

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FABRICIO DE MACEDO LIRA

TRIANGULAÇÃO DE SUPERFÍCIES FECHADAS  
E ORIENTÁVEIS COM POUCOS VÉRTICES

MACEIÓ

2015

FABRICIO DE MACEDO LIRA

TRIANGULAÇÃO DE SUPERFÍCIES FECHADAS  
E ORIENTÁVEIS COM POUCOS VÉRTICES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dimas Martínez

MACEIÓ

2015

Catálogo na fonte  
**Universidade Federal de Alagoas**  
Biblioteca Central  
Divisão de Tratamento Técnico  
**Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade**

L768t Lira, Fabricio de Macedo.  
Triangulação de superfícies fechadas e orientáveis com poucos vértices /  
Fabricio de Macedo Lira - 2015.  
40 f. : il.

Orientador: Dimas Martínez.  
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.  
Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió,  
2015.

Bibliografia: f. 38-40.

1. Superfície. 2. Triangulação. 3. Triangulação irredutível. 4. Triangulação  
minimal. I. Título.

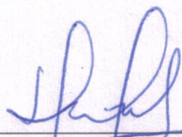
CDU: 514.752.4

FABRICIO DE MACEDO LIRA

TRIANGULAÇÃO DE SUPERFÍCIES FECHADAS  
E ORIENTÁVEIS COM POUCOS VÉRTICES

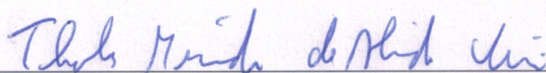
Dissertação de Mestrado submetida em agosto de 2015 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:



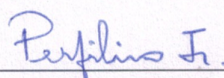
---

Prof. Dr. Dimas Martínez Morera - Orientador  
Universidade Federal de Alagoas



---

Prof. Dr. Thales Miranda de Almeida Vieira  
Universidade Federal de Alagoas



---

Prof. Dr. Perfilino Eugênio Ferreira Júnior  
Universidade Federal da Bahia

# Agradecimentos

O termo gratidão vem do latim *gratia* que significa literalmente graça, ou *gratus* que se traduz como agradável. Significa reconhecimento agradável por tudo quanto se recebe ou lhe é reconhecido. Estar feliz e satisfeito por algo recebido, e não se esquecer do ato.

Posto isto, intencionalmente utilizo este breve espaço para expressar minha sincera gratidão àqueles que estiveram ao meu lado em todos os momentos e que fizeram de meus sonhos os seus. Tomo então as palavras certas para que esses agradecimentos ecoem como palavras que carregam verdade e significado.

Em favor de minha alma faço um agradecimento ao meu Deus, vem dEle tudo o que sou e o que espero. Guia-me sempre por caminhos de paz e rege minha vida com justiça.

Devoto meus sentimentos aqueles que pela motivação e confiança depositada em mim eternamente serei devedor: minha família. Ainda que tentasse, jamais poderia retribuir o amor e o carinho dados a mim. Em especial meus pais, Benildo (*in memoriam*) e Josefa, que da maneira que sabiam e podiam ajudavam e reconheciam meus esforços, me proporcionando chegar até aqui.

Ao professor Dimas Martínez agradeço por acreditar, confiar, incentivar e torcer por mim. Se não é possível agradecer adequadamente posso ao menos evidenciar seu profissionalismo e competência, e reconhecer que nessa parceria eu saí ganhando.

Desejo agradecer aos membros da banca Perfilino Eugênio e Thales Vieira por honrar-nos com sua presença, por seus oportunos comentários e sugestões, e por contribuírem em minha formação. Também devo estender meus agradecimentos aos professores Francisco Barros (Chico Potiguar) e Adelailson Peixoto pelas oportunidades de aprendizado e crescimento.

Aos colegas de curso devo dizer que tão importante quanto tudo que aprendi nessa jornada, foi e será nossa cumplicidade, ajuda e amizade. De forma especial aos amigos do Laboratório de Computação Gráfica pela agradável convivência e companheirismo.

E finalmente, agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro concedido.

# Resumo

Dada uma superfície fechada e orientável  $S$ , Ringel e Jungerman asseguram que o menor número possível de vértices para construir uma triangulação em  $S$  é dada pelo menor inteiro maior que  $(7 + \sqrt{1 + 48g})/2$ , onde  $g \neq 2$  é o gênero da superfície  $S$  e quando  $g = 2$  a quantidade mínima necessária é 10 vértices. Estas triangulações são conhecidas na literatura como triangulações minimais. Uma triangulação  $\mathcal{T}$  em  $S$  chama-se de triangulação irreduzível se o colapso de qualquer aresta de  $\mathcal{T}$  não gera uma nova triangulação em  $S$ . Em termos do número de vértices, também em função do gênero da superfície  $S$ , suas triangulações irreduzíveis não ultrapassam  $13g - 4$  vértices com  $g > 0$ , no caso em que  $g = 0$  existe uma única triangulação irreduzível que coincide com a triangulação minimal para este gênero, contendo exatamente 4 vértices. Neste trabalho abordamos como construir triangulações de superfícies fechadas e orientáveis com poucos vértices, isto é, a quantidade de vértices está compreendida entre o número necessário para existência da triangulação e a cota superior definida no grupo das triangulações irreduzíveis.

**Palavras-chaves:** superfície. triangulação. triangulação irreduzível. triangulação minimal.

# Abstract

Given a closed orientable surface  $S$ , Ringel and Jungerman ensure that the smallest number possible of vertices to build a triangulation in  $S$  is given by the smallest integer greater than  $(7 + \sqrt{1 + 48g})/2$  where  $g \neq 2$  is the genus of the surface  $S$  and when  $g = 2$  the quantity minimum required is 10 vertices. These triangulations are known in the literature as minimal triangulations. A triangulation  $\mathcal{T}$  in  $S$  call it irreducible triangulation if the collapse any edge of  $S$  does not generate a new triangulation in  $S$ . In terms of the number of vertices, also depending on the of genus surface  $S$ , their irreducible triangulations do not exceed  $13g - 4$  vertices  $g > 0$ , in the case where  $g = 0$  there exists a unique irreducible triangulation which coincides with the minimal triangulation for this genus, containing exactly 4 vertices. In this work we discuss how to construct triangulations of closed orientable surfaces with few vertices, i.e. the number of vertices is comprised between the number required for the existence of triangulation and the defined upper bound in group of irreducible triangulations.

**Key-words:** surface. triangulation. irreducible triangulation. minimal triangulation.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Triangulações da esfera em 4 regiões (a) e do toro em 7 regiões (b). . . . .	8
Figura 2 – Triangulação do toro com 7 vértices. . . . .	9
Figura 3 – Triangulação irreduzível do toro. . . . .	10
Figura 4 – Vizinhança coordenada de um ponto. . . . .	11
Figura 5 – Superfície fechada (a) e aberta (b). . . . .	12
Figura 6 – Superfícies fechadas e orientáveis. . . . .	13
Figura 7 – Soma conexa da esfera e do toro (a) e do toro com o bitoro (b). . . . .	13
Figura 8 – Grafo com 7 vértices e 5 arestas. . . . .	14
Figura 9 – Representações do mesmo grafo planar com arestas cruzadas (a) e sem arestas cruzadas (b). . . . .	15
Figura 10 – Duas realizações do grafo $K_4$ no toro. . . . .	15
Figura 11 – Simplexos de dimensões 0, 1, 2 e 3. . . . .	17
Figura 12 – Coleção de simplexos de dimensões 0, 1 e 2. . . . .	18
Figura 13 – Complexo simpliciais: <i>estrela</i> (a) e <i>link</i> (b) de vértice e de aresta. . . . .	19
Figura 14 – Subdivisão de um triângulo (a) e contração de uma aresta (b). . . . .	19
Figura 15 – Triangulação da esfera (a) e do toro (b). . . . .	20
Figura 16 – Contração de arestas que modificam a topologia da triangulação. . . . .	20
Figura 17 – Triangulação de um cilindro com 12 vértices. . . . .	21
Figura 18 – Um 3-ciclo não vinculado a uma face na triangulação. . . . .	21
Figura 19 – Coloração da esfera com 4 cores (a) e do toro com 7 cores (b). . . . .	22
Figura 20 – Toro de Császár: 7 vértices, 21 arestas e 14 faces. . . . .	23
Figura 21 – Triangulação irreduzível do toro com 9 vértices. . . . .	24
Figura 22 – Toro gerado por adição de uma alça à esfera (a) e sua triangulação irreduzível com 9 vértices (b). . . . .	25
Figura 23 – Esquema de rotação definido para 4 vértices. . . . .	27
Figura 24 – Esquema de adjacência para um triângulo orientado. . . . .	27
Figura 25 – Esquema de rotação para $s = 0$ . . . . .	28
Figura 26 – Condição de fluxo. . . . .	29
Figura 27 – Grafo cúbico. . . . .	29
Figura 28 – Grafo cúbico para $s = 1$ . . . . .	30
Figura 29 – Processo de execução do algoritmo de Schipper para uma triangulação do toro com 12 vértices. . . . .	32
Figura 30 – Triangulações de superfícies fechadas e orientáveis de gênero um a três. . . . .	33
Figura 31 – Triangulação para o bitoro com dez vértices. . . . .	34
Figura 32 – Realização em $\mathbb{R}^3$ das triangulações da esfera (a) e do toro (b). . . . .	35
Figura 33 – Resultados obtidos para triangulações de superfícies de gênero 1 a 3500. . . . .	36



# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	8
1.1	Objetivo . . . . .	9
1.2	Estrutura do Trabalho . . . . .	10
2	DEFINIÇÕES . . . . .	11
2.1	Superfície . . . . .	11
2.2	Grafo . . . . .	14
2.3	Complexo Simplicial . . . . .	17
3	TRIANGULAÇÕES . . . . .	20
3.1	Triangulação Minimal . . . . .	22
3.2	Triangulação Irreduzível . . . . .	24
4	ALGORITMOS . . . . .	26
4.1	Triangulação Minimal: Casos 0, 3, 4 e 7 módulo 12 . . . . .	26
4.2	Triangulação Irreduzível: Triangulação com poucos vértices . . . . .	31
5	RESULTADOS . . . . .	35
6	CONCLUSÃO . . . . .	37
	REFERÊNCIAS . . . . .	38

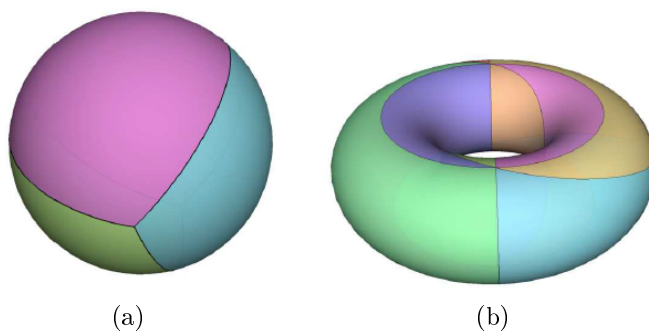
# 1 Introdução

O teorema de Radó afirma que toda superfície compacta admite uma triangulação (1). Uma triangulação pode ser vista intuitivamente como um poliedro sobre a superfície de modo que cada face é um triângulo com os três vértices distintos e a interseção de quaisquer dois triângulos distintos ou é vazia, ou é um único vértice, ou é uma única aresta. Por exemplo, triangulando a esfera com 4 vértices obtemos o tetraedro como o poliedro resultante, veja figura 1(a) abaixo.

Ainda olhando para a esfera, poderíamos construir inúmeras triangulações bastando aumentar o número de regiões em que a decomposmos. Este exemplo nos fornece duas informações bastante interessantes: a primeira que 4 vértices são suficientes para triangular a esfera, e mais que isto são também necessários; a segunda é que se olharmos somente a conectividade do tetraedro, ou seja, como um grafo de seis arestas, ele contém todas as arestas possíveis com 4 vértices.

Se agora considerarmos o toro, como na figura 1(b), já era conhecido em 1886 por Möbius que é possível construir uma triangulação com somente 7 vértices (2), e surpreendentemente tal como a esfera, em termos de grafo contém todas as suas 21 arestas.

Figura 1 – Triangulações da esfera em 4 regiões (a) e do toro em 7 regiões (b).



Fonte: Disponível no trabalho de Razafindrazaka (3).

Estes exemplos são bastante motivadores para a seguinte questão: dada uma superfície compacta sem bordo e orientável qual a quantidade mínima de vértices necessários para obtermos uma triangulação desta superfície?

A resposta desta pergunta surge no contexto do Teorema Coloração de Mapas (4). Este afirma que o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa em uma superfície compacta sem bordo e orientável com gênero  $g$  é

$$\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \rfloor.$$

Para  $g > 0$  o teorema foi provado por Ringel e Youngs (5). O caso  $g = 0$  é o famoso teorema das quatro cores que foi provado por Appel, Haken e Koch (6, 7).

A conexão entre o Teorema Coloração de Mapas e triangulações, está em observar o grafo obtido por considerar como um vértice cada região do mapa e ligando dois vértices sempre que as regiões que estes vértices correspondem compartilham uma fronteira comum. O caso extremo, como nos exemplos da esfera e do toro, é quando todos os vértices são aos pares adjacentes exigindo todas as arestas.

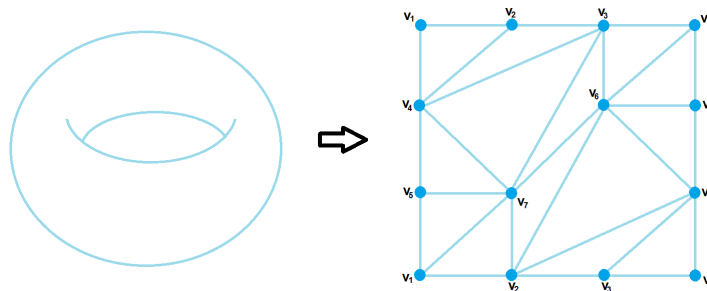
Este grafo de  $n$  vértices, onde  $n$  é igual ao número de regiões existentes no mapa, tem como gênero o menor inteiro maior que  $(n - 3)(n - 4)/12$ . Note que para os casos em que o número de vértices é congruente a 0, 3, 4, 7 modulo 12 esta razão é um número inteiro, isto corresponde, em termos da decomposição da superfície que todas as regiões são triangulares, e conseqüentemente o grafo dual do mapa na superfície pode ser tomado como uma triangulação desta superfície com este gênero.

## 1.1 Objetivo

Neste trabalho pretendemos construir triangulações de superfícies compactas sem bordo e orientáveis de gênero arbitrário com poucos vértices. Estas construções tem alto gênero em comparação com o número de vértices.

Primeiro expomos a construção apresentada por Ringel na demonstração do caso quando o número de vértices é divisível por sete. Para o primeiro caso desta sequência, a triangulação do toro com 7 vértices, além da representação combinatória vista na figura 2, há também uma representação geométrica imersa em  $\mathbb{R}^3$  (8).

Figura 2 – Triangulação do toro com 7 vértices.

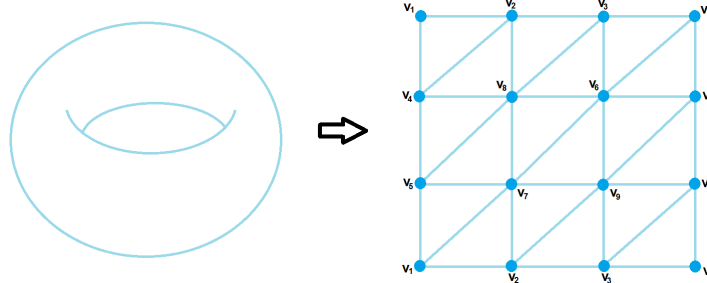


Fonte: Autor, 2015

A segunda abordagem é começar com uma triangulação arbitrária da superfície e modificar a triangulação por sucessivos colapsos nas arestas da triangulação de tal maneira que o resultado é topologicamente o mesmo e ao final do processo temos uma redução significativa da quantidade de vértices. A triangulação resultante alcançada chamamos

de triangulação irreduzível. Isto sempre é possível, pois qualquer superfície compacta tem uma triangulação irreduzível (9), e esta triangulação tem no máximo  $13g - 4$  vértices (10).

Figura 3 – Triangulação irreduzível do toro.



Fonte: Autor, 2015

## 1.2 Estrutura do Trabalho

O texto está dividido da seguinte forma: começamos no capítulo 2 apresentando superfície, grafo e complexo simplicial relacionando com a ideia de triangulação; na sequência no capítulo 3 definimos propriamente triangulações, em especial enunciamos dois casos interessantes, referidos na literatura como triangulações minimais e triangulações irreduzíveis; a continuação, no capítulo 4, apresentamos uma construção para triangulações minimais e um algoritmo para obter triangulações irreduzíveis; alguns resultados obtidos e uma comparação com o algoritmo para triangulações irreduzíveis são apresentados no capítulo 5; finalmente, no capítulo 6 fazemos as considerações finais.

## 2 Definições

Neste capítulo apresentaremos os principais conceitos para o desenvolvimento deste trabalho. Iniciamos com superfícies, objeto central deste estudo. Abordaremos grafos tratando de colorações e da relação com triangulações que são por fim expostas.

### 2.1 Superfície

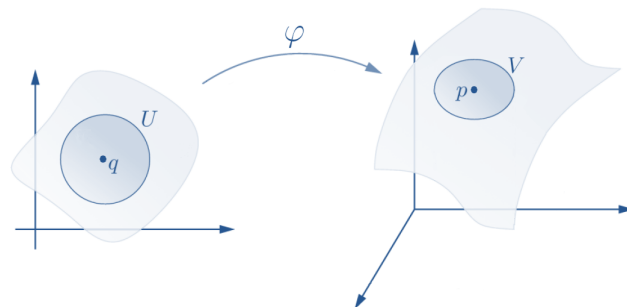
Em computação gráfica, objetos geométricos são comumente representados por superfícies. Essa representação permite uma descrição concisa de objetos simples, bem como uma excelente ferramenta para modelar objetos mais complexos.

**Definição 2.1** (Superfície). *Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície se, para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $\varphi : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que:*

1.  $\varphi$  é diferenciável;
2.  $\varphi$  é um homeomorfismo;
3. Para todo  $q \in U$  a diferencial  $d\varphi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

A aplicação  $\varphi$  é chamada uma parametrização ou um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança de  $p$ , e  $V \cap S$  é chamada uma vizinhança coordenada de  $S$  em  $p$ .

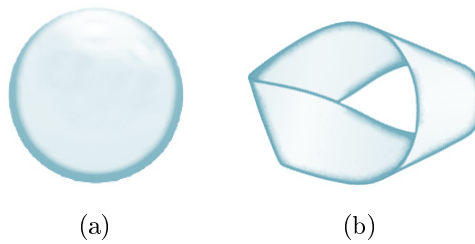
Figura 4 – Vizinhança coordenada de um ponto.



Fonte: Autor, 2015

Uma superfície compacta e sem bordo é usualmente chamada somente por superfície fechada, e se há bordo, superfície aberta. Esta será a terminologia que usaremos ao longo do trabalho.

Figura 5 – Superfície fechada (a) e aberta (b).



Fonte: Autor, 2015

Se tomarmos um caminho fechado na superfície, podemos pensar em um vetor normal associado a um ponto desse caminho, e deslocar esse ponto ao longo da curva. Avaliar a orientação da normal ao percorrer a curva, nos fornece uma valiosa informação da superfície.

**Definição 2.2** (Orientação). *Se uma superfície admite um campo contínuo de vetores normais, então dizemos que essa superfície é orientável.*

A esfera na figura 5(a), superfície bem conhecida, é uma superfície orientável e a faixa de Möbius 5(b) é um exemplo de superfície não orientável.

Uma decomposição de uma superfície fechada e conexa  $S$  é a partição de  $S$  em três subconjuntos finitos chamados de *vértices*, *arestas* e *faces*, onde o conjunto *vértices* são pontos de  $S$ , o conjunto *arestas* são curvas simples em  $S$  ligando quaisquer dois distintos elementos do conjunto *vértices*, e o conjunto *faces* são as regiões conexas que tem como bordo uma curva simples e fechada em  $S$  formada pela concatenação de elementos do conjunto *arestas*.

Uma ferramenta importante para classificar as superfícies é a característica de Euler da superfície, pois é um invariante topológico, ou seja, superfícies homeomorfas têm a mesma característica de Euler. Este invariante é denotado por  $\chi(S)$  para uma superfície  $S$ , e se define por  $\chi(S) = v - a + f$ , onde  $v$ ,  $a$  e  $f$  são respectivamente as cardinalidades dos conjuntos *vértices*, *arestas* e *faces* de uma decomposição qualquer da superfície  $S$ .

Em termos da característica de Euler, defini-se o conceito de gênero da superfície.

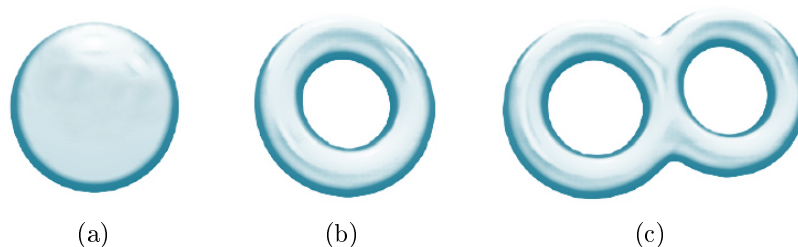
**Definição 2.3** (Gênero). *Seja  $S$  uma superfície fechada e conexa com característica de Euler  $\chi(S)$ . O número*

$$g = \begin{cases} \frac{2-\chi(S)}{2}, & \text{se } S \text{ é orientável,} \\ 2 - \chi(S), & \text{se } S \text{ é não orientável.} \end{cases}$$

*é chamado gênero da superfície  $S$ .*

A figura 15 mostra exemplos de superfícies com gênero 0 15(a), gênero 1 15(b) e gênero 2 15(c).

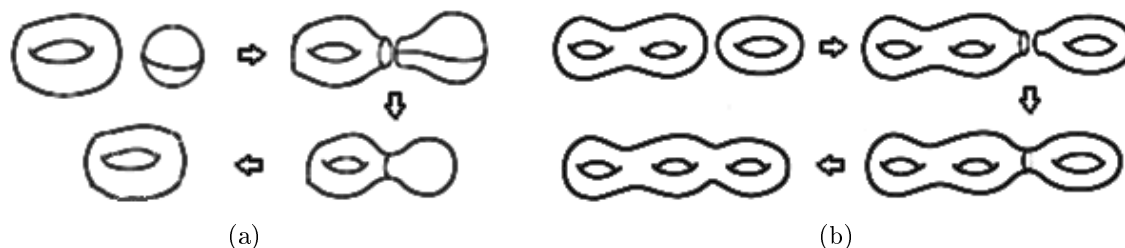
Figura 6 – Superfícies fechadas e orientáveis.



Fonte: Autor,2015

Dadas duas superfícies fechadas podemos "somá-las" de modo a conseguir uma nova superfície fechada, essa operação chama-se de soma conexa. A figura 7 exemplifica a soma conexa entre a esfera e o toro 7(a) obtendo um novo toro, e do toro com o bitoro 7(b) gerando portanto o tritoro.

Figura 7 – Soma conexa da esfera e do toro (a) e do toro com o bitoro (b).



Fonte: Autor,2015

Um fato é que todas as superfícies fechadas e orientáveis, exceto a esfera e o próprio toro, podem ser vistas topologicamente por somas conexas de toros. É o que nos diz o teorema de classificação de superfícies (11).

**Teorema 2.1.1** (Teorema de Classificação de Superfícies). *Qualquer superfície fechada e orientável é homeomorfa ou a esfera, ou ao toro, ou a soma conexa de toros.*

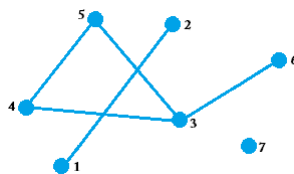
Pelo teorema de classificação de superfícies sabemos quais são todas as superfícies fechadas e orientáveis, a menos de um homeomorfismo. Assim, para identificar uma superfície é suficiente determinar sua característica de Euler, ou equivalentemente seu gênero, e verificar se a superfície é orientável ou não.

## 2.2 Grafo

Uma maneira intuitiva de imaginar um grafo é pelo desenho de alguns pontos num papel e traçando linhas de um ponto qualquer aos demais se entre eles correspondem uma relação. Como esses pontos e linhas são desenhados não é importante, a informação relevante é quais dos pares de pontos estão conectados e quais não.

**Definição 2.4** (Grafo). *Um grafo  $G$  é um par  $(V, A)$  de conjuntos que satisfazem  $A \subseteq V \times V$ . Os elementos de  $V$  são os vértices do grafo  $G$  e os elementos de  $A$  são suas arestas.*

Figura 8 – Grafo com 7 vértices e 5 arestas.



Fonte: Autor, 2015

O número de vértices de um grafo  $G = (V, A)$  é a sua ordem, e seu número de arestas sua dimensão. Estes serão denotados por  $|V|$  e  $|A|$ , respectivamente. Um grupo especial de grafos são os grafos que possuem dimensão máxima.

**Definição 2.5** (Grafo Completo). *Dois vértices  $u, v$  são adjacentes, se  $uv$  é uma aresta. Se todos os vértices são aos pares adjacentes, então o grafo é chamado completo. Um grafo completo com  $n$  vértices denota-se por  $K_n$ .*

Do ponto de vista topológico, um grafo  $G$  é um par  $(V(G), A(G))$ , onde  $A(G)$  denota um conjunto finito de curvas simples e  $V(G)$  denota um conjunto de pontos, os quais correspondem às extremidades daquelas curvas.

Neste contexto, adotaremos a seguinte definição para conexidade:

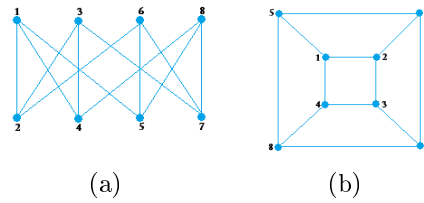
**Definição 2.6** (Grafo Conexo). *Um grafo  $G$  é conexo, se quaisquer dois vértices podem ser ligados por uma curva ou por concatenação de várias curvas de  $A(G)$ .*

Um grafo completo é um exemplo trivial de grafo conexo, uma vez que todos os vértices estão ligados entre si. Além da conexidade, um grafo completo possui outras propriedades bem interessantes que serão abordadas neste trabalho.

Se for possível desenhar um grafo no plano sem que as arestas se cruzem, este grafo é dito planar. Uma observação importante é que apesar de um dado grafo admitir arestas cruzadas isso não significa que esse grafo não seja planar. Pode existir outro modo de desenhá-lo onde não ocorram arestas cruzadas.



Figura 9 – Representações do mesmo grafo planar com arestas cruzadas (a) e sem arestas cruzadas (b).



Fonte: Autor,2015

Essa noção de representação de um grafo planar, como desenhá-lo no plano sem que as arestas se intersectem, pode ser generalizada para uma superfície qualquer. Quando isto ocorrer, dizemos que o grafo é realizável nessa superfície.

**Definição 2.7** (Realização). *Seja  $S$  uma superfície, um arco aberto em  $S$  é a imagem do homeomorfismo  $\gamma : (0, 1) \rightarrow S$ . Dado um grafo  $G$  com  $n$  vértices  $v_1, \dots, v_n$  e  $m$  arestas  $a_1, \dots, a_m$ , uma realização de  $G$  em  $S$  é um subespaço de  $S$*

$$G(S) = \cup_{i=1}^n v_i(S) \cup \cup_{j=1}^m a_j(S),$$

tal que

1.  $v_1(S), \dots, v_n(S)$  são  $n$  distintos pontos de  $S$ .
2.  $a_1(S), \dots, a_m(S)$  são  $m$  arcos abertos em  $S$ , dois a dois disjuntos.
3. Se  $a_k = (v_i, v_j)$  então o arco aberto  $a_k(S)$  têm  $v_i(S)$  e  $v_j(S)$  como pontos extremos, para todo  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  e  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

A condição 1 implica que cada vértice do grafo corresponde a um ponto da superfície. E as condições 2 e 3 que cada aresta corresponde a uma curva simples em que nenhum par de curvas se intersectam em nenhum ponto, com exceção dos respectivos pontos extremos.

Figura 10 – Duas realizações do grafo  $K_4$  no toro.



Fonte: Autor,2015

A realização de um grafo  $G$  numa superfície  $S$  proporciona a partição dessa superfície nas componentes conexas de  $S - A(G)$ . Cada uma das componentes conexas deste conjunto chama-se face.

**Definição 2.8** (Realização Celular). *A realização de um grafo  $G$  diz-se celular se todas as faces criadas por essa realização são homeomorfas à  $\mathbb{R}^2$ . O conjunto destas faces denota-se por  $F(G)$ .*

Com a definição acima pode-se notar que as duas realizações de  $K_4$  apresentadas na figura 10 nenhuma delas são uma realização celular.

Outro importante atributo de um grafo é o seu gênero. Mais adiante apresentaremos um importante resultado para o gênero de grafos completos.

**Definição 2.9** (Gênero do Grafo). *Chama-se de gênero de um grafo  $G$ , denotado por  $g(G)$ , o menor índice da sucessão de superfícies  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_g, \dots$  em que  $G$  é realizável, onde o índice  $g$  denota o gênero da superfície  $S_g$ .*

Uma consequência direta desta definição é que para qualquer grafo planar  $G$ ,  $g(G) = 0$ . E se a superfície é fechada e orientável, um fato bastante conhecido sobre o gênero do grafo, é a sua relação com o número de vértices, arestas e faces:

**Teorema 2.2.1** (Fórmula de Euler). *Se  $G$  é um grafo conexo, então*

$$|V(G)| - |A(G)| + |F(G)| = 2(1 - g(G)).$$

Supondo que  $G$  é um grafo conexo tal que  $|V(G)| \geq 3$  e admite uma realização celular numa superfície orientável, então

$$3|F(G)| \leq 2|A(G)|$$

e, por aplicação do teorema acima conclui-se que

$$g(G) \geq \frac{1}{6}|A(G)| - \frac{1}{2}|V(G)| + 1.$$

No caso particular em que  $G$  é um grafo completo

$$g(G) \geq \lceil \frac{(|V(G)| - 3)(|V(G)| - 4)}{12} \rceil$$

onde,  $\lceil \cdot \rceil$  é a notação para maior inteiro.

**Teorema 2.2.2** (Ringel-Youngs). *Se  $n \geq 3$ , então  $g(K_n) = \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil$ .*

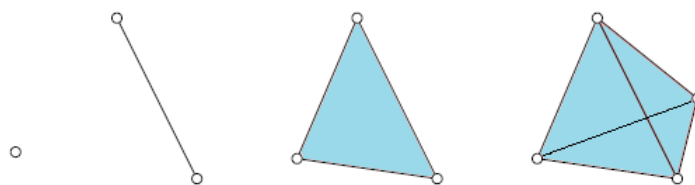
O resultado acima é conhecido como conjectura de Heawood (4), que embora formulado em 1890, apenas foi provada em 1968 por Ringel e Youngs (5).

## 2.3 Complexo Simplicial

Um triângulo em  $\mathbb{R}^2$  é o polígono com menor número de vértices e arestas, e o tetraedro em  $\mathbb{R}^3$  é o poliedro que possui menos vértices, arestas e faces. Uma generalização em outras dimensões é o conceito de simplexo.

**Definição 2.10** (*k*-simplexo). *Um  $k$ -simplexo é o fecho convexo de  $k + 1$  pontos de  $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ . O número  $k$  é chamado dimensão do simplexo e denotamos o simplexo por  $[v_0, v_1, \dots, v_k]$ .*

Figura 11 – Simplexos de dimensões 0, 1, 2 e 3.



Fonte: Autor, 2015

**Definição 2.11** (*k*-face). *Seja  $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_l]$  um simplexo. O simplexo  $\tau$  determinado por  $k + 1$  pontos do conjunto  $\{v_0, v_1, \dots, v_l\}$  com  $k < l$  é chamado  $k$ -face de  $\sigma$ . Essa relação denota-se por  $\sigma \geq \tau$ .*

De acordo com esta definição as 0-faces de 1-simplexo são seus vértices e as 1-faces de um 2-simplexo são suas arestas.

Uma vez definido os simplexos, vamos determinar agora as ligações entre eles. Estas são estabelecidas satisfazendo algumas propriedades.

**Definição 2.12** (Complexo Simplicial). *Um complexo simplicial  $\mathcal{K}$  é um conjunto finito de simplexos de forma que:*

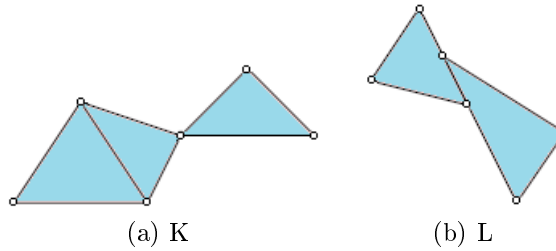
1. se o simplexo  $\sigma \in \mathcal{K}$  e  $\sigma \geq \tau$ , então  $\tau \in \mathcal{K}$ ;
2. se os simplexos  $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ , então  $\sigma \cap \tau = \emptyset$  ou  $\sigma \cap \tau \geq \sigma$  e  $\sigma \cap \tau \geq \tau$ .

A condição 1 diz que as  $k$ -faces de um simplexo também pertencem ao complexo simplicial. E a condição 2 da definição garante que não existem interseções que não sejam  $k$ -faces entre os simplexos do complexo simplicial.

Por exemplo, a interseção de um 2-simplexo com algum outro simplexo pode ser apenas vértices ou arestas e a interseção de um 1-simplexo com outro simplexo se restringe apenas a vértices.

A figura 12 ilustra duas coleções de simplexos. A coleção  $K$  composta por três 2-simplexo e suas faces é um exemplo de complexo simplicial, enquanto a coleção  $L$  não é um complexo simplicial, pois a interseção dos simplexos não é vazia e também não é uma face dos simplexos.

Figura 12 – Coleção de simplexos de dimensões 0, 1 e 2.



Fonte: Autor, 2015

**Definição 2.13** (Dimensão). *Seja  $\mathcal{K}$  um complexo simplicial. A dimensão de  $\mathcal{K}$ , denotada por  $\dim(\mathcal{K})$ , é dada por*

$$\dim(\mathcal{K}) = \max\{\dim(\sigma); \sigma \text{ é um simplexo de } \mathcal{K}\}.$$

*Se  $\dim(\mathcal{K}) = k$ , então chamamos  $\mathcal{K}$  de  $k$ -complexo simplicial ou complexo simplicial  $k$ -dimensional.*

O complexo simplicial  $K$  da figura 12, possui simplexos de dimensão 0, 1 e 2, portanto  $K$  é um complexo simplicial bidimensional.

**Definição 2.14** (Espaço Gerado). *O espaço gerado por um complexo simplicial  $\mathcal{K}$ , denotado por  $\|\mathcal{K}\|$ , é a união de todos os simplexos de  $\mathcal{K}$  com a topologia herdada de  $\mathbb{R}^n$ .*

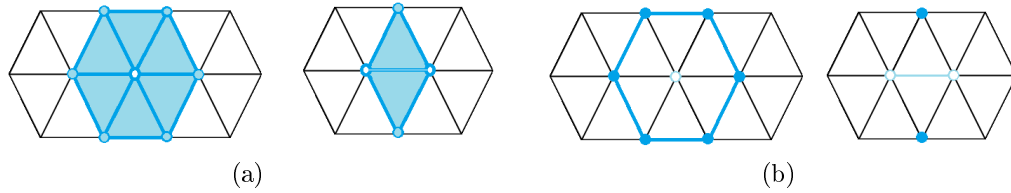
Subconjuntos da coleção de simplexos que definem um complexo simplicial podem também definir um complexo simplicial. A seguir exibiremos importantes subconjuntos de simplexos, denominados *estrela* e *link*, em que isto se verifica.

**Definição 2.15** (Estrela e Link). *Sejam  $\mathcal{K}$  um complexo simplicial e  $\sigma$  um simplexo de  $\mathcal{K}$ , então os seguintes conjuntos são complexos simpliciais em  $\mathcal{K}$ :*

1.  $estrela(\sigma) = \{\tau \in \mathcal{K}; \tau \geq \sigma\};$
2.  $link(\sigma) = \{\tau \in estrela(\sigma); \tau \cap \sigma = \emptyset\}.$

A figura 13 ilustra a *estrela* e o *link* de um vértice e de uma aresta em um complexo simplicial bidimensional.

Figura 13 – Complexo simpliciais: *estrela* (a) e *link* (b) de vértice e de aresta.



Fonte: Autor,2015

Nós introduziremos agora perações que modificam um complexo simplicial, criando novos vértices ou eliminando arestas, estas são chamadas subdivisão e contração, respectivamente.

**Definição 2.16** (Subdivisão). *Seja  $\mathcal{K}$  um complexo simplicial. A subdivisão de  $\mathcal{K}$ , é definida como o complexo simplicial  $\mathcal{L}$ , tal que  $|\mathcal{K}| = |\mathcal{L}|$  e cada simplexo de  $\mathcal{L}$  está contido num simplexo de  $\mathcal{K}$ .*

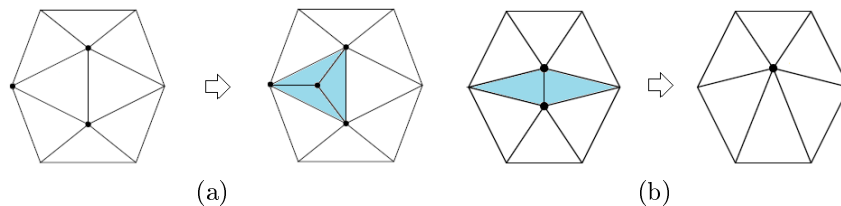
Tomando  $Vert(\mathcal{K})$  como o conjunto de vértices de  $\mathcal{K}$  e considerando  $a, b \in Vert(\mathcal{K})$  e  $c \notin Vert(\mathcal{K})$ . Para descrever a contração da aresta  $ab$  no vértice  $c$ , defini-se uma função vértice  $f_c$  que leva os vértices  $a$  e  $b$  para  $c$  e leva todos os outros vértices para si:

$$f_c(v) = \begin{cases} c, & \text{se } v \in \{a, b\}, \\ v, & \text{se } v \notin \{a, b\}. \end{cases}$$

Esta função vértice  $f_c$  pode ser estendida para todos os simplexos  $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_k]$  de  $\mathcal{K}$  definindo um novo simplexo  $f_c(\sigma) = [f_c(v_0), f_c(v_1), \dots, f_c(v_k)]$ .

**Definição 2.17** (Contração). *Sejam  $\mathcal{K}$  um complexo simplicial,  $ab$  uma aresta de  $\mathcal{K}$  e  $c$  um vértice não pertencente a  $\mathcal{K}$ . A função contração,  $\varphi_{ab} : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$ , é a operação que muda  $\mathcal{K}$  para  $\mathcal{L} = \{f_c(\sigma); \sigma \in \mathcal{K}\}$ .*

Figura 14 – Subdivisão de um triângulo (a) e contração de uma aresta (b).



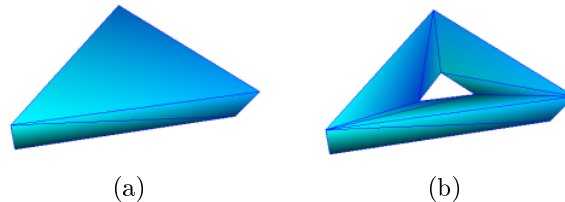
Fonte: Autor,2015

### 3 Triangulações

Neste trabalho definiremos triangulação de uma superfície por meio de complexo simplicial, pois estamos particularmente interessados na topologia da superfície.

**Definição 3.1** (Triangulação). *Uma triangulação de uma superfície  $S$  é um complexo simplicial bidimensional  $\mathcal{T}$  tal que  $\|\mathcal{T}\|$  é homeomorfo a  $S$ .*

Figura 15 – Triangulação da esfera (a) e do toro (b).



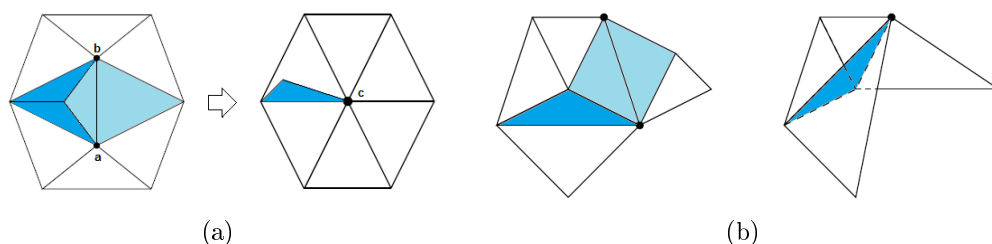
Fonte: Autor,2015

A triangulação é uma maneira de decomposição bastante utilizada, já que os triângulos são estruturas lineares extremamente simples. Dessa forma, gostaríamos de saber quando é possível obtermos a triangulação de uma superfície (1).

**Teorema 3.0.1** (Radó). *Qualquer superfície compacta pode ser triangulada.*

Vimos no capítulo 2 uma importante operação realizada sobre complexos simpliciais, a contração de arestas. Uma interessante observação é que podem ocorrer situações degeneradas quando fazemos uma contração em arestas de uma triangulação, como ilustramos na figura 16. No caso degenerado 16(a), uma aresta do complexo simplicial resultante será adjacente a quatro triângulos, e no caso degenerado 16(b) houve uma inversão de um triângulo, causando uma dobra por cima de outro triângulo.

Figura 16 – Contração de arestas que modificam a topologia da triangulação.



Fonte: Autor,2015

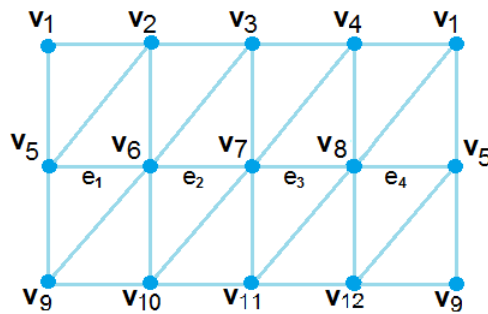
Nós gostaríamos de fazer uma contração de aresta somente quando não há nenhuma alteração resultante na topologia, a este caso diremos que a aresta é colapsável. Edelsbrunner (12) estabelece a *condição de link* para validar contração da aresta:

**Teorema 3.0.2** (Edelsbrunner). *Seja  $\mathcal{T}$  uma triangulação e  $ab$  uma aresta de  $\mathcal{T}$ . Então  $ab$  é colapsável se, e somente se,  $link(ab) = link(a) \cap link(b)$ .*

Se fixarmos um vértice numa triangulação, podemos traçar caminhos sobre esta triangulação através das arestas sempre voltando ao ponto fixado, ou seja, construir ciclos sobre a triangulação.

**Definição 3.2** (*k*-ciclo). *Um  $k$ -ciclo em uma triangulação consiste de  $k$  arestas  $e_1, \dots, e_k$  tal que  $e_i \cap e_j$  é um único vértice se e somente se  $|i - j| = 1$  ou  $|i - j| = k - 1$  e  $e_i \cap e_j = \emptyset$  caso contrário, para todo  $i, j = 1, \dots, k$  com  $i \neq j$ .*

Figura 17 – Triangulação de um cilindro com 12 vértices.

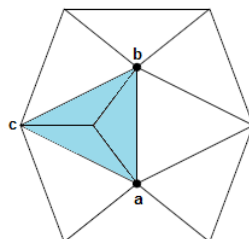


Fonte: Autor,2015

Na triangulação da figura 17 as arestas  $e_1, e_2, e_3, e_4$  formam um 4-ciclo, já que somente nos casos  $e_1 \cap e_2 = v_6$ ,  $e_2 \cap e_3 = v_7$ ,  $e_3 \cap e_4 = v_8$  e  $e_1 \cap e_4 = v_5$  a interseção é um vértice e nos demais a interseção é vazia, e portanto as condições são satisfeitas.

Outro exemplo são faces de uma triangulação, toda face é um 3-ciclo. No entanto, pode haver 3-ciclo que não são faces da triangulação como pode ser visto na figura 18.

Figura 18 – Um 3-ciclo não vinculado a uma face na triangulação.



Fonte: Autor,2015

Se uma aresta está contida em mais de dois 3-ciclo, então pelo menos um 3-ciclo não está vinculado a uma face, e portanto, nós não poderíamos contrair a aresta (13). Isto motiva o resultado de Schipper (14), uma equivalência a *condição de link* dada no teorema 3.0.2.

**Teorema 3.0.3** (Schipper). *Qualquer aresta  $ab$  de uma triangulação  $\mathcal{T}$  é não colapsável se, e somente se,  $ab$  é aresta de pelo menos três 3-ciclo ou  $\mathcal{T}$  é uma triangulação da esfera com quatro vértices.*

### 3.1 Triangulação Minimal

Um problema clássico da Teoria dos Grafos diz respeito à coloração de mapas. Pretende-se saber qual o menor número de cores necessárias para colorir um mapa de modo que não existam países, com fronteira comum da mesma cor. Uma forma de modelar este problema consiste na construção de um grafo relacionando vértices com os países do mapa e aresta com todos os pares de países com fronteira comum.

**Definição 3.3** (Coloração). *Dado um grafo  $G$ , os conjuntos  $V$  de vértices e  $A$  de arestas e um conjunto  $C$  de cores defini-se por coloração de  $G$  uma função*

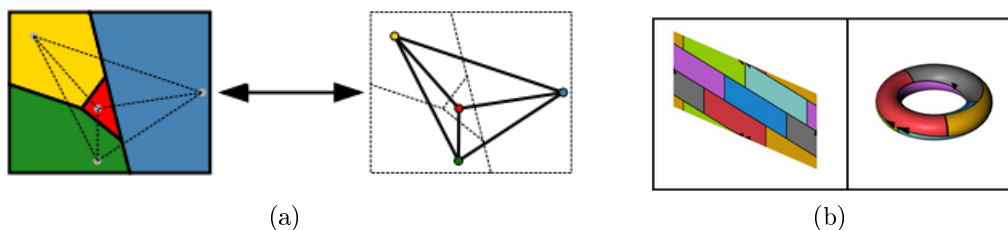
$$\phi : V \rightarrow C,$$

tal que para todo  $u, v \in V$  temos que  $\phi(u) \neq \phi(v)$  se  $uv \in A$ .

Com a terminologia acima, o problema de colorir mapas se traduz por determinar o número cromático  $\chi(G)$ , que se define como sendo

$$\chi(G) = \min\{|C|; \phi : V \rightarrow C \text{ é uma coloração de vértices em } G\}.$$

Figura 19 – Coloração da esfera com 4 cores (a) e do toro com 7 cores (b).



Fonte: Disponível no trabalho de Razafindrazaka (3).

A solução desse problema também foi provada por Ringel e Youngs. Essencialmente, o problema de colorir um mapa é equivalente a encontrar o gênero do grafo que associamos ao mapa.



**Teorema 3.1.1** (Ringel-Youngs). *Para todo grafo  $G$  com gênero  $g$ ,  $\chi(G) = \lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \rfloor$ .*

Se supurmos que todas as faces do grafo são triangulares, obteríamos uma triangulação da superfície com a menor quantidade de vértices possível. De fato isto é provado por Jungerman e Ringel (15):

**Teorema 3.1.2** (Jungerman-Ringel). *Seja  $S$  uma superfície fechada e orientável com gênero  $g$  e  $T(S)$  o número de triângulos da menor triangulação de  $S$ . Então*

$$T(S) = 2 \lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \rfloor + 4(g - 1) \text{ se } g \neq 2$$

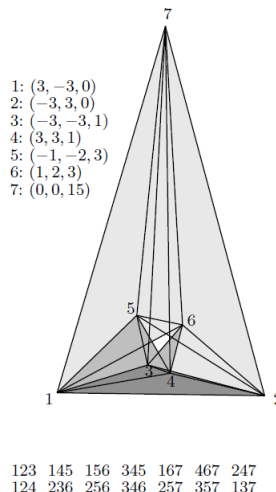
e

$$T(S) = 24 \text{ se } g = 2.$$

Esta triangulação é conhecida na literatura como triangulação minimal ou triangulação vértice-minimal. No mesmo trabalho de Jungerman e Ringel (15), que demonstra o teorema, os autores constroem exemplos de triangulações minimais para superfícies orientáveis. E nesta direção, existem alguns trabalhos para superfícies de baixo gênero.

Uma das primeiras referências de triangulação minimal é a triangulação do toro com 7 vértices apresentada por Möbius (2). Desta Császár constrói uma realização geométrica em  $\mathbb{R}^3$ , que foi chamada Toro de Császár (8). Hoje sabe-se que há exatamente 72 diferentes tipos de realizações geométricas da triangulação minimal do toro descrita por Möbius (16).

Figura 20 – Toro de Császár: 7 vértices, 21 arestas e 14 faces.



Fonte: Disponível no trabalho de Lutz (17).

Outros autores apresentam triangulações minimais para superfícies orientáveis de gênero de dois a seis (18, 19). Com gênero de dois a quatro todas tem uma realização geométrica (20, 17, 21), com gênero 5 pelo menos três não têm realizações geométricas (22), e todas de gênero 6 não são geometricamente realizadas (23).

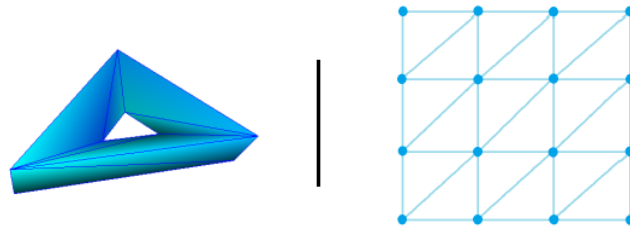
## 3.2 Triangulação Irredutível

Para qualquer superfície fechada há muitas triangulações possíveis com número diferente de vértices. Para obter uma triangulação com um número pequeno de vértices poderíamos começar com uma triangulação arbitrária de uma superfície e repetidamente modificar a triangulação de tal maneira que o resultado é menor e ainda descreve a superfície.

Uma operação para modificar uma triangulação é colapsando uma aresta. Intuitivamente, nós escolhemos uma aresta qualquer e pois contraí-la não alterará a topologia. Esta triangulação que pode ser alcançada por repetidos colapsos de arestas chamamos de triangulação irredutível.

**Definição 3.4** (Triangulação Irredutível). *Seja  $\mathcal{T}$  uma triangulação e  $ab$  uma aresta em  $\mathcal{T}$ . Dizemos que  $\mathcal{T}$  é irredutível, se a contração  $ab$  altera a topologia de  $\mathcal{T}$ . Em outras palavras, nenhuma aresta de  $\mathcal{T}$  é colapsável.*

Figura 21 – Triangulação irredutível do toro com 9 vértices.



Fonte: Autor, 2015

As triangulações irredutíveis foram inicialmente estudadas individualmente. Steinitz e Rademacher (24) mostram que  $K_4$  é a única triangulação irredutível da esfera e que todas as triangulações da esfera podem ser geradas por uma sequência de subdivisões a partir de  $K_4$ . Posteriormente, Lavrenchenko (25) apresenta 21 triangulações irredutíveis para o toro com 9 vértices. E Sulanke (26) constrói para o bitoro 865 triangulações irredutíveis.

Barnette e Edelson (9) provaram que para qualquer superfície fechada, há um número finito de triangulações irredutíveis. Além disso, podemos obter qualquer triangulação dessa superfície por sucessivas subdivisões a começar de sua triangulação irredutível (27). E o número máximo de vértices das triangulações irredutíveis é linear no gênero da superfície (13, 10).

Haijo Schipper (14) apresenta um algoritmo para obter de forma eficiente uma triangulação irredutível de uma superfície fechada e orientável a partir de uma triangulação dada dessa superfície por uma sequência de colapsos.

A triangulação irredutível de uma superfície pode não ser uma triangulação minimal dessa superfície, por exemplo, o toro possui uma triangulação irredutível com 9 vértices, mas 7 vértices são suficientes para obter sua triangulação. No entanto, há um limite superior para quantidade de vértices das triangulações irredutíveis.

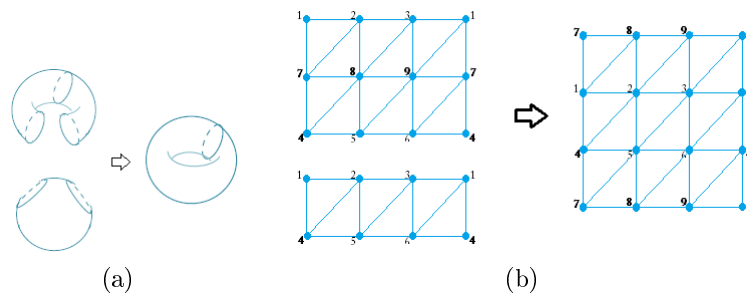
Nakamoto e Ota (13) apresentam uma prova construtiva de que o número de vértices é no máximo  $171g - 72$  para a triangulação irredutível de uma superfície fechada e orientável com gênero  $g$ . E recentemente, Joret e David (10) dão uma melhor cota para o número de vértices,  $13g - 4$ .

O trabalho de Schipper (14) também enumera problemas que permanecem abertos. Primeiro, há uma grande diferença em relação a quantidade de vértices entre a menor triangulação irredutível de uma superfície e o limite superior para a maior triangulação irredutível. Outro problema é o número de triangulações irredutíveis para uma determinada superfície. Sabe-se que a esfera tem uma única triangulação irredutível (24), o toro 22 e o bitoro 865 com 10 vértices (28). O número de triangulações irredutíveis de outras superfícies ou fórmulas gerais são desconhecidos. Um problema ainda mais difícil é o problema de encontrar todas as triangulações irredutíveis.

**Exemplo 3.1** (Uma construção de triangulações irredutíveis).

É possível construir triangulações irredutíveis para superfícies fechadas e orientáveis de gênero arbitrário usando uma triangulação da esfera e colando várias cópias de triangulações de alças de modo que a cada colagem a triangulação resultante é uma triangulação irredutível.

Figura 22 – Toro gerado por adição de uma alça à esfera (a) e sua triangulação irredutível com 9 vértices (b).



Fonte: Autor, 2015

Esta triangulação irredutível tem  $3g + 6$  vértices, onde  $g$  é o gênero da superfície resultante, pois a cada colagem de triangulações de alças são adicionados somente três novos vértices e iniciamos com uma triangulação da esfera com seis vértices.

## 4 Algoritmos

Neste capítulo buscamos descrever como construir triangulações para superfícies fechadas e orientáveis com poucos vértices. Primeiro abordaremos a construção de Ringel quando tais triangulações tem exatamente a quantidade mínima necessária para descrevê-las. Depois nós construímos triangulações com o número de vértices dado em função do gênero da superfície, inspirados na operação de soma conexa entre duas superfícies, e posteriormente reduziremos esta quantidade de vértices através de colapsos das arestas por meio do algoritmo de Schipper.

### 4.1 Triangulação Minimal: Casos 0, 3, 4 e 7 módulo 12

O teorema de Ringel e Youngs (5) nos diz que para cada  $n \geq 4$  existe uma triangulação com  $n$  vértices de uma superfície orientável de gênero no máximo  $(n-3)(n-4)/12$ . E o máximo é atingido sempre que  $n$  é congruente com 0, 3, 4 ou 7 mod 12, para estes casos a triangulação é chamada de triangulação neighborly, sugerindo que todo vértice tem sua vizinhança completa, isto é, cada vértice da triangulação está ligado com todos os demais vértices. Estas são muito interessantes, e tem recebido bastante atenção.

O caso  $n = 4$  é trivial, realizado pelo tetraedro. O primeiro caso relevante é  $n = 7$ , onde existe combinatoriamente uma única configuração, o Toro de Möbius com 7 vértices (2). A triangulação de Möbius foi redescoberta várias vezes (29, 30), e realizada por Császár (8). Para as triangulações neighborly com  $n \geq 12$  não são conhecidas realizações.

Em seu artigo de 1891, Heffter (31) provou este teorema para  $n \leq 12$ , em particular, ao fazer isso ele introduziu alguns dos conceitos básicos e notações, e assim preparou ferramentas para a prova completa. A prova completa utiliza argumentos combinatórios complexos divididos em doze casos, de acordo com  $n \bmod 12$ , com algumas construções necessárias para casos esporádicos.

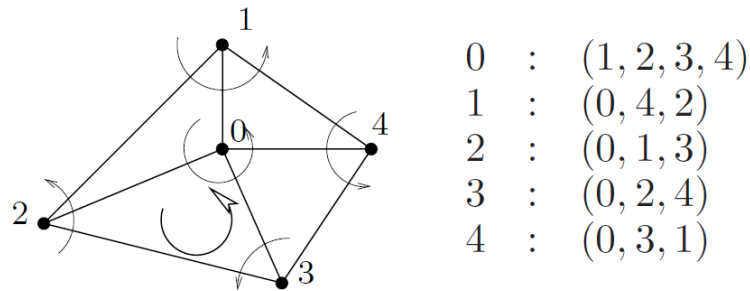
Nós vamos esboçar a construção de Ringel para o mais estudado dos doze casos, o caso de  $n \equiv 7 \bmod 12$ . Nossa exposição segue seu livro (32), no qual também constam os outros onze casos. Esta produz triangulações que têm gênero que cresce de forma quadrática com o número de vértices.

De acordo com Heffter uma superfície combinatoria é completamente determinada se rotular seus vértices e para cada vértice descrever o ciclo de seus vizinhos na ordem da orientação horária ou anti-horária, um esquema de rotação.

Por exemplo, a figura 23 mostra uma pirâmide vista de cima que consiste em um quadrilátero e quatro triângulos com um esquema de rotação que nos diz que 1, 2, 3, 4 são

os vértices vizinhos de modo cíclico do vértice 0. Em particular, poderia ter escrito (2, 3, 4, 1) em vez de (1, 2, 3, 4), uma vez que este indica a mesma permutação cíclica. Para garantir que um esquema desta forma realmente descreve uma superfície, é necessário que satisfaça a condição de interseção: qualquer aresta pertence somente a duas faces (31).

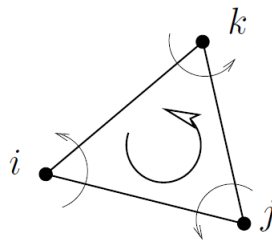
Figura 23 – Esquema de rotação definido para 4 vértices.



Fonte: Disponível no trabalho de Ringel (32).

No caso de uma triangulação as condições de interseção são bastante fáceis de descrever. De fato, se  $j, k$  aparecem adjacentes na lista cíclica de vizinhos de um vértice  $i$ , então isso significa que  $(i, j, k)$  é um triângulo orientado da superfície, assim,  $k, i$  têm que ser adjacentes nesta ordem no ciclo de vizinhos de  $j$ , e da mesma forma  $i, j$  tem que aparecer na lista para  $k$ , veja figura 24.

Figura 24 – Esquema de adjacência para um triângulo orientado.



Fonte: Disponível no trabalho de Ringel (32).

Em termos de esquema de rotação a condição de interseção diz que se a linha para o vértice  $i$ , que equivale ao link do vértice  $i$  na triangulação, é

$$i : (\dots, j, k, \dots)$$

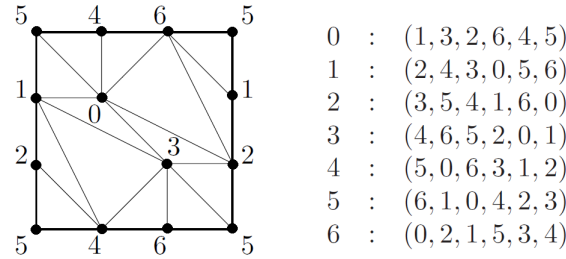
então, nas linhas para  $j$  e  $k$ , temos que ter

$$j : (\dots, k, i, \dots)$$

$$k : (\dots, i, j, \dots).$$

De acordo com Heffter (31) para  $n = 12s + 7$  onde  $s \geq 0$ , o esquema de rotação para um vértice fornece cada um dos outros esquemas para os demais vértices a partir da adição módulo  $n$ . Por exemplo, para  $s = 0$  se a linha para o vértice 0 for dada por  $(1, 3, 2, 6, 4, 5)$  então a linha para o  $i$ -ésimo vértice será  $(1 + i, 3 + i, 2 + i, 6 + i, 4 + i, 5 + i)$  com  $i = 1, \dots, 6$ . Esta triangulação com 7 vértices é o Toro de Möbius (2) da figura 25.

Figura 25 – Esquema de rotação para  $s = 0$ .



Fonte: Autor, 2015

Agora vamos supor que temos um esquema de rotação para  $n$  vértices com a mesma ideia usada para construir o Toro de Möbius,

$$0 : (s_1, s_2, \dots, s_{n-2}, s_{n-1})$$

e

$$i : (s_1 + i, s_2 + i, \dots, s_{n-2} + i, s_{n-1} + i)$$

com  $i = 1, \dots, n - 1$  e os  $s_i$  fixados.

Se na linha do vértice 0 tivermos

$$0 : (\dots, j, k, \dots)$$

então a condição interseção fornece que

$$j : (\dots, k, 0, \dots)$$

$$k : (\dots, 0, j, \dots)$$

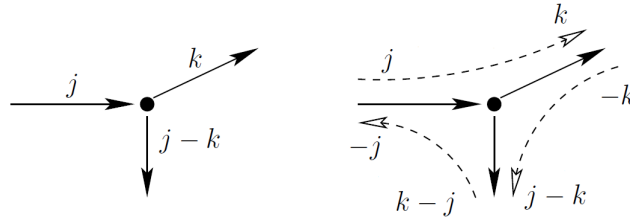
Como as linhas  $j$  e  $k$  são geradas por adição dos índices  $j$  e  $k$  a linha 0, temos que

$$0 : (\dots, k - j, -j, \dots)$$

$$0 : (\dots, -k, j - k, \dots).$$

Em outras palavras, se na vizinhança de 0, temos que " $k$  segue  $j$ ", então também " $-j$  segue  $k - j$ " e " $j - k$  segue  $-k$ ", onde todos os índices são interpretados módulo  $n$  e o sinal negativo indica que cada aresta no ciclo de vizinhos de 0 é percorrido duas vezes, num sentido neste ciclo e com sentido oposto fora dele.

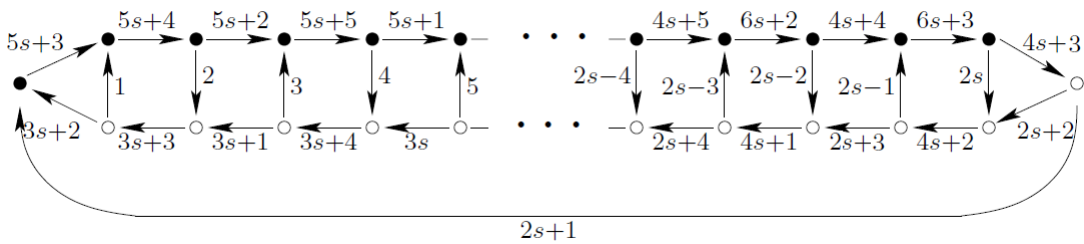
Figura 26 – Condição de fluxo.



Fonte: Disponível no trabalho de Ringel (32).

A propriedade que temos descrito é a estrutura utilizada para construir um grafo cúbico, todo vértice com valência três, em que a ordem cíclica na vizinhança de 0 pode ser definida a partir de um caminho no grafo cujas arestas satisfazem a condição de fluxo.

Figura 27 – Grafo cúbico.



Fonte: Disponível no trabalho de Ringel (32).

A figura 27 codifica a solução completa de Ringel para o caso  $n = 12s + 7$ . Ela descreve um grafo cúbico com  $2s + 4$  vértices e  $6s + 3$  arestas, onde

1. Rotula as aresta com  $\{1, 2, \dots, 6s + 3\}$  exatamente uma vez;
2. As arestas verticais são rotuladas por  $1, 2, 3, \dots, 2s$ .
3. As arestas horizontais inferiores são rotuladas uma por  $2s + 1$  e as demais alternadamente tomadas a partir das seqüências

$$2s + 2, 2s + 3, 2s + 4, \dots, 3s, 3s + 1, 3s + 2$$

e

$$4s + 2, 4s + 1, 4s, \dots, 3s + 5, 3s + 4, 3s + 3.$$

4. As arestas horizontais superiores são rotuladas alternadamente tomadas a partir das seqüências

$$4s + 3, 4s + 4, 4s + 5, \dots, 5s, 5s + 1, 5s + 2, 5s + 3$$

e

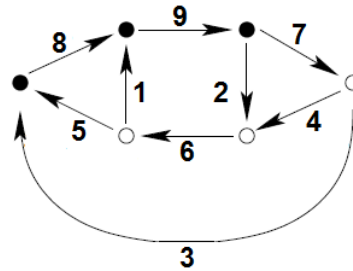
$$6s + 3, 6s + 2, 6s + 1, \dots, 5s + 6, 5s + 5, 5s + 4.$$

E a regra de construção da triangulação, andando sobre este grafo, é a seguinte:

1. Em cada vértice  $\bullet$  girar à esquerda para a próxima aresta no sentido horário da ordenação das arestas que estão adjacentes ao vértice, e para cada vértice  $\circ$ , girar à direita;
2. Marque com positivo o rótulo de cada aresta percorrido na direção da seta, ou negativo se for percorrido no sentido oposto da direção.

Faremos outro exemplo considerando agora quando  $s = 1$ , e portanto esta segunda superfície da sequência terá 19 vértices. Neste caso o grafo cúbico assume a forma como na Figura 28.

Figura 28 – Grafo cúbico para  $s = 1$ .



Fonte: Autor, 2015

Começamos nossa jornada na aresta 1 e avançamos na direção da seta. Assim, o primeiro rótulo que escreveremos é 1. No vértice preto nós temos que girar em sentido horário na aresta marcada 8. Como essa trajetória esta na direção inversa, anotamos -8. Indo assim, em um dado momento passaremos novamente pela aresta marcada 8, e desta vez anotaremos com o sinal positivo. Continuando, como estaremos num vértice preto girando em sentido horário retornaremos a aresta 1, e finalmente terminamos a viagem. A sequência de rótulos das arestas, será  $1, -8, -5, -6, -4, 3, 8, 9, 7, 4, -2, -9, -1, 5, -3, -7, 2, 6$ . Onde em módulo 19 é o mesmo que  $1, 11, 14, 13, 15, 3, 8, 9, 7, 4, 17, 10, 18, 5, 16, 12, 2, 6$ .

Esta sequência é o esquema de rotação em torno do vértice 0, todos os outros podem ser obtidos a partir desta por adição. Esta superfície tem 19 vértices, 171 arestas e 114 triângulos, portanto o gênero é 20. Curiosamente nesta superfície existem mais "buracos" do que vértices.

Este caminho leva a um único ciclo, em que cada aresta é percorrida em cada sentido apenas uma vez, de modo que cada valor em  $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(6s + 3)\}$  ocorre exatamente uma vez. Começando da aresta rotulada como 1, então a sequência que seguimos será

$$1, -(5s + 3), -(3s + 2), -(3s + 3), -(3s + 1), -(3s + 4), 3s, -(3s + 5), \dots$$



para obtermos a primeira linha do esquema de rotação para a triangulação com  $n = 12s + 7$  vértices.

O esquema de rotação produzido por Ringel, juntamente com a condição de interseção controla o gênero, e conseqüentemente a superfície. Se nós tomarmos um esquema de rotação aleatório, então isso produz superfícies aleatórias de gênero também aleatório.

## 4.2 Triangulação Irredutível: Triangulação com poucos vértices

Agora nós faremos uma descrição do algoritmo para obtermos triangulações irredutíveis de superfícies fechadas e orientáveis de gênero arbitrário com poucos vértices. Primeiro nós criamos uma triangulação para a superfície com quantidade de vértices próxima a oito vezes o gênero da superfície, e numa segunda etapa aplicamos o algoritmo de Schipper (14) para alcançarmos nosso objetivo de minimizar o número vértices.

A ideia geral do algoritmo de Schipper é colapsar arestas até não poder encontrar uma aresta colapsável, ou seja, a triangulação resultante ser irredutível. A cada iteração toma-se um vértice e decidi-se se existem arestas incidentes colapsáveis. Se for possível, colapsa-se a aresta incidente sobre ele e portanto o vértice desaparece. Caso contrário, não existem arestas incidentes colapsáveis e este será marcado como um vértice da triangulação irredutível.

---

### Algoritmo 1: Algoritmo de Schipper

---

**Entrada:** Triangulação  $\mathcal{T}$   
**Saída:** Triangulação irredutível  $\mathcal{T}'$   
**início**  
  Seja  $D$  uma lista vazia.  
  **para cada** *vértice*  $v$  **em**  $\mathcal{T}$  **faça**  
    Calcule a valência de  $v$   
    Insira  $v$  em  $D$  usando a valência de  $v$   
  **fim**  
  **enquanto**  $D$  *não é vazia* **faça**  
    Seja  $v$  o primeiro vértice de  $D$   
    **se** *existe uma aresta*  $uv$  *em*  $\mathcal{T}$  *colapsável* **então**  
      Colapse  $uv$   
      Atualize  $D$   
    **fim**  
    **senão**  
      Remova  $v$  de  $D$   
    **fim**  
  **fim**  
**fim**

---

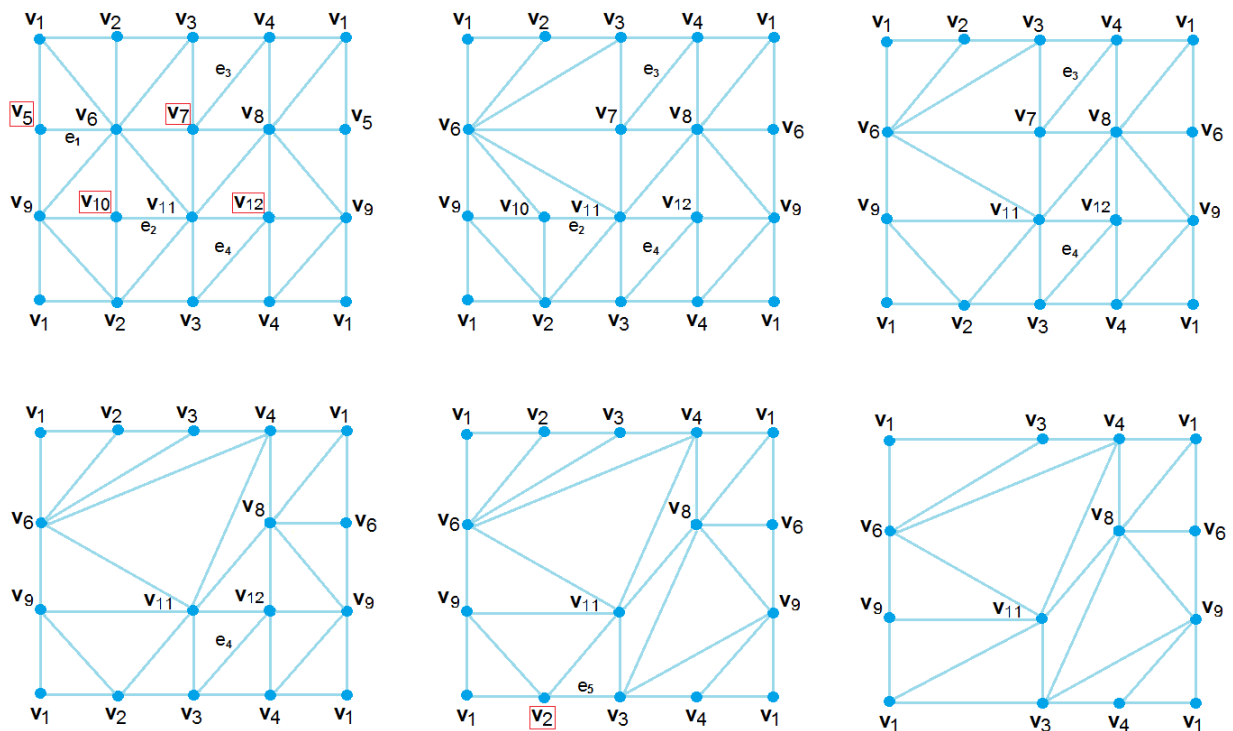
Fornecendo uma triangulação de uma superfície fechada e orientável, uma triangulação irreduzível é gerada eficientemente por Schipper se

1. Um acesso direto a uma aresta incidente em um vértice arbitrário ou à qualquer aresta pertencente a uma determinada face são possíveis;
2. E adicionar ou remover arestas ou faces, bem como visitar o *link* de um vértice ou de uma aresta podem ser feitas em tempo constante.

Se a triangulação  $\mathcal{T}$  têm  $n$  vértices, então o algoritmo computa em tempo  $O(n \log n)$  a triangulação irreduzível  $\mathcal{T}'$ , pois a sequência de colapsos esta definida por meio de uma fila de prioridade.

Na figura 29 mostramos o passo a passo de como o algoritmo obtém uma triangulação irreduzível para o toro com 7 vértices a partir da nossa triangulação com 12 vértices. Observe que os vértices  $v_5$  e  $v_{10}$  com valência 4 e  $v_7$  e  $v_{12}$  valência 5 são inicialmente os vértices de menor valência, e que no final do processo, o vértice  $v_2$  também com valência 5 é eliminado.

Figura 29 – Processo de execução do algoritmo de Schipper para uma triangulação do toro com 12 vértices.

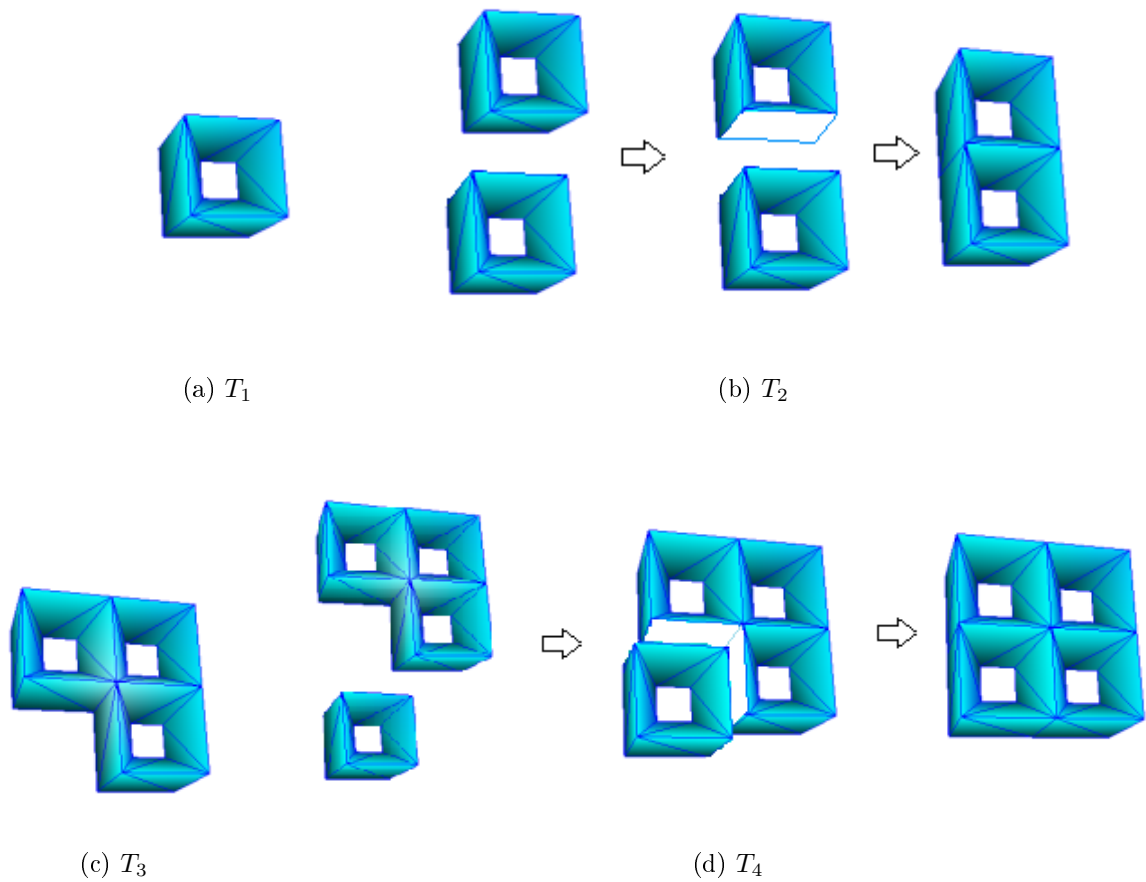


Para utilizarmos o algoritmo de Schipper é necessário construir a priori uma triangulação. Faremos isto inspirado na operação de soma conexa entre duas superfícies, pois do ponto de vista topológico podemos construir superfícies fechadas e orientáveis de gênero maior que um por meio de um número finito de somas conexas de toros.

Intuitivamente, considerando que a superfície e o toro não tem pontos em comum, recorte-se uma região circular em cada uma das duas superfícies e cole-se os bordos circulares gerados um no outro obtendo uma nova superfície.

Em termos das triangulações das superfícies também podemos efetuar esta operação. Esta é a ideia que usamos para construir uma triangulação para uma superfície de gênero arbitrário. Nossa construção utiliza uma triangulação do toro com 12 vértices, e faz repetidamente soma conexa com cópias deste toro transladado sempre num caminho espiral.

Figura 30 – Triangulações de superfícies fechadas e orientáveis de gênero um a três.



Fonte: Autor, 2015

---

**Algoritmo 2:** Triangulação de uma superfície orientável de gênero arbitrário

---

**Entrada:** O gênero  $g$  da superfície

**Saída:** Triangulação irreduzível com poucos vértices

**início**

**se** gênero igual a zero **então**

    | **retorna** Tetraedro

**fim**

**se** gênero igual a um **então**

    | **retorna**  $T_1$

**fim**

**senão**

    Faça  $T = T_1$

**enquanto** não atingir  $g$  **faça**

      | Translade  $T_1$  num movimento em espiral e faça soma conexa com  $T$

**fim**

**fim**

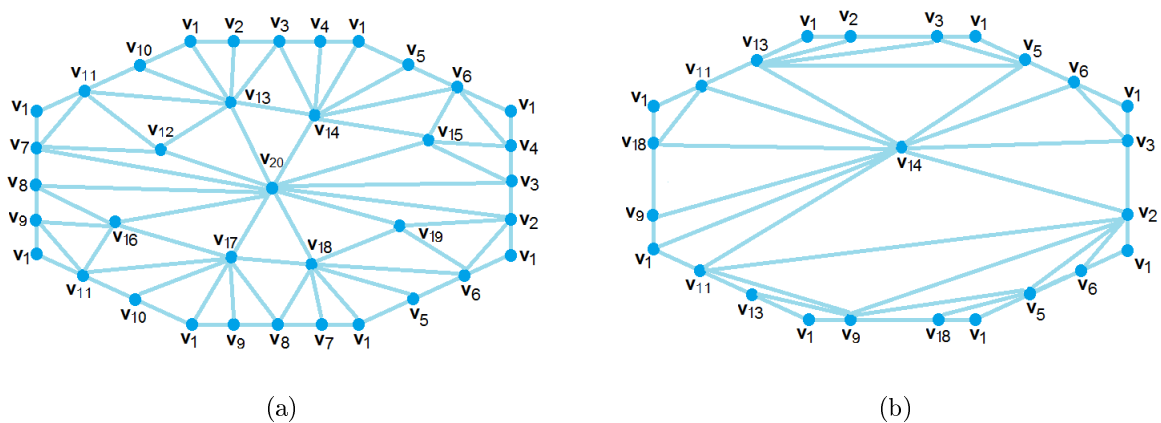
  Aplique o algoritmo de Schipper a triangulação criada.

**fim**

---

Na figura 31 apresentamos a triangulação obtida para o bitoro com dez vértices utilizando este nosso algoritmo apresentado acima, em 31(a) a triangulação inicialmente construída e em 31(b), triangulação resultante reduzido o número de vértices. Neste caso, assim também como acontece com o toro, a triangulação gerada é a triangulação minimal para esta superfície.

Figura 31 – Triangulação para o bitoro com dez vértices.



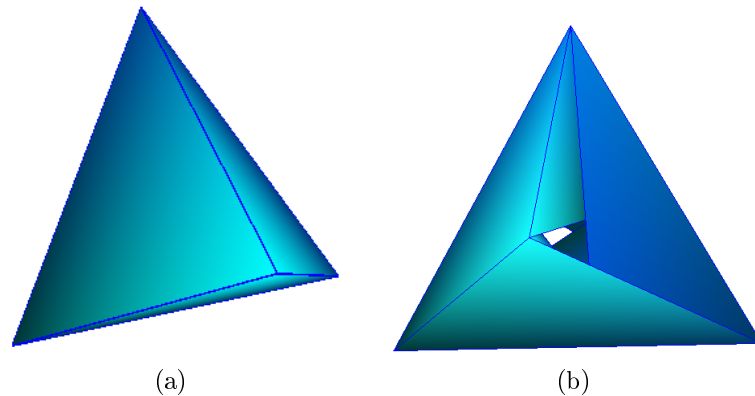
Fonte: Autor, 2015

## 5 Resultados

Nossa implementação foi feita utilizando a linguagem de programação C++ com saída em OpenGL. Esta faz uso da estrutura de dados Directed Edge (33) para armazenamento e manipulação dos vértices, arestas e faces da triangulação que são fundamentais para as operações de soma conexa e colapsos.

Na figura 32 mostramos a realização em  $\mathbb{R}^3$  das triangulações para a esfera com 4 vértices e o toro com 7 vértices obtidas com o algoritmo. No caso do toro este difere da realização dada por Császár em exatamente um vértice.

Figura 32 – Realização em  $\mathbb{R}^3$  das triangulações da esfera (a) e do toro (b).



Fonte: Autor, 2015

Para comparar nosso algoritmo, na segunda etapa onde o processo de redução do número de vértices é realizado com o algoritmo de Schipper nós o substituímos por percorrer todas as arestas da triangulação verificando a *condição de link* para validar o colapso, e se é possível colapse a aresta, caso contrário a mantenha na triangulação. Este processo é repetido até que nenhuma aresta seja colapsável, o qual chamaremos Força bruta.

Na tabela a seguir são apresentados como dada a triangulação inicial (INI) por nós construída na primeira etapa do algoritmo qual a redução em relação ao número de vértices utilizando o algoritmo de Schipper (ASH) e o algoritmo Força bruta (AFB), em cardinalidade e em porcentagem.

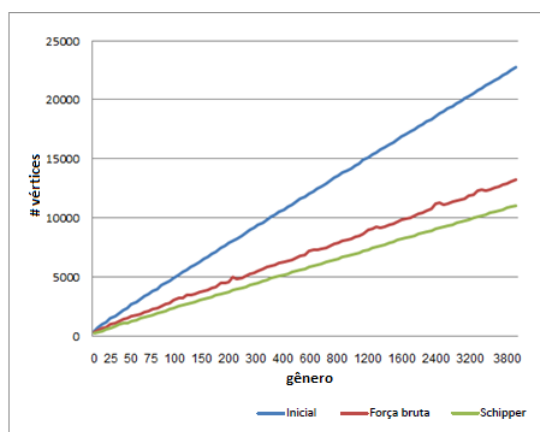
Como pode ser visto na Tabela 1 o algoritmo Força bruta apresenta em média uma redução de 34%, enquanto usando o algoritmo de Schipper atinge 51% em média. Vale a pena notar que no caso das triangulações do toro e do bitoro o número de vértices resultante é a quantidade mínima necessária para obtermos triangulações destas superfícies.

Tabela 1 – Resultados obtidos para triangulações de superfícies de gênero 1 a 10.

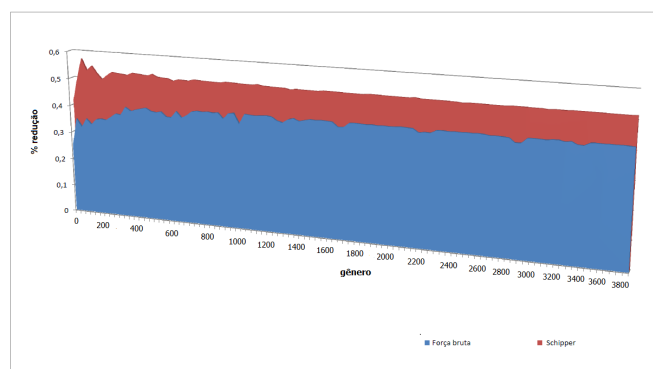
Gênero	# Vértices			% Redução	
	INI	AFB	ASH	AFB	ASH
1	12	9	7	0.25	0.41
2	20	13	10	0.35	0.50
3	28	19	12	0.32	0.57
4	34	22	16	0.35	0.52
5	42	28	19	0.33	0.54
6	48	31	23	0.35	0.52
7	56	36	28	0.35	0.50
8	62	40	30	0.35	0.51
9	68	43	32	0.36	0.52
10	76	47	36	0.38	0.52

Fonte: Autor, 2015

Esta margem de redução da quantidade de vértices também é observada quando aplicados às superfícies de gênero de 1 a 3500 como mostramos nos gráficos apresentados na figura 33.



(a)



(b)

Figura 33 – Resultados obtidos para triangulações de superfícies de gênero 1 a 3500.

Fonte: Autor, 2015

## 6 Conclusão

Neste trabalho analisamos como construir do ponto de vista combinatório triangulações de superfícies fechadas e orientáveis com poucos vértices. É claro que estas superfícies podem ser trianguladas, mas não é evidente quantos vértices seriam necessários para isto.

Esta questão da minimalidade do número de vértices foi resolvida por Ringel ao demonstrar o Teorema Coloração de Mapas. E nos casos em que o número de vértices do mapa é divisível por 12 ou deixa como resto 3, 4, 7 sua solução produz de imediato as triangulações com exatamente estas quantidades de vértices, que se restringe a algumas superfícies em termos de seu gênero. Para obtermos triangulações de superfícies de gênero arbitrários utilizamos outra abordagem, triangulações irreduzíveis, aplicando o algoritmo devido a Schipper a triangulações por nós criadas obtendo triangulações com número de vértices próximo a quatro vezes o gênero da superfície.

Como trabalhos futuros destacamos:

1. Obter melhorias do ponto de vista algorítmico nas interessantes construções das triangulações minimais;
2. Obter triangulações com poucos vértices, não necessariamente irreduzíveis, mas com boas propriedades topológicas como ter todos os vértices com valência 6 ou próximo;
3. Obter realizações das triangulações em  $\mathbb{R}^3$ , quando possível.

# Referências

- 1 AHLFORS, L. V.; SARIO, L. *Riemann Surfaces*. Princeton: Princeton University Press, 1960. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 20.
- 2 MÖBIUS, A. F. Mittheilungen aus möbius' nachlass: I. zur theorie der polyëder und der elementarverwandtschaft. *Gesammelte Werke II (F. Klein)*, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, v. 1, p. 519–559, 1886. Citado 4 vezes nas páginas 8, 23, 26 e 28.
- 3 RAZAFINDRAZAKA, F. H. *Visualization of High Genus Regular Maps*. Dissertação (Mestrado) — Freie Universität Berlin, Berlin, Alemanha, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 22.
- 4 HEAWOOD, P. J. Map colour theorem. *Quart. J. Math.*, v. 24, p. 332–338, 1890. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 16.
- 5 RINGEL, G.; YOUNGS, J. W. T. Solution of the heawood map-coloring problem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 60, n. 2, p. 438–445, 1968. Citado 3 vezes nas páginas 9, 16 e 26.
- 6 APPEL, K.; HAKEN, W. Every planar map is four colourable, part i: discharging. *Illinois J. Math.*, v. 21, p. 429–490, 1977. Citado na página 9.
- 7 APPEL, K.; HAKEN, W.; KOCH, J. Every planar map is four colourable, part ii: reducibility. *Illinois J. Math.*, v. 21, p. 491–567, 1977. Citado na página 9.
- 8 CSÁSZÁR, A. A polyhedron without diagonals. *Acta Univ. Szeged, Sect. Sci. Math*, v. 13, p. 140–142, 1949. Citado 3 vezes nas páginas 9, 23 e 26.
- 9 BARNETTE, D.; EDELSON, A. L. All 2-manifolds have finitely many minimal triangulations. *Israel Journal of Mathematics*, Springer-Verlag, v. 67, n. 1, p. 123–128, 1989. ISSN 0021-2172. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02764905>>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 24.
- 10 JORET, G.; WOOD, D. R. Irreducible triangulations are small. *J. Comb. Theory Ser. B*, Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA, v. 100, n. 5, p. 446–455, set. 2010. ISSN 0095-8956. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jctb.2010.01.004>>. Citado 3 vezes nas páginas 10, 24 e 25.
- 11 MASSEY, W. S. *Algebraic Topology, an introduction*. New York: Spriger Verlag, 1977. Citado na página 13.
- 12 DEY, T. K. et al. Topology preserving edge contraction. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, v. 66, p. 23–45, 1998. Citado na página 21.
- 13 NAKAMOTO, A.; OTA, K. Note on irreducible triangulations of surfaces. *J. Graph Theory*, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, v. 20, n. 2, p. 227–233, out. 1995. ISSN 0364-9024. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/jgt.3190200211>>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 24 e 25.



- 14 SCHIPPER, H. Generating triangulations of 2-manifolds. *Computational Geometry - Methods, Algorithms and Applications*, Springer Berlin Heidelberg, v. 553, p. 237–248, 1991. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/3-540-54891-2\\_18](http://dx.doi.org/10.1007/3-540-54891-2_18)>. Citado 4 vezes nas páginas 22, 24, 25 e 31.
- 15 JUNGERMAN, M.; RINGEL, G. Minimal triangulations on orientable surfaces. *Acta Mathematica*, Springer Netherlands, v. 145, n. 1, p. 121–154, 1980. ISSN 0001-5962. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02414187>>. Citado na página 23.
- 16 BOKOWSKI, J.; EGGERT, A. All realizations of möbius' torus with 7 vertices. *Topologie Struct*, v. 17, p. 59–78, 1991. Citado na página 23.
- 17 LUTZ, F. H. Enumeration and random realization of triangulated surface. *Discrete Differential Geometry*, v. 38, p. 235–253, 2008. Citado na página 23.
- 18 BOKOWSKI, J.; BREHM, U. A polyhedron of genus 4 with minimal number of vertices and maximal symmetry. *Geom. Dedicata*, v. 29, p. 53–64, 1989. Citado na página 23.
- 19 BREHM, U. A maximally symmetric polyhedron of genus 3 with 10 vertices. *Mathematika*, v. 34, p. 237–242, 1987. Citado na página 23.
- 20 HOUGARDY, S.; LUTZ, F. H.; ZELKE, M. Polyhedra of genus 3 with 10 vertices and minimal coordinates. *Electronic Geometry Models*, 2007. Disponível em: <<http://www.eg-models.de/2006.02.001>>. Citado na página 23.
- 21 HOUGARDY, S.; LUTZ, F.; ZELKE, M. Surface realization with the intersection edge functional. *Experimental Math*, v. 19, n. 1, p. 79–92, 2010. Citado na página 23.
- 22 SCHEWE, L. Satisfiability problems in discrete geometry. *Technische Universität Darmstads*, 2007. Citado na página 23.
- 23 SCHEWE, L. Non-realizable minimal vertex triangulations of surfaces: Showing nonrealizability using oriented matroids and satisfiability solvers. *Disc. Comput. Geom*, v. 43, p. 289–302, 2010. Citado na página 23.
- 24 STEINITZ, E.; RADEMACHER, H. Vorlesungenüber die theorie der polyeder. *WILEY-VCH Verlag*, v. 14, n. 5, p. 318–319, 1934. ISSN 1521-4001. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/zamm.19340140516>>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- 25 LAVRECHENKO, S. A. Irreducible triangulations of the torus. *Journal of Soviet Mathematics*, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, v. 51, n. 5, p. 2537–2543, 1990. ISSN 0090-4104. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01104169>>. Citado na página 24.
- 26 SULANKE, T. Generating irreducible triangulations of surfaces. *arXiv:math/0606687*, 2006. Citado na página 24.
- 27 GAO, Z.; RICHTER, R.; SEYMOUR, P. Irreducible triangulations of surfaces. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 68, n. 2, p. 206–217, 1996. ISSN 0095-8956. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895696900647>>. Citado na página 24.

- 
- 28 SULANKE, T. Irreducible triangulations of low genus surfaces. *arXiv:math/0606690*, 2006. Citado na página 25.
- 29 DUKE, R. A. Geometric embeddings of complexes. *Amer. Math. Monthly*, v. 77, p. 597–603, 1970. Citado na página 26.
- 30 ALTSHULER, A. Polyhedral realizations in  $\mathbb{R}^3$  of triangulations of the torus and 2-manifolds in cyclic 4-polytopes. *Discrete Math.*, v. 1, p. 211–238, 1971. Citado na página 26.
- 31 HEFFTER, L. Ueber das problem der nachbargebiete. *Math. Annalen*, v. 38, p. 477–508, 1891. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 28.
- 32 RINGEL, G. *Map Color Theorem*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1974. v. 209. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 1). Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 29.
- 33 CAMPAGNA, S.; KOBBELT, L.; SEIDEL, H. P. Directed edges: A scalable representation for triangle meshes. *Journal of Graphics Tools*, v. 3, n. 4, p. 1–11, 1998. Citado na página 35.