UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg

Rogério Vitório de Jesus

Maceió, Brasil
Abril de 2015

ROGÉRIO VITÓRIO DE JESUS

A DESIGUALDADE DE CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Análise, submetida em 23 de Abril de 2015 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva.

Maceió, Brasil
Março de 2015

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Valter dos Santos Andrade

J58d Jesus, Rogério Vitório de.
A desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg / Rogério Vitório de Jesus. – Maceió, 2015.
46 f.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação em Matemática. Maceió, 2015.

Bibliografia: f. 46.

1. Desigualdades com constante ótima. 2. Desigualdade de Caffarelli-Kohn-nirenberg. I. Título.

CDU: 517.518.28

ROGÉRIO VITÓRIO DE JESUS

A DESIGUALDADE DE CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Análise submetida em 23 de Abril de 2015 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva (Orientador)

Prof. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório (UFAL)

Prof. Dr. Heudson Tosta Mirandola (UFRJ)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por mais uma conquista e minha família pelo apoio incondicional.

Gostaria de agradecer a todos os colegas que me ajudaram durante o curso. Especialmente os companheiros Robson Santos, Anderson Lima, Hugo Nunes e Diego Chicuta, pela amizade e apoio.

Agradeço meu orientador Marcio Henrique Batista por ter aceitado me orientar e por ter muita paciência durante toda a construção desse trabalho.

Registro também o agradecimento a minha irmã Regane Vitório pelo icentivo e a minha namorada Thaise Santos, que sempre foi compreensiva com as minhas decisões.

Resumo

Nosso estudo será dedicado a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Apresentaremos provas curtas de casos especiais usando técnicas que produzem constante ótima, faremos a prova do geral e vamos listar alguns casos particulares conhecidos.

Palavras-chave: Desigualdades com constante ótima, Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg.

Abstract

Our study will be devoted to the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality. We will present short proofs of for some special cases using techniques that produce sharp constant. Will test the general case and we will list some of known particular cases.

Keywords: Inequalities with sharp constant, Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality.

Sumário

Introdução

A desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, ou desigualdade de CKN, apareceu pela primeira vez no artigo “Partial regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations”, onde um caso particular contribuiu para melhorar a estimativa superior da dimensão do conjunto dos pontos singulares das soluções fracas adequadas das equações de Navier-Stokes. No entanto, a maioria das aplicações se encontram na teoria de equações elípticas. Ver [6] e [10] que são boas aplicações da desigualdade nessa área.

Estudaremos casos especiais da desigualdade de CKN, para os quais serão apresentadas provas interessantes e curtas, destacando as técnicas que possibilitam encontrar constante ótima. Além disso, usaremos dois desses casos para exibir uma classe maior de desigualdades de CKN. Essa abordagem seguirá basicamente dos estudos feitos por Costa (ver [7]) e do trabalho de Bazan e Neves (ver [3]).

Apesar da importância dos casos especiais, quando nos restrigimos a eles podemos perder muitas desigualdades conhecidas que também decorrem da desigualdade de CKN, como a desigualdade de Sobolev e de Hardy. Assim, finalizaremos o trabalho com a prova do caso geral da desigualdade que foi publicada no artigo “First order interpolation inequalities with weights”em 1958 (ver [5]).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho. Começaremos recordando as principais desigualdades nos espaços de Lebesgue e seguiremos com algumas fórmulas e desigualdades que aparecem com muita frequência.

Durante nosso estudo simbolizaremos por $C_c^\infty(\mathbb{R}^\mathbb{N})$ o conjunto das funções de valor real infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto em $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Além disso, para que não haja dúvida, sempre que nos referirmos a medida, estaremos falando da medida de Lebesgue.

Vamos definir os espaços de Lebesgue, $L^p(\mathbb{R}^\mathbb{N})$.

Definição 1.1 *Seja $1 \leq p < \infty$ e $X \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Definimos por $L^p(X)$ o conjunto das funções $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis, tais que*

$$\|f\|_{L^p(X)} = \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Nos espaços L^p, vamos destacar as principais e conhecidas desigualdades que serão essenciais para o bom entendimento do que segue.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Holder) *Seja $f \in L^p$ e $g \in L^q$ onde $p > 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.*

Prova. Ver teorema 6.9 de [1]. ■

Teorema 1.2 (Desigualdade de Minkowski) *Se $f, g \in L^p$, $p \geq 1$, então $f + g \in L^p$ e $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$.*

Prova. Ver teorema 6.11 de [1]. ■

A desigualdade de Holder citada anteriormente é a principal ferramenta para os próximos capítulos pois aparece corriqueiramente. Agora veremos um lema que será essencial para a prova de uma versão generalizada da desigualdade de Holder.

Lema 1.1 *Se* $a_1,\ a_2,\ ..., a_n$ *e* $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n$ *são números positivos, onde* $p_1+p_2+...+p_n=1$, *temos*

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}...a_n^{p_n} \leq p_1a_1+p_2a_2+...+p_na_n$$

Prova. Vamos provar por indução. No caso $n=2$ basta observar que

$$\begin{aligned}\ln(a_1^{p_1}a_2^{p_2}) &= p_1\ln a_1\ +p_2\ln a_2 \\ &\leq \ln(p_1a_1+p_2a_2),\end{aligned}$$

isto é,

$$a_1^{p_1}+a_2^{p_2} \leq p_1a_1+p_2a_2.$$

Supondo que a desigualdade vale para $n-1$ e pondo $p_1+p_2+...+p_{n-1}=r$ temos que

$$\begin{aligned}a_1^{p_1}a_2^{p_2}...a_{n-1}^{p_{n-1}}a_n^{p_n} &= (a_1^{\frac{p_1}{r}}a_2^{\frac{p_2}{r}}...a_{n-1}^{\frac{p_{n-1}}{r}})^r a_n^{p_n} \\ &\leq r(a_1^{\frac{p_1}{r}}a_2^{\frac{p_2}{r}}...a_{n-1}^{\frac{p_{n-1}}{r}})+p_na_n \\ &\leq p_1a_1+p_2a_2+...+p_{n-1}a_{n-1}+p_na_n,\end{aligned}$$

onde $p_1+p_2+...+p_n=1$. ∎

Teorema 1.3 (Desigualdade de Holder generalizada) *Se p, q, ...,r são números positivos e p+q+...+r=1, então*

$$\int f^pg^q...h^r dx < \left(\int f\right)^p\left(\int g\right)^q...\left(\int h\right)^r,$$

a menos que uma das funções seja nula ou todas propocionais.

Prova. Supondo que todas as funções são não-nulas e usando o lema anterior temos

$$\begin{aligned}\frac{\int f^pg^q...h^r dx}{(\int fdx)^p(\int gdx)^q...(\int hdx)^r} &= \int\left(\frac{f}{\int fdx}\right)^p\left(\frac{g}{\int gdx}\right)^q...\left(\frac{h}{\int hdx}\right)^r dx \\ &\leq \int p\left(\frac{f}{\int fdx}\right)+q\left(\frac{g}{\int gdx}\right)+...+r\left(\frac{h}{\int hdx}\right)dx \\ &= p\frac{\int fdx}{\int fdx}+q\frac{\int gdx}{\int gdx}+...+r\frac{\int hdx}{\int hdx} \\ &= p+q+...+r \\ &= 1.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int f^pg^q...h^r dx \leq \left(\int f\right)^p\left(\int g\right)^q...\left(\int h\right)^r,$$

valendo a igualdade quando

$$\frac{f}{\int f dx} \equiv \frac{g}{\int g dx} \equiv ... \equiv \frac{h}{\int h dx}$$

■

Além das desigualdades em L^p, a estimativa dada pala desigualdade Sobolev ótima também será de nosso interesse, pois em parte de nossa abordagem vamos tratar de classes da desigualdade CKN com constantes ótimas e necessitamos de tal estimativa para funções em $C_c^\infty(\mathbb{R}^\mathbb{N})$.

Teorema 1.4 (Desigualdade de Sobolev) *Se* $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^\mathbb{N})$, $1 < p < n$ *e* $p^* = \dfrac{np}{n-p}$, *então*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} |f(x)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq K(n,p) \left(\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \|\nabla f(x)\|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

onde K(n,p) é a melhor constante dada por

$$K(n,p) = \frac{1}{\pi^{1/2} n^{1/p}} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{\Gamma(1+n/2)\Gamma(n)}{\Gamma(n/p)\Gamma(1+n-n/p)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

e $\Gamma(s)$ *é a Função-gamma.*

Prova. Ver [14]. ■

Durante a prova do caso geral da desigualdade CKN necessitamos diversas vezes calcular integrais de funções em $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, mas isso nem sempre é fácil. Daí a grande utilidade do próximo teorema, pois este possibilita converter integrais N-dimensionais em integrais sobre esferas. Além deste, o teorema de Stokes também vem como uma fórmula muito útil para o cálculo de integrais durante o texto.

Teorema 1.5 (Coordenadas Polares) *Seja* $u : \mathbb{R}^\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua e integravel. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} u dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(x_0)} u dS\right) dr,$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Prova. Ver teorema 4 do apêndice C.3 em [9]. ■

Teorema 1.6 (Teorema de Stokes) *Se* F *é um campo* C^1 *definido em uma vizinhança de um compacto* $V \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$, *então*

$$\int_V div(F) = \int_{\partial V} F \cdot \eta dA,$$

onde η *e* dA *são a normal exterior e a superficie formada por* ∂V *positivamente orientada.*

Prova. Ver teorema 7.3 em [8]. ∎

Seguimos com outras desigualdades importantes. A próxima refere-se a números reais não negativos, seguida de uma generalização da conhecida desigualdade de Young.

Lema 1.2 *Sejam $a, b \in [0, \infty)$ e $s > 0$. Então existem constantes m_s e M_s dependendo apenas de s, tais que*

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a+b)^s \leq M_s(a^s + b^s).$$

Prova. Se $a = 0$ ou $b = 0$ não há o que provar. Vamos assumir $a > 0$. Como $1 \leq \left(1 + \frac{b}{a}\right)^s$ e $\left(\frac{b}{a}\right)^s < \left(1 + \frac{b}{a}\right)^s$ temos que

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^s < 2\left(1 + \frac{b}{a}\right)^s,$$

daí,

$$\begin{aligned} a^s + b^s &= a^s\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^s\right) \\ &< 2a^s\left(1 + \frac{b}{a}\right)^s \\ &= 2(a+b)^s. \end{aligned}$$

Para concluir, devemos notar que se $a \geq b$ teremos

$$\begin{aligned} (a+b)^s &\leq 2^s a^s \\ &\leq 2^s (a+b)^s, \end{aligned}$$

sendo conseguida a mesma desigualdade se $a \leq b$. ∎

Teorema 1.7 (Young generalizada) *Para $\alpha > 0$ e $V, W \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, temos*

$$V \cdot W \leq \alpha^{-p}\frac{\|V\|^p}{p} + \alpha^q \frac{\|W\|^q}{q},$$

onde $p, q \geq 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Prova. Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da desigualdade Young. ∎

A desigualdade de Young generalizada terá papel importante na descoberta de constante ótima para classes de desigualdade CKN. Já as próximas desigualdades que serão fundamentais quando tivermos desigualdades com integrais em determinados intervalos e nosso interese seja estender para toda reta.

Teorema 1.8 *Se $k \in \mathbb{Z}$ e $x_k,\ y_k,\ c,\ d \geq 0$ temos*

$$\sum x_k^c y_k^d \leq \Big(\sum x_k\Big)^c \Big(\sum y_k\Big)^d, \quad c + d \geq 1 \tag{1.1}$$

$$\sum x_k^c \leq \Big(\sum x_k\Big)^c, \quad c \geq 1. \tag{1.2}$$

Prova. Ver teorema 11 e teorema 22 em [11]. ■

Capítulo 2

Classes Simples da Desigualdade de CKN

Este capítulo será destinado a algumas classes da desigualdade de CKN cujas provas são curtas e foram demonstradas por meio de técnicas interessantes. Além disso, as demonstrações altenativas feitas aqui possuem abordagem simples e são extremamente importantes pois produzem constantes ótimas para a desigualdade.

Para nosso primeiro resultado precisamos, essencialmente, de um fato algébrico conhecido e o teorema da Divergência.

Teorema 2.1 *Para $s, m \in \mathbb{R}$ e $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ tem-se a desigualdade*

$$C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^{s+m+1}} \, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^{2s}} \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2m}} \, dx \right)^{1/2}, \tag{2.1}$$

onde a constante $C = C(s, m) := \frac{|n-(s+m+1)|}{2}$

Prova. Seja $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ e $s, m \in \mathbb{R}$, temos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\nabla u}{|x|^m} + t \frac{x}{|x|^{s+1}} u \right|^2 dx \geq 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2m}} \, dx + t^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^{2s}} \, dx + 2t \int_{\mathbb{R}^n} u \frac{x}{|x|^{s+m+1}} \cdot \nabla u dx \geq 0 \tag{2.2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja $K \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ um compacto e $A = A(\varepsilon, R) = B(0, R) - B(0, \varepsilon)$ tal que $K \subset A(\varepsilon, R)$ e $u \equiv 0$ em $\partial A(\varepsilon, R)$. Como $\nabla u^2 = 2u\nabla u$, usando uma propriedade da

Divergência e o Teorema da Divergência podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_A u\frac{x}{|x|^{s+m+1}} \cdot \nabla u dx &= \frac{1}{2}\int_A \nabla u^2 \cdot \frac{x}{|x|^{s+m+1}}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_A div\left(u^2\frac{x}{|x|^{s+m+1}}\right)\, dx - \int_A u^2 div\left(\frac{x}{|x|^{s+m+1}}\right)\, dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{\partial A}\left(u^2\frac{x}{|x|^{s+m+1}}\cdot\eta\right)\, dS - \int_A u^2 div\left(\frac{x}{|x|^{s+m+1}}\right)\, dx\right] \\
&= -\frac{1}{2}\int_A u^2 div\left(\frac{x}{|x|^{s+m+1}}\right)\, dx \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Uma vez que $\frac{\partial}{\partial x_i}|x|^{2\alpha} = \alpha|x|^{2\alpha-2}2x_i$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\frac{\partial}{\partial x_i}|x|^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_i}(|x|^{2\alpha})^{\frac{1}{2}} = \alpha|x|^{\alpha-2}x_i$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
div\left(\frac{x}{|x|^{\alpha}}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{|x|^{\alpha}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{|x|^{\alpha} - x_i\frac{\partial}{\partial x_i}|x|^{\alpha}}{|x|^{2\alpha}} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{|x|^{\alpha} - x_i^2\alpha|x|^{\alpha-2}}{|x|^{2\alpha}} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|x|^{\alpha}} - \frac{\alpha|x|^{-2}}{|x|^{\alpha}}x_i^2 \\
&= \frac{n-\alpha}{|x|^{\alpha}}
\end{aligned}$$

Se $(s+m+1) = \alpha$, de (2.3) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\frac{x}{|x|^{s+m+1}} \cdot \nabla u dx = -\frac{n-(s+m+1)}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{|x|^{s+m+1}}\, dx.$$

Assim, fazendo

$$A = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{|x|^{2s}}\, dx,\ B = [n-(s+m+1)]\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{|x|^{s+m+1}}\, dx,\ C = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2m}}\, dx$$

e usando (2.2) vemos que

$$At^2 - Bt + C \geq 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Mas isso equivale a $B^2 - 4AC \leq 0$, isto é,

$$[n-(s+m+1)]^2\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{|x|^{s+m+1}}\, dx\right)^2 \leq 4\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{|x|^{2s}}\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2m}}\, dx\right)$$

Elevando ambos os membros a 1/2 concluimos o resultado. ■

Como consequência deste teorema, vamos listar algumas desigualdades particulares.

Corolário 2.2 *Se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos as seguintes desigualdades com constantes ótimas:*

(i) $$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

(ii) $$\left(\frac{n-2(m+1)}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^{2(m+1)}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2m}} dx\,;$$

(iii) $$\left(\frac{n-2(s+1)}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^{2(s+1)}} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^{2s}} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2(s+1)}} dx\right)^{\frac{1}{2}};$$

(iv) $$\left(\frac{n}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2(m+1)} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2m}} dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prova. Basta tomar s e m especiais em (2.1):

(i) $s = 1$, $m = 0$;

(ii) $s = m + 1$;

(iii) $m = s + 1$;

(iv) $s = -m - 1$ ■

Agora vamos provar dois lemas e usar um argumento de interpolação para exibirmos um outro caso particular de (CKN). Além disso, tais lemas são casos de (CKN) e suas provas também produzem constantes ótimas.

No primeiro lema, a argumentação vai seguir de uma função suave de valor vetorial conveniêntemente definida, tendo destaque o uso da desigualdade de Young (Teorema 1.2) que fornece uma maneira simples para obter melhor constante. Já no segundo lema, vamos usar a desigualdade de Sobolev para uma função conveniênte e aplicar o resultado provado no primeiro lema, além da desigualdade Young que novamente vai possibilitar encontrarmos a melhor constante.

Lema 2.1 *Seja u uma função em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$, $-\infty < b < \dfrac{n-2}{2}$ e $c = b + 1$. Então* *temos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{\| x \|^{2c}}\, dx \le C_{b+1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\| \nabla u(x) \|^2}{\| x \|^{2b}}\, dx \tag{2.4}$$

onde

$$C_{b+1} = \frac{4}{(n-2-2b)^2}$$

é uma constante ótima.

Prova. Seja $W : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial suave definida por

$$W(x) := \left(\frac{1}{2c-n}\right) \frac{x}{\| x \|^{2c}}.$$

Tal função está bem definida pois $c = \dfrac{n}{2}$ implica em $b = \dfrac{n-2}{2}$, contradizendo a hipótese. Dessa forma, como

$$\frac{\partial}{\partial x_i} W_i = \left(\frac{1}{2c-n}\right) \frac{\| x \|^{2c} - 2x_i^2 c \| x \|^{2(c-1)}}{\| x \|^{2c}} = \left(\frac{1}{2c-n}\right)\left(\frac{1}{\| x \|^{2c}} - \frac{2cx_i^2}{\| x \|^{2c+2}}\right)$$

temos que

$$divW(x) = \left(\frac{1}{2c-n}\right)\left(\frac{n}{\| x \|^{2c}} - \frac{2c \| x \|^2}{\| x \|^{2c+2}}\right) = \left(\frac{1}{2c-n}\right) \frac{-(2c-n)}{\| x \|^{2c}} = \frac{-1}{\| x \|^{2c}}.$$

Se $E = E(\varepsilon, R) = B(0,R) - B(0,\varepsilon)$ é o anel que contém o suporte de u temos que

$$\begin{aligned} \int_E \frac{|u(x)|^2}{\| x \|^{2c}}\, dx &= -\int_E |u(x)|^2 divW(x)\, dx \\ &= \int_E W(x) \cdot \nabla |u(x)|^2\, dx - \int_E div(|u(x)|^2 W(x))\, dx \end{aligned}$$

Em seguida, aplicacando o Teorema da Divergência e usando a desigualdade de Young (com p,q=2 e $\alpha > 0$), teremos

$$\begin{aligned} \int_E \frac{|u(x)|^2}{\| x \|^{2c}}\, dx &= \int_E W(x) \cdot \nabla |u(x)|^2\, dx \\ &= 2\int_E u(x) W(x) \cdot \nabla u(x)\, dx \\ &= 2\int_E \left(\frac{u(x)W(x)}{\| x \|^{-b}}\right) \cdot \left(\frac{\nabla u(x)}{\| x \|^{b}}\right) dx \\ &\le 2\left[\int_E \frac{\alpha^2}{2} \frac{|u(x)|^2 \| W(x) \|^2}{\| x \|^{-2b}}\, dx + \int_E \frac{\alpha^{-2}}{2} \frac{\| \nabla u(x) \|^2}{\| x \|^{2b}}\, dx\right] \\ &= \alpha^2 \int_E \frac{|u(x)|^2 \| W(x) \|^2}{\| x \|^{-2b}}\, dx + \alpha^{-2} \int_E \frac{\| \nabla u(x) \|^2}{\| x \|^{2b}}\, dx \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por outro lado, como $c = b + 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{\| W(x) \|^2}{\| x \|^{-2b}} &= \frac{\| x \|^2}{(2c-n)^2 \| x \|^{4b+4}} \frac{1}{\| x \|^{-2b}} \\
&= \frac{1}{(2b+2-n)^2 \| x \|^{2b+2}} \\
&= \frac{1}{(n-2b-2)^2 \| x \|^{2c}}.
\end{aligned}$$

Substituindo isso em (2.5) encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{\| x \|^{2c}} dx \leq \frac{\alpha^2}{(n-2b-2)^2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{\| x \|^{2c}} dx + \alpha^{-2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\| \nabla |u(x)| \|^2}{\| x \|^{2b}} dx \quad \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{(n-2b-2)^2}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{\| x \|^{2c}} dx \leq \alpha^{-2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\| \nabla |u(x)| \|^2}{\| x \|^{2b}} dx \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{\| x \|^{2c}} dx \leq \frac{(n-2b-2)^2}{\alpha^2(n-2b-2)^2 - \alpha^4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\| \nabla |u(x)| \|^2}{\| x \|^{2b}} dx$$

Se definirmos $k = (n-2-2b)^2$ e $f(\alpha) = \dfrac{k}{\alpha^2 k - \alpha^4}$ teremos que $f'(\alpha) = -\dfrac{k(2\alpha k - 4\alpha^3)}{(\alpha^2 k - \alpha^4)^2}$, consequentemente, fazendo $f'(\alpha) = 0$ encontramos $k - 2\alpha^2 = 0$, isto é, $\alpha = \sqrt{k/2}$. Por outro lado

$$\begin{aligned}
f''(\alpha) &= \frac{(-2k^2 + 12k\alpha^2)(k\alpha^2 - \alpha^4)^2 + 2k(2k\alpha - 4\alpha^3)(k\alpha^2 - \alpha^4)(2k\alpha - 4\alpha^3)}{(k\alpha^2 - \alpha^4)^4} \\
&= \frac{(-2k^2 + 12k\alpha^2)(k\alpha^2 - \alpha^4) + 2k(2k\alpha - 4\alpha^3)^2}{(k\alpha^2 - \alpha^4)^3},
\end{aligned}$$

donde vemos que

$$f''(\sqrt{k/2}) = \frac{(4k^2)(k^2/2)}{(k^2/2)^3} > 0$$

Portanto, $\alpha = \sqrt{k/2}$ é ponto de mínimo de f e

$$f(\sqrt{k/2}) = \frac{4}{k} = \frac{4}{(n-2-2b)^2}$$

é a constante ótima para a desigualdade. ■

Lema 2.2 *Seja u uma função em* $C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, $n \geq 3$, $-\infty < 2b < n-2$, $c = b$ *e* $r = \dfrac{2n}{n-2} = 2^*$. *Então temos*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^r}{\| x \|^{br}} dx\right)^{\frac{2}{r}} \leq C_{b^\pm} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{\| \nabla u(x) \|^2}{\| x \|^{2b}} dx \tag{2.6}$$

onde

$$C_{b^+} = K(n,r)^2 \left(\frac{n-2}{n-2-2b}\right)^2, \quad C_{b^-} = K(n,r)^2 \left(\frac{n-2-4b}{n-2-2b}\right)^2$$

sendo b^+ *representante de* $b > 0$ *e* b^- *representante de* $b < 0$.

Prova. Aplicando a desigualdade Sobolev para a função dada por $f(x) = \dfrac{u(x)}{\| x \|^b}$ vamos obter

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^{2^*}}{\| x \|^{2^*b}}\, dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \le K(n,r)\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \left\|\nabla\left(\frac{u(x)}{\| x \|^b}\right)\right\|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^{r}}{\| x \|^{rb}}\, dx\right)^{\frac{2}{r}} \le K(n,r)^2 \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \left\|\nabla\left(\frac{u(x)}{\| x \|^b}\right)\right\|^2 dx. \tag{2.7}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u(x)}{\| x \|^b}\right) &= \frac{\frac{\partial}{\partial x_i}(u(x)) \| x \|^b - u(x) b x_i \| x \|^{b-2}}{\| x \|^{2b}} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial x_i}(u(x))}{\| x \|^b} - \frac{u(x) b x_i}{\| x \|^{b+2}}\end{aligned}$$

temos que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u(x)}{\| x \|^b}\right)\right]^2 = \frac{(\frac{\partial}{\partial x_i}u(x))^2}{\| x \|^{2b}} - 2\frac{(\frac{\partial}{\partial x_i}u(x))u(x)bx_i}{\| x \|^{2b+2}} + \frac{(u(x))^2 b^2 x_i^2}{\| x \|^{2(b+2)}},$$

consequentemente,

$$\left\|\nabla\left(\frac{u(x)}{\| x \|^b}\right)\right\|^2 = \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{\|x\|^{2b}} + b^2\frac{|u(x)|^2}{\|x\|^{2(b+1)}} - \frac{2bu(x)}{\|x\|^{2(b+2)}}\nabla u(x)\cdot x$$

que implica

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \left\|\nabla\left(\frac{u(x)}{\| x \|^b}\right)\right\|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{\|x\|^{2b}}\, dx + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} b^2 \frac{|u(x)|^2}{\|x\|^{2(b+1)}}\, dx - \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{2bu(x)}{\|x\|^{2(b+2)}}\nabla u(x)\cdot x\, dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Aplicando o lema 2.1 a I_2 obtemos

$$I_2 \le b^2 C_{b+1}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{\|x\|^{2b}}\, dx \tag{2.9}$$

Já em I_3, vamos analisar separadamente os casos $b > 0$ e $b < 0$. Para $b < 0$, aplicando Young e o lema 2.1 vemos que

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{-2b}{\|x\|^{2b}}(\nabla u(x))\cdot\left(\frac{u(x)}{\|x\|^2}x\right) dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \left(\frac{-2b}{\|x\|^{2b}}\right)\frac{\lambda^2|u(x)|^2\|x\|^2}{2\|x\|^4}\, dx + \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \left(\frac{-2b}{\|x\|^{2b}}\right)\frac{\lambda^{-2}\|\nabla u(x)\|^2}{2}\, dx \\ &= -b\lambda^2\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^2}{\|x\|^{2(b+1)}}\, dx - b\lambda^{-2}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{\|x\|^{2c}}\, dx \\ &\le -b(\lambda^2 C_{b+1} + \lambda^{-2})\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{\|x\|^{2b}}\, dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

Assim, (2.7)-(2.10) produz

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^r}{\| x \|^{rb}}\, dx\right)^{\frac{2}{r}} \leq K(n,r)^2(1 + b^2C_{b+1} - b(\lambda^2 C_{b+1} + \lambda^{-2}) \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{\|x\|^{2b}}\, dx,$$

como C_{b+1} depende de n, podemos escrever $K(n,r)^2(1+b^2C_{b+1}-b(\lambda^2C_{b+1}+\lambda^{-2}) = f_-(\lambda; n, b)$. Para $b > 0$ procedemos de maneira análoga e encontramos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^r}{\| x \|^{rb}}\, dx\right)^{\frac{2}{r}} \leq f_+(\lambda; n, b) \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{\|x\|^{2b}}\, dx,$$

onde $f_+(\lambda; n, b) = K(n,r)^2(1 + b^2C_{b+1} + b(\lambda^2C_{b+1} + \lambda^{-2})$.

Agora resta minimizar $f_\pm$ com respeito a λ. Fazendo $f'_\pm(\lambda) = 0$ temos

$$+2K(n,r)^2bC_{b+1}\lambda - 2K(n,r)^2b\lambda^{-3} = 0$$
$$-2K(n,r)^2bC_{b+1}\lambda + 2K(n,r)^2b\lambda^{-3} = 0$$

que implica em

$$\lambda = \left(\frac{1}{C_{b+1}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

como

$$f''_+\left(\left(\frac{1}{C_{b+1}}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = 2K(n,r)^2bC_{b+1} + 6K(n,r)^2b\left(\left(\frac{1}{C_{b+1}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{-4} > 0$$
$$f''_-\left(\left(\frac{1}{C_{b+1}}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = -2K(n,r)^2bC_{b+1} - 6K(n,r)^2b\left(\left(\frac{1}{C_{b+1}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{-4} > 0$$

podemos concluir que $\lambda = \left(\frac{1}{C_{b+1}}\right)^{\frac{1}{4}}$ é ponto de mínimo. Uma vez que

$$\begin{aligned} f\left(\left(\frac{1}{C_{b+1}}\right)^{\frac{1}{4}}\right) &= K(n,r)^2\left(1 + b^2C_{b+1} \pm b\left(\frac{C_{b+1}}{\sqrt{C_{b+1}}} + \sqrt{C_{b+1}}\right)\right) \\ &= K(n,r)^2(1 + b^2C_{b+1} \pm 2b\sqrt{C_{b+1}}) \\ &= K(n,r)^2(1 \pm b\sqrt{C_{b+1}})^2 \end{aligned}$$

estabelecemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^r}{\| x \|^{br}}\, dx\right)^{\frac{2}{r}} \leq K(n,r)^2(1 \pm b\sqrt{C_{b+1}})^2 \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{\| \nabla u(x) \|^2}{\| x \|^{2b}}\, dx.$$

Portanto, substituindo $C_{b+1} = \dfrac{4}{(n-2-2b)^2}$ concluimos o desejado. ■

Observe que para os lemas 2.1 e 2.2 foi usado que $c = b + 1$ e $c = b$, respectivamente. O próximo teorema, apesar de não garantir constante ótima, abrange uma classe bem maior de desigualdades CKN pois vamos prová-lo com $b \leq c \leq c + 1$.

Teorema 2.3 *Seja u uma função em $C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, $n \geq 3$, $-\infty < b < \frac{n-2}{2}$, $b \leq c \leq b+1$ e $r = \dfrac{2n}{n-2+2(c-b)}$. Então, para cada $\theta \in [0,1]$ temos*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^r}{\| x \|^{cr}}\, dx\right)^{\frac{2}{r}} \leq C_{b^\pm}^{\alpha} C_{b+1}^{\beta} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{\| \nabla u(x) \|^2}{\| x \|^{2b}}\, dx \tag{2.11}$$

Onde $C_{b^\pm}$ e C_{b+1} são, respectivamente, as constantes para $c = b$ e $c = b+1$, e

$$\alpha = \frac{2n\theta}{(n-2)r}, \quad \beta = \frac{2(1-\theta)}{r}$$

Prova. Para obter tal resultado faremos interpolação dos dois lemas anteriores. Primeiro devemos notar que para $\theta \in (0,1)$ dado por $\theta = \dfrac{(n-2)-(n-2)(c-b)}{(n-2)+2(c-b)}$ podemos escrever

$$r = 2(1-\theta) + 2^*\theta, \tag{2.12}$$

onde $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ é o Sobolev conjugado de 2. Uma vez que $r = \dfrac{2n}{n-2+2(c-b)}$ obtemos

$$\begin{aligned}
2(1-\theta) + \frac{2n\theta}{n-2} &= \frac{2n}{n-2+2(c-b)} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{(n-2)(1-\theta)+n\theta}{n-2} &= \frac{n}{(n-2)+2(c-b)} \quad \Leftrightarrow \\
1 + \frac{2\theta}{n-2} &= \frac{n}{n-2+2(c-b)} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{2\theta}{n-2} &= \frac{2-2(c-b)}{n-2+2(c-b)} \quad \Leftrightarrow \\
(2\theta+n-2)(c-b) &= (n-2)(1-\theta) \quad \Leftrightarrow \\
(2\theta+n-2)(c-b) &= (2\theta+n-2) - n\theta \quad \Leftrightarrow \\
c &= b + 1 - \left(\frac{n\theta}{n-2+2\theta}\right),
\end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
rc &= [2(1-\theta)(b+1) + 2^*\theta b] + \left[2^*\theta - \frac{(2(1-\theta)+2^*\theta)n\theta}{n-2+2\theta}\right] \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{2n\theta}{n-2} - \frac{2n\theta\left((1-\theta)+\dfrac{n\theta}{n-2}\right)}{n-2+2\theta} \\
&= \frac{2n\theta}{n-2} - \frac{\dfrac{2n\theta(n-2+2\theta)}{n-2}}{n-2+2\theta} \\
&= 0
\end{aligned}$$

temos que

$$rc = 2(1-\theta)(b+1) + 2^*\theta b. \tag{2.13}$$

Assim, por (2.12) e (2.13) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^r}{\|x\|^{cr}}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^{2(1-\theta)+2^*\theta}}{\|x\|^{2(1-\theta)(b+1)+2^*\theta b}}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^{2(1-\theta)}}{\|x\|^{2(1-\theta)(b+1)}} \cdot \frac{|u(x)|^{2^*\theta}}{\|x\|^{2^*\theta b}}, dx \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \left(\frac{|u(x)|^{2(1-\theta)}}{\|x\|^{2(1-\theta)(b+1)}}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} dx\right]^{1-\theta} \left[\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \left(\frac{|u(x)|^{2^*\theta}}{\|x\|^{2^*\theta b}}\right)^{\frac{1}{\theta}} dx\right]^{\theta} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^2}{\|x\|^{2(b+1)}}\,dx\right]^{1-\theta} \left[\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^{2^*}}{\|x\|^{2^*b}}\,dx\right]^{\theta},
\end{aligned}$$

sendo que a desigualdade foi obtida aplicando Holder para $r' = \dfrac{1}{1-\theta}$ e $r' = \dfrac{1}{\theta}$. Para concluir vamos elevar ambos os lados à $\dfrac{2}{r}$ e usar os lemas anteriores, recordando que no último lema $r = 2^*$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^r}{\| x \|^{cr}}\,dx\right)^{\frac{2}{r}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^2}{\|x\|^{2(b+1)}}\,dx\right)^{\frac{2(1-\theta)}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)|^{2^*}}{\|x\|^{2^*b}}\,dx\right)^{\frac{2\theta}{r}} \\
&\leq C_{b+1}^{\frac{2(1-\theta)}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{\|x\|^{2b}}\,dx\right)^{\frac{2(1-\theta)}{r}} C_{b^\pm}^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{\|x\|^{2b}}\,dx\right)^{\theta} \\
&= C_{b+1}^{\frac{2(1-\theta)}{r}} C_{b^\pm}^{\frac{2^*\theta}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{\|x\|^{2b}}\,dx\right)^{\frac{2(1-\theta)}{r}+\frac{2^*\theta}{r}} \\
&= C_{b+1}^{\frac{2(1-\theta)}{r}} C_{b^\pm}^{\frac{2^*\theta}{r}} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{\|\nabla u(x)\|^2}{\|x\|^{2b}}\,dx.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Desigualdade de CKN geral

No capítulo anterior vimos classes da desigualdade CKN que possuem constantes explícitas. Agora veremos a prova do caso geral, onde não vamos explicitar a constante, entretanto, ficará claro que ela também depende dos parâmetros. Por fim, listaremos algumas desigualdades conhecidas que podem ser vistas como caso particular da CKN.

No que se segue, sejam p, q, r; α, β, σ; e a números reais fixos satisfazendo

$$p, q \geq 1, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq a \leq 1 \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n}, \ \frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}, \ \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} \geq 0, \tag{3.2}$$

onde

$$\gamma = a\sigma + (1-a)\beta \tag{3.3}$$

Teorema 3.1 *Se $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\mathbb{N})$, então existe uma constante positiva C tal que a seguinte desigualdade ocorre*

$$\big||x|^\gamma u\big|_{L^r} \leq C\big||x|^\alpha |Du|\big|_{L^p}^a \big||x|^\beta u\big|_{L^q}^{1-a} \tag{3.4}$$

se e somente se as seguintes relações valem

$$\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} = a\left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{n}\right) + (1-a)\left(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}\right) \tag{3.5}$$

$$0 \leq \alpha - \sigma \quad \textit{se } a > 0 \tag{3.6}$$

e

$$\alpha - \sigma \leq 1 \quad \textit{se } a > 0 \ \textit{ e } \ \frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{n} = \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n}. \tag{3.7}$$

Além disso, em qualquer subconjunto compacto no espaço dos parâmetros onde (3.1), (3.2), (3.5) e $0 \leq \alpha - \sigma \leq 1$ ocorrem, a constante C é limitada

Primeiro devemos obsevar que se $a = 0$ não há o que provar, pois isto implica em $\gamma = \beta$, tornando (3.4) e (3.5) imediatas.

Vamos começar verificando a necessidade e, posteriormente, algumas afirmações usadas na prova da suficiência, em tais afirmações destacamos o uso da desigualdade tipo-Hardy ponderada, ver [4]. A suficiência será dividida em três casos, o primeiro é o caso em que $n = 1$ e $\sigma = \alpha - 1$, seguimos com o caso $n \geq 1$, $0 \leq \alpha - \sigma \leq 1$ e concluimos provando o caso $\alpha - \sigma > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{n} = \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n}$. Vale ressaltar que sempre representaremos a constante por C, independende de variar linha pós linha.

Prova. Inicialmente note que para as normas em (3.4) serem finitas são necessárias as desigualdades em (3.1).

(I) NECESSIDADE

Se (3.4) vale para $u(x)$ então também vale para $u(\lambda x)$, com $\lambda > 0$. Dessa forma, se $v(x) = u(\lambda x)$ temos

$$\begin{aligned}
\big||x|^{\gamma} v(x)\big|_{L^r}^{r} &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} (|x|^{\gamma}|u(\lambda x)|)^r \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} (|\lambda^{-1} y|^{\gamma} |u(y)|)^r \lambda^{-n} \, dy \\
&= \lambda^{-\gamma r - n} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} (|y|^{\gamma}|u(y)|)^r \, dy,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\big||x|^{\gamma} v(x)\big|_{L^r} = \lambda^{-\gamma - \frac{n}{r}} \big||y|^{\gamma} u(y)\big|_{L^r}.$$

Procedendo de maneira analoga vemos que

$$\big||x|^{\alpha}|Dv(x)|\big|_{L^p} = \lambda^{-\alpha - \frac{n}{p} + 1} \big||y|^{\alpha}|Du(y)|\big|_{L^p} \quad e \quad \big||x|^{\beta} v(x)\big|_{L^q} = \lambda^{-\beta - \frac{n}{q}} \big||y|^{\beta} u(y)\big|_{L^q}$$

Assim, de (3.4) obtemos

$$\big||y|^{\gamma} u(y)\big|_{L^r} \leq C\lambda^k \big||y|^{\alpha}|Du(y)|\big|_{L^p}^{a} \big||y|^{\beta} u(y)\big|_{L^q}^{1-a},$$

onde $k = -\alpha a - \frac{na}{p} + a - \beta(1-a) - \frac{n}{q}(1-a) + \gamma + \frac{n}{r}$. Se ocoresse $k \neq 0$, fazendo λ ir para 0 ($k > 0$) ou λ ir para ∞ ($k < 0$) teriamos $u \equiv 0$. Portanto, deve ocorrer $k = 0$, isto é,

$$\begin{aligned}
\gamma + \frac{n}{r} &= a(\alpha - 1) + \frac{na}{p} + \beta(1-a) + \frac{n}{q}(1-a) \qquad \Leftrightarrow \\
\frac{\gamma}{n} + \frac{1}{r} &= a\left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{n}\right) + (1-a)\left(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}\right)
\end{aligned}$$

Para a prova de (3.6) fixe $v \in C_0^\infty(|x| < 1)$, $v \neq 0$, e seja $u(x) = v(x - x_0)$, com $|x_0| = R$ grande. Dessa forma, o suporte de u será em $B_{x_0}(1)$ e (3.4) equivale a

$$\left(\int_{B_{x_0}(1)} |x|^{\gamma r}|u|^r \, dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_{B_{x_0}(1)} |x|^{\alpha p}|Du|^p \, dx\right)^{\frac{a}{p}} \left(\int_{B_{x_0}(1)} |x|^{\beta q}|u|^q \, dx\right)^{\frac{1-a}{q}},$$

nesse caso, como $|x - x_0| < 1$ e $||x| - |x_0|| < |x - x_0|$ temos que $(R-1) < |x| < (R+1)$. Por outro lado, como R é grande podemos ter $R - 1 > \dfrac{R}{2}$ e $R + 1 < \dfrac{3R}{2}$, isto é, $\dfrac{R}{2} < |x| < \dfrac{3R}{2}$. Assim, independente do sinal de γ, α, e β obtemos

$$R^\gamma \big|u\big|_{L_r} \leq CR^{a\alpha+(1-a)\beta}\big|Du\big|_{L_p}^a \big|u\big|_{L_q}^{1-a}.$$

Sendo $u(x) = v(x - x_0)$,

$$\begin{aligned} R^\gamma \big|v\big|_{L_r} &\leq CR^{a\alpha+(1-a)\beta}\big|Dv\big|_{L_p}^a\big|v\big|_{L_q}^{1-a} \\ \Leftrightarrow \qquad R^{\gamma-(a\alpha+(1-a)\beta)}\big|v\big|_{L_r} &\leq C\big|Dv\big|_{L_p}^a\big|v\big|_{L_q}^{1-a} \end{aligned}$$

Note que $Dv \neq 0$, pois caso contrário v seria constante ($|x| < 1$ é conexo) e, como $v \equiv 0$ fora de um compacto, teriamos a função nula. Portanto, podemos fazer $R \to \infty$ e concluímos que

$$\begin{aligned} \gamma &\leq a\alpha + (1-a)\beta \quad \Leftrightarrow \\ a\sigma + (1-a)\beta &\leq a\alpha + (1-a)\beta \quad \Leftrightarrow \\ \sigma &\leq \alpha. \end{aligned}$$

Seguimos com a prova de (3.7). Sabemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{n} &= \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} \\ &= \frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

sendo a última igualdade obtida de (3.5) quando $a < 1$. Agora considere a função

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |x| \geq 1 \\ |x|^{-\gamma-\frac{n}{r}} \log \frac{1}{|x|} & \text{se} \quad \epsilon \leq |x| \leq 1 \\ \epsilon^{-\gamma-\frac{n}{r}} \log \frac{1}{\epsilon} & \text{se} \quad |x| \leq \epsilon. \end{cases}$$

Note que

$$\begin{aligned} D\left(|x|^{-\gamma-\frac{n}{r}} \log \frac{1}{|x|}\right) &= \left(\left(-\gamma - \frac{n}{r}\right)|x|^{-\gamma-\frac{n}{r}-1}\frac{x}{|x|}\right) \log \frac{1}{|x|} + |x|^{-\gamma-\frac{n}{r}}|x|\frac{-x}{|x|^3} \\ &= \left(\left(-\gamma - \frac{n}{r}\right) \log \frac{1}{|x|} - 1\right) \frac{x}{|x|^{\gamma+\frac{n}{r}+2}} \end{aligned}$$

e que multiplicando np na primeira igualdade de (3.8) encontramos $n+\alpha p-p=\dfrac{np}{r}+\gamma p$. Utilizando as propriedades do logaritmo temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}|x|^{\alpha p}|Du|^p\,dx &= \int_{\epsilon<|x|<1}|x|^{\alpha p}\left|\left((-\gamma-\frac{n}{r})\log\frac{1}{|x|}-1\right)\right|^p|x|^{(-\gamma-\frac{n}{r}-1)p}\,dx\\
&= \int_{\epsilon<|x|<1}|x|^{-n}\left|\log\frac{1}{|x|^{(\gamma+\frac{n}{r})}}+\log e\right|^p\,dx\\
&= \int_{\epsilon<|x|<1}|x|^{-n}\left|\log\left(\frac{e^{\frac{1}{(\gamma+\frac{n}{r})}}}{|x|}\right)^{(\gamma+\frac{n}{r})}\right|^p\,dx\\
&= C\int_{\epsilon<|x|<1}|x|^{-n}\left|\log\frac{c}{|x|}\right|^p\,dx.
\end{aligned}$$

Pondo em coordenadas polares,

$$\begin{aligned}
\int_{\epsilon<|x|<1}|x|^{-n}\left|\log\frac{c}{|x|}\right|^p\,d\rho &= C\int_\epsilon^1\left(\frac{1}{\rho^n}\log^p\frac{c}{\rho}\right)\rho^{n-1}\,d\rho\\
&= C\int_\epsilon^1\frac{1}{\rho}\log^p\left(\frac{\rho}{c}\right)^{-1}\,d\rho\\
&= C(-1)^p\int_\epsilon^1\frac{1}{\rho}\log^p\left(\frac{\rho}{c}\right)\,d\rho\\
&= C(-1)^p\left(\log^{p+1}\frac{\rho}{c}\right)\Big|_\epsilon^1\\
&= C(-1)^p\left[(-\log c)^{p+1}-\left(-\log\frac{c}{\epsilon}\right)^{p+1}\right]\\
&= C(-1)^{p+1}\left[\left(-\log\frac{c}{\epsilon}\right)^{p+1}-(-\log c)^{p+1}\right]\\
&= C\left[\left(\log\frac{c}{\epsilon}\right)^{p+1}-(\log c)^{p+1}\right], \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |x|^{\gamma r}|u|^r\,dx &= \int_{\epsilon<|x|<1} |x|^{\gamma r-\gamma r-n}\log^r\frac{1}{|x|}\,dx + \epsilon^{-\gamma r-n}\log^r\frac{1}{\epsilon}\int_{|x|<\epsilon}|x|^{\gamma r}\,dx\\
&= \int_{\epsilon<|x|<1} |x|^{-n}\log^r\frac{1}{|x|}\,dx + \epsilon^{-\gamma r-n}\log^r\frac{1}{\epsilon}\int_{|x|<\epsilon}|x|^{\gamma r}\,dx\\
&= C\int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{\rho}\log^r\frac{1}{\rho}\,d\rho + C\epsilon^{-\gamma r-n}\log^r\frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon}\rho^{\gamma r+n-1}\,d\rho\\
&= C(-1)^r\int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{\rho}\log^r\rho\,d\rho + C\epsilon^{-\gamma r-n}\log^r\frac{1}{\epsilon}(\rho^{\gamma r+n}\big|_0^{\epsilon})\\
&= C(-1)^r\left(-\log^{r+1}\epsilon\right) + C\log^r\frac{1}{\epsilon}\\
&= C(-1)^{r+1}\left(\log^{r+1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{-1}\right) + C\log^r\frac{1}{\epsilon}\\
&= C\log^{r+1}\frac{1}{\epsilon} + C\log^r\frac{1}{\epsilon} \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |x|^{\beta q}|u|^q\,dx = C\log^{q+1}\frac{1}{\epsilon} + C\log^q\frac{1}{\epsilon}. \qquad (3.11)$$

Assim, (3.9), (3.10) e (3.11) garantem que existe C tal que a função $u(x)$ previamente definida satisfaz (3.4) e, por outro lado, possibilita vermos que

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |x|^{\gamma r}|u|^r\,dx \geq C\log^{r+1}\frac{1}{\epsilon}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |x|^{\alpha p}|Du|^p\,dx &\leq C\log^{p+1}\frac{c}{\epsilon}\\
&\leq C\log^{p+1}\frac{1}{\epsilon}
\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |x|^{\beta q}|u|^q\,dx \leq C\log^{q+1}\frac{1}{\epsilon},$$

consequentemente, de (3.4) obtemos

$$\log^{\frac{1}{r}+1}\frac{1}{\epsilon} \leq C\log^{a(\frac{1}{p}+1)+(1-a)(\frac{1}{q}+1)}\frac{1}{\epsilon},$$

isto é,

$$\log^{\frac{1}{r}+1-[a(\frac{1}{p}+1)+(1-a)(\frac{1}{q}+1)]}\frac{1}{\epsilon} \leq C.$$

Dessa forma, deve ocorrer

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}+1 &\leq a\left(\frac{1}{p}+1\right)+(1-a)\left(\frac{1}{q}+1\right) \quad\Leftrightarrow\\ \frac{1}{r} &\leq \frac{a}{p}+\frac{1-a}{q}.\end{aligned}$$

Mas, de (3.3) e (3.5) sabemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{a}{p}+\frac{1-a}{q}+\frac{a(\alpha-1)}{n}+\frac{(1-a)\beta}{n}-\frac{a\sigma}{n}-\frac{(1-a)\beta}{n}\\ &= \frac{a}{p}+\frac{1-a}{q}+\frac{a}{n}(\alpha-1-\sigma),\end{aligned}$$

portanto, $\frac{a}{n}(\alpha-1-\sigma)\leq 0 \;\Rightarrow\; \alpha-\sigma\leq 1$, donde concluimos a necessidade.

Agora vamos provar uma sequencia de afirmações que serão extremamente úteis para a demonstração da suficiência.

(II) Suficiência

(A) Se $1\leq p\leq r$, $\delta\in\mathbb{R}$ e $\alpha=\delta+\frac{1}{r}+\frac{p-1}{p}$ então para $u\in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\big||x|^\delta u\big|_{L^r}\leq C\big||x|^\alpha|Du|\big|_{L^p} \tag{3.12}$$

nos seguintes casos

(i) $\delta+\frac{1}{r}>0$

(ii) $\delta+\frac{1}{r}<0$ e $u(0)=0$

Além disso, a constante C em (1.19) fica limitada por p, r, e δ que variam sobre qualquer subconjunto compacto de $\{1\leq p\leq r,\ \gamma r\neq -1\}$.

No caso que (i) ocorrer, vamos usar teorema 2 de [4]. De fato,

$$\begin{aligned}\sup_{s>0}\left(\int_0^s |x|^{\delta r}\,dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_r^\infty |x|^{-\alpha p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} &= \sup_{s>0}\left(\frac{x^{\delta r+1}}{\delta r+1}\Big|_0^s\right)^{\frac{1}{r}}\left(\lim_{c\to\infty}\left(\frac{x^{-\alpha p'+1}}{-\alpha p'+1}\Big|_s^c\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &= \sup_{s>0}\left(\frac{s^{\delta+\frac{1}{r}}}{\delta+\frac{1}{r}}\right)\left(\lim_{c\to\infty}\frac{c^{-p'(\delta+\frac{1}{r})}-s^{-p'(\delta+\frac{1}{r})}}{-p'(\delta+\frac{1}{r})}\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &= \sup_{s>0}\left(\frac{s^{\delta+\frac{1}{r}}}{\delta+\frac{1}{r}}\right)\left(\frac{s^{-(\delta+\frac{1}{r})}}{\delta+\frac{1}{r}}\right)\\ &= \frac{1}{(\delta+\frac{1}{r})^2}\\ &< \infty,\end{aligned}$$

sendo que a segunda igualdade ocorre devido

$$\begin{aligned}
\alpha &= \delta + \frac{1}{r} + \frac{p-1}{p} \quad \Leftrightarrow \\
\alpha - \frac{1}{p'} &= \delta + \frac{1}{r} \quad \Leftrightarrow \\
-\alpha p' + 1 &= -p'(\delta + \frac{1}{r}).
\end{aligned}$$

Verificamos que estamos nas condições do teorema 2 de [4], logo

$$\left(\int_0^\infty |x|^{\delta r} \left(\int_x^\infty |Du(t)| dt\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_0^\infty |x|^{\alpha p} |Du(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty |x|^{\delta r} \left(\int_x^\infty |Du(t)| dt\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} &\geq \left(\int_0^\infty |x|^{\delta r} \left|\int_x^\infty Du(t) dt\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\int_0^\infty |x|^{\delta r} |u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}$$

concluimos

$$\left(\int_0^\infty |x|^{\delta r} |u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_0^\infty |x|^{\alpha p} |Du(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para o caso (ii), procedemos de maneira analoga utilizando o teorema 1 de [4] e verificando que

$$\begin{aligned}
\sup_{s>0} \left(\int_s^\infty |x|^{\delta r}\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^s |x|^{-\alpha p'}\, dx\right)^{\frac{1}{p'}} &= \sup_{s>0} \left(\lim_{c\to\infty} \frac{c^{\delta r+1} - s^{\delta r+1}}{\delta r + 1}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{s^{-\alpha p'+1}}{-\alpha p' + 1}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \sup_{s>0} \left(\frac{-s^{\delta r+1}}{\delta r + 1}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{s^{-\alpha p'+1}}{-\alpha p' + 1}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \sup_{s>0} \left(\frac{-s^{\delta + \frac{1}{r}}}{\delta + \frac{1}{r}}\right) \left(\frac{s^{-(\delta+\frac{1}{r})}}{-(\delta + \frac{1}{r})}\right) \\
&= \frac{1}{(\delta + \frac{1}{r})^2} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

para obter

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty |x|^{\delta r}|u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\int_0^\infty |x|^{\delta r}\left|\int_0^x Du(t)dt\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\\ &\leq \left(\int_0^\infty |x|^{\delta r}\left(\int_0^x |Du(t)|dt\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\\ &\leq C\left(\int_0^\infty |x|^{\alpha p}|Du(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Ainda dos teoremas 1 e 2 de [4] temos que $\dfrac{1}{(\delta+\frac{1}{r})^2} \leq C \leq \dfrac{(p)^{\frac{1}{r}}(p')^{\frac{1}{p'}}}{(\delta+\frac{1}{r})^2}$, o que explica a afirmação da limitação da constante C. Por outro lado, fazendo mudança de variável e usando o que provamos acima temos

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^0 |x|^{\delta r}|u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_\infty^0 |y|^{\delta r}|u(-y)|^r - dy\right)^{\frac{1}{r}}\\ &= \left(\int_0^\infty |y|^{\delta r}|\overline{u}(y)|^r dy\right)^{\frac{1}{r}}\\ &\leq C\left(\int_0^\infty |y|^{\alpha p}|D\overline{u}|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= C\left(\int_0^{-\infty} |x|^{\alpha p}|Du|^p - dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= C\left(\int_{-\infty}^0 |x|^{\alpha p}|Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

para ambos casos. Portanto, usando o lema 1.2

$$\begin{aligned}\left||x|^\delta u\right|_{L^r} &= \left(\int_{-\infty}^0 |x|^{\delta r}|u(x)|^r dx + \int_0^\infty |x|^{\delta r}|u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\\ &\leq C\left[\left(\int_{-\infty}^0 |x|^{\delta r}|u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_0^\infty |x|^{\delta r}|u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}\right]\\ &\leq C\left[\left(\int_{-\infty}^0 |x|^{\alpha p}|Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\infty |x|^{\alpha p}|Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\ &\leq C\left||x|^\alpha|Du|\right|_{L^p},\end{aligned}$$

em ambos casos.

(B) Assuma (3.1)-(3.3),(3.5) e seja $R_\rho = \{\rho < |x| \leq 2\rho\}$, para todo $\rho > 0$. Se $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\mathbb{N})$ e

$$\delta = \gamma + \frac{n}{r} - n, \tag{3.13}$$

então

$$\int_{R_\rho} |x|^{\gamma r}|u|^r \leq C\left(\int_{R_\rho} |x|^{\alpha p}|Du|^p\right)^{\frac{ar}{p}} \left(\int_{R_\rho} |x|^{\beta q}|u|^q\right)^{\frac{(1-a)r}{q}} + C\left(\int_{R_\rho} |x|^{\delta}|u|\right)^{r} \tag{3.14}$$

com C independente de ρ. Se $\int_{R_\rho} u = 0$ então o último termo de (3.14) pode ser omitido.

Vamos provar o caso $\rho = 1$ e justificar o caso geral reescalando. Começamos escrevendo $R_1 = R$ e considerando o caso que

$$\frac{1}{m} = \frac{a}{p} + \frac{1-a}{q} - \frac{a}{n} > 0. \quad (a > 0) \tag{3.15}$$

Quando isso ocorre, utilizamos teorema 2.1, pg-125 de [12], e $u^* = (med(R))^{-1}\int_R u$ obtemos

$$\int_R |u-u^*|^m \leq C\left(\int_R |Du|^p\right)^{\frac{am}{p}} \left(\int_R |u-u^*|^q\right)^{\frac{(1-a)m}{q}}. \tag{3.16}$$

Uma vez que $\alpha - \sigma \geq 0$, de (1.18) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} + \frac{a\alpha}{n} + \frac{(1-a)\beta}{n} &\geq a\left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha-1}{n}\right) + (1-a)\left(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}\right) \Rightarrow \\ \frac{1}{r} &\geq \frac{a}{p} + \frac{(1-a)}{q} - \frac{a}{n} \Rightarrow \\ r &\leq m, \end{aligned}$$

sendo a última implicação obtida de (3.15). Assim, usando a desigualdade de Holder e (3.16),

$$\begin{aligned} \int_R |u-u^*|^r &\leq \left(\int_R 1^{\frac{m}{m-r}}\right)^{\frac{m-r}{m}} \left(\int_R |u-u^*|^{r\frac{m}{r}}\right)^{\frac{r}{m}} \\ &\leq C\left(\int_R |Du|^p\right)^{\frac{ar}{p}} \left(\int_R |u-u^*|^q\right)^{\frac{(1-a)r}{q}} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Por outro lado, se (3.15) não vale, isto é, $\frac{a}{p} + \frac{1-a}{q} \leq \frac{a}{n}$ teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{q} - \frac{1}{qa} \Rightarrow \\ \frac{1}{p} - \frac{1}{n} &< \frac{1}{q}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Como

$$\frac{1}{r} \geq a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{q},$$

existe $b \leq a$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= b\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{q} \\ &= \frac{b}{p} + \frac{1-b}{q} - \frac{b}{n} \quad \text{quando } r \geq q \end{aligned}$$

$$b = 0 \quad \text{quando } r \leq q,$$

Dessa forma, procedendo de maneira análoga ao anteriormente exposto encontramos

$$\int_R |u-u^*|^r \leq C\left(\int_R |Du|^p\right)^{\frac{br}{p}} \left(\int_R |u-u^*|^q\right)^{\frac{(1-b)r}{q}} \tag{3.19}$$

Agora, usando desigualdade de Holder, de Sobolev e observando que (3.18) é equivalente a $\dfrac{1}{q} > \dfrac{n-p}{pn} \;\Leftrightarrow\; q < p^*$ temos:

$$\begin{aligned} \int_R |u-u^*|^q &\leq \left(\int_R 1^{\frac{p^*}{p-q}}\right)^{\frac{p^*-q}{p^*}} \left(\int_R |u-u^*|^{q\frac{p^*}{q}}\right)^{\frac{q}{p^*}} \\ \left(\int_R |u-u^*|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C\left(\int_R |u-u^*|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ \left(\int_R |u-u^*|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C\left(\int_R |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Combinando (3.19) e (3.20) chegamos em (3.17) novamente, isto é,

$$\begin{aligned} \int_R |u-u^*|^r &\leq C\left(\int_R |Du|^p\right)^{\frac{ar}{p}} \left(\int_R |Du|^p\right)^{\frac{(b-a)r}{p}} \left(\int_R |u-u^*|^q\right)^{\frac{(1-a)r}{q}} \left(\int_R |u-u^*|^q\right)^{\frac{(a-b)r}{q}} \\ &\leq C\left(\int_R |Du|^p\right)^{\frac{ar}{p}} \left(\int_R |Du|^p\right)^{\frac{(b-a)r}{p}} \left(\int_R |u-u^*|^q\right)^{\frac{(1-a)r}{q}} \left(\int_R |Du|^p\right)^{\frac{(a-b)r}{p}} \\ &= C\left(\int_R |Du|^p\right)^{\frac{ar}{p}} \left(\int_R |u-u^*|^q\right)^{\frac{(1-a)r}{q}}. \end{aligned}$$

Reescalonando (3.17) e multiplicando por $\rho^{\gamma r}$ temos:

$$\int_{R_\rho} \rho^{\gamma r}|u-u^*|^r \leq C\left(\int_{R_\rho} \rho^{p\sigma}|Du|^p\right)^{\frac{ar}{p}} \left(\int_{R_\rho} \rho^{q\beta}|u-u^*|^q\right)^{\frac{(1-a)r}{q}}.$$

Como $\rho < |x| \leq 2\rho$ podemos escrever

$$\int_{R_\rho} |x|^{\gamma r}|u-u^*|^r \leq C\left(\int_{R_\rho} |x|^{p\alpha}|Du|^p\right)^{\frac{ar}{p}}\left(\int_{R_\rho} |x|^{q\beta}|u-u^*|^q\right)^{\frac{(1-a)r}{q}} \tag{3.21}$$

Se $\int_{R_\rho} u = 0$ em (3.21) temos (3.14) omitindo o último termo. Se $u^* \neq 0$ notamos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_R |u-u^*|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_R (|u|+|u^*|)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_R |u|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_R |u^*|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C\left(\int_R |u|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

donde, usando (3.17)

$$\begin{aligned}
\left(\int_R |u|^r\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\int_R (|u-u^*|+|u^*|)^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\int_R |u-u^*|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_R |u^*|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq C\left(\int_R |Du|^p\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_R |u-u^*|^q\right)^{\frac{1-a}{q}} + (med(R))^{-1}\int_R |u| \left(\int_R 1\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq C\left(\int_R |Du|^p\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_R |u|^q\right)^{\frac{1-a}{q}} + C\int_R |u| \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Portanto, usando a afirmação 1 concluímos o caso $\rho = 1$. Para o caso geral, primeiro vamos reescalonar (3.23) para obter

$$\begin{aligned}
\left(\int_{R_\rho} |u|^r\right)^{\frac{1}{r}} &\leq C\left(\int_{R_\rho} |Du|^p\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_{R_\rho} |u|^q\right)^{\frac{1-a}{q}} + (med(R_\rho))^{-1}\left(\int_{R_\rho} 1\right)^{\frac{1}{r}}\int_{R_\rho} |u| \\
&= C\left(\int_{R_\rho} |Du|^p\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_{R_\rho} |u|^q\right)^{\frac{1-a}{q}} + C\rho^{\frac{n}{r}-n}\int_{R_\rho} |u|,
\end{aligned}$$

multiplicando por ρ^γ temos

$$\left(\int_{R_\rho} \rho^{r\gamma}|u|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_{R_\rho} \rho^{\sigma p}|Du|^p\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_{R_\rho} \rho^{\beta q}|u|^q\right)^{\frac{1-a}{q}} + C\int_{R_\rho} \rho^{\gamma+\frac{n}{r}-n}|u|.$$

Novamente, lembrando que $\rho < |x| \leq 2\rho$ concluimos

$$\left(\int_{R_\rho} |x|^{r\gamma}|u|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_{R_\rho} |x|^{\alpha p}|Du|^p\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_{R_\rho} |x|^{\beta q}|u|^q\right)^{\frac{1-a}{q}} + C\int_{R_\rho} |x|^{\gamma+\frac{n}{r}-n}|u|\,.$$

(C) Assuma (3.1)-(3.3),(3.5), $\sigma = \alpha - 1$ e suponha que

$$a > (1 + q - \frac{q}{p})^{-1}. \tag{3.24}$$

Então (3.4) vale com a constante C uniforme, enquanto $\gamma r + n$ fica limitada longe de zero.

Tendo em vista $\gamma = a(\alpha-1) + (1-a)\beta$ e (3.5) vemos que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{(1-a)}{q}$, dessa forma,

$$\begin{aligned} a &> (1 + q - \frac{q}{p})^{-1} \quad \Leftrightarrow \\ \frac{a}{q} + a - \frac{a}{p} &> \frac{1}{q} \qquad\qquad \Leftrightarrow \\ a &> \frac{1}{r}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Nesse contexto, vamos provar (3.4) usando integração por partes radial. Seja $B_A(0)$ uma bola que contém o suporte de u, temos

$$\int_{B_A} |x|^{\gamma r}|u|^r = \int_{S^{n-1}}\int_0^A \rho^{\gamma r}|u(\rho\theta)|^r \rho^{n-1} d\rho\, d\theta,$$

entretanto,

$$\begin{aligned} \int_0^A \rho^{\gamma r+n-1}[u(\rho\theta)^2]^{\frac{r}{2}} d\rho &= \frac{1}{\gamma r+n}\rho^{\gamma r+n}|u(\rho\theta)|^r\Big|_0^A - \frac{1}{\gamma r+n}\int_0^A \rho^{\gamma r+n}\frac{r}{2}[u(\rho\theta)^2]^{\frac{r}{2}-1}D[u(\rho\theta)^2]d\rho \\ &= -\frac{r}{\gamma r+n}\int_0^A \rho^{\gamma r+n}|u(\rho\theta)|^{r-2}u(\rho\theta)D[u(\rho\theta)]d\rho \\ &\leq \left|-\frac{r}{\gamma r+n}\right|\int_0^A \rho^{\gamma r+n}|u(\rho\theta)|^{r-2}|u(\rho\theta)||\langle Du(\rho\theta), v\rangle|d\rho \\ &\leq C\int_0^A \rho^{\gamma r+1}|u(\rho\theta)|^{r-1}|Du(\rho\theta)|\rho^{n-1}d\rho. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{B_A} |x|^{\gamma r}|u|^r &\leq C\int_{S^{n-1}}\int_0^A \rho^{\gamma r+1}|u(\rho\theta)|^{r-1}|Du(\rho\theta)|\rho^{n-1}d\rho d\theta \\
&= C\int_{B_A} |x|^{\gamma r+1}|u(x)|^{r-1}|Du(x)|dx \\
&= C\int_{B_A} (|x|^{\alpha}|Du(x)|)\left(|x|^{(1-a)\beta}|u(x)|^{1-a}\right)^{\frac{1}{a}}\left(|x|^{\gamma r+1-\alpha+(\frac{a-1}{a})\beta}|u(x)|^{r-\frac{1}{a}}\right)dx \\
&= C\int_{B_A} (|x|^{\alpha}|Du(x)|)\left(|x|^{\beta}|u(x)|\right)^{\frac{1}{a}-1}\left(|x|^{\epsilon}|u(x)|^{r-\frac{1}{a}}\right)dx,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \gamma r+1-\alpha+\beta-\frac{\beta}{a} \\
&= \gamma r-[a(\alpha-1)+(1-a)\beta]\frac{1}{a} \\
&= \gamma\big(r-\frac{1}{a}\big).
\end{aligned}$$

Por (3.24) temos $\frac{1}{a} < 1+q-\frac{q}{p}$ e daí vemos que $\frac{1}{a}-1 < q$. Dessa forma, usando Holder e lembrando do suporte de u obtemos

$$\int |x|^{\gamma r}|u|^r \leq C\big||x|^{\alpha}|Du|\big|_{L_p}\big||x|^{\beta}u\big|_{L_q}^{\frac{1}{a}-1}\big||x|^{\epsilon}|u|^{r-\frac{1}{a}}\big|_{L_k}, \tag{3.26}$$

com k escolhido de modo que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}(a^{-1}-1)+\frac{1}{k}=1,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} &= -\frac{1}{p}-\frac{1}{qa}+\frac{1}{q}+1 \quad\Leftrightarrow \\
\frac{a}{k} &= -\frac{a}{p}-\frac{1}{q}+\frac{a}{q}+a \quad\Leftrightarrow \\
\frac{a}{k} &= -\frac{1}{r}+a \quad\Leftrightarrow \\
k\big(r-\frac{1}{a}\big) &= r,
\end{aligned}$$

e (multiplicando a última igualdade por γ) $\epsilon k = \gamma r$. Portanto de (3.26) vemos que

$$\begin{aligned} \int |x|^{\gamma r}|u|^r &\leq C\big||x|^\alpha|Du|\big|_{L_p}\big||x|^\beta u\big|_{L_q}^{\frac{1}{a}-1}\left(\int |x|^{\gamma r}|u|^r\right)^{1-\frac{a-1}{r}} \\ \left(\int |x|^{\gamma r}|u|^r\right)^{\frac{a-1}{r}} &\leq C\big||x|^\alpha|Du|\big|_{L_p}\big||x|^\beta u\big|_{L_q}^{\frac{1}{a}-1} \\ \big||x|^\gamma u\big|_{L^r} &\leq C\big||x|^\alpha|Du|\big|_{L^p}^a\big||x|^\beta u\big|_{L^q}^{1-a} \end{aligned}$$

(D) Se $t, q \geq 1$; $\gamma + \dfrac{n}{r}$, $\epsilon + \dfrac{n}{t}$, $\beta + \dfrac{n}{q} > 0$ e $0 \leq b \leq 1$ então

$$\big||x|^\gamma u\big|_{L^r} \leq \big||x|^\epsilon u\big|_{L^t}^b\big||x|^\beta u\big|_{L^q}^{1-b} \tag{3.27}$$

para $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\frac{1}{r} = \frac{b}{t} + \frac{1-b}{q} \tag{3.28}$$

$$\gamma = b\epsilon + (1-b)\beta \tag{3.29}$$

Uma vez que $1 = \dfrac{br}{t} + \dfrac{(1-b)r}{q}$, a desigualdade acima segue da desigualdade de Holder:

$$\begin{aligned} \int |x|^{\gamma r}|u|^r &= \int (|x|^{br\epsilon}|u|^{br})(|x|^{(1-b)r\beta}|u|^{(1-b)r}) \\ &\leq \left(\int (|x|^{br\epsilon}|u|^{br})^{\frac{t}{br}}\right)^{\frac{br}{t}}\left(\int (|x|^{(1-b)r\beta}|u|^{(1-b)r})^{\frac{q}{(1-b)r}}\right)^{\frac{(1-b)r}{q}} \\ &= \big||x|^\epsilon u\big|_{L^t}^{br}\big||x|^\beta u\big|_{L^q}^{(1-b)r} \end{aligned}$$

Por conveniência de notação vamos escrever

$$\big||x|^\alpha Du\big|_{L^p} = A, \quad \big||x|^\beta u\big|_{L^q} = B \tag{3.30}$$

Daqui por diante $\zeta(x)$ representara uma função em $C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ fixa, com as seguintes propriedades:

$$0 \leq \zeta \leq 1; \quad \zeta \equiv 1 \ se \ |x| < \frac{1}{2}, \ \ \zeta \equiv 0 \ se \ |x| > 1 \tag{3.31}$$

(III) Suficiência quando $n = 1$ e $\sigma = \alpha - 1$

Quando possível, vamos usar o (IIA) para o caso $a = 1$ e (IID) para interpolar entre $a = 0$ e $a = 1$. Observe que (IIA) não se aplica quando $\frac{1}{p} + \alpha - 1 = 0$, isto é, quando $\delta + \frac{1}{r} = 0$ em (3.12). Note ainda que $\sigma = \alpha - 1$ em (3.3) e (3.5) produz

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{p} + \frac{1-a}{q}, \quad \gamma = a(\alpha - 1) + (1-a)\beta \tag{3.32}$$

A técnica usada aqui se resume a esgotar as possibilidades para $\frac{1}{p} + \alpha - 1$ e conseguir (3.4) para cada uma delas.

(A) o caso $\gamma + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \alpha - 1$, $0 \leq a \leq 1$

Por (IID) temos

$$\left||x|^\gamma u\right|_{L^r} \leq \left||x|^{\alpha-1} u\right|_{L^p}^a \left||x|^\beta u\right|_{L^q}^{1-a}, \tag{3.33}$$

como $\alpha = \alpha - 1 + \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p}$ e $\frac{1}{p} + \alpha - 1 > 0$, usando (IIA) encontramos

$$\left||x|^{\alpha-1} u\right|_{L^p} \leq C\left||x|^\alpha Du\right|_{L^p} \tag{3.34}$$

Combinando (3.33) e (3.34) concluimos (3.4).

O restante da seção será dedicado ao caso $\gamma + \frac{1}{r} \neq \frac{1}{p} + \alpha - 1$. Em tal evento, podemos renormalizar u, isto é, definir $\tilde{u}(x) = \frac{1}{S} u(Rx)$, de forma que $A = B = 1$. Vejamos como exibir R e S que garantem tal renormalização.

$$\begin{aligned}
1 &= \left||x|^\alpha D\tilde{u}(x)\right|_{L^p}^p \\
&= \int |x|^{\alpha p} |D\tilde{u}(x)|^p dx \\
&= \int |x|^{\alpha p} \left|\frac{R}{S} Du(Rx)\right|^p dx \\
&= \int \left|\frac{R}{S}\right|^p \left|\frac{y}{R}\right|^{\alpha p} |Du(y)|^p R^{-1} dy \\
&= \frac{R^{p-\alpha p-1}}{S^p} \int |y|^{\alpha p} |Du(y)|^p dy \\
&= \frac{R^{p-\alpha p-1}}{S^p} A
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 1 &= \left||x|^{\beta}\tilde{u}(x)\right|_{L^q}^{q} \\ &= \int |x|^{\beta q}\left|\frac{1}{S}u(Rx)\right|^{q}dx \\ &= \int \left|\frac{1}{S^q}\right|\left|\frac{y}{R}\right|^{\beta q}|u(y)|^{q}R^{-1}dy \\ &= R^{-\beta q-1}S^{-q}B, \end{aligned}$$

resolvendo $\begin{cases} S = R^{\frac{p-\alpha p-1}{p}}A^{\frac{1}{p}} \\ B = R^{\beta q+1}S^{q} \end{cases}$ temos

$$\begin{aligned} & B &= R^{\beta q+1}R^{q\frac{p-\alpha p-1}{p}}A^{\frac{p}{q}} \\ \Leftrightarrow\quad & BA^{\frac{-p}{q}} &= R^{\frac{\beta qp+p+pq-\alpha pq-q}{p}} \\ \Leftrightarrow\quad & BA^{\frac{-p}{q}} &= R^{\frac{(\beta-\alpha+1)pq+(p-q)}{p}} \\ \Leftrightarrow\quad & R &= \left(BA^{\frac{-p}{q}}\right)^{\frac{p}{(\beta-\alpha+1)pq+(p-q)}} \end{aligned}$$

e

$$S = \left(\left(BA^{\frac{-p}{q}}\right)^{\frac{p}{(\beta-\alpha+1)pq+(p-q)}}\right)^{\frac{p-\alpha p-1}{p}}A^{\frac{1}{p}}.$$

R e S fazem sentido pois $\gamma+\dfrac{1}{r}\neq\dfrac{1}{p}+\alpha-1$ equivale a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{r}+\gamma\right)-\left(\frac{1}{q}+\beta\right) &\neq 0 \\ \Rightarrow\quad & -a\left(\beta+\frac{1}{q}\right)+a\left(\alpha-1+\frac{1}{p}\right) &\neq 0 \\ \Rightarrow\quad & q\left(\beta-(\alpha-1)\right)+1-\frac{q}{p} &\neq 0 \\ \Rightarrow\quad & (\beta-\alpha+1)pq+(p-q) &\neq 0 \end{aligned}$$

Assumindo tal normalização, nosso objetivo é mostrar que $\left||x|^{\gamma}u\right|_{L^r}\leq C$.

(B) O caso $\dfrac{1}{p}+\alpha-1>0$ e limitada longe de zero

A prova desse caso segue usando os mesmos argumentos da parte A. No entanto, note que se $\dfrac{1}{p}+\alpha-1\longrightarrow 0$ a constante C de (3.34) tende para ∞ (ver a constante C na prova de (IIA)).

Os próximos casos, (C)-(E), são para a prova de $\dfrac{1}{p}+\alpha-1\approx 0$ e o caso (F) para $\dfrac{1}{p}+\alpha-1<0$ e limitada longe de zero.

Escolhemos um número real v, dependendo dos parâmetros, tal que $0 < v < \dfrac{1}{2}$ e

$$2v < \gamma + \frac{1}{r}, \quad 2v \leq \beta + \frac{1}{q} \leq (2v)^{-1} \tag{3.35}$$

(C) o caso $-v^3 \leq \dfrac{1}{p} + \alpha - 1 \leq v$ e $\dfrac{1}{p} < 1 - v$

Primeiro note que $\underline{a}$ e $(1 + q - \frac{q}{p})^{-1}$ são limitadas longe de 1, isto é,

$$\begin{aligned}
\gamma + \frac{1}{r} &= a\left(\frac{1}{p} + \alpha - 1\right) + (1-a)\left(\frac{1}{q} + \beta\right) \quad \Rightarrow \\
2v &\leq av + (1-a)\frac{1}{2v} \quad \Rightarrow \\
a &\leq 1 + 2av^2 - 4v^2 \quad \Rightarrow \\
a &\leq 1 - 2v^2
\end{aligned} \tag{3.36}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 + q\left(1 - \frac{1}{p}\right)} &< \frac{1}{1 + qv} \\
&\leq \frac{1}{1+v}.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Seja $\mu = (1 + 2v^2)^{-1}$ e defina $a_0 = \dfrac{a}{\mu}$, daí vemos que $a_0 = a(1 + 2v^2) \leq (1 - 2v^2)(1 + 2v^2) = 1 - 4v^4$, ou seja, $a < a_0 \leq 1 - 4v^4$. Por (IID),

$$\big||x|^\gamma u\big|_{L^r} \leq \big||x|^\epsilon u\big|_{L^t}^{a_0}\big||x|^\beta u\big|_{L^q}^{1-a_0}, \tag{3.38}$$

onde ϵ e t são determinados por

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} &= \frac{a_0}{t} + \frac{1-a_0}{q} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{a}{p} + \frac{1-a}{q} &= \frac{a_0}{t} + \frac{1-a_0}{q} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{1}{p} - \frac{1}{q} &= \frac{\frac{1}{\mu}}{t} - \frac{\frac{1}{\mu}}{q} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{1}{t} &= \frac{\mu}{p} + \frac{1-\mu}{q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= a_0\epsilon + (1-a_0)\beta \quad \Leftrightarrow \\
a(\alpha - 1) + (1-a)\beta &= a_0\epsilon + (1-a_0)\beta \quad \Leftrightarrow \\
(\alpha - 1) - \beta &= \frac{\epsilon}{\mu} - \frac{\beta}{\mu} \quad \Leftrightarrow \\
\epsilon &= \mu(\alpha - 1) + (1-\mu)\beta.
\end{aligned}$$

Além disso, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}+\epsilon &= \mu\left(\frac{1}{p}+\alpha-1\right)+(1-\mu)\left(\beta+\frac{1}{q}\right)\\
&\geq -\mu v^3+(1-\mu)2v\\
&= -\frac{v^3}{1-2v^2}-\frac{2v}{1-2v^2}+2v\\
&= \frac{3v^3}{1+2v^2}\\
&= 3\mu v^3
\end{aligned}$$

é limitada longe de zero. Uma vez que $v<\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2v^2+1}>\dfrac{1}{1+v}$, (3.37) implica que $\left(1+q-\dfrac{q}{p}\right)^{-1}<\dfrac{1}{1+2v^2}=\mu$. Assim, por (IIC)

$$\left||x|^{\epsilon}u\right|_{L^t}\leq CA^{\mu}B^{1-\mu} \tag{3.39}$$

e substituindo (3.39) em (3.38) obtemos

$$\left||x|^{\gamma}u\right|_{L^r}\leq CA^{\mu a_0}B^{(1-\mu)a_0}B^{1-a_0}=CA^aB^{1-a}=C$$

(D) O caso $-v^3\leq\dfrac{1}{p}+\alpha-1\leq v,\quad 1-v\leq\dfrac{1}{p}\leq 1,\quad a\geq v$

Seja $\delta=\gamma+\frac{1}{r}-1$. Pelas hipóteses acima vemos que $\alpha\leq v+1-\dfrac{1}{p}\leq 2v$ e como $2v\leq\gamma+\dfrac{1}{r}-1+1=\delta+1$ temos

$$\alpha\leq 2v\leq\delta+1, \tag{3.40}$$

por outro lado, de $a\left(\dfrac{1}{p}+\alpha-1\right)\leq av$ e $-a\left(\dfrac{1}{q}+\beta\right)\leq -2av$ temos que $a\left(\dfrac{1}{p}+\alpha-1\right)-a\left(\dfrac{1}{q}+\beta\right)\leq -av\leq -v^2$, daí

$$\begin{aligned}
\gamma+\frac{1}{r} &\leq \frac{1}{q}+\beta-v^2\\
\Rightarrow\quad \gamma+\frac{1}{r}-1-\beta &\leq \frac{1}{q}-1-v^2\\
\Rightarrow\quad \delta-\beta &\leq \frac{1}{q}-1-v^2.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Afirmamos que

$$\left(\int |x|^{\gamma r}|u|^r\right)^{\frac{1}{r}}\leq CA^aB^{1-a}+C\int |x|^{\delta}|u|\,. \tag{3.42}$$

De fato, se $R_k = \{2^k < |x| \leq 2^{k-1}\}$, para todo k inteiro, então (IIB) implica que

$$\begin{aligned}
\int_{R_k} |x|^{\gamma r}|u|^r &\leq C\left(\int_{R_k} |x|^{\alpha p}|Du|^p\right)^{\frac{ar}{p}}\left(\int_{R_k} |x|^{\beta q}|u|^q\right)^{\frac{(1-a)r}{q}} + C\left(\int_{R_k} |x|^{\delta}|u|\right)^r \\
\Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{R_k} |x|^{\gamma r}|u|^r &\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\left(\int_{R_k} |x|^{\alpha p}|Du|^p\right)^{\frac{ar}{p}}\left(\int_{R_k} |x|^{\beta q}|u|^q\right)^{\frac{(1-a)r}{q}} + \left(\int_{R_k} |x|^{\delta}|u|\right)^r\right].
\end{aligned}$$

De (3.32) sabemos que $\dfrac{ar}{p} + \dfrac{(1-a)r}{q} = 1$ e $r \geq 1$, consequentemente, podemos usar as desigualdades (1.1) e (1.2) para conseguirmos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{R_k} |x|^{\gamma r}|u|^r \leq C\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{R_k} |x|^{\alpha p}|Du|^p\right)^{\frac{ar}{p}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{R_k} |x|^{\beta q}|u|^q\right)^{\frac{(1-a)r}{q}} + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{R_k} |x|^{\delta}|u|\right)^r\right],$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\big||x|^{\gamma}|u|\big|_{L^r}^r &\leq C\left[\big||x|^{\alpha}|Du|\big|_{L^p}^{ar}\big||x|^{\beta}|u|\big|_{L^q}^{(1-a)r} + \left(\int |x|^{\delta}|u|\right)^r\right] \\
\Rightarrow \quad \left(\int |x|^{\gamma r}|u|^r\right)^{\frac{1}{r}} &\leq CA^aB^{1-a} + C\int |x|^{\delta}|u|\,.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que $\int |x|^{\delta}|u| \leq C$. Para isso consideremos ζ definda anteriormente, escrevamos

$$\int |x|^{\delta}|u| = \int |x|^{\delta}\zeta|u| + \int |x|^{\delta}(1-\zeta)|u| \tag{3.43}$$

e estimemos os dois termos separadamente. Considere [M,N] o intervalo que contém o suporte de u. Uma vez que δ é limitada longe de -1, usaremos integração por partes no primeiro termo da soma. Fazendo $|x| = \rho$, observemos que se $x = \rho$

$$\begin{aligned}
\int \rho^{\delta}\zeta(\rho)|u(\rho)|d\rho &= \int_N^M \rho^{\delta+1}\zeta(\rho)|u(\rho)|d\rho \\
&= \frac{1}{\delta+1}\rho^{\delta+1}\zeta(\rho)|u(\rho)|\Big|_N^M - \frac{1}{\delta+1}\int_N^M \rho^{\delta+1}D[\zeta(\rho)|u(\rho)|]d\rho \\
&= -\frac{1}{\delta+1}\int_N^M \left(\rho^{\delta+1}(D\zeta(\rho))|u(\rho)| + \rho^{\delta+1}\zeta(\rho)D|u(\rho)|\right)d\rho \\
&= -\frac{1}{\delta+1}\int_N^M \left(\rho^{\delta+1}(D\zeta(\rho))|u(\rho)| + \rho^{\delta+1}\zeta(\rho)|u(\rho)|^{-1}u(\rho)Du(\rho)\right)d\rho \\
&\leq C\int_N^M \rho^{\delta+1}|D\zeta(\rho)||u(\rho)|d\rho + C\int_N^M \rho^{\delta+1}\zeta(\rho)|Du(\rho)|d\rho \\
&= C\int |x|^{\delta+1}\zeta|Du| + C\int |x|^{\delta+1}|D\zeta||u| \\
&\leq C\int_{|x|<1} |x|^{\delta+1}|Du| + C\int_{\frac{1}{2}<|x|<1} |x|^{\delta+1}|u|\,,
\end{aligned}$$

sendo obtida a mesma desigualdade quando usamos $x = -\rho$.

Se $q > 1$, usando a desigualdade de Holder

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}<|x|<1} |x|^{\delta+1}|u| &= \int_{\frac{1}{2}<|x|<1} |x|^{\delta+1-\beta}|x|^{\beta}|u| \\ &\leq \left(\int_{\frac{1}{2}<|x|<1} |x|^{(\delta+1-\beta)q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \left||x|^{\beta}u\right|_{L^q} \\ &= CB,\end{aligned}$$

onde $q^* = \dfrac{q}{q-1}$. Se $q = 1$,

$$\int_{\frac{1}{2}<|x|<1} |x|^{\delta+1-\beta}|x|^{\beta}|u| \leq C\left||x|^{\beta}u\right|_{L^p}.$$

Além disso, uma vez que $\delta + 1 \geq \alpha$ por (3.40), podemos proceder de maneira análoga e verificar que

$$\begin{aligned}\int_{|x|<1} |x|^{\delta+1}|Du| &= \int_{|x|<1} |x|^{\delta+1-\alpha}|x|^{\alpha}|Du| \\ &\leq CA\end{aligned}$$

quando $p = 1$ e

$$\begin{aligned}\int_{|x|<1} |x|^{\delta+1}|Du| &\leq \int_{|x|<1} |x|^{\delta+1-\alpha}|x|^{\alpha}|Du| \\ &\leq \left(\int_{|x|<1} |x|^{(\delta+1-\alpha)p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \left||x|^{\alpha}Du\right|_{L^p} \\ &= CA\end{aligned}$$

quando $p > 1$, onde $p^* = \dfrac{p}{p-1}$. Portanto,

$$\int |x|^{\delta}\zeta|u| \leq C \tag{3.44}$$

Para estimar a segunda parcela de (3.43), vamos usar apenas argumentos similares aos da primeira:

$$\begin{aligned}\int |x|^{\delta}(1-\zeta)|u| &= \int_{\frac{1}{2}<|x|<1} |x|^{\delta}(1-\zeta)|u| + \int_{|x|>1} |x|^{\delta}|u| \\ &\leq \int_{|x|>\frac{1}{2}} |x|^{\delta}|u| \\ &= \int_{|x|>\frac{1}{2}} |x|^{\delta-\beta}|x|^{\beta}|u| \\ &\leq B\left(\int_{|x|>\frac{1}{2}} |x|^{(\delta-\beta)q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}}\end{aligned}$$

sendo $q > 1$ e $q^* = \dfrac{q}{q-1}$. Como (3.41) garante que $\delta - \beta < 0$, segue que a última integral converge. Assim

$$\int |x|^\delta (1-\zeta)|u| \leq C. \tag{3.45}$$

Se $q = 1$, novamente usando que $\delta < \beta$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>\frac{1}{2}} |x|^\delta |u| &= \int_{|x|>\frac{1}{2}} |x|^{\delta-\beta}|x|^\beta |u| \\
&\leq C\int_{|x|>\frac{1}{2}} |x|^\beta |u| \\
&\leq CB,
\end{aligned}$$

consequentemente, (3.45) também vale para esse caso. Portanto, $\int |x|^\delta |u| \leq C$, onde C é uniforme quando v é fixo. Isso conclui a prova, pois a partir de (3.42) verificamos que $\big||x|^\gamma u\big|_{L^r} \leq C$.

(E) O caso $\quad -v^3 \leq \dfrac{1}{p} + \alpha - 1 \leq v, \quad 0 \leq a < v.$

Argumentaremos de maneira semelhante a parte (C). Seja ϵ e t satisfazendo

$$\frac{1}{t} = \frac{\mu}{p} + \frac{1-\mu}{q}, \quad \varepsilon = \mu(\alpha - 1) + (1-\mu)\beta. \tag{3.46}$$

Consideremos $\mu = \dfrac{1}{2}$, $a_0 = \dfrac{a}{\mu} = 2a$ e, de maneira análoga ao item (C), observamos que (3.46) equivale a

$$\frac{1}{r} = \frac{a_0}{p} + \frac{1-a_0}{q}, \quad \gamma = a_0(\alpha-1) + (1-a_0)\beta$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon + \frac{1}{t} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \alpha - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} + \beta\right) \\
&\geq \frac{1}{2}(2v - v^3) \\
&\geq \frac{1}{2}(2v - v) \\
&= \frac{1}{2}v.
\end{aligned}$$

Como $a_0 < 2v$, por (IID) temos

$$\big||x|^\gamma u\big|_{L^r} \leq \big||x|^\epsilon u\big|_{L^t}^{a_0} \big||x|^\beta u\big|_{L^q}^{1-a_0}$$

que implica em

$$\big||x|^\gamma u\big|_{L^r} \le \big||x|^\epsilon u\big|_{L^t}^{2a}\big||x|^\beta u\big|_{L^q}^{1-2a}. \tag{3.47}$$

Além disso, uma vez que $\epsilon + \dfrac{1}{t} \ge \dfrac{1}{2}v > 0$ e (3.46) ocorre, pelos casos (C) e (D) (considerando $a = \dfrac{1}{2}$)

$$\big||x|^\epsilon u\big|_{L^t} \le A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}}. \tag{3.48}$$

Combinando (3.47) e (3.48) concluímos

$$\big||x|^\gamma u\big|_{L^r} \le C A^a B^{1-a}$$

Agora nos resta verificar o caso em que $\dfrac{1}{p} + \alpha - 1 < 0$ e limitada longe de zero.

(F) O caso $\dfrac{1}{p} + \alpha - 1 < -v^3$

Seja $\hat{u}(x) = u(x) - u(0)\zeta(x)$, com ζ definida em (3.31). Observando que $\alpha = \alpha - 1 + \dfrac{1}{p} + \dfrac{p-1}{p}$, $\dfrac{1}{p} + \alpha - 1 < 0$, $\hat{u}(0) = 0$ e lembrando de (3.32), podemos repetir os argumentos das partes (A) e (B) para obter

$$\begin{aligned}
\big||x|^\gamma \hat{u}\big|_{L^r} &\le C\big||x|^\alpha D\hat{u}\big|_{L^p}^a \big||x|^\beta \hat{u}\big|_{L^q}^{1-a} \\
&= C\big||x|^\alpha Du + |x|^\alpha u(0) D\zeta(x)\big|_{L^p}^a \big||x|^\beta u + |x|^\beta u(0)\zeta(x)\big|_{L^q}^{1-a} \\
&\le C\left[\big||x|^\alpha Du\big|_{L^p} + |u(0)|\left(\int_{\frac{1}{2}<|x|<1} |x|^{\alpha p}|D\zeta|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^a \\
&\quad \cdot \left[\big||x|^\beta u\big|_{L^q} + |u(0)|\left(\int_{|x|<1} |x|^{\beta q}|\zeta|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{1-a}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Como $\displaystyle\int_{|x|<1} |x|^{\beta q}|\zeta|^q \le \int_{|x|<1} |x|^{\beta q} = \int_{-1}^{0} |x|^{\beta q} + \int_0^1 |x|^{\beta q} = C$, (3.49) reduz a

$$\begin{aligned}
\big||x|^\gamma \hat{u}\big|_{L^r} &\le C(1 + C|u(0)|)^a (1 + C|u(0)|)^{1-a} \\
&\le C(1 + |u(0)|).
\end{aligned}$$

Para completer a prova precisamos mostrar que $|u(0)| \le C$.

Primeiro note que $-\int_0^\infty \frac{d}{dx}(u\zeta) = -\lim_{k\to\infty}(u\zeta)\big|_0^k = u(0)\zeta(0) = u(0)$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
|u(0)| &\leq \int_0^\infty |(Du)\zeta + uD\zeta| \\
&\leq \int_0^1 |Du| + C\int_{\frac{1}{2}}^1 |u| \\
&= C\int_0^1 |Du| + C\int_{\frac{1}{2}}^1 |x|^{-\beta}|x|^{\beta}|u| \\
&\leq C\int_0^1 |Du| + C
\end{aligned}$$

(última desigualdade obtida repetindo argumentos usados no caso (D)). Se $p > 1$, pela desigualdade de Holder

$$\int_0^1 |Du| \leq \left||x|^{\alpha}Du\right|_{L^p}\left(\int_0^1 x^{-\alpha p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

onde $p' = \dfrac{p}{p-1}$, entretanto, como

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p} - 1 + \alpha &<& -v^3 \\
\Rightarrow \quad & -\frac{1}{p'} + \alpha &<& -v^3 \\
\Rightarrow \quad & 1 - p'\alpha &>& p'v^3
\end{aligned}$$

podemos calcular a última integral e concluir que

$$\int_0^1 |Du| \leq C. \tag{3.50}$$

Se $q = 1$, da nossa hipótese inicial temos $\alpha \leq -v^3 < 0$ e $\int_0^1 |Du| = \int_0^1 |x|^{-\alpha}|x|^{\alpha}|Du| \leq C$. Portanto,

$$|u(0)| \leq C. \tag{3.51}$$

(IV) Suficiência quando $n \geq 1$, $\alpha \geq \sigma \geq \alpha - 1$

Note que nesse caso

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r} &= -\frac{\gamma}{n}+\frac{a}{p}+\frac{a(\alpha-1)}{n}+\frac{1-a}{q}+\frac{(1-a)\beta}{n} \\
\Rightarrow \quad \frac{1}{r} &= \frac{a}{p}+\frac{1-a}{q}+\frac{a(\alpha-1-\sigma)}{n} \\
\Rightarrow \quad \frac{1}{r} &\leq \frac{a}{p}+\frac{1-a}{q}. \qquad (3.52)
\end{aligned}
$$

A idéia aqui é provar o caso em que a função é radial através do caso $n=1$ já provado e depois o caso não-radial usando caso radial.

(A) Função radial

Consideremos $u(x)=f(|x|)$, onde f é suave em $[0,\infty)$ e desaparece para $|x|$ grande. Para $k\in\mathbb{Z}$, seja $R_k=\{2^k\leq|x|\leq 2^{k+1}\}$. Por (IIB) temos

$$
\int_{R_k}|x|^{\gamma r}|u|^r \leq C\left(\int_{R_k}|x|^{\alpha p}|Du|^p\right)^{\frac{ar}{p}}\left(\int_{R_k}|x|^{\beta q}|u|^q\right)^{\frac{(1-a)r}{q}}+C\left(\int_{R_k}|x|^{\delta}|u|\right)^{r}, \qquad (3.53)
$$

onde $\delta=\gamma+\dfrac{n}{r}-n$. Seja s definido por $\dfrac{1}{s}=\dfrac{a}{p}+\dfrac{1-a}{q}$, vemos que $\dfrac{1}{r}\leq\dfrac{1}{s}\leq 1$. Pela desigualdade de Holder segue que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{R_k}|x|^{\delta}|u|\right)^{r} &= \left(\int_{R_k}|x|^{\gamma+\frac{n}{r}-\frac{n}{s}+\frac{n}{s}-n}|u|\right)^{r} \\
&\leq \left(\int_{R_k}(|x|^{\frac{n}{s}-n})^{\frac{s}{s-1}}\right)^{\frac{(s-1)r}{s}}\left(\int_{R_k}|x|^{\mu s}|u|^s\right)^{\frac{r}{s}} \\
&= \left(\int_{R_k}|x|^{-n}\right)^{\frac{(s-1)r}{s}}\left(\int_{R_k}|x|^{\mu s}|u|^s\right)^{\frac{r}{s}} \\
&= C\left(\int_{R_k}|x|^{\mu s}|u|^s\right)^{\frac{r}{s}}, \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

com $\mu=\gamma+\dfrac{n}{r}-\dfrac{n}{s}$. Dessa forma, somando (3.53) para todo $k\in\mathbb{Z}$ e usando as desigualdades (1.1), (1.2) temos:

$$
\left(\int|x|^{\gamma r}|u|^r\right)^{\frac{1}{r}}\leq CA^aB^{1-a}+C\left(\int|x|^{\mu s}|u|^s\right)^{\frac{1}{s}}. \qquad (3.55)
$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}
\left(\int |x|^{\mu s}|u|^s\right)^{\frac{1}{s}} &= \left(\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \rho^{(\frac{ns}{r}+\gamma s-n)}|f(\rho)|^s \rho^{n-1} d\theta d\rho\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq C\left(\int_0^\infty \rho^{(\frac{ns}{r}+\gamma s-1)}|f(\rho)|^s d\rho\right)^{\frac{1}{s}} \\
&= C\left(\int_0^\infty \rho^{\hat{\mu} s}|f(\rho)|^s d\rho\right)^{\frac{1}{s}}, \quad \hat{\mu} = \frac{n}{r}+\gamma-\frac{1}{s},
\end{aligned} \tag{3.56}$$

enquanto

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |x|^{\alpha p}|Du|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \rho^{\alpha p}|Df|^p \rho^{n-1} d\theta d\rho \\
&\geq C\left(\int_0^\infty \rho^{\hat{\alpha} p}|Df|^p d\rho\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \hat{\alpha} = \alpha + \frac{n-1}{p}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

e

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |x|^{\beta q}|u|^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq C\left(\int_0^\infty |x|^{\hat{\beta} q}|f|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \hat{\beta} = \beta + \frac{n-1}{q}. \tag{3.58}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
a\left(\frac{1}{p}+\hat{\alpha}-1\right)+(1-a)\left(\frac{1}{q}+\hat{\beta}\right) &= \frac{a}{p}+a(\alpha-1)+\frac{a(n-1)}{p} \\
&\quad +\frac{1-a}{q}+(1-a)\beta+\frac{(1-a)n}{q}-\frac{1-a}{q} \\
&= a\left(\frac{n}{p}+\alpha-1\right)+(1-a)\left(\frac{n}{q}+\beta\right) \\
&= \gamma+\frac{n}{r} \\
&= \frac{1}{s}+\hat{\mu},
\end{aligned}$$

da seção III ($n=1$), concluímos

$$\left||x|^{\hat{\mu}} f\right|_{L^s} \leq C\left||x|^{\hat{\alpha}} Df\right|_{L^p}^a \left||x|^{\hat{\beta}} f\right|_{L^q}^{1-a}. \tag{3.59}$$

De (3.55) e (3.56) obtemos

$$\left(\int |x|^{\gamma r}|u|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq CA^a B^{1-a} + C\left(\int_0^\infty \rho^{\hat{\mu} s}|f(\rho)|^s d\rho\right)^{\frac{1}{s}} \tag{3.60}$$

e substituindo (3.57) e (3.58) em (3.59) concluímos

$$\left(\int_0^\infty \rho^{\hat{\mu}s}|f(\rho)|^s d\rho\right)^{\frac{1}{s}} \leq CA^a B^{1-a}.$$

Portanto,

$$\left||x|^{\gamma r} u\right|_{L^r} \leq CA^a B^{1-a}$$

(B) Função não-radial

Para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, seja $U : (0,\infty) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sua função média esférica

$$U(\rho) = \frac{1}{A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1}} \int_{|x|=\rho} u \tag{3.61}$$

e $\tilde{u}$ a função radial associada em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\tilde{u}(x) = U(|x|). \tag{3.62}$$

De (3.61) temos

$$\begin{aligned} U(\rho) &= \frac{1}{A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1}} \int_{|x|=\rho} u(y)dy \\ &= \frac{1}{A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x+\rho w)\rho^{n-1}dw \\ &= \frac{1}{A[\partial B_1(0)]} \int_{\partial B_1(0)} u(x+\rho w)dw \end{aligned}$$

que implica em

$$DU(\rho) = \frac{1}{A[\partial B_1(0)]} \int_{\partial B_1(0)} Du(x+\rho w)\cdot w dw\,,$$

usando Schwartz vemos que

$$\begin{aligned} |DU(\rho)| &\leq \frac{1}{A[\partial B_1(0)]} \int_{\partial B_1(0)} |Du(x+\rho w)|dw \\ &= \frac{1}{A[\partial B_1(0)]} \int_{\partial B_\rho(0)} |Du(y)|\frac{1}{\rho^{n-1}}dy \\ &= \frac{1}{A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(0)} |Du|\,, \end{aligned} \tag{3.63}$$

por outro lado,

$$|U(\rho)| \leq \frac{1}{A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(0)} |u| \,. \tag{3.64}$$

Dessa forma, usando (3.63)

$$\begin{aligned}
\left||x|^\alpha D\tilde{u}\right|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |x|^{\alpha p} |DU(|x|)|^p \\
&= \int_0^\infty \int_{\partial B_\rho(0)} |x|^{\alpha p} |DU(|x|)|^p dS d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{\alpha p} |DU(\rho)|^p A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1} d\rho \\
&\leq \int_0^\infty \rho^{\alpha p} \frac{A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1}}{(A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1})^p} \left(\int_{\partial B_\rho(0)} |Du|\right)^p d\rho \\
&\leq \int_0^\infty \rho^{\alpha p} (A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1})^{1-p} \left(\int_{\partial B_\rho(0)} |Du|^p\right) \left(A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1}\right)^{(\frac{p-1}{p})p} d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{\alpha p} \left(\int_{\partial B_\rho(0)} |Du|^p\right) d\rho \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |x|^{\alpha p} |Du|^p \\
&= A^p
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$\big($a última desigualdade foi obtida pela desigualdade de Holder, sendo $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1\big)$ e, analogamente, usando (3.64)

$$\left||x|^\beta \tilde{u}\right|_{L^q} \leq B. \tag{3.66}$$

Além disso, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(0)} (u - \tilde{u}) &= \frac{1}{A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(0)} u - \frac{1}{A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(0)} U(|x|) \\
&= \frac{1}{A[\partial B_1(0)]\rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(0)} u - U(\rho) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Seja $R_k = \{2^k < |x| \leq 2^{k+1}\}$ com $k \in \mathbb{Z}$; por (IIB) e (3.67) temos

$$\int_{R_k} |x|^{\gamma r} |u - \tilde{u}|^r \leq C \left(\int_{R_k} |x|^{\alpha p} |Du - D\tilde{u}|^p\right)^{\frac{ar}{p}} \left(\int_{R_k} |x|^{\beta q} |u - \tilde{u}|^q\right)^{\frac{(1-a)r}{q}}, \tag{3.68}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. Somando (3.68) para todo $k \in \mathbb{Z}$, usando a desigualdade em (1.1) e (1.2) obtemos

$$\left||x|^\gamma (u - \tilde{u})\right|_{L^r} \leq \left||x|^\alpha D(u - \tilde{u})\right|_{L^p}^a \left||x|^\beta (u - \tilde{u})\right|_{L^q}^{1-a}$$

donde

$$\left||x|^\gamma u\right|_{L^r} - \left||x|^\gamma \tilde{u}\right|_{L^r} \leq C\left(\left||x|^\alpha Du\right|_{L^p} + \left||x|^\alpha D\tilde{u}\right|_{L^p}\right)^a \left(\left||x|^\beta u\right|_{L^q} + \left||x|^\beta \tilde{u}\right|_{L^q}\right)^{1-a}. \quad (3.69)$$

Portanto, usando (3.65), (3.66) e (IV-A)

$$\begin{aligned} \left||x|^\gamma u\right|_{L^r} &\leq C2^a A^a 2^{1-a} B^{1-a} + \left||x|^\gamma \tilde{u}\right|_{L^r} \\ &\leq CA^a B^{1-a} + CA^a B^{1-a} \\ &\leq CA^a B^{1-a} \end{aligned}$$

(V) Suficiência para o caso $\dfrac{1}{p} + \dfrac{\alpha - 1}{n} \neq \dfrac{1}{r} + \dfrac{\gamma}{n}$ e $\sigma < \alpha - 1$

Note que nesse caso $a < 1$ necessariamente. Podemos assumir A=B=1, uma vez que tal normalização é conseguida por escalonamento analogo ao feito em (III) quando $\dfrac{1}{p} + \alpha - 1 \neq \dfrac{1}{r} + \gamma$. Como (3.4) foi provado para $\sigma = \alpha$ e para $\sigma = \alpha - 1$, sabemos que

$$\left||x|^\delta u\right|_{L^s} \leq C \qquad \left||x|^\epsilon u\right|_{L^t} \leq C, \quad (3.70)$$

desde que $\delta,\ s,\ \epsilon,\ e\ t$ sejam relacionados por

$$\delta = b\alpha + (1-b)\beta, \qquad \frac{1}{s} = \frac{b}{p} + \frac{1-b}{q} - \frac{b}{n} \quad (3.71)$$

$$\epsilon = d(\alpha - 1) + (1-d)\beta, \qquad \frac{1}{t} = \frac{d}{p} + \frac{1-d}{q} \quad (3.72)$$

para escolhas de b e d com $0 \leq b,\ d \leq 1$ e supondo que

$$\frac{\delta}{n} + \frac{1}{s} > 0, \qquad \frac{\epsilon}{n} + \frac{1}{t} > 0. \quad (3.73)$$

Sobre certas condições para b e d veremos que (3.70) implica em uma cota para $\left||x|^\gamma u\right|_{L^r}$. Nosso trabalho aqui é descobrir tais condições que serão suficientes para concluir a prova do teorema.

Considerando ζ definida em (3.31) e escrevemos

$$\left||x|^\gamma u\right|_{L^r}^r = \int |x|^{\gamma r}\zeta |u|^r + \int |x|^{\gamma r}(1-\zeta)|u|^r.$$

Usando a desigualdade de Holder ($\frac{r}{t} + \frac{t-r}{t} = 1$ e $\frac{r}{s} + \frac{s-r}{s} = 1$), estimamos

$$\begin{aligned}
\left(\int |x|^{\gamma r}\zeta|u|^r\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int |x|^{\epsilon r}|u|^r\zeta|x|^{(\gamma-\epsilon)r}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\int |x|^{\epsilon t}|u|^t\right)^{\frac{r}{t}\frac{1}{r}} \left(\int_{|x|<1}(\zeta)^{\frac{t}{t-r}}(|x|)^{(\gamma-\epsilon)r\frac{t}{t-r}}\right)^{\frac{t-r}{t}\frac{1}{r}} \\
&\leq \left||x|^{\epsilon}u\right|_{L^t}\left(\int_{|x|<1}|x|^{\frac{(\gamma-\epsilon)rt}{t-r}}\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{t}} \qquad (3.74)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left(\int |x|^{\gamma r}(1-\zeta)|u|^r\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int |x|^{\delta r+(\gamma-\delta)r}(1-\zeta)|u|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left||x|^{\delta}u\right|_{L^s}\left(\int_{|x|>\frac{1}{2}}(1-\zeta)|x|^{(\gamma-\delta)r(\frac{s}{s-r})}\right)^{\frac{s-r}{s}\frac{1}{r}} \\
&\leq \left||x|^{\delta}u\right|_{L^s}\left(\int_{|x|>\frac{1}{2}}|x|^{(\gamma-\delta)r(\frac{s}{s-r})}\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}, \qquad (3.75)
\end{aligned}$$

desde que

$$\frac{1}{t} < \frac{1}{r} \qquad e \qquad \frac{1}{s} < \frac{1}{r}. \qquad (3.76)$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_{|x|<1}|x|^{\frac{(\gamma-\epsilon)rt}{t-r}} &= \int_0^1\left(\int_{\partial B_\rho(0)}|x|^{\frac{(\gamma-\epsilon)rt}{t-r}}dS\right)d\rho \\
&= \int_0^1 \rho^{\frac{(\gamma-\epsilon)rt}{t-r}+n-1} \\
&= \frac{1}{\frac{(\gamma-\epsilon)rt}{t-r}+n}\rho^{\frac{(\gamma-\epsilon)rt}{t-r}+n}\Big|_0^1,
\end{aligned}$$

teremos convergência se

$$\frac{(\gamma-\epsilon)rt}{t-r}+n>0$$

que equivale a

$$\frac{1}{t}+\frac{\epsilon}{n}<\frac{1}{r}+\frac{\gamma}{n}.$$

Assim, as integrais em (3.74) e (3.75) convergem se

$$\frac{1}{t}+\frac{\epsilon}{n}<\frac{1}{r}+\frac{\gamma}{n}<\frac{1}{s}+\frac{\delta}{n}. \qquad (3.77)$$

Além disso, de (3.5), (3.71) e (3.72) temos

$$\frac{1}{t}+\frac{\epsilon}{n}=d\left(\frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{n}\right)+(1-d)\left(\frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}\right)$$

$$\frac{1}{r}+\frac{\gamma}{n}=a\left(\frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{n}\right)+(1-a)\left(\frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}\right)$$

$$\frac{1}{s}+\frac{\delta}{n}=b\left(\frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{n}\right)+(1-b)\left(\frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}\right),$$

dessa forma, reescrevendo (3.77) temos

$$\frac{1}{t}+\frac{\epsilon}{n}-\left(\frac{1}{r}+\frac{\gamma}{n}\right)<0<\frac{1}{s}+\frac{\delta}{n}-\left(\frac{1}{r}+\frac{\gamma}{n}\right)$$

que equivale a

$$\begin{aligned}
&(d-a)\left(\frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{n}\right)+(a-d)\left(\frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}\right) \quad < \quad 0<(b-a)\left(\frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{n}\right)+(a-b)\left(\frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}\right)\\
\Leftrightarrow \quad &(d-a)\left[\left(\frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{n}\right)-\left(\frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}\right)\right] \quad < \quad 0<(b-a)\left[\left(\frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{n}\right)-\left(\frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}\right)\right],
\end{aligned}$$

de modo que (3.77) ocorre sempre que

$$b<a<d \qquad se \quad \frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{n}<\frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}$$

$$d<a<b \qquad se \quad \frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{n}>\frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}.$$

Por outro lado, como $\frac{1}{r}+\frac{\gamma}{n}=a\left(\frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{n}\right)+(1-a)\left(\frac{1}{q}+\frac{\beta}{n}\right)>0$, (3.73) ocorre se $|d-a|$ e $|b-a|$ são suficientemente pequenos. Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}-\frac{1}{s} &= \frac{a}{p}+\frac{1-a}{q}+\frac{a(\alpha-1)}{n}-\frac{\sigma}{n}-\frac{b}{p}-\frac{1-b}{q}-\frac{b}{n}\\
&= (a-b)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{1}{n}\right)+\frac{a}{n}(\alpha-\sigma) \qquad (3.78)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{t}=(a-d)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\frac{a}{n}(\alpha-\sigma-1) \qquad (3.79)$$

e, uma vez que $a > 0$ e $\sigma < \alpha - 1$, obtemos

$$0 < \frac{a}{n}(\alpha - \sigma - 1) < \frac{a}{n}(\alpha - \sigma).$$

Assim, se $|b - a|$ e $|a - d|$ são suficientemente pequenas, de (3.78) e (3.79) vemos que (3.76) também ocorre, isto é, $\frac{1}{r} > \frac{1}{s}$ e $\frac{1}{r} > \frac{1}{t}$. Portanto, para essas escolhas de b e d, usando (3.70), (3.74) e (3.75) encontramos

$$\big||x|^{\gamma} u\big|_{L^r} \;\leq\; C.$$

Isso conclui a prova do teorema. ∎

Observação 3.2

- *Se* $a = \frac{1}{2}$, $\alpha = -m$, $\beta = -s$, $\gamma = \frac{-(m+s+1)}{2}$ *e* $r = p = q = 2$ *temos o teorema 2.1.*
- *Se* $a = 1$, $\alpha = -b$, $\gamma = -c$ *e* $p = r = 2$ *temos o lema 2.1.*
- *Se* $a = 1$, $\alpha = \gamma = -b$ *e* $p = 2$ *temos o lema 2.2.*
- *Se* $a = 1$, $\alpha = -b$, $\gamma = -c$ *e* $p = 2$ *temos o teorema 2.2*

Além dos casos particulares vistos no início do trabalho, para os quais demos provas alternativas que produziram constantes ótimas, algumas desigualdades conhecidas também podem ser vistas como consequência deste teorema.

Corolário 3.3 *Se* $u \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, *as seguintes desigualdades valem:*

(i) $\left(\int |u|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, *onde* $r = \frac{np}{n-p}$ (*Desigualdade Sobolev*)

(ii) $\left(\int |x|^{-r}|u|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int |Du|^r\right)^{\frac{1}{r}}$ (*Desigualdade de Hardy*)

(iii) $|u|_{L^r} \leq C|u|_{L^p}^{a}|\nabla u|_{L^q}^{1-a}$, *onde* $\frac{1}{r} = a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1-a}{q}$ (*Gagliardo* $-$ *Nirenberg*)

(iv) $|u|_{L^r} \leq C|u|_{L^1}^{\frac{2/n}{1+2/n}}|\nabla u|_{L^2}^{\frac{1}{1+2/n}}$ (*Desigualdade de Nash*)

Prova. Basta tomar constantes apropriadas em (3.4):

(i) $a = 1$ e $\gamma = \alpha = 0$;

(ii) $a = 1$, $\alpha = 0$, $\gamma = -1$ e $r = p$;

(iii) $\gamma = \alpha = \beta = 0$ e $1 \leq p < n$.

(iv) $\gamma = \alpha = \beta = 0, p = 2, q = 1$ e $a = \dfrac{1}{1 + \frac{2}{n}}$ ■

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R.G. *The Elements of integration*, John Wiley, 1966.

[2] Bazan, A.; Neves, w. *A scaling approach to Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality*, Math.AP 3 Apr (2014) arXiv 1304-1823v2.

[3] Bazan, A.; Neves, w. *The Hardy and Caffarelli-Kohn-Nirenberg Inequalities Revisited*, Math.AP (2010) arXiv 1007-2005v1.

[4] Bradley, J.S. *Hardy inequalities with mixed norms*, Canad. Math. Bull. 21 (1978) 405-408.

[5] Caffarelli, L.; Kohn, R.; Nirenberg, L. *First order interpolation inequalities with weights*, Compos. Math. 53 (1984) 259-275.

[6] Cirmi, G. R.; Porzio, M. M. *L^1-solutions for some nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl., 169 (1995), 67-86.

[7] Costa, D.G. *Some new and short proofs for a class of Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities*, J. Math. Anal. 337 (2008) 311-317.

[8] Edwards, C.H. *Advanced Calculus of Several Variables*, Academic press, 1973

[9] Evans, L.C. *Partial Differential Equations*, IAMS Bookstore, 1998, v.19.

[10] Fabes, E.; Kenig, C.; Serapioni, R. *The local regularity of solutions of degenerate elliptic operators*, Comm. Partial Differ. Equations, 7 (1982), 77-116.

[11] Hardy, G.H.; Littlewood, J.E.; Polya, G. *Inequalities*, Cambridge: Cambridge University Press (1952).

[12] Nirenberg, L. *On elliptic partial differential equations*, Ann. di Pisa 9 (1959) 115-162.

[13] Romão, D.C. *Um estudo sobre a boa colocação local da equação não-linear de Schrodinger cúbica unidimensional em espaços sobolev periódicos*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Maceió-AL 2009.

[14] Talenti, G. *Best Constant in Sobolev Inequality*, Radazione (1975).