{\partial s^2} \right|_{s=0}$ os campos velocidade e aceleração iniciais de ϕ em Σ com suporte compacto, de modo que $\Sigma_s = \phi_s(\Sigma)$. Do Apêndice A temos a seguinte fórmula para o jacobiano de ϕ_s :

$$J\phi_s(x) = 1 + s \operatorname{div}_\Sigma X + \frac{s^2}{2} \left(\operatorname{div}_\Sigma Z + |(\bar{\nabla}_{e_1} X)^\perp| + |(\bar{\nabla}_{e_2} X)^\perp| + 2\Lambda \right).$$

onde $\Lambda = \langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_1 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_2 \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_2 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_1 \rangle$. Observe que podemos derivar $|J\phi_s(x)|$ em relação a s quando $s = 0$, visto que a função $|\cdot|$ é diferenciável em todo ponto, exceto no 0, e em uma vizinhança suficientemente pequena de $s = 0$ o $J\phi_s$ está em uma vizinhança suficientemente próximo do 1.

Temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{F}(\Sigma_s) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \int_{\Sigma_s} u(x) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \int_\Sigma u(\phi_s(x)) |J\phi_s(x)| \\ &= \int_\Sigma \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left(u(\phi_s(x)) |J\phi_s(x)| \right) \\ &= \int_\Sigma \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} u(\phi_s(x)) \cdot |J\phi_0(x)| \Big|_{s=0} + u(\phi_0(x)) \cdot \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} |J\phi_s(x)| \\ &= \int_\Sigma \left\langle \bar{\nabla} u(\phi_0(x)), \frac{\partial \phi_s(x)}{\partial s} \right\rangle \cdot 1 + u(x) \cdot \operatorname{div}_\Sigma X \\ &= \int_\Sigma \left\langle \bar{\nabla} u(x), X \right\rangle + u(x) \cdot \operatorname{div}_\Sigma X \end{aligned}$$

do Lema 1.1 temos $\operatorname{div}_\Sigma(u \cdot X) = u \cdot \operatorname{div}_\Sigma X + \langle X, \nabla_\Sigma u \rangle$, então podemos substituir a expressão $u \cdot \operatorname{div}_\Sigma X = \operatorname{div}_\Sigma(u \cdot X) - \langle X, \nabla_\Sigma u \rangle$ na última igualdade acima, para ficarmos com

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{F}(\Sigma_s) &= \int_\Sigma \left\langle \bar{\nabla} u(x), X \right\rangle + \left(\operatorname{div}_\Sigma(u \cdot X) - \langle X, \nabla_\Sigma u \rangle \right) \\ &= \int_\Sigma \left\langle (\bar{\nabla} u(x))^\perp, X \right\rangle + \operatorname{div}_\Sigma(u \cdot X) \end{aligned}$$

agora, usando o Lema 1.2, obtemos $\int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma(u \cdot X) = -\int_\Sigma \langle \vec{H}, u \cdot X \rangle$, e assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{F}(\Sigma_s) &= \int_{\Sigma} \langle (\bar{\nabla}u(x))^\perp, X \rangle + \operatorname{div}_{\Sigma}(u \cdot X) \\
 &= \int_{\Sigma} \langle (\bar{\nabla}u(x))^\perp, X \rangle - \langle \vec{H}, uX \rangle \\
 &= \int_{\Sigma} \langle (\bar{\nabla}u(x))^\perp, X \rangle - \langle u\vec{H}, X \rangle \\
 &= \int_{\Sigma} \langle (\bar{\nabla}u(x))^\perp - u\vec{H}, X \rangle
 \end{aligned}$$

por conseguinte, pedir que as superfícies auto-similar redutoras sejam pontos críticos desse funcional é o mesmo que pedir $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{F}(\Sigma_s) = 0$, ou seja que $(\bar{\nabla}u(x))^\perp - u\vec{H} = 0$, qualquer que seja o campo X definido em Σ , com suporte compacto. Podemos supor que $u \neq 0$, então dividindo por u , vem

$$\frac{(\bar{\nabla}u(x))^\perp}{u} - \vec{H} = 0$$

e fazendo a expressão acima interno o normal ν , obtemos

$$\left\langle \frac{(\bar{\nabla}u(x))^\perp}{u} - \vec{H}, \nu \right\rangle = 0$$

ou ainda

$$\left\langle \frac{\bar{\nabla}u(x)}{u} - \vec{H}, \nu \right\rangle = 0$$

visto que $\langle \nabla_{\Sigma}u(x), \nu \rangle = 0$. Assim, sendo Σ uma superfície auto-similar redutora, segue que $H = \frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle$, com $\vec{H} = -H\nu$, logo

$$\left\langle \frac{\bar{\nabla}u(x)}{u} + \frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle\nu, \nu \right\rangle = 0$$

donde,

$$\left\langle \frac{\bar{\nabla}u(x)}{u} + \frac{1}{2}x, \nu \right\rangle = 0.$$

Apesar desta última equação não implicar a igualdade $\frac{\bar{\nabla}u(x)}{u} + \frac{1}{2}x = 0$ é justamente isso que pediremos, o que é feito para termos uma solução u . Note que a função abaixo é a única solução radial para a EDP acima

$$u(x) = Ce^{-\frac{|x|^2}{4}},$$

com C constante, que podemos admitir $C = 1$. Ficamos, pois, com o funcional

$$\mathcal{F}(\Sigma) = \int_{\Sigma} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv.$$

Teorema 2.3.1. *Uma superfície Σ em \mathbb{R}^3 é auto-similar redutora se, e somente se, é um ponto crítico do funcional*

$$\mathcal{F}(\Sigma) = \int_{\Sigma} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv.$$

Demonstração. De fato, se Σ é uma superfície auto-similar redutora, então $H = \frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle$ logo, $\vec{H} = -\frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle \nu$, e isso quando levado nas nossas contas da primeira variação, acima, mas agora com $u(x) = e^{-\frac{|x|^2}{4}}$ e verificando que $(\bar{\nabla}u(x))^\perp = -\frac{1}{2}u(x)\langle x, \nu \rangle \nu$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{F}(\Sigma_s) &= \int_{\Sigma} \left\langle (\bar{\nabla}u(x))^\perp - u\vec{H}, X \right\rangle dv \\ &= \int_{\Sigma} \left\langle -\frac{1}{2}u\langle x, \nu \rangle \nu - u\left(-\frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle \nu\right), X \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

qualquer que seja o campo X , o que prova que Σ é ponto crítico do funcional \mathcal{F} .

Reciprocamente, se Σ é ponto crítico do funcional \mathcal{F} , então temos $(\bar{\nabla}u(x))^\perp - u\vec{H} = 0$, e conhecendo $u = e^{-\frac{|x|^2}{4}}$, obtemos $(\bar{\nabla}u(x))^\perp = -\frac{1}{2}u\langle x, \nu \rangle \nu$, logo,

$$\begin{aligned} 0 &= (\bar{\nabla}u(x))^\perp - u\vec{H} \\ &= -\frac{1}{2}u\langle x, \nu \rangle \nu - u\vec{H} \end{aligned}$$

nos dando

$$\vec{H} = -\frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle \nu$$

e como $H = -\langle \vec{H}, \nu \rangle$, vem

$$H = \frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle,$$

ou seja, Σ é uma auto-similar redutora. Como queríamos. \square

2.4 Segunda Variação do Funcional \mathcal{F}

Agora trataremos da segunda variação do funcional obtido acima. Antes vale uma pequena discussão acerca do que nos faz ir atrás dessa segunda variação. Tal qual no Cálculo Diferencial e Integral, a primeira variação (leia-se: Derivada) de uma função nos dá uma informação sobre os pontos críticos da função. Já a segunda variação, nos permite decidir se os tais pontos críticos são pontos de máximo, mínimo ou pontos instáveis, i.e, nem de máximo nem de mínimo (os ditos: Pontos de Sela). A grosso modo, o Cálculo das Variações se utiliza dessa ideia para conseguir resultados análogos em casos mais gerais. Isto nos empresta a possibilidade de verificar, via a segunda variação do funcional, se uma superfície que é um de seus pontos críticos é um mínimo do funcional. Infelizmente existe uma infinidade de possíveis direções de estabilidade (as direções que permitem verificar se a segunda variação muda ou não muda de sinal), e certamente não pretendemos encontrar todas elas. Por isso nos concentraremos em algumas direções bem escolhidas. Mas antes precisamos duma expressão para a segunda variação do nosso funcional. Depois de encontrada uma expressão para a segunda variação, nos restringiremos ao caso dos campos de vetores normais $X = f\nu$, onde $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave definida em Σ ,

com suporte compacto e que se anula em $\partial\Sigma$. Além disso, a consideração é feita sobre a hipótese de que a segunda variação é calculada em uma superfície cuja primeira variação é nula. Contudo, daremos antes um lema útil, para superfícies no \mathbb{R}^3 , e passamos agora a focar na primeira e segunda variações para superfícies no \mathbb{R}^3 , vamos ao lema:

Lema 2.2. *Para a segunda forma fundamental A de uma superfície Σ em \mathbb{R}^3 vale a seguinte igualdade:*

$$2 \det A = H^2 - |A|^2$$

Demonstração. Temos

$$A = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

assim, $|A|^2 = h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{21}^2 + h_{22}^2$, mas temos que $h_{12} = h_{21}$, então

$$\begin{aligned} |A|^2 &= h_{11}^2 + h_{12}h_{21} + h_{21}h_{12} + h_{22}^2 \\ &= (h_{11} + h_{22})^2 + 2(h_{12}h_{21} - h_{11}h_{22}) \\ &= \text{tr}^2(A) - 2 \det(A) \\ &= H^2 - 2 \det(A). \end{aligned}$$

□

Considerando novamente a família de difeomorfismos ϕ_s , temos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{F}(\Sigma_s) &= \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \int_{\Sigma_s} u(x) dv \\ &= \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \int_{\Sigma} u(\phi_s(x)) |J\phi_s(x)| dv. \\ &= \int_{\Sigma} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} (u(\phi_s(x)) |J\phi_s(x)|) dv \\ &= \int_{\Sigma} \frac{d}{ds} \left[\frac{d}{ds} (u(\phi_s(x)) |J\phi_s(x)|) \right] \Big|_{s=0} dv \\ &= \int_{\Sigma} \left[\frac{d^2}{ds^2} u(\phi_s) |J\phi_s| + 2 \frac{d}{ds} u(\phi_s) \frac{d}{ds} J\phi_s + u(\phi_s) \frac{d^2}{ds^2} J\phi_s \right] \Big|_{s=0} dv \end{aligned}$$

vamos calcular a primeira parcela do integrando acima, utilizando o fato de já conhecermos

a u , e que $\bar{\nabla}u(x) = -\frac{x}{2}u(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}u(\phi_s(x))\Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds}\left(\left\langle\bar{\nabla}u(\phi_s(x)),\frac{d}{ds}\phi_s(x)\right\rangle\right)\Big|_{s=0}. \\
&= \left(\left\langle\frac{d}{ds}\bar{\nabla}u(\phi_s),\frac{d}{ds}\phi_s\right\rangle+\left\langle\bar{\nabla}u(\phi_s),\frac{d^2}{ds^2}\phi_s\right\rangle\right)\Big|_{s=0} \\
&= \left(\left\langle-\frac{1}{2}\langle\bar{\nabla}u(\phi_s),\frac{d}{ds}\phi_s\rangle\phi_s-\frac{1}{2}u(\phi_s)\frac{d}{ds}\phi_s,\frac{d}{ds}\phi_s\right\rangle+\left\langle\bar{\nabla}u(\phi_s),\frac{d^2}{ds^2}\phi_s\right\rangle\right)\Big|_{s=0} \\
&= \left(\left\langle\frac{1}{4}\langle\phi_s u(\phi_s),\frac{d}{ds}\phi_s\rangle\phi_s-\frac{1}{2}u(\phi_s)\frac{d}{ds}\phi_s,\frac{d}{ds}\phi_s\right\rangle+\left\langle\bar{\nabla}u(\phi_s),\frac{d^2}{ds^2}\phi_s\right\rangle\right)\Big|_{s=0} \\
&= \left\langle\frac{1}{4}u\langle x,X\rangle x-\frac{1}{2}u(x)X,X\right\rangle+\left\langle\bar{\nabla}u(x),Z\right\rangle \\
&= \frac{1}{4}u\langle x,X\rangle^2-\frac{1}{2}u|X|^2+\left\langle\bar{\nabla}u(x),Z\right\rangle.
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$2\frac{d}{ds}u(\phi_s)\frac{d}{ds}J\phi_s\Big|_{s=0}=2\left\langle\bar{\nabla}u(\phi_0),\frac{d}{ds}\phi_s\Big|_{s=0}\right\rangle\frac{d}{ds}J\phi_s\Big|_{s=0}=2\langle u(x),X\rangle\operatorname{div}_\Sigma X$$

e também

$$u(\phi_s)\frac{d^2}{ds^2}J\phi_s\Big|_{s=0}=u(x)\left(\operatorname{div}_\Sigma Z+|(\bar{\nabla}_{e_1}X)^\perp|^2+(\bar{\nabla}_{e_2}X)^\perp|^2+2\Lambda\right)$$

assim, ficamos com a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0}\mathcal{F}(\Sigma_s) &= \int_\Sigma\left[\frac{d^2}{ds^2}u(\phi_s)|J\phi_s|+2\frac{d}{ds}u(\phi_s)\frac{d}{ds}J\phi_s+u(\phi_s)\frac{d^2}{ds^2}J\phi_s\right]\Big|_{s=0}dv \\
&= \int_\Sigma\left(\frac{1}{4}u\langle x,X\rangle^2-\frac{1}{2}u|X|^2+\left\langle\bar{\nabla}u(x),Z\right\rangle\right).1+2\langle u(x),X\rangle\operatorname{div}_\Sigma X \\
&\quad +u(x)\left(\operatorname{div}_\Sigma Z+|(\bar{\nabla}_{e_1}X)^\perp|^2+(\bar{\nabla}_{e_2}X)^\perp|^2+2\Lambda\right)dv \\
&= \int_\Sigma\left[\frac{1}{4}u\langle x,X\rangle^2-\frac{1}{2}u|X|^2+2\langle\bar{\nabla}u,X\rangle\operatorname{div}_\Sigma X+u\operatorname{div}_\Sigma Z+\left\langle\bar{\nabla}u(x),Z\right\rangle\right. \\
&\quad \left.+u\left(|(\bar{\nabla}_{e_1}X)^\perp|^2+(\bar{\nabla}_{e_2}X)^\perp|^2+2\Lambda\right)\right]dv \\
&= \int_\Sigma\left[\frac{1}{4}u\langle x,X\rangle^2-\frac{1}{2}u|X|^2+2\langle\bar{\nabla}u,X\rangle\operatorname{div}_\Sigma X\right. \\
&\quad \left.+u\left(|(\bar{\nabla}_{e_1}X)^\perp|^2+(\bar{\nabla}_{e_2}X)^\perp|^2+2\Lambda\right)\right]dv+\int_\Sigma\langle\bar{\nabla}u,Z\rangle+u\operatorname{div}_\Sigma Zdv
\end{aligned}$$

como a primeira variação em Σ é nula e a segunda integral do lado direito acima é precisamente a primeira variação do funcional \mathcal{F} em Σ , então temos que $\int_\Sigma\langle\bar{\nabla}u,Z\rangle+u\operatorname{div}_\Sigma Zdv=0$. Logo

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0}\mathcal{F}(\Sigma_s) &= \int_\Sigma\left[\frac{1}{4}u\langle x,X\rangle^2-\frac{1}{2}u|X|^2+2\langle\bar{\nabla}u,X\rangle\operatorname{div}_\Sigma X\right. \\
&\quad \left.+u\left(|(\bar{\nabla}_{e_1}X)^\perp|^2+(\bar{\nabla}_{e_2}X)^\perp|^2+2\Lambda\right)\right]dv.
\end{aligned}$$

Agora faremos uma escolha para o campo X , considerando uma função suave $f:\bar{\Sigma}\rightarrow\mathbb{R}$, com suporte compacto e que se anula em $\partial\Sigma$, e então tomamos $X=f\nu$, onde ν é o

campo normal a Σ . Com isso, observe que $\langle x, X \rangle^2 = 4f^2H^2$, $u|X|^2 = uf^2$, $2\langle \bar{\nabla}u, X \rangle = -uf\langle x, \nu \rangle$ e $\operatorname{div}_\Sigma X = \langle e_1(f)\nu + f\nabla_{e_1}\nu, e_1 \rangle + \langle e_2(f)\nu + f\nabla_{e_2}\nu, e_2 \rangle = f\operatorname{div}_\Sigma \nu$. Também, tendo que $\bar{\nabla}_{e_i}\nu = k_i e_i$, onde k_i é a i -ésima curvatura principal, obtemos $|(\bar{\nabla}_{e_i}(f\nu))^\perp|^2 = |\langle e_i(f)\nu + f\bar{\nabla}_{e_i}\nu, \nu \rangle|^2 = (e_i(f))^2$, logo para o nosso campo $X = f\nu$, temos $|(\bar{\nabla}_{e_1}X)^\perp|^2 + |(\bar{\nabla}_{e_2}X)^\perp|^2 = |\nabla_\Sigma f|^2$. Finalmente, vejamos como fica 2Λ , com esse campo normal X . Como $\langle \bar{\nabla}_{e_i}X, e_j \rangle = \langle e_i(f)\nu + f\bar{\nabla}_{e_i}\nu, e_j \rangle = f\langle \bar{\nabla}_{e_i}\nu, e_j \rangle$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left(\langle \bar{\nabla}_{e_1}X, e_1 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2}X, e_2 \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_1}X, e_2 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2}X, e_1 \rangle \right) \\ &= \det(\langle \bar{\nabla}_{e_i}X, e_j \rangle)_{i,j} \\ &= f^2 \det(\langle \bar{\nabla}_{e_i}\nu, e_j \rangle)_{i,j} \\ &= f^2 \det A. \end{aligned}$$

Utilizando o Lema 2.2 temos

$$2\Lambda = f^2 \cdot (H^2 - |A|^2).$$

Assim, substituindo o que obtemos acima na expressão da segunda variação, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{F}(\Sigma_s) &= \int_\Sigma u \left[f^2 H^2 - \frac{1}{2} f^2 - f^2 \langle x, \nu \rangle \operatorname{div}_\Sigma \nu + |\nabla_\Sigma f|^2 + 2f^2 \det A \right] \\ &= \int_\Sigma u \left[f^2 H^2 - \frac{1}{2} f^2 - 2 \cdot f^2 \cdot \frac{\langle x, \nu \rangle}{2} \cdot H + |\nabla_\Sigma f|^2 + f^2 (H^2 - |A|^2) \right] \\ &= \int_\Sigma u \left[f^2 H^2 - \frac{1}{2} f^2 - 2 \cdot f^2 \cdot H^2 + |\nabla_\Sigma f|^2 + f^2 H^2 - f^2 |A|^2 \right] \\ &= \int_\Sigma u \left[-f^2 H^2 - \frac{1}{2} f^2 + |\nabla_\Sigma f|^2 + f^2 H^2 - f^2 |A|^2 \right] \\ &= \int_\Sigma u \left[-\frac{1}{2} f^2 + |\nabla_\Sigma f|^2 - f^2 |A|^2 \right] \\ &= \int_\Sigma u \left[-f^2 \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) + |\nabla_\Sigma f|^2 \right]. \end{aligned}$$

Notemos também que

$$\begin{aligned} |\nabla_\Sigma f|^2 &= \langle \nabla_\Sigma f, \nabla_\Sigma f \rangle \\ &= \operatorname{div}_\Sigma (f \nabla_\Sigma f) - f \operatorname{div}_\Sigma (\nabla_\Sigma) \\ &= \operatorname{div}_\Sigma (f \nabla_\Sigma f) - f \Delta_\Sigma f \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{F}(\Sigma_s) &= \int_\Sigma u \left[-f^2 \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) + |\nabla_\Sigma f|^2 \right] \\ &= \int_\Sigma u \left[-f^2 \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) + \operatorname{div}_\Sigma (f \nabla_\Sigma f) - f \Delta_\Sigma f \right] \\ &= \int_\Sigma -uf^2 \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) + u \operatorname{div}_\Sigma (f \nabla_\Sigma f) - uf \Delta_\Sigma f \\ &= \int_\Sigma -uf^2 \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) - uf \Delta_\Sigma f - \langle \bar{\nabla}u, f \nabla_\Sigma f \rangle \\ &\quad + \int_\Sigma u \operatorname{div}_\Sigma (f \nabla_\Sigma f) + \langle \bar{\nabla}u, f \nabla_\Sigma f \rangle \end{aligned}$$

e como a primeira variação em Σ é nula para qualquer campo X , então para $X = f\nabla_\Sigma f$, temos $\int_\Sigma u \operatorname{div}_\Sigma(f\nabla_\Sigma f) + \langle \bar{\nabla}u, f\nabla_\Sigma f \rangle = 0$ portanto, segue-se

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} \mathcal{F}(\Sigma_s) &= \int_\Sigma -uf^2 \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) - uf\Delta_\Sigma f - \langle \bar{\nabla}u, f\nabla_\Sigma f \rangle \\ &= \int_\Sigma -uf^2 \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) - uf\Delta_\Sigma f - f \left\langle -\frac{x}{2}u, \nabla_\Sigma f \right\rangle \\ &= \int_\Sigma -uf\Delta_\Sigma f - uf^2 \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) + uf \frac{1}{2} \langle x, \nabla_\Sigma f \rangle \\ &= \int_\Sigma -uf \left[\Delta_\Sigma f + f \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \langle x, \nabla_\Sigma f \rangle \right] \\ &= - \int_\Sigma ufLf \end{aligned}$$

onde

$$Lf := \Delta_\Sigma f + f \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \langle x, \nabla_\Sigma f \rangle \quad (2.1)$$

é dito o operador de Jacobi, ou ainda, operador de estabilidade.

Definição 2.4.1 (Desigualdade de Estabilidade). *Uma superfície auto-similar redutora Σ em \mathbb{R}^3 é dita estável se $-\int_\Sigma ufLf \geq 0$, para qualquer f com suporte compacto em $\partial\Sigma$. Além disso, a desigualdade acima é dita desigualdade de estabilidade.*

A definição acima nos diz que uma superfície auto-similar redutora é estável quando ela é um ponto de mínimo para o funcional \mathcal{F} .

2.5 Superfícies Auto-Similares Redutoras como Superfícies Mínimas

Vejamos que o funcional acima pode ser visto como um funcional área em uma métrica conforme. Com efeito, consideremos g a métrica Euclidiana usual do \mathbb{R}^{n+1} e uma hypersuperfície Σ^n imersa em \mathbb{R}^{n+1} com a métrica induzida pela métrica g . Agora, consideremos uma outra métrica \tilde{g} dada por $\tilde{g} = e^{-\frac{2\phi}{n}}g$, onde ϕ é uma função diferenciável de \mathbb{R}^{n+1} em \mathbb{R} . Claramente essa métrica \tilde{g} induz uma outra métrica em Σ^n , os objetos relacionados com a métrica \tilde{g} seguirão com um til sobre si. Assim, por exemplo, os coeficientes da segunda forma serão dados por \tilde{h}_{ij} e a curvatura média em relação a \tilde{g} será dada por $\tilde{H} = \sum_{i,j} \tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{ij}$. Se considerarmos um referencial ortonormal $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ de $T\Sigma$ com relação a métrica induzida \tilde{g} , e tendo que $d\tilde{v} = \sqrt{\det \tilde{g}} dx_1 \cdots dx_n$ obtemos,

$$\begin{aligned}
 \widetilde{vol}(\Sigma) &= \int_{\Sigma} d\tilde{v} \\
 &= \int_{\Sigma} \sqrt{\det \tilde{g}} dx_1 \cdots dx_n \\
 &= \int_{\Sigma} \sqrt{e^{-2\phi} \det g} dx_1 \cdots dx_n \\
 &= \int_{\Sigma} e^{-\phi} \sqrt{\det g} dx_1 \cdots dx_n \\
 &= \int_{\Sigma} e^{-\phi} dv
 \end{aligned}$$

assim, no caso em que $n = 2$ e $\phi = \frac{|x|^2}{4}$, temos $\tilde{g} = e^{-\frac{|x|^2}{4}} g$ logo, o funcional área é dado como segue

$$\widetilde{vol}(\Sigma) = \int_{\Sigma} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv = \mathcal{F}(\Sigma).$$

Portanto, o funcional \mathcal{F} é, de fato, um funcional área com relação a métrica conforme $\tilde{g} = e^{-\frac{|x|^2}{4}} g$. Da bem conhecida fórmula de primeira variação da área, por exemplo em (cf. [3]), temos o seguinte

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \tilde{vol}(\Sigma_s) = - \int_{\Sigma} \tilde{g}(X, \vec{H}) d\tilde{v} = - \int_{\Sigma} e^{-\frac{2\phi}{n}} g(X, \vec{H}) e^{-\phi} dv$$

onde \vec{H} é o campo curvatura média de Σ em $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{g})$. Vamos então calcular a curvatura média de Σ com relação a métrica conforme \tilde{g} . Antes observemos que uma superfície que minimiza o funcional área na métrica conforme minimiza o funcional \mathcal{F} , logo auto-similares redutoras estáveis são pontos de mínimos do funcional área na métrica conforme e vice-versa.

Escolhamos um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T\Sigma$ com relação a métrica induzida pela métrica euclidiana g , então, com relação a métrica induzida pela métrica conforme \tilde{g} , $\{\tilde{e}_1 = e^{\frac{\phi}{n}} \cdot e_1, \dots, \tilde{e}_n = e^{\frac{\phi}{n}} \cdot e_n\}$ é um referencial ortonormal e $\tilde{\nu} = e^{\frac{\phi}{n}} \nu$ é o vetor unitário de Σ^n em $(\mathbb{R}^{n+1}, \tilde{g})$. Com isso, temos $\tilde{g}_{ij} = e^{-\frac{2\phi}{n}} g(e^{\frac{\phi}{n}} e_i, e^{\frac{\phi}{n}} e_j) = g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, e também $\tilde{g}^{ij} = \delta^{ij}$. Com relação a métrica conforme, vale a seguinte fórmula para a conexão de Levi-Civita:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \frac{1}{n} d\phi(X)Y - \frac{1}{n} d\phi(Y)X + \frac{1}{n} g(X, Y) \bar{\nabla} \phi$$

para quaisquer campos de vetores tangentes X e Y em \mathbb{R}^{n+1} . Cujas prova pode ser encontrada em (cf. [7]), pág. 392. Proposição A.62 pondo $h = -\frac{\phi}{n}$.

Assim, os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_{ij} &= \tilde{g}(\tilde{e}_j, \tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i} \tilde{\nu}) \\
 &= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j, \tilde{\nu}) \\
 &= -\tilde{g}(\bar{\nabla}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j - \frac{1}{n} d\phi(\tilde{e}_i) \tilde{e}_j - \frac{1}{n} d\phi(\tilde{e}_j) \tilde{e}_i + \frac{1}{n} g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \bar{\nabla} \phi, \tilde{\nu}) \\
 &= -\tilde{g}(\bar{\nabla}_{\tilde{e}_i} \tilde{e}_j + \frac{1}{n} g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \bar{\nabla} \phi, \tilde{\nu}) \\
 &= -e^{\frac{\phi}{n}} g(\bar{\nabla}_{e_i} e_j + \frac{1}{n} g(e_i, e_j) \bar{\nabla} \phi, \nu) \\
 &= e^{\frac{\phi}{n}} \left(-g(\bar{\nabla}_{e_i} e_j, \nu) - \frac{1}{n} g(e_i, e_j) g(\bar{\nabla} \phi, \nu) \right) \\
 &= e^{\frac{\phi}{n}} \left(h_{ij} - \frac{1}{n} \delta_{ij} g(\bar{\nabla} \phi, \nu) \right).
 \end{aligned}$$

o que nos dá o seguinte

$$\begin{aligned}
 \tilde{H} &= \sum_{i,j} \tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{ij} \\
 &= \sum_{i,j} \delta^{ij} e^{\frac{\phi}{n}} \left(h_{ij} - \frac{1}{n} \delta_{ij} g(\bar{\nabla} \phi, \nu) \right) \\
 &= e^{\frac{\phi}{n}} \left(\sum_{i,j} \delta^{ij} h_{ij} - \frac{1}{n} \sum_{i,j} \delta^{ij} \delta_{ij} g(\bar{\nabla} \phi, \nu) \right) \\
 &= e^{\frac{\phi}{n}} \left(H - g(\bar{\nabla} \phi, \nu) \right).
 \end{aligned}$$

Desse modo, para as superfícies cuja curvatura média na métrica conforme induzida é identicamente nula, ou seja as mínimas na métrica conforme, temos $H = g(\bar{\nabla} \phi, \nu)$, valendo também a recíproca. Agora, na nossa situação particular, em que $g = \langle, \rangle$ e $\phi = \frac{|x|^2}{4}$, obtemos $\tilde{H} = e^{\frac{|x|^2}{8}} \left(H - \langle \frac{x}{2}, \nu \rangle \right)$. Portanto, as mínimas para a métrica conforme $e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle, \rangle$ são as superfícies auto-similares redutoras no \mathbb{R}^{n+1} e vice-versa.

Aproveitando o ensejo e também porque nos será útil mais tarde, calculemos a norma ao quadrado da segunda forma fundamental com relação a métrica conforme \tilde{g} . Para os nossos propósitos, estaremos considerando Σ como uma superfície mínima na métrica

conforme induzida por \tilde{g} , ou seja, $H = g(\bar{\nabla}\phi, \nu)$.

$$\begin{aligned}
 |\tilde{A}|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \tilde{h}_{ij}^2 \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \left[e^{\frac{\phi}{n}} \left(h_{ij} - \frac{1}{n} \delta_{ij} g(\bar{\nabla}\phi, \nu) \right) \right]^2 \\
 &= e^{\frac{2\phi}{n}} \sum_{i,j=1}^n \left(h_{ij} - \frac{1}{n} \delta_{ij} g(\bar{\nabla}\phi, \nu) \right)^2 \\
 &= e^{\frac{2\phi}{n}} \sum_{i,j=1}^n \left(h_{ij}^2 + \frac{1}{n^2} \delta_{ij}^2 g^2(\bar{\nabla}\phi, \nu) - \frac{2}{n} h_{ij} \delta_{ij} g(\bar{\nabla}\phi, \nu) \right) \\
 &= e^{\frac{2\phi}{n}} \left(\sum_{i,j=1}^n h_{ij}^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}^2 g^2(\bar{\nabla}\phi, \nu) - \frac{2}{n} \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \delta_{ij} g(\bar{\nabla}\phi, \nu) \right) \\
 &= e^{\frac{2\phi}{n}} \left(|A|^2 + \frac{1}{n} g^2(\bar{\nabla}\phi, \nu) - \frac{2}{n} \sum_{i,j=1}^n \delta^{ij} h_{ij} g(\bar{\nabla}\phi, \nu) \right) \\
 &= e^{\frac{2\phi}{n}} \left(|A|^2 + \frac{1}{n} g^2(\bar{\nabla}\phi, \nu) - \frac{2}{n} H g(\bar{\nabla}\phi, \nu) \right) \\
 &= e^{\frac{2\phi}{n}} \left(|A|^2 - \frac{1}{n} H^2 \right).
 \end{aligned}$$

2.6 Alguns Exemplos

Apresentamos alguns exemplos de superfícies auto-similares redutoras abaixo.

Exemplo 2.6.1 (Plano). *O hiperplano P_0 do \mathbb{R}^n dado pelos pontos x tais que $x_{n+1} = 0$ admite o campo normal dado por $\nu \equiv 0$, logo $\langle x, \nu \rangle = 0$ para todo $x \in P_0$, e além disso, como o campo normal é constante, a curvatura média é nula, portanto $H = \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle$. Assim, do Lema 2.1, segue-se que P_0 é uma superfície auto-similar redutora.*

Exemplo 2.6.2 (Esferas). *A esfera $S^n(R)$, de centro na origem e raio R tem curvatura média dada por $H = \frac{n}{R}$, com a orientação dada por $\nu(x) = \frac{1}{R} \cdot x$. Portanto, para que satisfaça a equação $H = \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle$, devemos ter*

$$\frac{n}{R} = \frac{1}{2} \left\langle x, \frac{1}{R} x \right\rangle = \frac{R}{2}$$

donde segue que $R = \sqrt{2n}$.

Outro exemplo é o cilindro.

Exemplo 2.6.3 (Cilindro). *De modo análogo, os cilindros $C_n = S^{n-1}(R) \times \mathbb{R}$, tendo curvatura média dada por $H = \frac{n-1}{R}$ e em todo ponto vale $\langle x, \nu(x) \rangle = R$. Assim $H = \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle$ se, e somente se,*

$$\frac{n-1}{R} = \frac{1}{2} \cdot R$$

ou seja, $R = \sqrt{2(n-1)}$. Portanto, do Lema 2.1 tanto a esfera de centro na origem e raio $R = \sqrt{2n}$ quanto os cilindros de eixo x_{n+1} e raio $R = \sqrt{2(n-1)}$ são superfícies auto-similares redutoras.

A esfera de raio $\sqrt{2n}$ centrada na origem é um exemplo de hipersuperfície auto-similar redutora compacta e mergulhada. Já o cilindro de raio $\sqrt{2(n-1)}$ é um exemplo de superfície auto-similar redutora mergulhada e não compacta. Observe que esses dois últimos casos são de gênero 0.

Exemplo 2.6.4 (O Toro de Agenent). *Em [15], Agenent mostrou que para $n \geq 2$, existem mergulhos $X_n : S^1 \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ para os quais $X_n(p, t) = \sqrt{-t} \cdot F_n(p)$ é solução para o fluxo de curvatura média, portanto para $n = 2$ temos um toro, mergulhado. Esse é um exemplo de superfície auto-similar redutora compacta, mergulhada de gênero 1.*

Recentemente, D. Ketover em [16], mostrou por meios analíticos a existência de cinco novos exemplos de superfícies auto-similares redutoras mergulhadas no \mathbb{R}^3 , de gêneros 3, 5, 7, 11 e 19, cada uma delas com um certo tipo de simetria.

3 UMA CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES COMPACTAS AUTO-SIMILARES REDUTORAS

Nesta seção vamos provar o seguinte teorema, devido a G. Huisken, em [17].

Teorema 3.0.5 (Huisken). *Seja M^n , $n \geq 2$, uma hipersuperfície compacta, conexa, sem bordo, de curvatura média não-negativa em \mathbb{R}^{n+1} e tal que $H = \frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle$. Então M^n é uma esfera redonda.*

Começamos definindo o operador

$$\mathcal{L}u = \Delta_M u - \frac{1}{2}\langle x, \nabla_M u \rangle = e^{\frac{|x|^2}{4}} \operatorname{div}_M(e^{-\frac{|x|^2}{4}} \nabla_M u) \quad (3.1)$$

onde $u \in C^2(M)$, então vale o lema que segue para esse tipo de operador e usaremos esse resultado durante a prova do Teorema de Huisken.

Lema 3.1. *Se M^n é uma hipersuperfície conexa de \mathbb{R}^{n+1} sem bordo e u, v são funções definidas em M e de classe C^2 , então*

$$\int_M u(\mathcal{L}v)e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx = - \int_M \langle \nabla_M u, \nabla_M v \rangle e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx = \int_M v(\mathcal{L}u)e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx.$$

Demonstração. A prova é basicamente um trocadilho via o Teorema da Divergência. Note que estamos supondo nossa M sem bordo, então

$$\begin{aligned} \int_M u(\mathcal{L}v)e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx &= \int_M u e^{\frac{|x|^2}{4}} \operatorname{div}_M(e^{-\frac{|x|^2}{4}} \nabla_M v) e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx \\ &= \int_M \operatorname{div}_M(u e^{-\frac{|x|^2}{4}} \nabla_M v) - e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle \nabla_M u, \nabla_M v \rangle dx \\ &= 0 - \int_M \langle \nabla_M u, \nabla_M v \rangle e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx \\ &= - \int_M \langle \nabla_M u, \nabla_M v \rangle e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx \end{aligned}$$

agora fazemos o mesmo com $\int_M v(\mathcal{L}u)e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx$, e obtemos a prova do Lema. \square

Demonstração. 3.1 Na presente demonstração seguiremos a convenção da soma de Einstein e fatos elementares sobre tensores. Consideremos $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico em $p \in M$ e que seja também uma base ortonormal de $T_p M$. Temos,

$$H = \frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle$$

logo,

$$\begin{aligned}
 \nabla_{e_j} H &= \frac{1}{2} \cdot e_j \langle x, \nu \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \left(\langle \bar{\nabla}_{e_j} x, \nu \rangle + \langle x, \bar{\nabla}_{e_j} \nu \rangle \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\langle e_j, \nu \rangle + \langle x, h_{lj} e_l \rangle \right) \\
 &= \frac{1}{2} \langle x, e_l \rangle h_{lj}.
 \end{aligned}$$

Derivando outra vez,

$$\begin{aligned}
 \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} H &= \nabla_{e_i} \left(\frac{1}{2} \langle x, e_l \rangle h_{lj} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\langle e_j, e_l \rangle \cdot h_{lj} + \langle x, \bar{\nabla}_{e_i} e_l \rangle \cdot h_{lj} + \langle x, e_l \rangle \nabla_{e_i} h_{lj} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} h_{lj} + \langle x, (\bar{\nabla}_{e_i} e_l)^\top + \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_l, \nu \rangle \nu \rangle h_{lj} + \langle x, e_l \rangle \nabla_{e_i} h_{lj} \right) \quad (3.2) \\
 &= \frac{1}{2} \left(h_{ij} + \langle x, \nu \rangle \langle e_l, -\bar{\nabla}_{e_i} \nu \rangle h_{lj} + \langle x, e_l \rangle \nabla_{e_i} h_{lj} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(h_{ij} - 2H \langle e_l, h_{ki} e_k \rangle h_{lj} + \langle x, e_l \rangle \nabla_{e_i} h_{lj} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(h_{ij} - 2H \delta_{lk} h_{ki} h_{lj} + \langle x, e_l \rangle \nabla_{e_i} h_{lj} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(h_{ij} - 2H h_{li} h_{lj} + \langle x, e_l \rangle \nabla_{e_i} h_{lj} \right).
 \end{aligned}$$

em 3.2 usamos que $(\bar{\nabla}_{e_i} e_l)^\top = 0$, por $\{e_1, \dots, e_n\}$ ser um referencial geodésico. Como $h_{il} = h_{li}$ e valem as equações de Codazzi $\nabla_{e_i} h_{lj} = \nabla_{e_l} h_{ij} = \nabla_{e_j} h_{il}$ então

$$\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} H = \frac{1}{2} \left(h_{ij} - 2H h_{il} h_{lj} + \langle x, e_l \rangle \nabla_{e_l} h_{ij} \right). \quad (3.3)$$

Contraindo (3.3) com g^{ij} , vem

$$\begin{aligned}
 \Delta_M H &= g^{ij} \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} H \\
 &= \frac{1}{2} \left(g^{ij} h_{ij} - 2H g^{ij} h_{il} h_{lj} + \langle x, e_l \rangle \nabla_{e_l} g^{ij} h_{ij} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(H - 2H |A|^2 + \langle x, e_l \rangle \nabla_{e_l} H \right) \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

e contraindo (3.3) com h_{ij} , vem

$$\begin{aligned}
 h_{ij} \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} H &= \frac{1}{2} \left(h_{ij} h_{ij} - 2H h_{ij} h_{il} h_{lj} + \langle x, e_l \rangle h_{ij} \nabla_{e_l} h_{ij} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(|A|^2 - 2H \text{tr}(A^3) + \langle x, e_l \rangle h_{ij} \nabla_{e_l} h_{ij} \right). \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Levando (3.5) na identidade de Simon abaixo

$$\Delta_M |A|^2 = 2h_{ij} \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} H + 2|\nabla_M A|^2 + 2H \text{tr}(A^3) - 2|A|^4.$$

obtemos

$$\begin{aligned}\Delta_M |A|^2 &= \left(|A|^2 - 2H \text{tr}(A^3) + \langle x, e_l \rangle h_{ij} \bar{\nabla}_{e_l} h_{ij} \right) + 2|\nabla_M A|^2 \\ &\quad + 2H \text{tr}(A^3) - 2|A|^4 \\ &= |A|^2 + 2|\nabla_M A|^2 - 2|A|^4 + \langle x, e_l \rangle h_{ij} \nabla_{e_l} h_{ij}.\end{aligned}\quad (3.6)$$

De (3.4) e do princípio do máximo, tendo $\Delta_M H \leq \frac{1}{2} \left(H + \langle x, e_l \rangle \bar{\nabla}_{e_l} H \right)$, concluímos que $H > 0$. Assim, podemos calcular

$$\begin{aligned}\Delta_M \left(\frac{|A|^2}{H^2} \right) &= \frac{\Delta_M |A|^2}{H^2} + |A|^2 \Delta_M \frac{1}{H^2} + 2 \langle \nabla_M |A|^2, \nabla_M \frac{1}{H^2} \rangle \\ &= \frac{\Delta_M |A|^2}{H^2} + |A|^2 \Delta_M \frac{1}{H^2} - \frac{4}{H^3} (\nabla_M |A|^2)_i (\nabla_M H)_i\end{aligned}\quad (3.7)$$

onde $(\nabla_M |A|^2)_i = \langle \nabla_M |A|^2, e_i \rangle$ e $(\nabla_M H)_i = \langle \nabla_M H, e_i \rangle$. Tendo que

$$\Delta_M \frac{1}{H^2} = \frac{2}{H} \Delta_M \frac{1}{H} + \frac{2}{H^4} |\nabla_M H|^2$$

e

$$\Delta_M \frac{1}{H} = H \Delta_M \frac{1}{H^2} + \frac{1}{H^2} \Delta_M H - \frac{4}{H^3} |\nabla_M H|^2$$

obtemos

$$\Delta_M \frac{1}{H^2} = \frac{6|\nabla_M H|^2}{H^4} - \frac{2}{H^3} \Delta_M H$$

logo, levando a última igualdade na expressão (3.7), vem

$$\begin{aligned}\Delta_M \frac{|A|^2}{H^2} &= \frac{\Delta_M |A|^2}{H^2} + |A|^2 \left(\frac{6|\nabla_M H|^2}{H^4} - \frac{2}{H^3} \Delta_M H \right) - \frac{4}{H^3} (\nabla_M |A|^2)_i (\nabla_M H)_i \\ &= \frac{\Delta_M |A|^2}{H^2} + \frac{6|A|^2 |\nabla_M H|^2}{H^4} - \frac{2|A|^2}{H^3} \Delta_M H - \frac{4}{H^3} (\nabla_M |A|^2)_i (\nabla_M H)_i\end{aligned}$$

de (3.4) e (3.6) obtemos na igualdade acima,

$$\begin{aligned}\Delta_M \frac{|A|^2}{H^2} &= \frac{\Delta_M |A|^2}{H^2} + \frac{6|A|^2 |\nabla_M H|^2}{H^4} - \frac{2|A|^2}{H^3} \Delta_M H - \frac{4}{H^3} (\nabla_M |A|^2)_i (\nabla_M H)_i \\ &= \frac{1}{H^2} \left(|A|^2 + 2|\nabla_M A|^2 - 2|A|^4 + \langle x, e_l \rangle h_{ij} \nabla_{e_l} h_{ij} \right) + \frac{6|A|^2 |\nabla_M H|^2}{H^4} \\ &\quad - \frac{2|A|^2}{H^3} \left[\frac{1}{2} \left(H - 2H|A|^2 + \langle x, e_l \rangle \nabla_{e_l} H \right) \right] - \frac{4}{H^3} (\nabla_M |A|^2)_i (\nabla_M H)_i \\ &= \frac{|A|^2}{H^2} + \frac{2|\nabla_M A|^2}{H^2} - \frac{2|A|^4}{H^2} + \frac{1}{H^2} \langle x, e_l \rangle \nabla_{e_l} |A|^2 + \frac{6|A|^2 |\nabla_M H|^2}{H^4} \\ &\quad - \frac{|A|^2}{H^2} + \frac{2|A|^4}{H^2} - \frac{\langle x, e_l \rangle}{H^3} |A|^2 \nabla_{e_l} H - \frac{4}{H^3} (\nabla_M |A|^2)_i (\nabla_M H)_i \\ &= \frac{1}{H^4} \left(2H^2 |\nabla_M A|^2 + \frac{1}{2} H^2 \langle x, e_l \rangle \nabla_{e_l} |A|^2 + 6|A|^2 |\nabla_M H|^2 \right. \\ &\quad \left. - 4H (\nabla_M |A|^2)_i (\nabla_M H)_i \right) \\ &= \frac{2}{H^4} \left[\left(|A|^2 |\nabla_M H|^2 + H^2 |\nabla_M A|^2 - H \langle \nabla_M |A|^2, \nabla_M H \rangle \right) \right. \\ &\quad \left. - H \langle \nabla_M |A|^2, \nabla_M H \rangle + 2|A|^2 |\nabla_M H|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} H^2 \langle x, e_l \rangle (\nabla_M |A|^2)_l - \frac{1}{2} H |A|^2 \langle x, e_l \rangle (\nabla_M H)_l \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{H^4} \left\{ |A|^2 |\nabla_M H|^2 + H^2 |\nabla_M A|^2 - H \langle \nabla_M |A|^2, \nabla_M H \rangle \right\} \\
 &\quad + \frac{2}{H^4} \left(2 |A|^2 |\nabla_M H|^2 - H \langle \nabla_M |A|^2, \nabla_M H \rangle \right) \\
 &\quad + \frac{2}{H^4} \left(\frac{1}{4} H^2 \langle x, e_l \rangle (\nabla_M |A|^2)_l - \frac{1}{2} H |A|^2 \langle x, e_l \rangle (\nabla_M H)_l \right) \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

observe que

$$\left(\nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \right)_i = \frac{1}{H^2} \left(\nabla_M |A|^2 \right)_i - \frac{2}{H^3} |A|^2 \left(\nabla_M H \right)_i$$

logo,

$$\begin{aligned}
 -\frac{2}{H} \left(\nabla_M H \right)_i \left(\nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \right)_i &= -\frac{2}{H^3} \left(\nabla_M H \right)_i \left(\nabla_M |A|^2 \right)_i + \frac{4}{H^4} |A|^2 |\nabla_M H|^2 \\
 &= \frac{2}{H^4} \left(-H \langle \nabla_M H, \nabla_M |A|^2 \rangle + 2 |A|^2 |\nabla_M H|^2 \right)
 \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \langle x, e_l \rangle \left(\nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \right)_l &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H^2} \langle x, e_l \rangle \left(\nabla_M |A|^2 \right)_l - \frac{2}{H^3} |A|^2 \langle x, e_l \rangle \left(\nabla_M H \right)_l \right) \\
 &= \frac{2}{H^4} \left(\frac{1}{4} H^2 \langle x, e_l \rangle \left(\nabla_M |A|^2 \right)_l - \frac{H}{2} |A|^2 \langle x, e_l \rangle \left(\nabla_M H \right)_l \right)
 \end{aligned}$$

além disso, temos

$$\begin{aligned}
 \left| h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_l - H \cdot \nabla_{e_l} h_{ij} \right|^2 &= h_{ij} (\nabla_M H)_l h_{ij} (\nabla_M H)_l + (H \nabla_{e_l} h_{ij}) \cdot (H \nabla_{e_l} h_{ij}) \\
 &\quad - 2 h_{ij} (\nabla_M H)_l \cdot H \nabla_{e_l} h_{ij} \\
 &= h_{ij} h_{ij} (\nabla_M H)_l (\nabla_M H)_l + H^2 \nabla_{e_l} h_{ij} \nabla_{e_l} h_{ij} \\
 &\quad - H (\nabla_M H)_l (\nabla_M |A|^2)_l \\
 &= |A|^2 |\nabla_M H|^2 + H^2 |\nabla_M A|^2 - H \langle \nabla_M H, \nabla_M |A|^2 \rangle
 \end{aligned}$$

portanto, (3.8) pode ser reescrita como segue

$$\begin{aligned}
 \Delta_M \frac{|A|^2}{H^2} &= \frac{2}{H^4} \left| h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_l - H \cdot \nabla_{e_l} h_{ij} \right|^2 - \frac{2}{H} \left(\nabla_M H \right)_i \left(\nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \right)_i \\
 &\quad + \frac{1}{2} \langle x, e_l \rangle \left(\nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \right)_l \\
 &= \frac{2}{H^4} \left| h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_l - H \cdot \nabla_{e_l} h_{ij} \right|^2 - \frac{2}{H} \langle \nabla_M H, \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2} \langle x, \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \rangle.
 \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1 podemos pôr $\mathcal{L}\left(\frac{|A|^2}{H^2}\right) = \Delta_M\left(\frac{|A|^2}{H^2}\right) - \frac{1}{2}\langle x, \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \rangle$ e obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} & \int_M |A|^2 \left(\mathcal{L}\left(\frac{|A|^2}{H^2}\right) + \frac{2}{H} \langle \nabla_M H, \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \rangle \right) e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv \\ &= \int_M |A|^2 \mathcal{L}\left(\frac{|A|^2}{H^2}\right) e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv + \int_M \frac{2|A|^2}{H} \langle \nabla_M H, \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \rangle e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv \\ &= - \int_M \langle \nabla_M |A|^2, \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \rangle e^{-\frac{|x|^2}{4}} + \int_M \frac{2|A|^2}{H} \langle \nabla_M H, \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \rangle e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv \\ &= \int_M \left\langle \frac{2|A|^2}{H} \nabla_M H - \nabla_M |A|^2, \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \right\rangle e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv \\ &= \int_M -H^2 \langle \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2}, \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \rangle e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv \end{aligned}$$

ou seja

$$\int_M |A|^2 \left(\mathcal{L}\left(\frac{|A|^2}{H^2}\right) + \frac{2}{H} \langle \nabla_M H, \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \rangle \right) e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv + \int_M H^2 \left| \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \right|^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv = 0.$$

Note, além disso, que a própria definição do operador \mathcal{L} nos dá

$$|A|^2 \left(\mathcal{L}\left(\frac{|A|^2}{H^2}\right) + \frac{2}{H} \langle \nabla_M H, \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \rangle \right) = \frac{2|A|^2}{H^4} \left| h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_i - H \nabla_{e_i} h_{ij} \right|^2$$

assim, segue que

$$\int_M \frac{2|A|^2}{H^4} \left| h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_i - H \nabla_{e_i} h_{ij} \right|^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv + \int_M H^2 \left| \nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} \right|^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv = 0$$

veja que ambas as integrais do lado esquerdo da igualdade acima são não negativas, ainda mais, como já temos que $H > 0$, então não podemos ter $|A|^2 = 0$ porque isso implicaria $H = 0$, daí devemos ter $\nabla_M \frac{|A|^2}{H^2} = 0$ e também $\left| h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_i - H \nabla_{e_i} h_{ij} \right|^2 = 0$. Sendo nossa hipersuperfície M conexa, obtemos que $|A|^2 = \alpha H^2$, onde α é alguma constante positiva.

Decompondo $\left| h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_i - H \nabla_{e_i} h_{ij} \right|^2$ em soma direta da sua parte simétrica com a sua parte anti-simétrica, ficamos com o seguinte:

$$\begin{aligned} 0 &= \left| h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_i - H \nabla_{e_i} h_{ij} \right|^2 \\ &= \left| \nabla_{e_i} h_{ij} H - \frac{1}{2} \left(h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_i + h_{il} \left(\nabla_M H \right)_j \right) - \frac{1}{2} \left(h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_i - h_{il} \left(\nabla_M H \right)_j \right) \right|^2 \\ &= \left| \nabla_{e_i} h_{ij} H - \frac{1}{2} \left(h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_i + h_{il} \left(\nabla_M H \right)_j \right) \right|^2 + \frac{1}{4} \left| h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_i - h_{il} \left(\nabla_M H \right)_j \right|^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \left| h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_i - h_{il} \left(\nabla_M H \right)_j \right|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde vem

$$\left| h_{ij} \left(\nabla_M H \right)_i - h_{il} \left(\nabla_M H \right)_j \right|^2 = 0.$$

Agora, rotacionando $\{e_1, \dots, e_n\}$ de modo que $e_1 = \frac{\nabla_M H}{|\nabla_M H|}$, ficamos com

$$(\nabla_M H)_i = \begin{cases} |\nabla_M H| & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i \neq 1 \end{cases}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left| h_{ij}(\nabla_M H)_l - h_{il}(\nabla_M H)_j \right|^2 = h_{ij}(\nabla_M H)_l \cdot h_{ij}(\nabla_M H)_l + h_{il}(\nabla_M H)_j \cdot h_{il}(\nabla_M H)_j \\ &\quad - 2h_{ij}(\nabla_M H)_l \cdot h_{il}(\nabla_M H)_j \\ &= 2|A|^2 \cdot |\nabla_M H|^2 - 2h_{ij} \cdot h_{il}(\nabla_M H)_l \cdot (\nabla_M H)_j. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agora, sem a convenção de Einstein e utilizando o fato de que $(\nabla_M H)_1 = |\nabla_M H|$ e $(\nabla_M H)_j = 0$, $j \neq 1$, e igualmente para l , percebemos que a segunda parcela da igualdade (3.9) acima pode ser reescrita como segue

$$-2 \sum_{i,j,l} h_{ij} \cdot h_{il}(\nabla_M H)_l \cdot (\nabla_M H)_j = -2 \sum_i h_{i1}^2 |\nabla_M H|^2$$

logo, reescrevemos (3.9) do seguinte modo

$$0 = \left| h_{ij}(\nabla_M H)_l - h_{il}(\nabla_M H)_j \right|^2 = 2|\nabla_M H|^2 \cdot \left| |A|^2 - \sum_i h_{i1}^2 \right|^2$$

assim, em cada ponto de M , temos $\nabla_M H = 0$ ou $|A|^2 = \sum_i h_{i1}^2$. Se for o caso de $\nabla_M H \equiv 0$, então a curvatura média é constante, e o Teorema de Alexandrov nos diz que M é uma esfera redonda. Então, vamos supor que existe um ponto em M tal que $\nabla_M H \neq 0$ logo, nesse ponto teremos $|A|^2 = \sum_{i=1}^n h_{i,1}^2 = h_{1,1}^2 + \sum_{i=2}^n h_{i,1}^2$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \sum_{ij} h_{ij}^2 \\ &= h_{11}^2 + \sum_{i=2}^n h_{i1}^2 + \sum_{j=2}^n h_{1j}^2 + \sum_{i,j \neq 1}^n h_{ij}^2 \\ &= h_{11}^2 + 2 \sum_{i=2}^n h_{i1}^2 + \sum_{i,j \neq 1}^n h_{ij}^2 \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\sum_{i=2}^n h_{i1}^2 + \sum_{i,j \neq 1}^n h_{ij}^2 = 0$$

que só é possível quando $h_{ij} = 0$, para todo par $(i, j) \neq (1, 1)$. Desse modo, temos que $|A|^2 = h_{11}^2 = H^2$. Como já temos $|A|^2 = \alpha \cdot H^2$ em todo ponto de M , segue-se que $\alpha = 1$, logo $|A|^2 = H^2$ em todo ponto de M . Portanto, integrando (3.4) e usando o Teorema da Divergência, vem

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \Delta_M H \\ &= \frac{1}{2} \int_M H - 2|A|^2 H + \langle x, e_l \rangle \bar{\nabla}_{e_l} H dv \\ &= \frac{1}{2} \int_M H - 2H^3 + \langle x, e_l \rangle \bar{\nabla}_{e_l} H dv. \end{aligned}$$

o que nos dá

$$2 \int_M H^3 dv = \int_M H + \langle x, e_l \rangle \bar{\nabla}_{e_l} H dv \quad (3.10)$$

$$= \int_M H dv - \int_M H (\langle \bar{\nabla}_{e_l} x, e_l \rangle + \langle x, \bar{\nabla}_{e_l} e_l \rangle) dv \quad (3.11)$$

$$= \int_M H dv - \int_M H (\langle e_l, e_l \rangle + \langle x, (\bar{\nabla}_{e_l} e_l)^\top + \langle \bar{\nabla}_{e_l} e_l, \nu \rangle \nu \rangle) dv \quad (3.12)$$

$$= \int_M H dv - \int_M H (n + \langle x, 0 + \langle \bar{\nabla}_{e_l} e_l, \nu \rangle \nu \rangle) dv \quad (3.13)$$

$$= \int_M H dv - \int_M H (n + \langle x, -\langle e_l, \bar{\nabla}_{e_l} \nu \rangle \nu \rangle) dv$$

$$= \int_M H dv - n \int_M H dv + \int_M H \langle x, \langle e_l, e_k \rangle h_{kl} \nu \rangle dv$$

$$= (1 - n) \int_M H dv + \int_M H \langle x, \langle e_l, e_k \rangle h_{kl} \nu \rangle dv$$

$$= (1 - n) \int_M H dv + \int_M H \langle x, \nu \rangle \delta_{kl} h_{kl} dv \quad (3.14)$$

$$= (1 - n) \int_M H dv + \int_M 2H^3 dv \quad (3.15)$$

de (3.10) para (3.11) usamos integração por partes, onde o termo de bordo é nulo, pois M tem bordo vazio. De (3.12) para (3.13) usamos o fato de $\{e_1, \dots, e_n\}$ ser um referencial geodésico. De (3.14) para (3.15) usamos o fato de $H = \sum_{kl} g^{kl} h_{kl} = \sum_{kl} \delta^{kl} h_{kl}$ (ou ainda, $H = \delta^{kl} h_{kl}$ na convenção de Einstein) e o fato de M ser auto-similar redutora, ou seja, $H = \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle$. Assim, como $n \geq 2$, obtemos

$$\int_M H dv = 0$$

uma contradição, pois estamos supondo $H > 0$ em todo ponto de M . Então, de fato, M é uma esfera redonda. \square

3.1 O Caso de Gênero Zero

Agora que já temos em mãos o Teorema do Huisken, vamos preparar o terreno para a prova do Teorema do Brendle, cujo o enunciado é o seguinte

Teorema 3.1.1 (Brendle). *Seja M superfície mergulhada no \mathbb{R}^3 , compacta, de gênero 0 e auto-similar redutora, então M é uma esfera redonda.*

Lembremos que $\mathcal{L}f = \Delta_\Sigma f - \frac{1}{2} \langle x, \nabla_\Sigma f \rangle$, para qualquer $f \in C^\infty(\Sigma)$. A seguir veremos uma expressão útil para escrever este operador:

Lema 3.2. *Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e seja f a restrição de F à superfície auto-similar redutora Σ . Então*

$$\mathcal{L}f = \sum_{i=1}^2 (\bar{D}^2 F)(e_i, e_i) - \frac{1}{2} \langle x, \bar{\nabla} F \rangle.$$

Demonstração. Temos $\nabla_\Sigma f = \bar{\nabla}F - \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle \nu$, e de (1.3), $\Delta_\Sigma f = \sum_i (\nabla^2 f)(e_i, e_i)$, com $i = 1, 2$. Também de (1.5), temos $(\nabla^2 f)(v, w) = \bar{D}^2 F(v, w) - \langle d\nu(v), w \rangle \cdot \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle$, para quaisquer $v, w \in T_p \Sigma$, logo

$$\begin{aligned}
 \Delta_\Sigma f &= \sum_{i=1}^2 (\nabla^2 F)(e_i, e_i) \\
 &= \sum_{i=1}^2 (\bar{D}^2 F(e_i, e_i) - \langle d\nu(e_i), e_i \rangle \cdot \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle) \\
 &= \sum_{i=1}^2 (\bar{D}^2 F(e_i, e_i)) - \sum_{i=1}^2 \langle d\nu(e_i), e_i \rangle \cdot \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^2 (\bar{D}^2 F(e_i, e_i)) - \sum_{i=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, e_i \rangle \cdot \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^2 (\bar{D}^2 F(e_i, e_i)) - \operatorname{div}_\Sigma \nu \cdot \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^2 (\bar{D}^2 F(e_i, e_i)) - H \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^2 (\bar{D}^2 F(e_i, e_i)) - \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle \tag{3.17}$$

de (3.16) para (3.17) utilizamos o fato de que Σ é auto-similar redutora, i.e, $H = \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle$. Agora, escrevemos

$$\begin{aligned}
 \langle x, \nabla_\Sigma f \rangle &= \left\langle \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i + \langle x, \nu \rangle \nu, \nabla_\Sigma f \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i, \nabla_\Sigma f \right\rangle \\
 &= \left\langle \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i, \bar{\nabla}F - \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle \nu \right\rangle \\
 &= \sum_i \langle x, e_i \rangle \langle e_i, \bar{\nabla}F - \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle \nu \rangle \\
 &= \sum_i \langle x, e_i \rangle \langle e_i, \bar{\nabla}F \rangle.
 \end{aligned}$$

Então, obtemos o que segue

$$\begin{aligned}
 \Delta_\Sigma f - \frac{1}{2} \langle x, \nabla_\Sigma f \rangle &= \sum_{i=1}^2 (\bar{D}^2 F(e_i, e_i)) - \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle - \frac{1}{2} \sum \langle x, e_i \rangle \langle e_i, \bar{\nabla}F \rangle \\
 &= \sum_{i=1}^2 (\bar{D}^2 F(e_i, e_i)) - \frac{1}{2} (\langle x, \nu \rangle \langle \bar{\nabla}F, \nu \rangle + \sum \langle x, e_i \rangle \langle e_i, \bar{\nabla}F \rangle) \\
 &= \sum_{i=1}^2 (\bar{D}^2 F(e_i, e_i)) - \frac{1}{2} \langle x, \bar{\nabla}F \rangle
 \end{aligned}$$

como queríamos. □

Consideremos uma superfície auto-similar redutora cujo bordo está contido em um plano, nessa situação poderemos utilizar a função altura como uma função teste na desigualdade de estabilidade. Usaremos o operador de Jacobi definido em (2.1).

Proposição 3.1.2. *Seja Σ uma superfície em \mathbb{R}^3 compacta, com fronteira $\partial\Sigma = \Gamma \subset \{\langle a, x \rangle = 0\}$, para algum vetor unitário $a \in \mathbb{R}^3$. Para cada $k \geq 4$, suponhamos que $H = \frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle$ em $\Sigma \cap \{|x| \leq k\}$ e suponhamos também que*

$$0 \leq - \int_{\Sigma} f Lf e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv$$

para toda função f que se anula em $\Gamma \cup (\Sigma \cap \{|x| \geq k\})$. Então, vale a desigualdade seguinte

$$\int_{\Sigma \cap \{|x| \leq \sqrt{k}\}} |A|^2 \langle a, x \rangle e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv \leq \frac{C}{\log k} \int_{\Sigma \cap \{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv$$

onde C é uma constante que não depende de k .

Demonstração. Seja $\eta : (-\infty, \infty) \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo $\eta = 1$ em $(-\infty, \frac{1}{2}]$, $\eta = 0$ em $[1, \infty)$ e $\eta' \leq 0$ em $(-\infty, \infty)$. Para cada $k \geq 4$ em \mathbb{N} , definamos uma função suave como segue

$$F_k(x) = \langle a, x \rangle \eta\left(\frac{\log |x|}{\log k}\right).$$

É fácil ver que se $x \in \Gamma$, então como $\Gamma \subset \{\langle a, x \rangle = 0\}$ vem $F(x) = 0 \cdot \eta\left(\frac{\log |x|}{\log k}\right) = 0$ e se for o caso de termos $|x| \geq k$, obtemos que $\log |x| \geq \log k$ que implica $\frac{\log |x|}{\log k} \geq 1$, donde segue que $\eta\left(\frac{\log |x|}{\log k}\right) = 0$. Portanto, nossa F_k satisfaz a hipótese de se anular em $\Gamma \cup (\Sigma \cap \{|x| \geq k\})$. Agora, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\langle a, x \rangle) \cdot \eta\left(\frac{\log |x|}{\log k}\right) + \langle a, x \rangle \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \eta\left(\frac{\log |x|}{\log k}\right) \\ &= a_i \cdot \eta\left(\frac{\log |x|}{\log k}\right) + \frac{\langle a, x \rangle}{\log k} \eta'\left(\frac{\log |x|}{\log k}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\log |x|) \\ &= a_i \cdot \eta\left(\frac{\log |x|}{\log k}\right) + \frac{\langle a, x \rangle}{\log k} \eta'\left(\frac{\log |x|}{\log k}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\log |x|) \\ &= a_i \cdot \eta\left(\frac{\log |x|}{\log k}\right) + \frac{\langle a, x \rangle}{\log k} \eta'\left(\frac{\log |x|}{\log k}\right) \frac{1}{|x|} \cdot \frac{x_i}{|x|} \\ &= a_i \cdot \eta\left(\frac{\log |x|}{\log k}\right) + \frac{\langle a, x \rangle}{\log k} \eta'\left(\frac{\log |x|}{\log k}\right) \frac{x_i}{|x|^2} =: \beta_i \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned}
 \langle x, \bar{\nabla} F_k \rangle &= \sum_{i=1}^3 x_i \beta_i \\
 &= \left(\sum_{i=1}^3 a_i x_i \right) \eta \left(\frac{\log |x|}{\log k} \right) + \frac{\langle a, x \rangle}{|x|^2 \log k} \eta' \left(\frac{\log |x|}{\log k} \right) \sum_{i=1}^3 x_i x_i \\
 &= \langle a, x \rangle \eta \left(\frac{\log |x|}{\log k} \right) + \frac{\langle a, x \rangle}{|x|^2 \log k} \eta' \left(\frac{\log |x|}{\log k} \right) \langle x, x \rangle \\
 &= \langle a, x \rangle \eta \left(\frac{\log |x|}{\log k} \right) + \frac{\langle a, x \rangle}{\log k} \eta' \left(\frac{\log |x|}{\log k} \right) \\
 &= F_k + \frac{\langle a, x \rangle}{\log k} \eta' \left(\frac{\log |x|}{\log k} \right).
 \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_i}(x) &= \left(\frac{a_i}{\log k} \frac{x_j}{|x|^2} + \frac{a_j}{\log k} \frac{x_i}{|x|^2} - \frac{2\langle a, x \rangle x_i x_j}{\log k |x|^4} \right) \eta' \left(\frac{\log |x|}{\log k} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{2\langle a, x \rangle x_i x_j}{\log^2 k |x|^4} \right) \eta'' \left(\frac{\log |x|}{\log k} \right).
 \end{aligned}$$

Como em $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$ temos $\eta' \equiv 0$ e em $[\frac{1}{2}, 1]$, que é um compacto, temos $\eta' \neq 0$, então $|\eta'(t)| \leq \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} C_1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, onde C_1 é o maior valor de η' em $[\frac{1}{2}, 1]$. Analogamente, temos $\eta^{(\ell)} \in C^\infty$, para qualquer $\ell \in \mathbb{N}$; possui máximo e mínimo em $[\frac{1}{2}, 1]$ e fora desse compacto é nula, então $|\eta^{(\ell)}(t)| \leq \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} C_\ell$, para todo $t \in \mathbb{R}$, onde C_ℓ é o máximo de $\eta^{(\ell)}$ em $[\frac{1}{2}, 1]$. Note que os C_ℓ s não dependem de k . Portanto, usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right| &\leq \left(\left| \frac{a_i}{\log k} \right| \frac{|x|}{|x|^2} + \left| \frac{a_j}{\log k} \right| \frac{|x|}{|x|^2} + \frac{2|x||a|}{\log k} \frac{|x|^2}{|x|^4} \right) \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} C_1 \\
 &\quad + \frac{|a||x|}{\log^2 k} \frac{|x||x|}{|x|^4} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} C_2.
 \end{aligned}$$

Tomando $\tilde{C} = \max\{C_1, C_2\}$, podemos escrever

$$\left| \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right| \leq \left[\left(\left| \frac{a_i}{\log k} \right| \frac{1}{|x|} + \left| \frac{a_j}{\log k} \right| \frac{1}{|x|} + \frac{2|a|}{\log k} \frac{1}{|x|} \right) + \frac{|a|}{\log^2 k} \frac{1}{|x|} \right] \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} \tilde{C}$$

como, $|a_m| \leq |a|$ (para todo $m = 1, 2, 3$), $k \geq 4$ e a função \log é crescente, com $\log 4 > 1$, então vem $\log k \geq \log 4 > 1$, o que nos dá $\log^2 k > \log k$, portanto $\frac{1}{\log^2 k} < \frac{1}{\log k}$. Assim, obtemos

$$\left| \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right| \leq \frac{5|a|}{\log k} \frac{1}{|x|} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} \tilde{C}$$

ou apenas

$$\left| \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_i}(x) \right| \leq \frac{C}{\log k} \frac{1}{|x|} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}}$$

com C constante que não depende de k , pois $C = 5|a|\tilde{C}$, e \tilde{C} não dependem do k . Assim, como $|\bar{D}^2 F_k| \leq \max_{i,j,k} \left\{ \left| \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_j \partial x_i} \right| \right\}$, temos que

$$|\bar{D}^2 F_k| \leq \frac{C}{\log k} \frac{1}{|x|} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}}.$$

Agora, observe que F_k nos dá o seguinte

$$\begin{aligned} |F_k| &= \left| \langle a, x \rangle \eta \left(\frac{\log |x|}{\log k} \right) \right| \\ &\leq |a||x||\eta| = 1|x|1 = |x|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|F_k| |\bar{D}^2 F_k| \leq |x| \frac{1}{\log k} \frac{C}{|x|} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}},$$

ou seja,

$$|F_k| |\bar{D}^2 F_k| \leq \frac{C}{\log k} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}}.$$

Seja $f_k : \Sigma \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a restrição de F_k à superfície Σ (compacta, o que nos dá f_k limitada). Do Lema 3.2, tendo $\mathcal{L}f = \Delta_\Sigma f - \frac{1}{2} \langle x, \nabla_\Sigma f \rangle$, onde f é a restrição de uma $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre Σ , obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} -f_k \mathcal{L}f_k &= -F_k \sum_{i=1}^2 \left(\bar{D}^2 F_k \right) (e_i, e_i) + \frac{1}{2} F_k \langle x, \bar{\nabla} F_k \rangle \\ &= -F_k \sum_{i=1}^2 \left(\bar{D}^2 F_k \right) (e_i, e_i) + \frac{1}{2} F_k \left(F_k + \frac{1}{\log k} \eta' \left(\frac{\log |x|}{\log k} \right) \right) \\ &= -F_k \sum_{i=1}^2 \left(\bar{D}^2 F_k \right) (e_i, e_i) + \frac{1}{2} F_k^2 + \frac{1}{2} \langle a, x \rangle \eta \left(\frac{\log |x|}{\log k} \right) \eta' \left(\frac{\log |x|}{\log k} \right) \end{aligned}$$

visto que estamos restringindo os valores de F_k a Σ , portanto podemos considerar $F_k = f_k$, nas contas anteriores. Além do que $\eta' \leq 0$ e $0 \leq \eta \leq 1$, donde temos $\eta \cdot \eta' \leq 0$ e, ainda mais, $\sum_{i=1}^2 \left(\bar{D}^2 F_k \right) \leq |\bar{D}^2 F_k|$, então

$$\begin{aligned} -f_k \mathcal{L}f_k &\leq -F_k \sum_{i=1}^2 \left(\bar{D}^2 F_k \right) (e_i, e_i) + \frac{1}{2} F_k^2 \\ &\leq -F_k |\bar{D}^2 F_k| + \frac{1}{2} F_k^2 \\ &\leq |F_k| |\bar{D}^2 F_k| + \frac{1}{2} F_k^2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$-f_k \mathcal{L}f_k \leq \frac{C}{\log k} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} + \frac{1}{2} f_k^2.$$

Observe que

$$\begin{aligned} Lf &= \Delta_\Sigma f - \frac{1}{2} \langle x, \nabla_\Sigma f \rangle + |A|^2 f + \frac{1}{2} f \\ &= \mathcal{L}f + |A|^2 f + \frac{1}{2} f \end{aligned}$$

para toda $f \in C^\infty(\Sigma)$ por conseguinte, obtemos

$$-\mathcal{L}f = -Lf + |A|^2 f + \frac{1}{2} f$$

donde vem

$$\begin{aligned} -f_k Lf_k + |A|^2 f_k^2 + \frac{1}{2} f_k^2 &= -f_k \mathcal{L}f_k \\ &\leq \frac{C}{\log k} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} + \frac{1}{2} f_k^2 \end{aligned}$$

nos dando a seguinte desigualdade

$$-f_k Lf_k \leq \frac{C}{\log k} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} - |A|^2 f_k^2.$$

Como $e^{\frac{-|x|^2}{4}} > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$, podemos multiplicar ambos os lados da última desigualdade por essa Gaussiana, para obtermos

$$-f_k Lf_k e^{\frac{-|x|^2}{4}} \leq \frac{C}{\log k} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} e^{\frac{-|x|^2}{4}} - |A|^2 f_k^2 e^{\frac{-|x|^2}{4}}.$$

Assim,

$$-\int_\Sigma f_k Lf_k e^{\frac{-|x|^2}{4}} \leq \int_\Sigma \frac{C}{\log k} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} e^{\frac{-|x|^2}{4}} - \int_\Sigma |A|^2 f_k^2 e^{\frac{-|x|^2}{4}}.$$

Usando a desigualdade de estabilidade na desigualdade acima

$$0 \leq -\int_\Sigma f_k Lf_k e^{\frac{-|x|^2}{4}}$$

nós temos

$$0 \leq \int_\Sigma \frac{C}{\log k} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} e^{\frac{-|x|^2}{4}} - \int_\Sigma |A|^2 f_k^2 e^{\frac{-|x|^2}{4}},$$

ou ainda,

$$\int_\Sigma |A|^2 f_k^2 e^{\frac{-|x|^2}{4}} \leq \int_\Sigma \frac{C}{\log k} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} e^{\frac{-|x|^2}{4}}.$$

Note que a integral no lado direito acima pode ser reescrita como segue

$$\int_\Sigma \frac{C}{\log k} \mathcal{X}_{\{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} e^{\frac{-|x|^2}{4}} = \frac{C}{\log k} \int_{\Sigma \cap \{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} e^{\frac{-|x|^2}{4}}$$

então, obtemos:

$$\int_{\Sigma \cap \{|x| \leq \sqrt{k}\}} |A|^2 f_k^2 e^{\frac{-|x|^2}{4}} \leq \int_\Sigma |A|^2 f_k^2 e^{\frac{-|x|^2}{4}} \leq \frac{C}{\log k} \int_{\Sigma \cap \{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} e^{\frac{-|x|^2}{4}}.$$

Sabemos que em $\Sigma \cap \{|x| \leq \sqrt{k}\}$, $f_k = \langle a, x \rangle \eta\left(\frac{\log|x|}{\log k}\right)$, com $|x| \leq \sqrt{k}$ o que implica $\frac{\log|x|}{\log k} \leq \frac{1}{2}$, donde $\eta\left(\frac{\log|x|}{\log k}\right) = 1$, logo $f_k^2 = \langle a, x \rangle^2$, assim, finalmente, vem:

$$\int_{\Sigma \cap \{|x| \leq \sqrt{k}\}} |A|^2 \langle a, x \rangle^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}} \leq \frac{C}{\log k} \int_{\Sigma \cap \{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$$

como queríamos. \square

Agora vamos à demonstração do Teorema 3.1.1. Supomos que M não é uma esfera redonda, então pelo Teorema 3.1 a curvatura média de M deve mudar de sinal. Em particular, deve existir um $\bar{x} \in M$ tal que $H(\bar{x}) = 0$. Como M é auto-similar redutora, então $\langle \bar{x}, \nu(\bar{x}) \rangle = 0$. Portanto, tomamos $a = \nu(\bar{x})$ e consideramos o plano $P_a := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, a \rangle = 0\}$, note que $\bar{x} \in M \cap P_a$. O conjunto $Z := M \cap P_a$ tem sua estrutura descrita no lema logo abaixo.

Lema 3.3. *Seja a um vetor unitário do \mathbb{R}^3 , e $f(x) := \langle a, x \rangle$. Então o conjunto $Z = \{x \in M; f(x) = 0\}$ é a união finita de arcos de classe C^1 , que se intersectam em pontos isolados. Mais precisamente, para cada ponto $x_0 \in Z$, existe um aberto U em M , vizinhança de $x_0 \in Z$, tal que $Z \cap U$ é a união de uma quantidade finita m de arcos C^1 que se intersectam transversalmente em x_0 . A quantidade m é caracterizada como ordem de anulamento de f em x_0 .*

Demonstração. Note que, como $f(x) = \langle a, x \rangle$, então, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$, onde a_i é i -ésima coordenada de a . Assim, temos $\bar{\nabla} f = a$, e $df(x).v = \langle v, a \rangle$, com $v \in T_x M$, portanto tanto $f(\bar{x}) = 0$ quanto $df(\bar{x}).\bar{x} = 0$. E, desse modo, obtemos $\bar{D}^2 f = 0$, pois $d\bar{\nabla} f \equiv 0$. Então, por conta do Lema 3.2, segue-se que:

$$\Delta_M f - \frac{1}{2} \langle x, \nabla_M f \rangle = \sum_i (\bar{D}^2 f)(e_i, e_i) - \frac{1}{2} \langle x, \bar{\nabla} f \rangle = -\frac{1}{2} \langle x, \bar{\nabla} f \rangle = -\frac{1}{2} \langle x, a \rangle = -\frac{1}{2} f$$

portanto,

$$\Delta_M f = \frac{1}{2} \langle x, \nabla_M f \rangle - \frac{1}{2} f.$$

Assim, utilizando o resultado $\Delta_M(f.g) = g\Delta_M f + f\Delta_M g + 2\langle \nabla_M f, \nabla_M g \rangle$, que vale para quaisquer $f, g \in C^2(M)$, em particular para a f dada no enunciado e g dada por $g(x) = e^{-\frac{|x|^2}{8}}$, vem

$$\begin{aligned} \Delta_M \left(e^{-\frac{|x|^2}{8}} f \right) &= e^{-\frac{|x|^2}{8}} \Delta_M f + f \Delta_M \left(e^{-\frac{|x|^2}{8}} \right) + 2 \langle \nabla_M f, \nabla_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} \rangle \\ &= e^{-\frac{|x|^2}{8}} \left(\frac{1}{2} \langle x, \nabla_M f \rangle - \frac{1}{2} f \right) + f \Delta_M \left(e^{-\frac{|x|^2}{8}} \right) + 2 \langle \nabla_M f, \nabla_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} \rangle \\ &= f \Delta_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} f + \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \langle x, \nabla_M f \rangle + 2 \langle \nabla_M f, \nabla_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} \rangle \\ &= \left(\Delta_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \right) \cdot f + \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \langle x, \nabla_M f \rangle + 2 \langle \nabla_M f, \nabla_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} \rangle \\ &= \left(e^{\frac{|x|^2}{8}} \Delta_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} - \frac{1}{2} \right) \cdot f e^{-\frac{|x|^2}{8}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \langle x, \nabla_M f \rangle + 2 \langle \nabla_M f, \nabla_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} \rangle. \end{aligned}$$

Definindo $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, como $h(x) = e^{\frac{|x|^2}{8}} \Delta_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} - \frac{1}{2}$, podemos escrever

$$\Delta_M \left(e^{-\frac{|x|^2}{8}} f \right) = h \cdot e^{-\frac{|x|^2}{8}} f + \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \langle x, \nabla_M f \rangle + 2 \langle \nabla_M f, \nabla_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} \rangle$$

A expressão $\frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \langle x, \nabla_M f \rangle + 2 \langle \nabla_M f, \nabla_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} \rangle$ é identicamente nula. Com efeito, temos que $\nabla_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} = \bar{\nabla} e^{-\frac{|x|^2}{8}} - \langle \bar{\nabla} e^{-\frac{|x|^2}{8}}, \nu \rangle \nu$ então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \langle x, \nabla_M f \rangle + 2 \langle \nabla_M f, \nabla_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} \rangle &= \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \langle x, \nabla_M f \rangle \\ &\quad + 2 \langle \nabla_M f, \bar{\nabla} e^{-\frac{|x|^2}{8}} - \langle \bar{\nabla} e^{-\frac{|x|^2}{8}}, \nu \rangle \nu \rangle \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \langle x, \nabla_M f \rangle + 2 \langle \nabla_M f, \bar{\nabla} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_M f, \nu \rangle \cdot \langle \bar{\nabla} e^{-\frac{|x|^2}{8}}, \nu \rangle \end{aligned}$$

mas $\nabla_M f \in T_x M$, e $\nu \in (T_x M)^\perp$, logo, $\langle \nabla_M f, \nu \rangle = 0$ e $\bar{\nabla} e^{-\frac{|x|^2}{8}} = -\frac{1}{4} x e^{-\frac{|x|^2}{8}}$ por isso, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \langle x, \nabla_M f \rangle + 2 \langle \nabla_M f, \nabla_M e^{-\frac{|x|^2}{8}} \rangle &= \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \langle x, \nabla_M f \rangle + 2 \langle \bar{\nabla} e^{-\frac{|x|^2}{8}}, \nabla_M f \rangle \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \langle x, \nabla_M f \rangle + 2 \langle -\frac{1}{4} x \cdot e^{-\frac{|x|^2}{8}}, \nabla_M f \rangle \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \langle x, \nabla_M f \rangle - \frac{1}{2} e^{-\frac{|x|^2}{8}} \langle x, \nabla_M f \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

o que nos dá

$$\Delta_M \left(e^{-\frac{|x|^2}{8}} f \right) = h e^{-\frac{|x|^2}{8}} f$$

portanto a função $e^{-\frac{|x|^2}{8}} f$ é solução da EDP $(\Delta_M - h)u = 0$, conseqüentemente valem as afirmações do Teorema de Cheng, da última seção do Capítulo 1. Assim, temos que as linhas nodais de $(e^{-\frac{|x|^2}{8}} f)^{-1}(0)$ que é precisamente o conjunto $f^{-1}(0) = \{x \in M \mid \langle x, a \rangle = 0\}$, consistem de um número finito de arcos C^1 -imersos que se intersectam transversalmente em pontos isolados. \square

O conjunto nodal $f^{-1}(0)$ é a interseção do plano $P_a = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle a, x \rangle = 0\}$ com a superfície compacta M . Pela escolha que fizemos para o a e o \bar{x} , a função f tem ordem de anulamento $m \geq 2$ em \bar{x} , pois $f(\bar{x}) = \langle \bar{x}, \nu(\bar{x}) \rangle = 0$ e $df(x) \cdot \bar{x} = \langle \nabla f(x), \bar{x} \rangle = \langle a, \bar{x} \rangle = 0$. Portanto, existe uma vizinhança $U \subset M$ de \bar{x} tal que $Z \cap U$ é a união de pelo menos dois arcos de classe C^1 que se intersectam transversalmente em \bar{x} . Assim, Z não pode ser uma curva de Jordan, já que é uma curva fechada que se auto-intersecta. Disso, podemos concluir que podemos considerar uma curva de Jordan Γ de modo que Γ é C^1 por partes e $\Gamma \subsetneq Z$. Tendo M gênero 0, Γ limita um disco (topológico) em M . O Teorema de Jordan-Brower diz que se uma hipersuperfície suave $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ orientável e conexa é um subconjunto fechado do \mathbb{R}^{n+1} , então $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M = A \cup B$ é a reunião de dois abertos

conexos disjuntos, um limitado e outro ilimitado, dos quais M é a fronteira comum (cf. [11]). Assim, $\mathbb{R}^3 \setminus M$ tem duas componentes conexas que denotaremos por Ω e $\tilde{\Omega}$, além disso vamos assumir Ω ilimitado e $\tilde{\Omega}$ limitado.

Nas próximas duas proposições usaremos um Teorema de Meeks-Yau em [12], que garante que se N é uma variedade Riemanniana de dimensão 3, com ∂N tendo curvatura média não-negativa e σ é uma curva de Jordan em ∂N , então existe uma superfície mergulhada em N com bordo σ que minimiza a área dentre as superfícies mergulhadas em N com bordo σ .

Proposição 3.1.3. *Existe uma superfície suave $\Sigma \subset \Omega$ tal que $\bar{\Sigma} - \Sigma = \Gamma$ e $|A|^2 = 0 = \langle x, \nu \rangle$ em todo ponto de Σ .*

Demonstração. Consideremos, para cada k suficientemente grande, o conjunto \mathcal{C}_k de todos os discos S mergulhados em $\bar{\Omega} \cap \bar{B}(0, 2k)$ com a propriedade $\partial S = \Gamma$. Como Γ limita um disco em M , então temos que \mathcal{C}_k é não vazio para todo k suficientemente grande. Agora, tomemos uma família de funções cut-off suaves $\psi_k : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ tais que $\psi_k = 0$ em $[0, k]$, $\psi'_k(2k) > k$, e além disso $\psi_{k+1}(t) \leq \psi_k(t)$ para todo t . Com isso, consideremos o funcional

$$\mathcal{F}_k(S) = \int_S e^{-\frac{|x|^2}{4} + \psi_k(|x|)} dv$$

e como vimos na Seção 2.5, tal funcional é um funcional área para a métrica conforme $\tilde{g}_{ij} = e^{-\phi_k} \delta_{ij}$, onde $\phi_k(x) = \frac{|x|^2}{4} - \psi_k(|x|)$. Ainda na Seção 2.5 vimos como muda a curvatura média quando mudamos para uma métrica conforme. Representando a curvatura média na métrica conforme acima por H_{ϕ_k} , temos $H_{\phi_k} = e^{\frac{\phi_k}{2}} \left(H - \langle \bar{\nabla} \phi_k, \nu \rangle \right)$. Observemos que o bordo da 3-variedade riemanniana $\bar{\Omega} \cap \bar{B}(0, 2k)$ é $M \cup S^2(2k)$, logo com a métrica conforme dada acima, temos que a curvatura média do $\partial(\bar{\Omega} \cap \bar{B}(0, 2k))$ é dada por

$$\begin{aligned} H_{\phi_k} &= e^{\frac{\phi_k}{2}} \left(H - \langle \bar{\nabla} \phi_k, \nu \rangle \right) \\ &= e^{\frac{\phi_k}{2}} \left(H - \left\langle \frac{1}{2}x - \psi'_k(|x|) \frac{x}{|x|}, \nu \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para k suficientemente grande, de modo que $M \subset B(0, k)$ temos que $x \in M$ implica $\psi'_k(x) = 0$. Logo, (3.18) em M , tendo que M é auto-similar redutora, fica

$$\begin{aligned} H_{\phi_k} &= e^{\frac{\phi_k}{2}} \left(H - \left\langle \frac{1}{2}x - \psi'_k(|x|) \frac{x}{|x|}, \nu \right\rangle \right) \\ &= e^{\frac{\phi_k}{2}} \left(H - \left\langle \frac{1}{2}x, \nu \right\rangle \right) \\ &= e^{\frac{\phi_k}{2}} \left(\frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle - \left\langle \frac{1}{2}x, \nu \right\rangle \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

já em $\mathbb{S}^2(2k)$, tendo que a curvatura média na métrica euclidiana da esfera de raio R é $\frac{2}{R}$, e usando o fato de que $\psi'_k(2k) > k$ a igualdade (3.18) fica

$$\begin{aligned}
 H_{\phi_k} &= e^{\frac{\phi_k}{2}} \left(H - \left\langle \frac{1}{2}x - \psi'_k(|x|) \frac{x}{|x|}, \nu \right\rangle \right) \\
 &= e^{\frac{\phi_k}{2}} \left(\frac{2}{2k} - \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle + \psi'_k(|x|) \frac{1}{|x|} \langle x, \nu \rangle \right) \\
 &= e^{\frac{\phi_k}{2}} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle + \psi'_k(2k) \frac{1}{2k} \langle x, \nu \rangle \right) \\
 &\geq e^{\frac{\phi_k}{2}} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle + k \frac{1}{2k} \langle x, \nu \rangle \right) \\
 &\geq \frac{e^{\frac{\phi_k}{2}}}{k} > 0
 \end{aligned}$$

portanto, o domínio $\bar{\Omega} \cap \bar{B}(0, 2k)$ tem bordo com curvatura média não-negativa na métrica conforme $e^{-\phi_k} \delta_{ij}$. Assim, pelo Teorema de Meeks-Yau, existe uma superfície mergulhada em $\bar{\Omega} \cap \bar{B}(0, 2k)$, digamos Σ_k , que é um ponto de mínimo do funcional área para a métrica conforme acima e que tem bordo $\partial \Sigma_k = \Gamma$.

Como Σ_k é um ponto de mínimo para o funcional área com a métrica conforme $e^{-\phi_k} \delta_{ij}$, então ela é ponto crítico para esse funcional, e da fórmula da primeira variação da área temos que $H_{\phi_k} \equiv 0$, e sendo $H_{\phi_k} = e^{\frac{\phi_k}{2}} \left(H - \langle \bar{\nabla} \phi_k, \nu \rangle \right)$, vem $H = \langle \bar{\nabla} \phi_k, \nu \rangle$. Note que em $\Sigma_k \cap \{|x| \leq k\}$, $\psi_k = 0$, logo nessa região $\phi_k = \frac{|x|^2}{4}$, para todo k suficientemente grande. Daí segue que em $\Sigma_k \cap \{|x| \leq k\}$, temos $H = \langle \bar{\nabla}(\frac{|x|^2}{4}), \nu \rangle = \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle$, ou seja, o subconjunto $\Sigma_k \cap \{|x| \leq k\}$ de Σ_k é uma auto-similar redutora. Ainda pelo fato de Σ_k ser uma superfície que minimiza o funcional área para a métrica conforme, e do fato de toda superfície que minimiza o funcional área minimiza o funcional \mathcal{F} segue que para qualquer $f : \bar{\Sigma}_k \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto e que se anula em $\Gamma \cup (\bar{\Sigma}_k \cap \{|x| \geq k\})$ vale

$$0 \leq - \int_{\Sigma_k} e^{-\frac{|x|^2}{4}} f Lf.$$

Assim podemos utilizar a Proposição 3.1 para cada Σ_k , o que nos dá

$$\int_{\Sigma_k \cap \{|x| \leq \sqrt{k}\}} |A|^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle a, x \rangle^2 dv \leq \frac{C}{\log k} \int_{\Sigma_k \cap \{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv \quad (3.19)$$

Observando que toda $S \in \mathcal{C}_k$ é também $S \in \mathcal{C}_{k+1}$ e que $\psi_{k+1}(t) \leq \psi_k(t)$ para todo t , então vale a desigualdade seguinte

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{k+1}(\Sigma_k) &= \int_{\Sigma_k} e^{-\frac{|x|^2}{4} + \psi_{k+1}(|x|)} dv \\
 &\leq \int_{\Sigma_k} e^{-\frac{|x|^2}{4} + \psi_k(|x|)} dv = \mathcal{F}_k(\Sigma_k)
 \end{aligned}$$

e como a superfície que minimiza o funcional \mathcal{F}_{k+1} é a Σ_{k+1} , então temos

$$\mathcal{F}_{k+1}(\Sigma_{k+1}) \leq \mathcal{F}_{k+1}(\Sigma_k) \leq \mathcal{F}_k(\Sigma_k)$$

logo

$$\sup_k \mathcal{F}_k(\Sigma_k) < \infty$$

e sabendo que $e^{\psi_k(t)} > 1$ para todo $t \in [0, \infty)$, vem

$$\int_{\Sigma_k} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv \leq \int_{\Sigma_k} e^{-\frac{|x|^2}{4} + \psi_k(|x|)} dv = \mathcal{F}_k(\Sigma_k)$$

donde obtemos

$$\sup_k \int_{\Sigma_k} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv < \infty$$

e isso em (3.19) implica

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_k \cap \{|x| \leq \sqrt{k}\}} |A|^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle a, x \rangle^2 dv \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{C}{\log k} \int_{\Sigma_k \cap \{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv = 0. \quad (3.20)$$

O Teorema 3 de [13] garante, dentre outras coisas, que se uma variedade riemanniana N de dimensão $n \leq 6$ é tal que $\int_{N \cap \{|x| \leq k\}} d\tilde{\nu} \leq ck$, com c constante, onde $d\tilde{\nu} = e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv$, então existe uma constante c_1 tal que a segunda forma fundamental, \tilde{A} , em $N \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}$ na métrica conforme $e^{-\frac{|x|^2}{4}} \delta_{ij}$ satisfaz

$$\sup_{N \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} |\tilde{A}| \leq \frac{c_1}{k}$$

e como já temos que $|A|^2 = e^{-\phi} \left(|\tilde{A}|^2 + \frac{1}{2} H^2 \right)$, com $\phi = \frac{|x|^2}{4}$, segue que

$$\sup_{N \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} |A|^2 = \sup_{N \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} \left[e^{-\phi} \left(|\tilde{A}|^2 + \frac{1}{2} H^2 \right) \right]. \quad (3.21)$$

Assim, tendo que $\sup_k \int_{\Sigma_k} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv < \infty$, existe uma constante c tal que $\int_{\Sigma_k} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv \leq ck$, donde pelo que acabamos de dizer, existe c_1 , constante, tal que $\sup_{\Sigma_k \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} |\tilde{A}| \leq \frac{c_1}{k}$ e de (3.21), usando que Σ_k é auto-similar redutora, obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{\Sigma_k \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} |A|^2 &= \sup_{\Sigma_k \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} \left[e^{-\phi} \left(|\tilde{A}|^2 + \frac{1}{2} H^2 \right) \right] \\ &\leq \sup_{\Sigma_k \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} \left[e^{-\phi} \left(|\tilde{A}|^2 + \frac{1}{8} |x|^2 |\nu|^2 \right) \right] \\ &\leq \sup_{\Sigma_k \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} \left(e^{-\phi} |\tilde{A}|^2 \right) + \frac{1}{8} \sup_{\Sigma_k \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} \left(|x|^2 \right) \\ &\leq \sup_{\Sigma_k \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} \left(e^{-\phi} \right) \sup_{\Sigma_k \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} \left(|\tilde{A}|^2 \right) + \frac{1}{8} \sup_{\Sigma_k \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} \left(|x|^2 \right) \\ &\leq \sup_{\Sigma_k \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} \left(e^{-\frac{|x|^2}{4}} \right) \frac{c_1^2}{k^2} + \frac{1}{8} \sup_{\Sigma_k \cap \{|x| \leq \frac{k}{2}\}} \left(|x|^2 \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

por conseguinte, para qualquer compacto $W \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ fixado, tomemos k suficientemente grande de modo que $W \subset \{|x| \leq \frac{k}{2}\}$, então em (3.22) temos, desde que $e^{-\frac{|x|^2}{4}}$ e $|x|^2$ são contínuas, portanto limitadas em compactos, que

$$\sup_{\Sigma_k \cap W} |A|^2 \leq a \frac{c_1^2}{k^2} + \frac{b_W}{8}$$

onde, a e b_W são constantes. Daí obtemos

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{\Sigma_k \cap W} |A|^2 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(a \frac{c_1^2}{k^2} + \frac{b_W}{8} \right) < \infty$$

para todo compacto $W \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. Então, após passarmos a uma subsequência, caso necessário, as superfícies Σ_k convergem na topologia $C_{loc}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$ para uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ que satisfaz a equação das auto-similares redutoras, $H = \frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle$. Além do mais, de 3.20 segue que $|A|\langle x, a \rangle = 0$, e se for $|A| = 0$, então Σ é totalmente geodésica, caso contrário, teríamos $\langle x, a \rangle = 0$, e isso implicaria Σ totalmente geodésica também já que isso informa que Σ está contida num plano, ou seja $|A| = 0$ em todo ponto de Σ . Logo os coeficientes de A são todos nulos em Σ , e assim $\langle x, \nu \rangle = 0$ em cada ponto de Σ . Também, $\Sigma \subset \bar{\Omega}$, e como M não é totalmente geodésica, então pelo Princípio do Máximo Σ não pode tangenciar $M = \partial\Omega$, portanto $\Sigma \subset \Omega$.

Agora, vamos mostrar que $\Gamma \subset \bar{\Sigma}$. De fato, se $\Gamma \setminus \bar{\Sigma} \neq \emptyset$, então podemos construir uma 1-forma α em \mathbb{R}^3 com suporte compacto, de modo que $\alpha = 0$ em uma vizinhança de $\bar{\Sigma}$, $d\alpha = 0$ em uma vizinhança de Γ , e $\int_\Gamma \alpha \neq 0$. Do Teorema de Stokes teríamos $\int_{\Sigma_k} d\alpha = \int_\Gamma \alpha \neq 0$, mas no limite, teríamos $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_k} d\alpha = 0$, o que é uma contradição. Portanto, devemos ter $\Gamma \subset \bar{\Sigma}$, e como $\Gamma \cap \Sigma = \emptyset$, temos $\Gamma \subset \bar{\Sigma} \setminus \Sigma$. E tendo que $\bar{\Sigma}_k \setminus \Sigma_k \subset \Gamma$, na passagem ao limite obtemos $\bar{\Sigma} \setminus \Sigma \subset \Gamma$. Donde concluímos que $\bar{\Sigma} \setminus \Sigma = \Gamma$. \square

Um resultado análogo vale para a componente conexa limitada $\tilde{\Omega}$.

Proposição 3.1.4. *Existe uma superfície suave $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{\Omega}$ tal que $\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma} = \Gamma$ e $|A|^2 = 0 = \langle x, \nu \rangle$ em todo ponto de $\tilde{\Sigma}$.*

Demonstração. Considere o conjunto \mathcal{C} de todos os discos mergulhados $S \subset \tilde{\Omega}$ com bordo $\partial S = \Gamma$. Como Γ limita um disco em M , então $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Agora, consideramos o funcional

$$\mathcal{F}(S) = \int_S e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv$$

que já sabemos ser um funcional área com a métrica conforme $e^{-\frac{|x|^2}{4}} \delta_{ij}$. Como M é auto-similar redutora, então $H = \frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle$ em todo ponto de M . Agora, considerando $\tilde{\Omega}$ como uma 3-variedade riemanniana, seu bordo é $\partial\tilde{\Omega} = M$ cuja curvatura média na métrica conforme é dada por $\tilde{H} = e^{-\frac{|x|^2}{4}} \left(H - \langle \bar{\nabla}(\frac{|x|^2}{4}), \nu \rangle \right)$, ou seja, $\tilde{H} = e^{-\frac{|x|^2}{4}} \left(\frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle - \langle \frac{1}{2}x, \nu \rangle \right) = 0$ que é não-negativa em todo ponto do bordo de $\tilde{\Omega}$. Assim, pelo Teorema citado de [12], existe uma superfície, digamos $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{C}$, que minimiza o funcional área na métrica conforme dada acima, e além disso, é mergulhada em $\tilde{\Omega}$. Como $\tilde{\Sigma}$ minimiza o funcional área acima, a curvatura média na métrica conforme induzida em $\tilde{\Sigma}$ é nula para todo ponto de $\tilde{\Sigma}$, ou seja, $0 = \tilde{H} = e^{-\frac{|x|^2}{4}} \left(H - \frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle \right)$ o que nos diz que, na métrica Euclidiana usual, $\tilde{\Sigma}$ é auto-similar redutora, i.e, $H = \frac{1}{2}\langle x, \nu \rangle$ em todo ponto de $\tilde{\Sigma}$. Além disso, como $\tilde{\Sigma}$ minimiza o funcional área na métrica conforme $e^{-\frac{|x|^2}{4}} \delta$, então $\tilde{\Sigma}$ minimiza

o funcional \mathcal{F} . Daí segue-se que $\tilde{\Sigma}$ é uma auto-similar redutora estável, ou seja, vale a desigualdade de estabilidade

$$0 \leq - \int_{\tilde{\Sigma}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} f L f dv$$

para toda função $f : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ que se anula no bordo Γ . Então podemos utilizar a Proposição 3.1, que nos dará

$$\int_{\tilde{\Sigma} \cap \{|x| \leq \sqrt{k}\}} |A|^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle a, x \rangle^2 dv \leq \frac{C}{\log k} \int_{\tilde{\Sigma} \cap \{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv. \quad (3.23)$$

Note que

$$\int_{\tilde{\Sigma} \cap \{\sqrt{k} \leq |x| \leq k\}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv \leq \int_{\tilde{\Sigma}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dv < \infty$$

pois $\tilde{\Sigma}$ minimiza $\mathcal{F}(S)$ já nos diz que $\mathcal{F}(\tilde{\Sigma}) < \infty$. Assim, em (3.21) fazendo k suficientemente grande, de modo que $\tilde{\Sigma} \subset \{|x| \leq \sqrt{k}\}$, obtemos

$$\int_{\tilde{\Sigma}} |A|^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}} \langle a, x \rangle^2 dv = 0$$

logo, $|A|^2 \langle x, a \rangle^2 = 0$, se $|A|=0$ em todo ponto, então $\tilde{\Sigma}$ é totalmente geodésica, caso contrário, $\langle x, a \rangle = 0$ e isso implica que $\tilde{\Sigma}$ está contida num plano, portanto, também totalmente geodésica por isso $\tilde{\Sigma}$ é totalmente geodésica. Isso nos dá, pelo fato de $\tilde{\Sigma}$ ser auto-similar redutora, $\langle x, \nu \rangle = 0$ em todo ponto de $\tilde{\Sigma}$. Por fim, já temos que $\tilde{\Sigma} \subset \bar{\Omega}$, como $M = \partial\bar{\Omega}$ não é totalmente geodésica então, pelo Princípio do Máximo, se $\tilde{\Sigma}$ e M se intersectassem em um ponto, elas seriam iguais, e isso implicaria que M seria totalmente geodésica. Portanto $\tilde{\Sigma}$ não intersecta o bordo de $\bar{\Omega}$, assim $\tilde{\Sigma} \subset \bar{\Omega}$, como queríamos. \square

Proposição 3.1.5. *Os vetores normais a Σ e $\tilde{\Sigma}$ são paralelos ao vetor a em todos os pontos.*

Demonstração. Suponhamos que existe um $x \in \Sigma$ tal que $\nu(x) = b$, onde $b \in \mathbb{R}^3$ é um vetor unitário e o conjunto $\{a, b\}$ é linearmente independente. Consideremos o conjunto (não vazio pelo que supomos acima)

$$\Sigma' := \{x \in \Sigma \mid \nu(x) = b\} \neq \emptyset.$$

Temos que Σ' é um subconjunto de $P_b \setminus \Gamma := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, b \rangle = 0\} \setminus \Gamma$ pois todo ponto de Σ' é ponto de Σ , e por sua vez, da Proposição 3.1.3 todo ponto de Σ satisfaz $\langle x, \nu \rangle = 0$, mas os pontos $x \in \Sigma'$ são tais que $\nu(x) = b$, portanto $0 = \langle x, \nu(x) \rangle = \langle x, b \rangle$. Além do mais, b sendo L.I com a , então nenhum ponto de Σ' pode está em Γ , pois aí o normal é igual a a . Assim, de fato temos $\Sigma' \subset P_b \setminus \Gamma$.

Da Proposição 3.1.3 novamente, concluímos que, como subconjunto de $P_b \setminus \Gamma$, Σ' é aberto e fechado. De fato, note que $\Sigma' = \bar{\Sigma} \cap (P_b \setminus \Gamma)$, portanto Σ' é um fechado em $P_b \setminus \Gamma$. Além disso, como Σ é totalmente geodésica, então, dado um $x \in \Sigma$ tal que $\nu(x) = b$,

existe um ε_1 tal que se $y \in B(x, \varepsilon_1) \cap \Sigma$, então $\nu(y) = b$. Portanto, dado qualquer ponto $x \in \Sigma'$, seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, onde $\varepsilon_2 = d(x, \Gamma)$. Assim,

$$B := B(x, \varepsilon) \cap (P_b \setminus \Gamma) \subset \Sigma'$$

logo, Σ' é um aberto no conjunto $P_b \setminus \Gamma$. Por outro lado, temos que

$$P_b \cap \Gamma \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle b, x \rangle = 0 = \langle a, x \rangle\} = \text{uma reta} =: L.$$

Note que sendo Γ uma curva de Jordan em $M \cap P_a$ então, Γ não pode ser igual a L , assim $P_b \setminus \Gamma$ é conexo por caminhos, logo conexo como subconjunto do plano P_b . Portanto, sendo Σ' um aberto e fechado no conjunto conexo $P_b \setminus \Gamma$, então Σ' é igual ao conjunto $P_b \setminus \Gamma$, logo o fecho de Σ' é o plano todo P_b . Mas já sabemos que $\Sigma' \subset \Sigma \subset \Omega$, donde vem, $P_b = \bar{\Sigma}' \subset \bar{\Omega}$. Dessa forma, concluímos que M está contida em um dos lados do plano P_b , mas isso contradiz o Teorema 1.1 de [14]. Portanto, não pode haver um b linearmente independente com o vetor a como foi suposto no início da prova. Assim, todo vetor normal a Σ é paralelo ao o vetor a . A prova para a superfície $\tilde{\Sigma}$ é inteiramente análoga. □

Concluindo o Teorema 3.1.1

Agora, podemos concluir, via Proposições 3.2, 3.3 e 3.4, que as superfícies Σ e $\tilde{\Sigma}$ estão contidas no plano P_a . Além do que, temos $\Sigma \subset \Omega$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{\Omega}$, donde vem que Σ e $\tilde{\Sigma}$ são disjuntas, no entanto, ambas tem o mesmo bordo Γ . Observe que a união $\Sigma \cup \tilde{\Sigma} \cup \Gamma$, como subconjunto do plano P_a é aberta e fechada, pelo mesmo argumento utilizado acima, logo é o plano P_a todo. Então

$$P_a = \Sigma \cup \tilde{\Sigma} \cup \Gamma \subset \Omega \cup \tilde{\Omega} \cup \Gamma = (\mathbb{R}^3 \setminus M) \cup \Gamma.$$

e disso, temos

$$P_a \cap M \subset \Gamma$$

ou seja,

$$Z = P_a \cap M \subset \Gamma$$

uma contradição, pois nós tomamos Γ de tal modo que $\Gamma \subset Z$, mas $\Gamma \neq Z$. Note que essa contradição veio do fato de termos admitido que a superfície M compacta, mergulhada no \mathbb{R}^3 , de gênero 0 e auto-similar redutora não era a esfera redonda.

Assim, como queríamos, devemos ter M uma esfera redonda.

REFERÊNCIAS

- [1] Chavel, Isaac. *Riemannian Geometry: A Modern introduction*, Second Edition, Cambridge University Press.
- [2] Colding, Tobias H. e Minicozzi II, William P. *Generic Mean Curvature Flow: Generic Singularities*, arXiv: 0908.3788v1 [math.DG] 26 Aug 2009.
- [3] Colding, Tobias H. e Minicozzi II, William P. *A course in minimal surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2011.
- [4] Ilmanen, Tom. *Lectures on Mean Curvature Flow and Related Equations*, <https://people.math.ethz.ch/~ilmanen/papers/notes.pdf> acessado em Fevereiro de 2016.
- [5] Brendle, Simon. *Embedded self-similar shrinkers of genus 0*, Annals of Mathematics 183 (2016), pg 715-728.
- [6] Simon, Leon. *Lectures on Geometric Measure Theory* Proceedings of the Center of Mathematical Analysis, Australian National University vol. 3, 1983.
- [7] Neto, Antônio Caminha Muniz. *Tópicos de Geometria Diferencial*, Coleção Fronteiras da Matemática, editora SBM.
- [8] do Carmo, Manfredo Perdigão. *Geometria Riemanniana*, 5 ed., Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 2011.
- [9] do Carmo, Manfredo Perdigão. *Geometria Diferencial de curvas e superfícies*, Coleção Textos Universitários, SBM, 5.ed., Rio de Janeiro, 2012.
- [10] Cheng, S. Y, *Eigenfunctions and nodal Sets*, Comment. Math. Helv. **51**, 1957.
- [11] Lima, Elon Lages. *Análise Real vol. 3*, Coleção Matemática Universitária, IMPA.
- [12] Meeks, W.W. e Yau, S.T. *The existence of embedded minimal surfaces and the problem of uniqueness*, Math. Z. **179**, 1982, pg 151-168.
- [13] Schoen, R. e Simon, L. *Regularity of Stable Minimal Hypersurfaces*, Comm. Pure Appl. Math. **34**, 1981, 741-797.
- [14] Cavalcante, M.P e Espinar, J.M, *Halfspace type theorem for self-shrinkers*, Bulletin of the London Mathematical Society, pg 1-9, 2016.
- [15] Angenent, Sigurd B. *Shrinking doughnuts*. Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states, 3 (Gregynog, 1989), Volume 7 of Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, Boston 1992.
- [16] Ketover, Daniel. *Self-Shrinking Platonic Solids*, arXiv:1602.07271v1 [math.DG] 23 Feb 2016.
- [17] Huisken, G. *Asymptotic Behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geometry, **31**, 285-299, 1990.

- [18] Frensel, Kátia Rosenvald Leão. *O Princípio da Tangência e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, IMPA, 1983.

A CÁLCULO DO JACOBIANO DE UMA FAMÍLIA DE DIFEOMORFISMOS

Neste apêndice veremos como obter o determinante Jacobiano da família de difeomorfismos ϕ_s do Capítulo 2. Para isso, começamos com o seguinte lema básico:

Lema A.1. *Sejam C e D elementos de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Então vale o seguinte:*

$$\det(I + sC + s^2D) = 1 + s \operatorname{tr}(C) + s^2(\det C + \operatorname{tr} D) + \mathcal{O}(s^3),$$

onde $\mathcal{O}(s^3)$ é um termo que depende de s com expoente pelo menos igual a 3.

Demonstração. Temos $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$ e $D = (d_{ij})_{2 \times 2}$, com isso é fácil ver que

$$\begin{aligned} \det(I + sC + s^2D) &= (1 + sc_{11} + s^2d_{11})(1 + sc_{22} + s^2d_{22}) - (sc_{12} + s^2d_{12})(sc_{21} + s^2d_{21}) \\ &= 1 + sc_{22} + s^2d_{22} + sc_{11} + s^2c_{11}c_{22} + s^3c_{11}d_{22} + s^2d_{11} + s^3d_{11}c_{22} \\ &\quad + s^4d_{11}d_{22} - s^2c_{12}c_{21} - s^3c_{12}d_{21} - s^3d_{12}c_{21} - s^4d_{12}d_{21} \\ &= 1 + s(c_{22} + c_{11}) + s^2(d_{22} + c_{11}c_{22} + d_{11} - c_{12}c_{21}) + \mathcal{O}(s^3) \\ &= 1 + s \operatorname{tr}(C) + s^2(\det C + \operatorname{tr}(D)) + \mathcal{O}(s^3), \end{aligned}$$

como queríamos. □

Agora, consideremos um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ que contém a superfície Σ e dois campos de vetores definidos em U com suporte compacto e que se anulam em $\partial\Sigma$. Defina uma família de difeomorfismos de U em U por $\{\psi_s\}_s$, com $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, onde ψ_s é dado por

$$\psi_s(x) = x + sX + \frac{s^2}{2}Z + \mathcal{O}(s^3).$$

A restrição de ψ_s à Σ será denotada por ϕ_s , i.e.,

$$\phi_s := \psi_s|_{\Sigma}.$$

Vamos calcular o Jacobiano $J\phi_s$ usando o fato de que

$$(J\phi_s(x))^2 = \det((d\phi_s(x))^* \circ d\phi_s(x)),$$

onde $*$ indica a adjunta de uma aplicação. É fácil ver que

$$d\phi_s(x).v = v + s\bar{\nabla}_v X + \frac{s^2}{2}\bar{\nabla}_v Z + \tilde{\mathcal{O}}(s^3)$$

então, para uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_x\Sigma$, a aplicação $(d\phi_s(x))^* \circ (d\phi_s(x))$ tem os coeficientes de sua matriz nessa base dados por (sendo o nosso interesse somente na primeira e segunda derivada de ϕ_s em $s = 0$ omitimos os termos $\tilde{\mathcal{O}}(s^3)$ para facilitar as contas)

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \langle (d\phi_s(x))^* \circ (d\phi_s(x))(e_i), e_j \rangle \\ &= \langle (d\phi_s(x))^* \circ (d\phi_s(x))(e_i), e_j \rangle \\ &= \langle (d\phi_s(x))^* \cdot (e_i + s\bar{\nabla}_{e_i} X + \frac{s^2}{2}\bar{\nabla}_{e_i} Z), e_j \rangle \\ &= \langle (d\psi_s(x))^* \cdot e_i, e_j \rangle + s\langle (d\psi_s(x))^* \cdot \bar{\nabla}_{e_i} X, e_j \rangle + \frac{s^2}{2}\langle (d\psi_s(x))^* \cdot \bar{\nabla}_{e_i} Z, e_j \rangle \end{aligned}$$

O trabalho, agora, cai no cálculo de cada uma das três parcelas separadamente. A primeira fica assim

$$\begin{aligned} \langle (d\psi_s(x))^* \cdot e_i, e_j \rangle &= \langle e_i, (d\psi_s(x)) \cdot e_j \rangle \\ &= \langle e_i, e_j + s\bar{\nabla}_{e_j} X + \frac{s^2}{2}\bar{\nabla}_{e_j} Z \rangle \\ &= \delta_{ij} + s\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} X \rangle + \frac{s^2}{2}\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} Z \rangle \end{aligned}$$

a segunda

$$\begin{aligned} \langle (d\psi_s(x))^* \cdot \bar{\nabla}_{e_i} X, e_j \rangle &= \langle e_i, (d\psi_s(x)) \cdot \bar{\nabla}_{e_j} X \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_j + \bar{\nabla}_{e_j} X + \frac{s^2}{2}\bar{\nabla}_{e_j} Z \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_j \rangle + s\langle \bar{\nabla}_{e_j} X + \bar{\nabla}_{e_j} X \rangle + \frac{s^2}{2}\langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_j} Z \rangle. \end{aligned}$$

e, finalmente, a terceira

$$\begin{aligned} \langle (d\psi_s(x))^* \cdot \bar{\nabla}_{e_i} Z, e_j \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} Z, (d\psi_s(x)) \cdot e_j \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} Z, e_j \rangle + s\langle \bar{\nabla}_{e_i} Z, \bar{\nabla}_{e_j} X \rangle + \frac{s^2}{2}\langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_j} Z \rangle. \end{aligned}$$

Assim, agrupando as parcelas que tem s elevado a um expoente maior ou igual a 3 em $\mathcal{O}(s^3)$ e os desprezando, obtemos

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \delta_{ij} + s\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} X \rangle + \frac{s^2}{2}\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} Z \rangle \\ &\quad s\langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_j \rangle + s^2\langle \bar{\nabla}_{e_j} X + \bar{\nabla}_{e_j} X \rangle + \frac{s^2}{2}\langle \bar{\nabla}_{e_i} Z, e_j \rangle \\ &= \delta_{ij} + s\left(\langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_j \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_j} X, e_i \rangle\right) + s^2\left(\frac{1}{2}(\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} Z \rangle + \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} Z \rangle) + \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_j} X \rangle\right). \end{aligned}$$

Pondo,

$$C = (\langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_j \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_j} X, e_i \rangle)_{ij}$$

e

$$D = \left(\frac{1}{2}(\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j} Z \rangle + \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} Z \rangle) + \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_j} X \rangle\right)_{ij},$$

vemos que

$$B = (b_{ij}) = I + sC + s^2D$$

e note que $(J\phi_s(x))^2 = \det B$, logo do Lema A.1, obtemos

$$(J\phi_s(x))^2 = 1 + s \operatorname{tr} C + s^2(\det C + \operatorname{tr} D) + \mathcal{O}(s^3)$$

e aqui, mais uma vez desprezaremos os termos $\mathcal{O}(s^3)$. É fácil ver que

$$\operatorname{tr} C = 2(\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_1 \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_2 \rangle),$$

$$\det C = 4\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_1 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_2 \rangle - (\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_2 \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_1 \rangle)^2$$

e

$$\operatorname{tr} D = \langle e_1, \bar{\nabla}_{e_1} Z \rangle + \langle e_2, \bar{\nabla}_{e_2} Z \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_1} X, \bar{\nabla}_{e_1} X \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, \bar{\nabla}_{e_2} X \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} (J\phi_s(x))^2 &= 1 + s \operatorname{tr} C + s^2(\det C + \operatorname{tr} D) \\ &= 1 + 2s(\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_1 \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_2 \rangle) + s^2\left[4\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_1 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_2 \rangle - \right. \\ &\quad \left. (\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_2 \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_1 \rangle)^2 + \langle e_1, \bar{\nabla}_{e_1} Z \rangle + \langle e_2, \bar{\nabla}_{e_2} Z \rangle \right. \\ &\quad \left. + |\bar{\nabla}_{e_1} X|^2 + |\bar{\nabla}_{e_2} X|^2\right]. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Tendo que

$$(\operatorname{div}_\Sigma X)^2 = \langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_1 \rangle^2 + \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_2 \rangle^2 + 2\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_1 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_2 \rangle$$

e

$$|(\bar{\nabla}_{e_i} X)^\perp|^2 = |(\bar{\nabla}_{e_i} X)|^2 - |\langle (\bar{\nabla}_{e_i} X, e_1) \rangle|^2 - |\langle (\bar{\nabla}_{e_i} X, e_1) \rangle|^2$$

obtemos,

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}_\Sigma X)^2 + |(\bar{\nabla}_{e_1} X)^\perp|^2 + |(\bar{\nabla}_{e_2} X)^\perp|^2 &= |\bar{\nabla}_{e_1} X|^2 + |\bar{\nabla}_{e_2} X|^2 + 2\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_1 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_2 \rangle \\ &\quad - |\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_2 \rangle|^2 - |\langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_1 \rangle|^2 \end{aligned}$$

e definindo $\Lambda = \langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_1 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_2 \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_2 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_1 \rangle$, vem

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}_\Sigma X)^2 + \sum_{i=1}^2 |(\bar{\nabla}_{e_i} X)^\perp|^2 + 2\Lambda &= |\bar{\nabla}_{e_1} X|^2 + |\bar{\nabla}_{e_2} X|^2 + 2\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_1 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_2 \rangle \\ &\quad - |\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_2 \rangle|^2 - |\langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_1 \rangle|^2 \\ &\quad + 2\left(\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_1 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_2 \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_2 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_1 \rangle\right) \\ &= 4\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_1 \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_2 \rangle - \left(\langle \bar{\nabla}_{e_1} X, e_2 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \bar{\nabla}_{e_2} X, e_1 \rangle\right)^2 + |\bar{\nabla}_{e_1} X|^2 + |\bar{\nabla}_{e_2} X|^2. \end{aligned}$$

Com isso, podemos reescrever a igualdade (A.1) como segue

$$(J\phi_s(x))^2 = 1 + 2s \operatorname{div}_\Sigma X + s^2 \left((\operatorname{div}_\Sigma X)^2 + \operatorname{div}_\Sigma Z + |(\bar{\nabla}_{e_1} X)^\perp|^2 + |(\bar{\nabla}_{e_2} X)^\perp|^2 \right)$$

e usando o fato de que $(1 + s\alpha + s^2\beta)^2 = 1 + 2s\alpha + s^2(\alpha^2 + 2\beta) + \mathcal{O}(s^3)$, podemos pôr $\alpha = \operatorname{div}_\Sigma X$ e $\beta = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{div}_\Sigma Z + |(\bar{\nabla}_{e_1} X)^\perp|^2 + |(\bar{\nabla}_{e_2} X)^\perp|^2 \right\}$ e obtemos

$$J\phi_s(x) = 1 + s \operatorname{div}_\Sigma X + \frac{s^2}{2} \left(\operatorname{div}_\Sigma Z + |(\bar{\nabla}_{e_1} X)^\perp|^2 + |(\bar{\nabla}_{e_2} X)^\perp|^2 \right).$$

Exatamente a fórmula apresentada no capítulo 2.