UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Sidney Donato da Silva

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE YAMABE

Maceió - AL
Março de 2015

Sidney Donato da Silva

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE YAMABE

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial, submetida à banca examinadora designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório.

Maceió - AL
Março de 2015

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária : Lucia Lima do Nascimento

S586s Silva, Sidney Donato da.
Solução do problema de Yamabe/ Sidney Donato da Silva. – Maceió, 2015.
103 f.

Orientador: Feliciano Marcilio Aguiar Vitório.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação em Matemática. Maceió, 2015.

Bibliografia: f. 97-98.

1. Geometria Conforme. 2. Problema de operadores elípticos. 3. Teoria de operadores elípticos. 4. Coordenadas normais conformes. 5. Teorema de massa positiva. I. Título.

CDU: 514.152.2

Dissertação de Mestrado sob o título *"Solução do Problema de Yamabe"*, defendido por Sidney Donato da Silva e aprovado em 13 de Março de 2015 em Maceió, Estado de Alagoas, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório
Orientador

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante
UFAL

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva
UFAL

Prof. Dr. Davi Máximo Alexandrino Nogueira
Stanford University

À minha família.

Em especial à minha mãe Valdira Pacheco.

Agradecimentos

Ao término desse trabalho, deixo aqui meus sinceros agradecimentos:

- ✓ Ao professor Feliciano Vitório pela orientação no mestrado, por sua paciência, por sua disposição em contribuir sempre, pela confiança e amizade desde o Pic-Junior, por acreditar no meu potencial de crescimento profissional e por ser um excelente profissional que consegue estimular seus alunos à pesquisa e à dedicação aos estudos.

- ✓ Ao professor Marcos Petrúcio por fazer parte da banca e estar sempre presente na minha formação, antes mesmo de iniciar a graduação, por suas sugestões e contribuições, e por sempre querer o melhor aos seus alunos.

- ✓ Ao professor Márcio Batista por sugestões que foram implementadas e ao professor Davi Máximo pela disposição em participar da banca, e por suas sugestões para a melhoria do trabalho.

- ✓ Aos professores André Flores e André Contiero por estarem presentes em minha formação e por seus conselhos. Aos professores Fernando Echaiz, Fernando Micena e demais professores do Instituto de Matemática que contribuiram de forma direta ou indireta para a minha obtenção do grau.

- ✓ Aos colegas de curso e aos funcionários do instituto pelo bom convívio.

- ✓ À minha família pela paciência e compreensão. Especialmente às minhas irmãs e minha mãe por suas orações e apoio sempre.

- ✓ À Deus por toda força e coragem que me concedeu para concluir esse trabalho.

- ✓ A todos que contribuiram para a realização desse trabalho.

- ✓ À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

“Nas questões matemáticas não se compreende a
incerteza nem a dúvida, assim como tampouco
se podem estabelecer distinções entre
verdades médias e verdades de grau superior.”
(David Hilbert)

Resumo

Nesse trabalho expomos a solução completa do Problema de Yamabe: "Dada uma variedade Riemanniana compacta conexa (M, g) de dimensão $n \geq 3$, encontrar uma métrica conforme à g com curvatura escalar constante". Inicialmente, Yamabe transforma esse problema para um problema de operadores elípticos. Juntamente com os trabalhos de Trundiger e Aubin, mostraremos que para uma certa classe de variedades sempre existe solução. Veremos também com resultados devido a Aubin, simplificados pelo uso de coordenadas normais conformes, que boa parte das variedades pertencem à essa classe. Um caso importante é a solução sobre a esfera, na qual usamos principalmente o Teorema de Yamabe e o Teorema de Obata. Por fim, expomos como Schoen usa o Teorema de Massa Positiva para completar os resultados obtidos por Aubin e concluir que o problema sempre tem a solução.

Palavras-chave: Problema de Yamabe. Geometria Conforme. Teoria de Operadores Elípticos. Coordenadas Normais Conformes. Teorema de Massa Positiva.

Abstract

In this work we expose the complete solution of the Yamabe Problem: “Given a compact connected Riemannian manifold (M, g) of dimension $n \geq 3$, find a metric conformal to g with constant scalar curvature”. Initially, Yamabe transforms this problem to a problem of elliptic operators. Together with the works of Trundiger and Aubin, we show that for a certain class of manifolds there is always solution. We will also see with results due to Aubin, simplified by the use of conformal normal coordinates, that many of the manifolds belong to this class. An important case is the solution on the sphere, in which we mainly use Yamabe’s Theorem and Obata’s Theorem. Finally, we show explain how Schoen uses the Positive Mass Theorem to complete the results obtained by Aubin and conclude that the problem always has a solution.

Keywords: Yamabe Problem. Conformal Geometry. Theory of Elliptic Operators. Conformal Normal Coordinates. Positive Mass Theorem.

Sumário

Introdução

Em 1960, no artigo [31], Hidehiko Yamabe propôs o seguinte problema:

Problema de Yamabe: Dada uma variedade Riemanniana compacta conexa (M, g) de dimensão $n \geq 3$, encontre uma métrica conforme à g com curvatura escalar constante.

O próprio Yamabe tentou resolver seu problema usando técnicas do cálculo variacional e equações parciais elípticas. Infelizmente sua demonstração continha um erro descoberto por Neil Sidney Trudinger e publicado em 1968. Trudinger conseguiu adaptar a demonstração feita por Yamabe, mas com o acréscimo de mais hipótese sobre M. Ele introduziu o chamado *Invariante de Yamabe* da variedade M, denotado por $\lambda(M)$. Veremos no Capítulo 3 que a constante $\lambda(M)$ depende apenas da classe conforme da variedade e da classe conforme das métricas. Trudinger verificou que a ideia de Yamabe estava correta, desde que $\lambda(M) \leq 0$. Também ele verifica que existe uma constante positiva $\alpha(M)$ tal que se $\lambda(M) < \alpha(M)$, então a conclusão de Yamabe é válida e o problema tem solução.

Em 1976, Thierry Aubin mostrou que $\alpha(M) = \lambda(S^n)$, onde $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ denota a esfera n-dimensional com a métrica canônica induzida da métrica Euclidiana.

Assim, com os resultados desses três matemáticos foi estabelecido o seguinte teorema:

Teorema: (Yamabe, Trudinger, Aubin) O problema de Yamabe pode ser resolvido desde que $\lambda(M) < \lambda(S^n)$.

Com o teorema acima em mente, podemos pensar em procurar quais variedades satisfazem $\lambda(M) < \lambda(S^n)$, se elas possuem algo em comum, ou mais profundo: será que para toda variedades M, nas hipóteses do problema, satisfaz $\lambda(M) < \lambda(S^n)$? A resposta afirmativa a essa pergunta resolveria completamente o problema de acordo com o teorema acima. Por sorte, veremos ao longo desse trabalho que de fato vale a desigualdade estrita.

A motivação para essa pergunta também vem do fato de que Aubin no mesmo artigo que complementou o teorema acima, ele verifica dois resultados importantes:

Teorema: (Aubin) Seja M nas hipóteses acima.

(a) Vale $\lambda(M) \leq \lambda(S^n)$ para toda M.

(b) Se M tem dimensão $n \geq 6$ e não é localmente conformemente plana, então $\lambda(M) < \lambda(S^n)$

Assim, Aubin obtém uma solução parcial e reforça a ideia de que a conjectura $\lambda(M) <$

$\lambda(S^n)$ seja verdade.

Concomitantemente, Morio Obata [21] em 1971 estabelece um resultado importante que culminaria na solução completa na esfera S^n através de vários métodos utilizados e várias contribuições. Mais ainda, como consequência do Teorema de Obata temos que existem infinitas soluções na esfera. Uma outra consequência disso é que isso é um exemplo da não-unicidade do problema.

Em 1984, Richard Schoen [23] consegue dar uma respota afimativa à nossa pergunta, verificando para os casos restantes:

Teorema: (Schoen) Seja M nas hipóteses acima, se M tem dimensão 3, 4, ou 5, ou M é localmente conformemente plana, então $\lambda(M) < \lambda(S^n)$, a menos que M seja conforme a S^n (S^n com a métrica canônica).

O trabalho de Schoen consistiu em notar que a função de Green do Laplaciano Conforme tem a expansão em coordenadas normais conformes dada por $G = r^{2-n} + A + O''(r)$, para $n = 3, 4,$ ou 5, ou M localmente conformemente plana. Usando essa função de Green, ele observa que a projeção estereográfica definida gera uma variedade assintoticamente plana e para resolver o problema no caso em que M não é conforme à esfera, bastava que a constante A fosse positiva. Ele assim o fez para esses casos. Notando que existia uma relação direta entre essa constante e o Teorema de Massa Positiva, o qual é provado para dimensões $3 \leq n \leq 7$ em alguns artigos de Scheon e S. T. Yau. Mas como veremos, a aplicação desse teorema na solução do problema de Yamabe é estritamente limitada aos casos não provados por Aubin.

1 Preliminares

1.1 Geometria Riemanniana

Variedade e Campos Diferenciáveis

Uma variedade M^n de dimensão n é uma espaço topológico de Hausdorff tal que cada ponto de M^n tem uma vizinhança homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Dizemos que M^n é uma variedade diferenciável de classe C^∞ se é uma variedade com uma classe equivalente de atlas de classe C^∞. Dados um ponto $p \in M$ e (Ω, Φ) uma carta local, as coordenadas de $p \in \Omega$, relativas a ϕ, são as coordenadas de $\Phi(p) \in \mathbb{R}^n$. Para nós, diferenciável significará de classe C^∞.

Definição 1.1. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $f : M_1 \longrightarrow M_2$ é *diferenciável em* $p \in \Omega \subset M_1$ se $\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ é diferenciável em $\Phi(p)$, onde (Ω, Φ) é uma carta local em torno de p e (Ω', Ψ) é uma carta local em torno de $\Phi(p)$.

Definição 1.2. Dada M uma variedade diferenciável, uma *curva diferenciável* em M é uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$. Se $\alpha(0) = p \in M$, o *vetor tangente à curva* α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \quad f \in C^\infty(M).$$

Um *vetor tangente em* p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = p$.

O *espaço tangente* T_pM *em* $p \in M^n$ é o conjunto de todos os vetores tangentes em p. Ele tem uma natural estrutura de espaço vetorial. Em uma carta local (Ω, Φ) em torno de p, os vetores $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$, definidos por

$$(\partial^i)_p(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (f) = \left[\frac{\partial(f \circ \Phi^{-1})}{\partial x^i}\right]_{\Phi(p)},$$

formam uma base para T_pM, chamada de base associada à carta. Note que $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ é o vetor tangente em p à curva $\Phi^{-1} \circ \alpha^i$, onde $\alpha^i(t)_p = (x^1, \cdots, x^i + t, \cdots, x^n)$ e $\Phi(p) = (x^1, \cdots, x^n)$. De fato,

$$(\Phi^{-1} \circ \alpha^i)'(0)_p f = \left.\frac{d(f \circ \Phi^{-1} \circ \alpha^i)}{dt}\right|_{t=0} = \left[\frac{\partial(f \circ \Phi^{-1})}{\partial x^i}\right]_{\Phi(p)}.$$

Observação 1.1. Usaremos também as notações $\dfrac{\partial}{\partial x^i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i = \partial^i$, quando conveniente. Também em somas com índices repetidos, às vezes omitimos o símbolo de soma e fica implícito que estamos somando nos índices repetidos (notação de Einstein).

$\diamondsuit$

Definição 1.3. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $f : M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Definimos a *diferencial de f em p* como sendo a aplicação linear $df_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{f(p)}M_2$, dada por $df_p(v) = \beta'(0)$, onde $v \in T_pM$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M_1$ é uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$ e $\beta = f \circ \alpha$.

Definição 1.4. Definimos o *espaço tangente* como sendo $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$. Ele tem uma natural estrutura de fibrado vetorial. Se T_p^*M denota o espaço dual de T_pM, o *espaço cotangente* é dado por $T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$. No caso dos $\binom{k}{l}$-tensores (k-covariante, l-contravariante tensor), definimos o fibrado $T_l^kM = \bigcup_{p\in M} \overset{k}{\otimes} T_pM \overset{l}{\otimes} T_p^*M$.

Definição 1.5. Um *campo diferenciável de vetores* é uma seção de TM. Uma seção de um fibrado vetorial (E, π, M) é uma aplicação diferenciável $\xi : M \longrightarrow E$, tal que $\pi \circ \xi = Id_M$. No caso em que $E = TM$, π é a aplicação sobrejetiva de E sobre M definida por $T_pM \ni X \longrightarrow p$. Assim, um campo diferenciável de vetores sobre M é uma correspondência:

$$p \in M \longmapsto X(p) \in T_pM.$$

Em coordenadas locais:

$$X(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

onde cada a_i é uma função diferenciável.

Por definição:

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \langle X, \text{grad} f \rangle.$$

O espaço de todos os campos diferenciáveis de vetores sobre M será denotado por $\mathcal{T}(M)$. E denotaremos por $\Gamma(E)$ o espaço de todas as seções de E.

Para $\binom{k}{l}$-tensores um campo diferenciável é uma seção de $T_l^k(M)$ e o espaço de todos os campos de $\binom{k}{l}$-tensores sobre M é denotado por $\mathcal{T}_l^k(M)$.

Definição 1.6. Dado o fibrado $\Lambda^k M = \bigcup_{p\in M} \Lambda^k(T_pM)$ dos k-tensores alternados sobre M. Definimos uma *k-forma diferencial* ω como sendo uma seção de $\Lambda^k M$. Em uma carta local,

$$\omega = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_k} a_{j_1 \cdots j_k}\, dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k},$$

e a diferenciação exterior de $d\omega$ é dada por

$$d\omega = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_k} da_{j_1\cdots j_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}.$$

Definição 1.7. Definimos o *colchete* $[X, Y]$ de dois campos diferenciáveis X e Y como sendo o campo diferenciável

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf).$$

Métrica e Elemento de Volume

Definição 1.8. Uma *variedade Riemanniana* é um par (M^n, g), onde M^n é uma variedade diferenciável (C^∞) e g é uma métrica Riemanniana. Uma *métrica Riemanniana* g (denotada por $\langle \; , \; \rangle$) em uma variedade diferenciável M é um campo tensorial 2-covariante (isto é, uma seção de $T^*M \otimes T^*M$), tal que em cada ponto $P \in M$, g_p é uma forma bilinear positiva definida:

$$g_p(X, Y) = g_p(Y, X) \quad \text{e} \quad g_p(X, X) > 0, \quad \text{se } X \neq 0, \quad \forall X, Y \in T_pM.$$

Assim, g determina um produto interno $\langle \; , \; \rangle$ sobre cada T_pM que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $\Phi : \Omega \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma carta local em torno de $p \in M$, então para todo $q \in \Omega$, com $\Phi(q) = (x_1, \cdots, x_n)$, a aplicação

$$\left\langle \partial^i(q), \partial^j(q) \right\rangle_q = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}(q), \frac{\partial}{\partial x^j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x^1, \cdots, x^n)$$

é diferenciável em $\Phi(\Omega)$.

Dada uma carta local em M^n, temos que $\{\partial^1, \cdots, \partial^n\}$ é uma base local de TM e denotamos por $\{dx^1, \cdots, dx^n\}$ a base dual local de T^*M correspondente. A métrica pode ser expressa como

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

onde $g_{ij} = \langle \partial^i, \partial^j \rangle$ são as componentes da métrica e estamos usando a notação de somatório de Einstein na igualdade acima.

Proposição 1.1. Toda variedade diferenciável de Hausdorff e com base enumerável possui uma métrica Riemanniana. (Ver DO CARMO [9], p. 43.)

Definição 1.9. Dadas M^n, N^{n+k} duas variedades diferenciáveis, dizemos que M^n é *imersa* em N^{n+k} se existe uma imersão $\phi : M^n \longrightarrow N^{n+k}$, isto é, ϕ é diferenciável e $d\phi_p : T_pM \longrightarrow T_{\phi(p)}M$ é injetiva para todo $p \in M$. Se N possui uma métrica Riemanniana $\widetilde{g}$, ϕ induz uma métrica Riemanniana g em M dada por

$$g(X,Y)_p = \widetilde{g}(d\phi_p X, d\phi_p Y)_{\phi(p)}, X, Y \in T_pM.$$

É simples verificar que g define uma métrica Riemanniana em M. Essa métrica é chamada de *métrica induzida por* ϕ.

Observação 1.2. Dadas M uma variedade diferenciável, $(N, \widetilde{g})$ uma variedade Riemanniana e um difeomorfismo $\phi : M \longrightarrow N$, a métrica induzida é chamada de *métrica pull-back* sobre M induzida por $\widetilde{g}$, representada por $\phi^*\widetilde{g}$. Por definição de métrica induzida: para todo $p \in M$ e todo $X, Y \in T_pM$,

$$g(X,Y)_p = \widetilde{g}(d\phi_p(X), d\phi_p(Y))_{\phi(p)} = (\phi^*\widetilde{g})_p(X,Y).$$

$\diamondsuit$

Observação 1.3. Se $\psi : N^{n+k} \longrightarrow M^n$ é uma função diferenciável e $p \in M$ é um valor regular de ψ, isto é, $d\psi_q : T_qN \longrightarrow T_{\psi(q)}N$ é sobrejetiva para todo $q \in \psi^{-1}(p)$. Nesse caso sabemos que $\psi^{-1}(p) \subset N$ será uma subvariedade de N de dimensão n. Logo podemos dar-lhe a métrica induzida pela inclusão.

Em particular, se $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\psi(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1$, temos que 0 é valor regular de ψ (ver DO CARMO [8], p. 61). Também $\psi^{-1}(0) = S^n$ é a esfera unitária do $\mathbb{R}^{n+1}$. A métrica induzida em S^n pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^{n+1}$ é chamada de métrica canônica de S^n e vamos denotá-la por $\overline{g}$.

$\diamondsuit$

Definição 1.10. Duas métricas g_1, g_2 sobre uma variedade M são ditas *conformes* uma em relação à outra, se existe uma função estritamente positiva $\mathfrak{F} \in C^\infty(M)$ tal que $g_2 = \mathfrak{F} g_1$. Duas variedades Riemannianas (M, g) e $(M, \widetilde{g})$ são ditas *conformemente equivalentes* se existe um difeomorfismo $\varphi : M \longrightarrow \widetilde{M}$ tal que $\varphi^*\widetilde{g}$ é conforme g. Nesse caso, dizemos que φ é um *difeomorfismo conforme*. Quando $\varphi^*\widetilde{g} = g$, dizemos que (M, g) e $(M, \widetilde{g})$ são *isométricas* e φ é uma *isometria*.

Definição 1.11. Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana orientada e $\mathcal{A}$ um atlas compatível com a orientação. Em um sistema de coordenadas $\{x^i\}$ correspondente a $(\Omega, \Phi) \in \mathcal{A}$, definimos a *forma de volume* como sendo a n-forma difereciável dV_g, dada por

$$dV_g = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

onde $|g|$ é o determinante da matriz (g_{ij}). Ás vezes por simplicidade denotaremos $dx = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. De modo geral, quando tiramos a hipótese de orientabilidade, definimos a densidade

Riemanniana como

$$dV_g = \sqrt{|g|}\ |dx|.$$

No caso em que M é compacta, o volume de M é dado por

$$vol_g(M) = \int_M dV_g.$$

É bem conhecido da geometria Riemanniana que dV independe das coordenadas escolhidas. No caso da esfera unitária $(n-1)$-dimensional sobre $\mathbb{R}^n$ com a métrica $\overline{g}$ induzida da métrica euclidiana de $\mathbb{R}^n$, denotamos $dV_{\overline{g}}$ por $d\omega$ e denotamos por $d\omega_r = r^{n-1}d\omega$ a forma de volume sobre a esfera de raio r.

Observação 1.4. Lembremos que dada M^n uma variedade orientada, nós definimos a integral de ω, uma n-forma diferenciável com suporte compacto, como segue: Sejam $(\Omega_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha\in J}$ um atlas compatível com a orientação escolhida e $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma partição da unidade subordinada a cobertura $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in J}$. Seja ω dada sobre Ω_α igual $f_\alpha(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$. Por definição

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha\in J}\int_{\Phi_\alpha(\Omega_\alpha)}(\phi_\alpha f_\alpha)\circ\Phi_\alpha^{-1}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

Assim, se (M^n, g) é compacta, temos

$$vol_g(M) = \sum_{\alpha\in J}\int_{\Phi_\alpha(\Omega_\alpha)}\left(\phi_\alpha\sqrt{|g_\alpha|}\right)\circ\Phi_\alpha^{-1}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

onde $|g_\alpha|$ é o determinante da matriz (g_{ij}) em cada ponto da carta local $(\Omega_\alpha, \phi_\alpha)$.

$\Diamond$

Definição 1.12. Nas hipóteses e notações da observação anterior e supondo (M^n, g) uma variedade Riemanniana orientada. Dizemos que uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é *integrável* se cada $f\circ\Phi_\alpha^{-1} : \Phi_\alpha^{-1}(\Omega_\alpha)\longrightarrow\mathbb{R}$ for integrável à Riemann e definimos a *integral de* f sobre Ω_α por

$$\int_{\Omega_\alpha} f(p)dV_g = \int_{\Phi_\alpha(\Omega_\alpha)}\left(f(p)\sqrt{|g_\alpha|}\right)\circ\Phi_\alpha^{-1}dx^1\cdots dx^n.$$

Sedo M é compacta, podemos tomar uma partição da unidade $\{\phi_\alpha\}$ finita, isto é, $J = \{1,\cdots,r\}$. Dizemos que f é *integrável sobre* M se $\phi_\alpha f$ é integrável sobre Ω_α para cada α. Por definição

$$\begin{aligned}\int_M f(p)dV_g &= \sum_{\alpha=1}^r\int_{\Omega_\alpha}(\phi_\alpha f)(p)dV_g\\ &= \sum_{\alpha=1}^r\int_{\Phi_\alpha(\Omega_\alpha)}\left[(\phi_\alpha f)(p)\sqrt{|g_\alpha|}\right]\circ\Phi_\alpha^{-1}dx^1\cdots dx^n.\end{aligned}$$

Distância Riemanniana, Distância Geodésica e Coordenadas Normais

Seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ uma curva diferenciável por partes, isto é, existe uma subdivisão finita $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ tal que que γ é diferenciável quando restrita a cada subintervalo $[a_{i-1}, a_i]$. Sendo M uma variedade Riemanniana, definimos o comprimento de um segmento $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$ por

$$L(\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle dt.$$

E o comprimento $L(\gamma)$ da curva é dado como a soma de todos os segmentos $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]}$.

Definição 1.13. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana conexa. Para quaisquer dois pontos $P, Q \in M$, definimos a *distância Riemanniana* $d_g(P, Q) = d(P, Q)$ como sendo o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando P a Q.

É fácil verificar que $d_g(P, Q)$ define uma métrica e que a topologia induzida coincide com a topologia inicial da variedade.

Definição 1.14. Dado $P \in M$, uma *vizinhança normal de* P é uma vizinhaça Ω de P tal que existe uma vizinhança V da origem de T_PM que é difeomorfa a Ω pela aplicação exponencial.

Se $\varepsilon > 0$ é tal que $\exp_P$ é um difeomorfismo sobre a bola $B_\varepsilon(0) \subset T_PM$, então o conjunto imagem $\exp_P(B_\varepsilon(0))$ é chamado uma bola geodésica em M.

Dada uma base ortonormal $\{Z_i\}$ para T_PM obtemos um isomorfismo $Z : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_PM$, dado por $Z(x^1, \cdots, x^n) = x^i Z_i$. Se Ω é uma vizinhaça normal de P, podemos compor esse isomorfismo com a aplicação exponencial, obtendo um carta

$$\Phi : Z^{-1} \circ \exp_P^{-1} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Tais coordenadas são chamadas de *coordenadas normais centradas em* P. Em qualquer sistema de coordenadas normais centrado em $P \longleftrightarrow (0, \cdots, 0)$, definimos a função distância radial r de um ponto Q a P por

$$r(x) := \left(\sum_i (x^i)^2 \right)^{1/2},$$

onde $(x^1, \cdots, x^n)$ são as coordenadas do ponto Q.

O campo vetorial radial unitário $\partial/\partial r$ é definido por

$$\frac{\partial}{\partial r} := \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

A seguir listamos algumas propriedades que ilustram o quão importante é um sistema de coordenadas normais. Esses resultados podem ser encontrados em LEE [16].

Propriedades das Coordenadas Normais:

Seja $\{\Omega, (x^i)\}$ um sistema de coordenadas normais centrado em P.

(a) As componentes da métrica em P são $g_{ij} = \delta_{ij}$.

(b) As derivadas de ordem um de g_{ij} e os símbolos de Christofell se anulam em P.

(c) Seja $B_\varepsilon(0)$ uma bola geodésica centrada em P e contida em Ω, nesse sistema de coordenadas tem-se que grad $r = \dfrac{\partial}{\partial r}$ sobre $\Omega \setminus \{P\}$.

(d) No interior de quaquer bola geodésica centrada em P, a função distância radial de um ponto Q a P é igual à distância Riemanniana de P a Q.

Sempre que fizermos referência a um sistema de coordenadas normais centrado em P, estaremos supondo que a vizinhança é uma bola geodésica.

Conexões Lineares

Definição 1.15. Uma *conexão linear* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M),$$

denotada por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e satisfazendo as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y, \quad$ para $f, g \in C^\infty(M)$.

ii) $\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y, \quad$ para $f \in C^\infty(M)$.

É importante notar que a noção de conexão linear é uma noção local e cada variedade admite uma conexão linear (ver LEE [16], p. 50-53). Dizemos que $\nabla_X Y$ é a *derivada covariante de Y na direção de X.*

Escolhendo uma carta local em torno de p e sejam $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ dois campos dados nessa carta local por

$$X = \sum_i a_i \partial_i, \quad Y = \sum_j b_j \partial_j.$$

Temos

$$\nabla_X Y = \sum_{ij} a_i b_j \nabla_{\partial_i}\partial_j + \sum_{ij} a_i \partial_i(b_j)\partial_j = \sum_k \left(\sum_{ij} a_i b_j \Gamma_{ij}^k + X(b_k) \right) \partial_k, \tag{1.1}$$

onde as funções Γ_{ij}^k são chamadas de *símbolos de Christoffel* da conexão ∇ com respeito à base associada $\{\partial^i\}$, definidas por $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum\limits_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$.

Derivada Covariante de Campos de Tensores

Em LEE [16], p. 54, temos que se ∇ é uma conexão linear sobre M e $F \in \mathcal{T}_l^k(M)$, então a aplicação $\nabla F : \mathcal{T}(M) \times \cdots \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}^1(M) \times \cdots \times \mathcal{T}^1(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, dada por

$$\begin{aligned} \nabla F(Y_1, \cdots, Y_k, \omega_1, \cdots, \omega_l, X) &= \nabla_X F(Y_1, \cdots, Y_k, \omega_1, \cdots, \omega_l) \\ &:= X(F(Y_1, \cdots, Y_k, \omega_1, \cdots, \omega_l)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k F(Y_1, \cdots, \nabla_X Y_i, \cdots, Y_k, \omega_1, \cdots, \omega_l) \\ &\quad - \sum_{j=1}^l F(Y_1, \cdots, Y_k, \omega_1, \cdots, \nabla_X \omega_j, \cdots, \omega_l), \end{aligned}$$

é um campo de $\binom{k+1}{l}$-tensores. Onde $\mathcal{T}^1(M)$ é o conjunto das 1-formas.

Definição 1.16. O campo de vetores ∇F é chamado de *derivada covariante (total) de* F.

Em particular, se $f \in C^\infty(M)$ temos $\nabla f \in \mathcal{T}^1(M)$ e $\nabla^2 f = \nabla\nabla f \in \mathcal{T}^2(M)$. $\nabla\nabla f$ é chamado de a *Hessiana covariante* de f. De modo geral usaremos a seguinte notação:

$$\nabla_{\alpha_1} \cdots \nabla_{\alpha_m} f = \nabla_{\alpha_1 \cdots \alpha_m} f \quad \text{e} \quad \nabla_i f = \partial_i(f) = f_i.$$

Derivada Covariante em End(E)

Sejam (E_1, π_1, M) e (E_2, π_2, M) dois fibrados vetorias. Um homomorfismo $h : E \longrightarrow F$ é uma aplicação diferenciável linear em cada ponto. A união de todos os espaços de homomorfismos dessa forma será denotado por $Hom(E_1, E_2)$ e tem uma estrutura natural de fibrado vetorial. Uma seção de $Hom(E_1, E_2)$ é um homomorfismo de E_1 em E_2. Quando $E_1 = E_2 = E$, dizemos que o homomorfismo é um endomorfismo e denotamos $Hom(E, E) = End(E)$. Se ∇ é uma conexão linear em E. Podemos definir uma derivada covariante $\widehat{\nabla}$ em End(E) como segue:

$$(\widehat{\nabla}_X L)(s) := \nabla_X L(s) - L(\nabla_X s),$$

onde $L \in \Gamma(\mathrm{End}(E))$, $s \in \Gamma(E)$ e $X \in \mathcal{T}(M)$. Por simplicidade escrevemos $\widehat{\nabla} = \nabla$.

Conexão Riemanniana

Definição 1.17. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Uma conexão linear ∇ é dita *compatível com a métrica* g se satisfaz a seguinte regra do produto para todo $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$:

$$\nabla_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Assim, ∇ é compatível com g se, e somente se $\nabla g = 0$.

A conexão ∇ é dita *simétrica* se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

O *tensor torsão* de uma conexão é a aplicação $\tau : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M)$ definida por

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Segue que a conexão é simétrica quando seu tensor torsão for identicamente nulo.

Teorema 1.1. (Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.

Em LEE [16], pp. 68-70, encontramos a demonstração desse teorema e uma fórmula que determina unicamente ∇ a partir da métrica g :

$$\begin{aligned}\langle Z, \nabla_Y X\rangle &= \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &\quad -\langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}.\end{aligned}$$

A conexão dada pelo teorema anterior é chamada de *conexão Riemanniana* (ou *Levi-Civita*). Em coordenadas locais, temos

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \left\langle \partial_k, \sum_l \Gamma_{ij}^k \partial_l \right\rangle = \langle \partial_k, \nabla_{\partial_i} \partial_j\rangle = \frac{1}{2}\left\{\partial_i(g_{jk}) + \partial_j(g_{ki}) - \partial_k(g_{ij})\right\}$$

$$\therefore \Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{\partial_i(g_{jk}) + \partial_j(g_{ki}) - \partial_k(g_{ij})\right\} g^{km}. \tag{1.2}$$

Curvaturas

Definição 1.18. A *curvatura* R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ uma aplicação $R : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para cada $Z \in \mathfrak{T}(M)$ e ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Obviamente, R é um campo de $\binom{3}{1}$-tensores. Em um sistema de coordenadas locais, temos

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_m R_{kij}^m \partial_m,$$

onde R_{kij}^m são as componentes da curvatura R.

Definição 1.19. Definimos o *tensor curvatura* como sendo o tensor 4-covariante definido pela relação $R(X,Y,Z,W) = \langle X, R(Z,W)Y \rangle$. Em componentes,

$$R_{lkij} := R(\partial_l, \partial_k, \partial_i, \partial_j) = \langle \partial_l, R(\partial_i, \partial_j)\partial_k \rangle = \sum_m R_{kij}^m g_{lm},$$

daí,

$$\therefore R_{kij}^s = \sum_l R_{lkij} g^{sl}.$$

As expressões acima afirmam que de fato $R(X,Y)Z$ calculado no ponto p depende unicamente dos valores de X, Y, Z em p e dos valores das funções R_{ijk}^l em p.

Proposição 1.2. (Propriedades do Tensor Curvatura):

1) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$.

2) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$.

3) $R_{ijlk} = R_{lkij}$.

4) $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$. (*Primeira Identidade de Bianchi*)

5) $R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l} = 0$. (*Segunda Identidade de Bianchi*)

Demonstração. Ver LEE [16], p. 121-124. $\square$

Assim, temos que $R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)W, Z \rangle$.

Definição 1.20. Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM definido pelos vetores X e Y, os quais são escolhidos ortonormais. Definimos

$$K(\sigma) = R(X,Y,X,Y) = \langle R(X,Y)Y, X \rangle$$

como sendo a *curvatura seccional de σ em p*.

Quando K é constante, dizemos que M tem *curvatura constante*.

Definição 1.21. Definimos o *tensor de Ricci* como sendo a aplicação bilinear $Ric : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$, cujas componentes são definidas pela contração

$$R_{ij} = R_{ikj}^{k} = R_{likj}g^{kl},$$

na notação de Einstein. Assim, se $\{Z_1, \cdots, Z_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, tem-se

$$Ric(Z_i, Z_j) = R_{ij} = \sum_l \sum_k \langle Z_l, Z_i, Z_j, Z_k \rangle \langle Z_k, Z_l \rangle \ = \ \sum_{k=1}^{n} \langle R(Z_k, Z_i)Z_j, Z_k \rangle.$$

Se reorganizamos os índices tal que $Z_n = Z_i$, obtemos $R(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{n-1} \langle R(Z_k, Z_i)Z_j, Z_k \rangle$. De todo modo, a soma acima possui um termo nulo, ou seja, na verdade estamos somando $n-1$ termos.

Notemos também que $Ric(X, Y) =$ traço da aplicação $Z \longmapsto R(Z, X)Y$, para cada $X, Y \in T_pM$. Também é imediato que o tensor de Ricci é simétrico.

Definição 1.22. A*curvatura escalar* S de uma variedade Riemanniana em um ponto p é o traço R_i^i do tensor de Ricci, isto é,

$$S = R_i^i = g^{ij} R_{ij} = \sum_{ij} \langle Z_i, Z_j \rangle Ric(Z_i, Z_j) = \sum_{i=1}^{n} Ric(Z_i, Z_i).$$

É conhecido da geometria Riemanniana que as definições acima não dependem da base ortonormal escolhida.

Definição 1.23. Dada uma variedade Riemanniana (M, g), dizemos que ela é uma *variedade de Einstein* quando o tensor de Ricci é um múltiplo escalar da métrica g.

Dessa forma, sendo M Einstein, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Ric = \lambda g$, ou seja, em componentes $R_{ij} = \lambda g_{ij}$. Tomando o traço de ambos os lados, obtemos

$$S = \lambda \text{ (dimensão de } M) = \lambda n.$$

$$\therefore Ric = \frac{1}{n} Sg.$$

Assim, M ser de Einstein é equivalente à *parte sem traço do tensor de Ricci* $B_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{n} Sg_{ij}$ ser identicamente nula, devido à seguinte proposição:

Proposição 1.3. Se M é uma variedade de Einstein (conexa) de dimensão $n \geq 3$, então sua curvatura escalar é constante.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar a *Identidade de Bianchi Contraída* :

$$R^i_{m,i} = \frac{1}{2} S_{,m}. \tag{1.3}$$

De fato, contraindo a Segunda Identidade de Bianchi sobre os ídices i, k e depois sobre j, l :

$$\begin{aligned} g^{jl}\left[g^{ik}(R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l})\right] &= 0 \\ g^{jl}\left[R_{jl,m} + g^{ik}R_{ijlm,k} - R_{jm,l}\right] &= 0 \\ R^j_{j,m} - g^{ik}R_{im,k} - R^j_{m,j} &= 0 \\ S_{,m} - 2R^i_{m,i} &= 0. \end{aligned}$$

Tomando a derivada covariante na igualdade $R_{ij} = \frac{1}{n} S g_{ij}$ na direção do k-ésimo vetor de uma base ortonormal fixada, tem-se

$$R_{ij,k} = \frac{1}{n}\nabla_k(Sg_{ij}) = \frac{1}{n}S_{,k}g_{ij} + \frac{1}{n}S\nabla_k(g_{ij}) = \frac{1}{n}S_{,k}g_{ij}.$$

Contraindo a expressão acima sobre os índices i, k, obtemos

$$R^i_{j,i} = \frac{1}{n}S_{,j}.$$

Comparando com a identidade de Bianchi contraída (1.3), tem-se

$$\frac{1}{2}S_{,j} = \frac{1}{n}S_{,j}.$$

Segue que para $n > 2$ vale $S_{,j} = 0$, implicando que $\nabla S = 0$. Sendo M conexa, conclui-se que S é constante. □

Observação 1.5. Quando S é constante, temos imediatamente da Identidade de Bianchi Contraída que $R^j_{m,j} \equiv 0$, isto é, $R^{ji}{}_{,j} = g^{mi}R^j_{m,j} = 0$. Agora, tomando a derivada covariante na expressão $B_{km} = R_{km} - \dfrac{S}{n}g_{km}$ e depois fazendo uma elevação de índices, obtemos

$$g^{kj}g^{mi}B_{km,j} = g^{kj}g^{mi}\left(R_{km,j} - \frac{S}{n}g_{km,j}\right) = g^{kj}g^{mi}R_{km,j} \quad \Longrightarrow \quad B^{ji}{}_{,j} = R^{ji}{}_{,j} \equiv 0.$$

◊

Definição 1.24. Definimos o *tensor de Weyl* denotado por W dado em componentes por

$$\begin{aligned} W_{ijkl} &= R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\left(R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jk} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il}\right) \\ &\quad + \frac{S}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \end{aligned}$$

Essa fórmula é escolhida tal que a contração de W sobre qualquer par de índices seja identicamente nula. Notemos também que $W \equiv 0$ para $n = 3$.

E definimos o *tensor de Schouten* dado pelas componentes

$$S_{ij} = \frac{1}{n-2}\left[2R_{ij} - \frac{S}{(n-1)}g_{ij}\right].$$

Observação 1.6. Podemos escrever o tensor curvatura da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}\left(B_{ik}g_{jl} - B_{il}g_{jk} + B_{jl}g_{ik} - B_{jk}g_{il}\right) \\ &\quad + \frac{S}{n(n-1)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \end{aligned}$$

Como $B \equiv 0$ implica S constante, temos da expressão acima que se $W \equiv 0$ e $B \equiv 0$, então o tensor curvatura é determinado completamente pela curvatura escalar (constante) S e mais, M terá curvatura constante. De fato, teremos

$$R_{ijkl} = \frac{S}{n(n-1)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Agora, dado $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bidimensional definido pelos vetores X e Y, escolhidos ortonormais, por definição e da expressão acima:

$$\begin{aligned} K(\sigma) = R(X,Y,X,Y) &= \frac{S}{n(n-1)}\big[g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)g(Y,X)\big] \\ &= \frac{S}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Segue que K é constante. $\Diamond$

Teorema 1.2. **(Schouten)** Uma condição necessária e suficiente para uma variedade Riemanniana ser localmente conformemente plana é que $W_{ijkl} \equiv 0$ quando $n > 3$ e $\nabla_k S_{ij} = \nabla_j S_{ik}$ quando $n = 3$.

Demonstração. Ver AUBIN [3], p. 117. $\square$

1.2 Alguns Resultados de Espaços de Sobolev

Definição 1.25. Se $q \geq 1$, definimos o *espaço de Lebesgue* $L^q(M)$ como sendo o conjunto de funções localmente integráveis u (dizemos $u \in L^1_{loc}$) sobre M tais que a norma

$$\|u\|_q := \left(\int_M |u|^q \, dV_g\right)^{1/q}$$

é finita. Adicionalmente, se k é um inteiro não negativo, definimos o *espaço de Sobolev* $L_k^q(M)$ como sendo o conjunto de funções $u \in L^q(M)$ tais que $\nabla^i u \in L^q M, i \in \{0, \cdots, k\}$ (no sentido fraco) para todo multi-índice i de ordem $\leq k$. Definimos a norma de Sobolev $\| \; \|_{q,k}$ sobre $L_k^q M$ por:

$$\|u\|_{q,k} := \left(\sum_{i=0}^{k} \int_M |\nabla^i u|^q \, dV_g \right)^{1/q}.$$

Um outro espaço importante é o fecho de $C_c^\infty(M)$ em $L_k^q(M)$, representado por $\overset{\circ}{L}{}_k^q(M)$.

Proposição 1.4. Se M é uma variedade Riemanniana completa, então $C_c^\infty(M)$ é denso em $L_1^q(M)$.

Demonstração. Ver AUBIN [3], p. 34. □

Em paticular, se M é compacta, sabemos do Teorema de Hopf-Rinow que M é completa, daí $C_c^\infty(M)$ é denso em $L_1^q(M)$.

Definição 1.26. Denotamos por $C^k(M)$ como sendo o espaço das funções u sobre M que são k vezes continuamente diferenciáveis tais que a norma

$$\|u\|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \sup |\nabla^i u|$$

é finita. E definimos o *espaço de Hölder* $C^{k,\alpha}$, para $0 < \alpha < 1$, como sendo o conjunto das funções $u \in C^k(M)$ tais que a norma

$$\|u\|_{C^{k,\alpha=}} = \|u\|_{C^k} + \sup_{x,y} \frac{|\nabla^k u(x) - \nabla^k u(y)|}{d_g(x,y)^\alpha}$$

é finita, onde consideramos $x \neq y$ e y está contido em uma vizinhança de coordenadas normais de x. E $d_g(x,y)$ representa a função distância Riemanniana com relação à métrica g, definida como sendo o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando x a y.

Proposição 1.5. Supondo M compacta e sejam $u, v \in C^\alpha(M)$, então $uv \in C^\alpha(M)$ e

$$\|uv\|_{C^\alpha} \leq \|u\|_{C^\alpha} \|v\|_{C^\alpha}.$$

Demonstração. Ver JOST [14] p. 330. □

Notemos que na Definição 1.25 tem-se $L_0^q = L^q$ e na Definição 1.26, convencionamos $C^{0,\alpha} = C^\alpha$. Também, não é difícil verificar que os espaços $C^{k,\alpha}$ são espaços de Banach, com a norma acima definida.

Teorema 1.3. (Teoremas de Mergulho de Sobolev para Variedades Compactas). Supondo M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n.

(a) Se

$$1 \geq \frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} - \frac{k}{n} > 0, \tag{1.4}$$

então $L_k^q(M)$ está mergulhado continuamente em $L^r(M)$.

(b) **(Rellich-Kondrakov)** Suponha que vale a desigualdade estrita em (1.4). Então a inclusão $L_k^q(M) \subset L^r(M)$ é um operador compacto.

(c) Suponha $0 < \alpha < 1$ e

$$\frac{1}{q} \leq \frac{k-\alpha}{n}, \tag{1.5}$$

então a inclusão $L_k^q(M) \subset C^\alpha(M)$ é um operador contínuo. E se em (1.5) a desigualdade é estrita, então o operador inclusão é compacto.

(d) A inclusão $C^{k,\alpha}(M) \subset C^k(M)$ é um operador compacto.

Demonstração. Uma demonstração pode ser vista em AUBIN [3], pp. 50-55. Notar que a demonstração do item a) é feita para o caso que vale a igualdade (p. 50) e o caso que vale a desigualdade é o item b) (p. 55). Ver pp. 51 e 55 para o item c). Por fim ver ADAMS-FOURNIER [1], p. 12, para uma prova do item (d) sobre compactos de $\mathbb{R}^n$, notando que a norma $\| \, \|_{C^{\alpha,k}}$ definida em [1] é uma norma equivalente à norma aqui definida. $\square$

Corolário 1.1. Se M é compacta e $\varphi \in C^{k+1}(M)$, para $0 \leq k \leq \infty$, então $\varphi \in C^{k,\alpha}(M)$ para todo $0 < \alpha < 1$.

Demonstração. Como $\varphi \in C^k(M)$, resta verificar que $\nabla^k \varphi \in C^\alpha$. Sendo M compacta, temos que $\nabla^k \varphi \in L_1^q(M)$, para todo q, implicando pelo item (c) do teorema anterior que $\nabla^k \varphi \in C^\alpha(M)$. $\square$

Observação 1.7. Para $M = \mathbb{R}^n$, a conclusão do item (c) continua válida e o item (a) continua válido se supomos que vale apenas a igualdade (ver AUBIN [3], p. 35). Assim, quando $q = 2, k = 1, r = p = 2n/(n-2)$, vale a igualdade no item (a) acima e tem-se a chamada *Desigualdade de Sobolev*:

$$\|u\|_p^2 \leq \sigma_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx, \quad u \in L_1^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.6}$$

Dizemos que a desigualdade acima é *ótima* quando tomamos a menor σ_n tal que continua válida a desigualdade. A essa menor constante chamamos de *constante de Sobolev n-dimensional.*

$\diamondsuit$

No seguinte teorema, devido a Aubin, tem-se uma versão da desigualdade de Sobolev para variedades compactas.

Teorema 1.4. (**Aubin**) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, $p = 2n/(n-2)$ e σ_n a constante de Sobolev de (1.6). Então para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante C_ε tal que para toda $\varphi \in C^\infty(M)$,

$$\|\varphi\|_p^2 \leq (1+\varepsilon)\sigma_n \int_M |\nabla\varphi|^2 dV_g + C_\varepsilon \int_M \varphi^2 dV_g.$$

Uma demonstração pode ser vista em LEE-PARKER [17], Teorema 2.3.

Definição 1.27. Seja Ω um conjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Dada $u \in L_1^2(\Omega)$, dizemos que u satisfaz $\Delta u = f(u, x)$ no sentido fraco se, para toda $v \in \overset{\circ}{L}{}_1^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle \, dx = \int_\Omega fv \, dx.$$

Equivalentemente, u é solução fraca de $\Delta u = f(u, x)$ se, para toda $v \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega u\Delta v \, dx = \int_\Omega fv \, dx.$$

Analogamente definimos solução fraca sobre uma variedade compacta M e nesse caso temos $\overset{\circ}{L}{}_1^2(M) = L_1^2(M)$, onde $\overset{\circ}{L}{}_1^2(M)$ é o fecho de $C_c^\infty(M)$ em $L_1^2(M)$.

Teorema 1.5. (**Regularidade Elíptica Local**) Sejam Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $u \in L_1^2(\Omega)$ uma solução fraca para $\Delta u = f$.

(a) Se $f \in L_k^q(\Omega)$, então $u \in L_{k+2}^q(K)$ para todo compacto $K \subset\subset \Omega$, e se $u \in L^q(\Omega)$, temos

$$\|u\|_{L_{k+2}^q(K)} \leq C\big(\|\Delta u\|_{L_k^q(\Omega)} + \|u\|_{L^q(\Omega)}\big).$$

(b) **(Estimativas de Schauder)** Se $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, então $u \in C^{k+2,\alpha}(K)$ para todo compacto $K \subset\subset \Omega$, e se $u \in C^\alpha(\Omega)$, temos

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(K)} \leq C\big(\|\Delta u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^\alpha(\Omega)}\big).$$

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em AUBIN [3], p. 85 ou com mais detalhes em JOST [14] pp. 277 e 339. Podemos obter o teorema acima para variedades compactas usando partição da unidade e coordenadas normais (veja LEE-PARKER [17], p. 46 ou MELROSE [20], p. 43). Assim,

Teorema 1.6. **(Regularidade Elíptica Global)** Seja M uma variedade Riemanniana compacta e suponha que $u \in L^2_1(M)$ é uma solução fraca para $\Delta u = f$.

(a) Se $f \in L^q_k(M)$, então $u \in L^q_{k+2}(M)$ e

$$\|u\|_{q,k+2} \leq C\big(\|\Delta u\|_{q,k} + \|u\|_q\big).$$

(b) Se $f \in C^{k,\alpha}(M)$, então $u \in C^{k+2,\alpha}(M)$ e

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}} \leq C\big(\|\Delta u\|_{C^{k,\alpha}} + \|u\|_{C^\alpha}\big).$$

Os teoremas de regularidade acima poderiam ser enunciados de forma similar para operadores elípticos linerares de ordem $2m$ com coeficientes C^∞ mais gerais além do operador de Laplace (ver AUBIN [3], p. 85). Um caso particular é o seguinte teorema.

Teorema 1.7. Seja M uma variedade Riemanniana compacta e considere o operador elíptico $\Delta + h$, onde $h \in C^{k,\alpha}(M)$. Se $f \in C^{k,\alpha}(M)$ e

$$\Delta u + hu = f, \tag{1.7}$$

então $u \in C^{k+2,\alpha}(M)$. Mais ainda, se $h > 0$, então existe uma única solução de (1.7).

Demonstração. Esse teorema é uma versão de um resultado mais gereal encontrado em AUBIN [3] p. 114. □

Teorema 1.8. **(Princípio do Máximo)** Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta. Se $\psi \in C^2, \psi \geq 0$, satisfaz $\Delta\psi \geq \psi f(p, \psi)$, onde f é uma função real contínua sobre $M \times \mathbb{R}$, então ψ é estritamente positiva, ou ψ é identicamente nula.

Demonstração. Ver AUBIN [3], p. 98. □

2 Fórmulas para Mudança de Métrica

2.1 Mudanças Conformes de Métrica

Sejam $g, \tilde{g}$ duas métricas conformes em uma variedade Riemanniana M. Sempre que aparecer $\tilde{}$ ou $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$, estaremos nos referindo à métrica $\tilde{g}$, do contrário nos referimos à métrica g. Temos as seguintes relações:

Lema 2.1. Sejam M uma variedade diferenciável e $g, \tilde{g}$ duas métricas conformes em M com $\tilde{g} = e^{2f}g$, onde f é uma função diferenciável. Valem as seguintes transformações

(i) $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \partial_i(f)\delta_{jk} + \partial_j(f)\delta_{ik} - \sum\limits_m \partial_m(f)g_{ij}g^{km}$.

(ii) $\widetilde{\nabla} u = e^{-2f}\nabla u, \forall u \in C^\infty(M)$.

(iii) $\widetilde{\Delta} u = e^{-2f}\big[\Delta u - (n-2)\langle \nabla f, \nabla u\rangle\big], \forall u \in C^\infty(M)$.

(iv) $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - \langle X, Y\rangle \nabla f$.

(v)
$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z \quad &+ \Big[\langle X,Z\rangle(\text{Hess } f)(Y) - \langle Y,Z\rangle(\text{Hess } f)(X)\Big]\\ &- \Big[(\text{Hess } f)(Y,Z) - Y(f)Z(f) + \langle Y,Z\rangle|\nabla f|^2\Big]X\\ &+ \Big[(\text{Hess } f)(X,Z) - X(f)Z(f) + \langle X,Z\rangle|\nabla f|^2\Big]Y\\ &+ \Big[X(f)\langle Y,Z\rangle - Y(f)\langle X,Z\rangle\Big]\nabla f.\end{aligned}$$

(vi) $\widetilde{R}_{ij} = R_{ij} - (n-2)[f_{ij} - f_if_j] + [\Delta f - (n-2)|\nabla f|^2]g_{ij}$.

(vii) $\widetilde{S} = e^{-2f}\Big[S + 2(n-1)\Delta f - (n-1)(n-2)|\nabla f|^2\Big]$.

(viii) $\widetilde{B}_{ij} = B_{ij} - (n-2)\left[f_{ij} - f_if_j\right] - \dfrac{n-2}{n}\left[\Delta f + |\nabla f|^2\right]g_{ij}$

(vx) $\widetilde{W}_{ijkl} = e^{2f}W_{ijkl}$. Em particular, $\widetilde{W}_{jkl}^i = W_{jkl}^i$.

Demonstração. (i) Dado que $\widetilde{g} = e^{2f}g$, temos que $\widetilde{g}^{ij} = e^{-2f}g^{ij}$. Usando (1.2) obtida do Teorema de Levi-Civita, temos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_m \Big(\partial_i(\widetilde{g}_{jm}) + \partial_j(\widetilde{g}_{im}) - \partial_k(\widetilde{g}_{ij})\Big)\widetilde{g}^{km} \\
&= \frac{1}{2}\sum_m \Big(2e^{2f}\partial_i(f)g_{jm} + e^{2f}\partial_i(g_{jm}) + 2e^{2f}\partial_j(f)g_{im} + e^{2f}\partial_j(g_{im}) - 2e^{2f}\partial_m(f)g_{ij} \\
&\quad -e^{2f}\partial_m(g_{ij})\Big)e^{-2f}g^{km} \\
&= \Gamma_{ij}^k + \sum_m \Big(\partial_i(f)g_{jm} + \partial_j(f)g_{im} - \partial_m(f)g_{ij}\Big)g^{km} \\
&= \Gamma_{ij}^k + \partial_i(f)\delta_{jk} + \partial_j(f)\delta_{ik} - \sum_m \partial_m(f)g_{ij}g^{km}.
\end{aligned}
$$

(ii) Dado $Y \in \mathcal{T}(M)$, seja $\widetilde{Y} = e^{-f}Y$ (ver notação na demonstração de (vii)). Assim, $e^{-f}\langle \nabla u, Y\rangle = e^{-f}du(Y) = du(\widetilde{Y}) = \langle\langle \widetilde{\nabla} u, \widetilde{Y}\rangle\rangle = e^{2f}\langle \widetilde{\nabla} u, e^{-f}Y\rangle = e^{f}\langle \widetilde{\nabla} u, Y\rangle$.

Como vale a igualdade para todo $Y \in \mathcal{T}(M)$, devemos ter

$$\widetilde{\nabla} u = e^{-2f}\nabla u.$$

(iii) Do item (i), obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{ijk} g^{ij}\left(\widetilde{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k\right)(\partial_k(u)) &\overset{(i)}{=} \sum_{ijk} g^{ij}\left(\partial_i(f)\delta_{jk} + \partial_j(f)\delta_{ik} - \sum_m \partial_m(f)g_{ij}g^{km}\right)(\partial_k(u)) \\
&= \sum_{ik} g^{ik}\partial_i(f)\partial_k(u) + \sum_{jk} g^{kj}\partial_j(f)\partial_k(u) \\
&\quad -n\sum_k\sum_m g^{km}\partial_m(f)\partial_k(u) \\
&= (2-n)\langle \nabla f, \nabla u\rangle.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, dado que $\widetilde{g}^{ij} = e^{-2f}g^{ij}$ e usando (ii), temos

$$
\begin{aligned}
e^{2f}\widetilde{\Delta} u - \Delta u &= \sum_{ij} g^{ij}\nabla_i\nabla_j u - e^{2f}\sum_{ij}\widetilde{g}^{ij}\widetilde{\nabla}_i\widetilde{\nabla}_j u \\
&= \sum_{ij} g^{ij}\left(\partial_i\left(\langle \nabla u, \partial_j\rangle\right) - \langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \nabla u\rangle\right) \\
&\quad -e^{2f}\sum_{ij}\widetilde{g}^{ij}\left(\partial_i\left(\langle\langle \widetilde{\nabla} u, \partial_j\rangle\rangle\right) - \langle\langle \widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j, \widetilde{\nabla} u\rangle\rangle\right) \\
&\overset{(ii)}{=} \sum_{ij} g^{ij}\left(\partial_i\left(\langle \nabla u, \partial_j\rangle\right) - \langle \nabla_i\partial_j, \nabla u\rangle\right) \\
&\quad -\sum_{ij} g^{ij}\left(\partial_i\left(\langle \nabla u, \partial_j\rangle\right) - \langle \widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j, \nabla u\rangle\right) \\
&= \sum_{ijk} g^{ij}\left(\widetilde{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k\right)(\partial_k(u)).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\widetilde{\Delta} u = e^{-2f}\Delta u - e^{-2f}(n-2)\langle \nabla f, \nabla u\rangle.$$

(iv) Dados os campos $X = \sum_i a_i\partial_i$ e $Y = \sum_j b_j\partial_j$, temos por (1.1) e o item (i),

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X Y &\overset{(1.1)}{=} \sum_k \left(\sum_{ij} a_i b_j \widetilde{\Gamma}_{ij}^k + X(b_k)\right)\partial_k \\
&\overset{(i)}{=} \sum_k \left(\sum_{ij} a_i b_j \Gamma_{ij}^k + X(b_k)\right)\partial_k \\
&\quad + \sum_k \left(\sum_{ij} a_i b_j \left(\partial_i(f)\delta_{jk} + \partial_j(f)\delta_{ik} - \sum_m \partial_m(f) g_{ij} g^{km}\right)\right)\partial_k \\
&= \nabla_X Y + \sum_k b_k\partial_k \sum_i a_i\partial_i(f) + \sum_k a_k\partial_k \sum_j b_j\partial_j(f) \\
&\quad - \sum_{ij} a_i b_j g_{ij}\left(\sum_{km}\partial_m(f) g^{km}\partial_k\right) \\
&= \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - \langle X, Y\rangle\nabla f.
\end{aligned}$$

(v) Por definição,

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z.$$

Pelo item (iv), vale

$$\widetilde{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z + Y(f)Z + Z(f)Y - \langle Y, Z\rangle\nabla f.$$

Novamente usando (iv), obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z &= \widetilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z) + \widetilde{\nabla}_X(Y(f)Z) + \widetilde{\nabla}_X(Z(f)Y) - \widetilde{\nabla}_X(\langle Y, Z\rangle\nabla f) \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + X(f)\nabla_Y Z + (\nabla_Y Z)(f)X - \langle X, \nabla_Y Z\rangle\nabla f \\
&\quad + \nabla_X(Y(f)Z) + X(f)Y(f)Z + (Y(f)Z)(f)X - \langle X, Y(f)Z\rangle\nabla f \\
&\quad + \nabla_X(Z(f)Y) + X(f)Z(f)Y + (Z(f)Y)(f)X - \langle X, Z(f)Y\rangle\nabla f \\
&\quad - \nabla_X(\langle Y, Z\rangle\nabla f) - X(f)\langle Y, Z\rangle\nabla f - (\langle Y, Z\rangle\nabla f)(f)X + \langle X, \langle Y, Z\rangle\nabla f\rangle\nabla f.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z &= \nabla_X\nabla_Y Z + X(f)\nabla_Y Z + (\nabla_Y Z)(f)X - \langle X, \nabla_Y Z\rangle\nabla f + X(Y(f))Z \\
&\quad + Y(f)\nabla_X Z + X(f)Y(f)Z + Y(f)Z(f)X - Y(f)\langle X, Z\rangle\nabla f + X(Z(f))Y \\
&\quad + Z(f)\nabla_X Y + X(f)Z(f)Y + Z(f)Y(f)X - Z(f)\langle X, Y\rangle\nabla f - X(\langle Y, Z\rangle)\nabla f \\
&\quad - \langle Y, Z\rangle\nabla_X\nabla f - X(f)\langle Y, Z\rangle\nabla f - \langle Y, Z\rangle|\nabla f|^2 X + \langle Y, Z\rangle X(f)\nabla f.
\end{aligned}$$

Permutando X com Y na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z &= \nabla_Y\nabla_X Z + Y(f)\nabla_X Z + (\nabla_X Z)(f)Y - \langle Y, \nabla_X Z\rangle\nabla f \\
&\quad +Y(X(f))Z + X(f)\nabla_Y Z + Y(f)X(f)Z + X(f)Z(f)Y - X(f)\langle Y, Z\rangle\nabla f \\
&\quad +Y(Z(f))X + Z(f)\nabla_Y X + Y(f)Z(f)X + Z(f)X(f)Y - Z(f)\langle Y, X\rangle\nabla f \\
&\quad -Y(\langle X, Z\rangle)\nabla f - \langle X, Z\rangle\nabla_Y\nabla f - Y(f)\langle X, Z\rangle\nabla f - \langle X, Z\rangle|\nabla f|^2 Y \\
&\quad +\langle X, Z\rangle Y(f)\nabla f.
\end{aligned}$$

Usando (iv) mais uma vez,

$$\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + [X,Y](f)Z + Z(f)[X,Y] - \langle [X,Y], Z\rangle\nabla f.$$

Assim, das relações acima

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z &= \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z \\
&= R(X,Y)Z + (\nabla_Y Z - YZ)(f)X - \langle X, \nabla_Y Z\rangle\nabla f + [X,Y](f)Z \\
&\quad -Y(f)\langle X, Z\rangle\nabla f + (XZ - \nabla_X Z)(f)Y + Z(f)(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&\quad +Z(f)Y(f)X - X(\langle Y, Z\rangle)\nabla f - \langle Y, Z\rangle\nabla_X\nabla f - \langle Y, Z\rangle|\nabla f|^2 X \\
&\quad +X(f)\langle Y, Z\rangle\nabla f + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\nabla f - X(f)Z(f)Y + Y(\langle X, Z\rangle)\nabla f \\
&\quad +\langle X, Z\rangle\nabla_Y\nabla f + \langle X, Z\rangle|\nabla f|^2 Y - [X,Y](f)Z - Z(f)[X,Y] \\
&\quad +\langle [X,Y], Z\rangle\nabla f.
\end{aligned}$$

Usando a equação de compatibilidade $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle\nabla_X Z, Y\rangle$ e a equação de simetria $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\Big\{-\langle X, \nabla_Y Z\rangle - X\langle Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle + \langle [X,Y], Z\rangle\Big\}\nabla f \\
= &\Big\{-\langle X, \nabla_Y Z\rangle - X\langle Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle + \langle\nabla_X Y, Z\rangle - \langle\nabla_Y X, Z\rangle\Big\}\nabla f \\
= &\Big\{-Y\langle X, Z\rangle - X\langle Y, Z\rangle + X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle\Big\}\nabla f \\
= &\ 0.
\end{aligned}$$

E como também $[X,Y](f)Z + Z(f)(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - [X,Y](f)Z - Z(f)[X,Y] = 0$, teremos,

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + (\nabla_Y Z - YZ)(f)X - Y(f)\langle X, Z\rangle\nabla f + (XZ - \nabla_X Z)(f)Y \\
&\quad +Z(f)Y(f)X - \langle Y, Z\rangle\nabla_X\nabla f - \langle Y, Z\rangle|\nabla f|^2 X + X(f)\langle Y, Z\rangle\nabla f \\
&\quad -X(f)Z(f)Y + \langle X, Z\rangle\nabla_Y\nabla f + \langle X, Z\rangle|\nabla f|^2 Y,
\end{aligned}$$

ou, reescrevendo,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z &+ \Big[\langle X,Z\rangle(\text{Hess } f)(Y) - \langle Y,Z\rangle(\text{Hess } f)(X)\Big]\\
&- \Big[(\text{Hess } f)(Y,Z) - Y(f)Z(f) + \langle Y,Z\rangle|\nabla f|^2\Big]X\\
&+ \Big[(\text{Hess } f)(X,Z) - X(f)Z(f) + \langle X,Z\rangle|\nabla f|^2\Big]Y\\
&+ \Big[X(f)\langle Y,Z\rangle - Y(f)\langle X,Z\rangle\Big]\nabla f.
\end{aligned}
$$

(vi) Assumimos que $\{Z_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM na métrica g. Em p temos $\widetilde{g}(e^{-f}Z_i, e^{-f}Z_j) = e^{-2f}\widetilde{g}(Z_i,Z_j) = e^{-2f}e^{2f}g(Z_i,Z_j) = \delta_{ij}$, ou seja, denotando $\widetilde{Z}_i = e^{-f}Z_i$, temos que $\{\widetilde{Z}_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM na métrica $\widetilde{g}$. Por definição o tensor de Ricci na métrica $\widetilde{g} = \langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ é dado por

$$
\begin{aligned}
\widetilde{Ric}(Y,Z) &= \sum_{i=1}^{n}\Big\langle\Big\langle \widetilde{R}(e^{-f}Z_i,Y)Z, e^{-f}Z_i\Big\rangle\Big\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n} e^{2f}\Big\langle \widetilde{R}(e^{-f}Z_i,Y)Z, e^{-f}Z_i\Big\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big\langle \widetilde{R}(Z_i,Y)Z, Z_i\Big\rangle\\
&\overset{\text{(iii)}}{=} \sum_{i=1}^{n}\Big\langle R(Z_i,Y)Z + \langle Z_i,Z\rangle(\text{Hess } f)(Y) - \langle Y,Z\rangle(\text{Hess } f)(Z_i)\\
&\quad -(\text{Hess } f)(Y,Z)Z_i + Y(f)Z(f)Z_i - \langle Y,Z\rangle|\nabla f|^2 Z_i\\
&\quad +(\text{Hess } f)(Z_i,Z)Y - Z_i(f)Z(f)Y + \langle Z_i,Z\rangle|\nabla f|^2 Y\\
&\quad +Z_i(f)\langle Y,Z\rangle\nabla f - Y(f)\langle Z_i,Z\rangle\nabla f, Z_i\Big\rangle.
\end{aligned}
$$

Ora,

$$
\begin{aligned}
\sum_i \Big\langle \langle Z_i,Z\rangle(\text{Hess } f)(Y), Z_i\Big\rangle &= \sum_i \langle Z_i,Z\rangle\Big\langle \nabla_Y(\nabla f), Z_i\Big\rangle\\
&= \sum_i \langle Z_i,Z\rangle\Big(Y\langle\nabla f, Z_i\rangle - \langle\nabla f, \nabla_Y Z_i\rangle\Big)\\
&= \sum_i \langle Z_i,Z\rangle\Big(YZ_i(f) - (\nabla_Y Z_i)(f)\Big)\\
&= YZ(f) - \nabla_Y Z(f)\\
&= (\text{Hess } f)(Y,Z).
\end{aligned}
$$

Também, por definição do laplaciano, tem-se

$$
\sum_i \Big\langle \langle Y,Z\rangle(\text{Hess } f)(Z_i), Z_i\Big\rangle = -\langle Y,Z\rangle\Delta f.
$$

Com cálculos similares obtemos:

$$\sum_i \Big\langle (\text{Hess } f)(Z_i, Z)Y, Z_i \Big\rangle = (\text{Hess } f)(Y, Z), \quad \sum_i \Big\langle Z_i(f)Z(f)Y, Z_i \Big\rangle = Y(f)Z(f),$$

$$\sum_i \Big\langle \langle Z_i, Z\rangle |\nabla f|^2 Y, Z_i \Big\rangle = \langle Y, Z\rangle |\nabla f|^2, \quad \sum_i \Big\langle Z_i(f)\langle Y, Z\rangle \nabla f, Z_i \Big\rangle = \langle Y, Z\rangle |\nabla f|^2,$$

$$\sum_i \Big\langle Y(f)\langle Z_i, Z\rangle \nabla f, Z_i \Big\rangle = Y(f)Z(f).$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\widetilde{Ric}(Y,Z) &= Ric(Y,Z) + (\text{Hess } f)(Y,Z) + \langle Y,Z\rangle \Delta f - n(\text{Hess } f)(Y,Z) + nY(f)Z(f) \\
&\quad - n\langle Y,Z\rangle |\nabla f|^2 + (\text{Hess } f)(Y,Z) - Y(f)Z(f) + \langle Y,Z\rangle |\nabla f|^2 + \langle Y,Z\rangle |\nabla f|^2 \\
&\quad - Y(f)Z(f) \\
&= Ric(Y,Z) - (n-2)[(\text{Hess } f)(Y,Z) - Y(f)Z(f)] + \langle Y,Z\rangle [\Delta f - (n-2)|\nabla f|^2].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R_{ij} = R_{ij} - (n-2)[f_{ij} - f_i f_j] + [\Delta f - (n-2)|\nabla f|^2] g_{ij}.$$

(vii) Temos por definição e usando (vi):

$$\begin{aligned}
\widetilde{S} &= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{Ric}(e^{-f}Z_i, e^{-f}Z_i) \\
&= e^{-2f} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{Ric}(Z_i, Z_i) \\
&= e^{-2f} \Bigg[\sum_{i=1}^{n} Ric(Z_i, Z_i) - (n-2) \sum_{i=1}^{n} (\text{Hess } f)(Z_i, Z_i) \\
&\quad + \Big(\Delta f - (n-2)|\nabla f|^2\Big) \sum_{i=1}^{n} \langle Z_i, Z_i\rangle + (n-2) \sum_{i=1}^{n} Z_i(f) Z_i(f) \Bigg] \\
&= e^{-2f} \Big[S + (n-2)\Delta f + n\Big(\Delta f - (n-2)|\nabla f|^2\Big) + (n-2)|\nabla f|^2 \\
&= e^{-2f} \Big[S + 2(n-1)\Delta f - (n-1)(n-2)|\nabla f|^2 \Big].
\end{aligned}$$

(viii) Usando (vi) e (vii):

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}_{ij} &= \widetilde{R}_{ij} - \frac{\widetilde{S}}{n} \widetilde{g}_{ij} \\
&= R_{ij} - (n-2)[f_{ij} - f_i f_j] + [\Delta f - (n-2)|\nabla f|^2] g_{ij} \\
&\quad - \frac{1}{n} \left(e^{-2f} \Big[S + 2(n-1)\Delta f - (n-1)(n-2)|\nabla f|^2 \Big] \right) e^{2f} g_{ij} \\
&= B_{ij} - (n-2)\left[f_{ij} - f_i f_j\right] - \frac{n-2}{n} \left[\Delta f + |\nabla f|^2\right] g_{ij}.
\end{aligned}$$

(vx) Usando o item (v) em componentes, obtemos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}_{ijkl} = \widetilde{R}_{klij} &= \langle\langle \partial_k, \widetilde{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_l\rangle\rangle \\
&= e^{2f}\langle \partial_k, \widetilde{R}(\partial_i,\partial_j)\partial_l\rangle \\
&= e^{2f}\Big\langle \partial_k, R(\partial_i,\partial_j)\partial_l + [g_{il}\nabla_j(\nabla f) - g_{jl}\nabla_i(\nabla f)] \\
&\quad -[\nabla_j\nabla_l f - f_j f_l + g_{jl}|\nabla f|^2]\partial_i + [\nabla_i\nabla_l f - f_i f_l + g_{il}|\nabla f|^2]\partial_j \\
&\quad +[g_{jl}f_i - g_{il}f_j]\nabla f\Big\rangle \\
&= e^{2f}\Big(R_{ijkl} + g_{il}\nabla_j\nabla_k f - g_{jl}\nabla_i\nabla_k f - [\nabla_j\nabla_l f - f_j f_l + g_{jl}|\nabla f|^2]g_{ik} \\
&\quad +[\nabla_i\nabla_l f - f_i f_l + g_{il}|\nabla f|^2]g_{jk} + g_{jl}f_i f_k - g_{il}f_j f_k\Big).
\end{aligned}
$$

Usando (vi), (vii) e a expressão acima,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{W}_{ijkl} &= \widetilde{R}_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\Big(\widetilde{R}_{ik}\widetilde{g}_{jl} - \widetilde{R}_{il}\widetilde{g}_{jk} + \widetilde{R}_{jl}\widetilde{g}_{ik} - \widetilde{R}_{jk}\widetilde{g}_{il}\Big) \\
&\quad + \frac{\widetilde{S}}{(n-1)(n-2)}(\widetilde{g}_{ik}\widetilde{g}_{jl} - \widetilde{g}_{il}\widetilde{g}_{jk}) \\
&= e^{2f}\Big(R_{ijkl} + g_{il}\nabla_j\nabla_k f - g_{jl}\nabla_i\nabla_k f - [\nabla_j\nabla_l f - f_j f_l + g_{jl}|\nabla f|^2]g_{ik} \\
&\quad +[\nabla_i\nabla_l f - f_i f_l + g_{il}|\nabla f|^2]g_{jk} + g_{jl}f_i f_k - g_{il}f_j f_k\Big) \\
&\quad -\frac{e^{2f}g_{jl}}{n-2}\Big(R_{ik} - (n-2)[\nabla_i\nabla_k f - f_i f_k] + [\Delta f - (n-2)|\nabla f|^2]g_{ik}\Big) \\
&\quad +\frac{e^{2f}g_{jk}}{n-2}\Big(R_{il} - (n-2)[\nabla_i\nabla_l f - f_i f_l] + [\Delta f - (n-2)|\nabla f|^2]g_{il}\Big) \\
&\quad -\frac{e^{2f}g_{ik}}{n-2}\Big(R_{jl} - (n-2)[\nabla_j\nabla_l f - f_j f_l] + [\Delta f - (n-2)|\nabla f|^2]g_{jl}\Big) \\
&\quad +\frac{e^{2f}g_{il}}{n-2}\Big(R_{jk} - (n-2)[\nabla_j\nabla_k f - f_j f_k] + [\Delta f - (n-2)|\nabla f|^2]g_{jk}\Big) \\
&\quad +\frac{e^{-2f}\Big[S + 2(n-1)\Delta f - (n-1)(n-2)|\nabla f|^2\Big]\Big(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}\Big)e^{4f}}{(n-1)(n-2)} \\
&= e^{2f}\left\{R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\Big(R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jk} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il}\Big) + \frac{S\Big(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}\Big)}{(n-1)(n-2)}\right\} \\
&= e^{2f}W_{ijkl}.
\end{aligned}
$$

Em particular,

$$
\widetilde{W}^i_{jkl} = \widetilde{g}^{is}\widetilde{W}_{sjkl} = e^{2f}g^{is}e^{2f}W_{sjkl} = W^i_{jkl}.
$$

$\square$

2.2 Mudanças por Isometrias

Vimos que se uma variedade M está imersa em uma variedade Riemanniana N, então podemos definir em M uma estrutura Riemanniana induzida pela métrica de N. Um análogo pode ser feito para a conexão de Levi-Civita:

Proposição 2.1. Sejam (M, g) e $(N, \widetilde{g})$ duas variedades Riemannianas e $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, \widetilde{g})$ uma isometria. Se $\widetilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $(N, \widetilde{g})$, então a conexão de Levi-Civita ∇ de (M, g) é dada por $\nabla_X Y = d\phi^{-1}\widetilde{\nabla}_{d\phi X} d\phi Y$, para todo $X, Y \in \mathcal{T}(M)$.

Demonstração. Vamos denotar $g = \langle\ ,\ \rangle$ e $\widetilde{g} = \langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$. Agora, dados $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$, sejam $p \in M$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X(p)$. Como $\langle Y, Z\rangle \in C^\infty(M)$, temos

$$X(p)\langle Y, Z\rangle = \alpha'(0)\langle Y, Z\rangle_p = \frac{d}{dt}\langle Y(\alpha(t)), Z(\alpha(t))\rangle_{\alpha(t)}\bigg|_{t=0}.$$

Por outro lado, definindo $\beta = \phi \circ \alpha$, temos que $\beta(0) = \phi(p)$ e $d\phi_p X = \beta'(0)$. Também, por hipótese $\langle\langle d\phi_p Y, d\phi_p Z\rangle\rangle_{\phi(p)} = \langle Y, Z\rangle_p$, daí

$$\begin{aligned} d\phi_p X\langle\langle d\phi_p Y, d\phi_p Z\rangle\rangle_{\phi(p)} &= \beta'(0)\langle\langle d\phi_p Y, d\phi_p Z\rangle\rangle_{\phi(p)} \\ &= \frac{d}{dt}\langle\langle d\phi_{\alpha(t)} Y, d\phi_{\alpha(t)} Z\rangle\rangle_{\beta(t)}\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\langle Y(\alpha(t)), Z(\alpha(t))\rangle_{\alpha(t)}\bigg|_{t=0}. \end{aligned}$$

Segue que $d\phi X\langle\langle d\phi Y, d\phi Z\rangle\rangle = X\langle Y, Z\rangle$.

Sabemos que em uma carta local (Ω, Φ) em torno de p os vetores $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ formam uma base de T_pM e com as notações da Definição 1.2, temos $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = (\Phi^{-1} \circ \alpha^i)'(0)$. Se $q = \Phi(p)$, então $(\phi(\Omega), \Phi \circ \phi^{-1})$ é uma carta local em torno de q e os vetores $\frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}$ formam uma base de T_qN, onde $(y_1, \cdots, y_n) = \Phi \circ \phi^{-1}(q) = (x_1, \cdots, x_n)$, daí $\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = (\phi \circ \Phi^{-1} \circ \alpha^i)'(0)$. Assim,

$$d\phi_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = (\phi \circ \Phi^{-1} \circ \alpha^i)'(0) = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q. \tag{2.1}$$

Se na carta (Ω, Φ) temos $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x^j}$, sabemos que

$$[X,Y]=\sum_{ij}\left(a_i\frac{\partial b_j}{\partial x^i}-b_i\frac{\partial a_j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Por linearidade de $d\phi$, temos

$$d\phi_p X=\sum_i a_i(p)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q=\sum_i(a_i\circ\phi^{-1})(q)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q.$$

Analogamente, $d\phi_p Y=\sum_j(b_j\circ\phi^{-1})(q)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q$. Segue das expressões acima e pela linearidade de $d\phi$:

$$\begin{aligned}[d\phi X,d\phi Y] &= \sum_{ij}\left((a_i\circ\phi^{-1})\frac{\partial(b_j\circ\phi^{-1})}{\partial y^i}-(b_i\circ\phi^{-1})\frac{\partial(a_j\circ\phi^{-1})}{\partial y^i}\right)\frac{\partial}{\partial y^j}\\ &= \sum_{ij}d\phi\left[\left(a_i\frac{\partial b_j}{\partial x^i}-b_i\frac{\partial a_j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right]=d\phi[X,Y].\end{aligned}$$

Definindo $\nabla:\mathcal{T}(M)\times\mathcal{T}(M)\longrightarrow\mathcal{T}(M)$, dada por $\nabla_X Y=d\phi^{-1}\widetilde{\nabla}_{d\phi X}d\phi Y$ e usando a expressão do Teorema de Levi-Civita para a conexão $\widetilde{\nabla}$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle Z,\nabla_X Y\rangle &= \langle\langle d\phi Z,\widetilde{\nabla}_{d\phi X}d\phi Y\rangle\rangle\\ &= \frac{1}{2}\{d\phi X\langle\langle d\phi Y,d\phi Z\rangle\rangle+d\phi Y\langle\langle d\phi Z,d\phi X\rangle\rangle-d\phi Z\langle\langle d\phi X,d\phi Y\rangle\rangle\\ &\quad-\langle\langle[d\phi X,d\phi Z],d\phi Y\rangle\rangle-\langle\langle[d\phi Y,d\phi Z],d\phi X\rangle\rangle-\langle\langle[d\phi X,d\phi Y],d\phi Z\rangle\rangle\}\\ &= \frac{1}{2}\{X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle\\ &\quad-\langle[X,Z],Y\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle-\langle[X,Y],Z\rangle\}.\end{aligned}$$

Segue do Teorema de Levi-Civita que ∇ é a conexão de Levi-Civita de (M,g). □

A conexão dada pela proposição acima é denominada de *conexão pull-back*.

Agora verifiquemos o que ocorre com os demais objetos de duas variedades Riemannianas isométricas. As expressões do lema seguinte são chamadas de *propriedades de naturalidade*.

Lema 2.2. Sejam (M,g) e $(N,\widetilde{g})$ duas variedades Riemannianas e $\phi:M\longrightarrow N$ uma isometria, então

(i) $\nabla f=d\phi^{-1}\left(\widetilde{\nabla}\left(f\circ\phi^{-1}\right)\right)$, para toda $f\in C^\infty(M)$;

(ii) $\Delta f=\left(\widetilde{\Delta}\left(f\circ\phi^{-1}\right)\right)\circ\phi,\forall f\in C^\infty(M)$. Equivalentemente, $\left(\widetilde{\Delta}h\right)\circ\phi=\Delta(h\circ\phi),\forall h\in C^\infty(N)$;

(iii) $R(X,Y)Z = d\phi^{-1}\widetilde{R}(d\phi X, d\phi Y)d\phi Z$;

(iv) $R_{ij} = \widetilde{R}_{ij} \circ \phi$;

(v) $S = \widetilde{S} \circ \phi$.

Demonstração. Com as notações da proposição anterior, temos:

(i) Dado qualquer $Y \in TN$ qualquer, tem-se

$$\begin{aligned}\langle\langle d\phi\nabla f, Y\rangle\rangle = \langle\langle d\phi\nabla f, d\phi(d\phi^{-1}Y)\rangle\rangle &= \langle\nabla f, d\phi^{-1}Y\rangle \\ &= df\big(d\phi^{-1}Y\big) \\ &= d(f\circ\phi^{-1})Y = \big\langle\big\langle\widetilde{\nabla}\big(f\circ\phi^{-1}\big), Y\big\rangle\big\rangle.\end{aligned}$$

Segue o resultado.

(ii) Com as notações do item (i) e da proposição anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_j(h\circ\phi)(p) = \left\langle\nabla(h\circ\phi), \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_p &= \left\langle d\phi_p^{-1}\left(\widetilde{\nabla}h\right), d\phi_p^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right\rangle_p \\ &= \left\langle\left\langle\widetilde{\nabla}h, \frac{\partial}{\partial y^j}\right\rangle\right\rangle_{\phi(p)} \\ &= \widetilde{\nabla}_j h(\phi(p)).\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\nabla_i\nabla_j(h\circ\phi) = \nabla_i\left[\widetilde{\nabla}_j h\circ\phi\right] &= \widetilde{\nabla}_j\left[\left(\widetilde{\nabla}_j h\circ\phi\right)\circ\phi^{-1}\right]\circ\phi \\ &= \widetilde{\nabla}_j\widetilde{\nabla}_j h\circ\phi.\end{aligned}$$

Como $g_{ij} = \widetilde{g}_{ij}\circ\phi$, temos que a inversa de g_{ij} é dada por $g^{ij} = \widetilde{g}^{ij}\circ\phi$. Portanto,

$$\Delta(h\circ\phi) = -g^{ij}\nabla_i\nabla_j(h\circ\phi) = -\left(\widetilde{g}^{ij}\widetilde{\nabla}_i\widetilde{\nabla}_j(h)\right)\circ\phi = \left(\widetilde{\Delta}h\right)\circ\phi.$$

iii) Pela Proposição 2.1 sabemos que a conexão de Levi-Civita em (M,g) é dada por $\nabla_X Y = d\phi^{-1}\widetilde{\nabla}_{d\phi X}d\phi Y$. Daí,

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= \nabla_X d\phi^{-1}\widetilde{\nabla}_{d\phi Y}d\phi Z - \nabla_Y d\phi^{-1}\widetilde{\nabla}_{d\phi X}d\phi Z - d\phi^{-1}\widetilde{\nabla}_{d\phi[X,Y]}d\phi Z \\ &= d\phi^{-1}\widetilde{\nabla}_{d\phi X}\widetilde{\nabla}_{d\phi Y}d\phi Z - d\phi^{-1}\widetilde{\nabla}_{d\phi Y}\widetilde{\nabla}_{d\phi X}d\phi Z - d\phi^{-1}\widetilde{\nabla}_{[d\phi X, d\phi Y]}d\phi Z \\ &= d\phi^{-1}\widetilde{R}(d\phi X, d\phi Y)d\phi Z.\end{aligned}$$

iv), v) Da definição das métricas e do item anterior, temos

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle_p &= \left\langle\left\langle d\phi_p\frac{\partial}{\partial x^l},\ d\phi_p R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle\right\rangle_{\phi(p)} \\ &= \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial y^l}, \widetilde{R}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^k}\right\rangle\right\rangle_{\phi(p)},\end{aligned}$$

ou seja, $R_{lkij} = \widetilde{R}_{lkij} \circ \phi$.

Segue que

$$R_{ij} = g^{kl}R_{lkij} = (\widetilde{g}^{kl}\widetilde{R}_{lkij}) \circ \phi = \widetilde{R}_{ij} \circ \phi,$$

e

$$S = g^{ij}R_{ij} = (\widetilde{g}^{ij}\widetilde{R}_{ij}) \circ \phi = \widetilde{S} \circ \phi.$$

$\square$

3 O Trabalho de Yamabe

A partir desse capítulo, sempre que não mecionarmos as hipóteses sobre M, iremos supor que (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta conexa de dimensão $n \geq 3$.

Em YAMABE [31] H. Yamabe propôs o seguinte:

Problema de Yamabe: *Dada uma variedade Riemanniana compacta* (M, g) *de dimensão* $n \geq 3$, *encontre uma métrica conforme à* g *com curvatura escalar constante.*

Em 1960, Yamabe tentou resolver esse problema usando técnicas do cálculo das variações e equações parciais diferenciais elípticas. Infelizmente sua demonstração continha um erro, descoberto por Neil Sidney Trudinger em 1968. Trudinger conseguiu consertar a demonstração, mas acrescentando mais hipóteses sobre M.

Vamos introduzir as notações que serão usadas de agora em diante:

Notações:

$$n \geq 3, \quad e^{2f} = \varphi^{p-2}, \quad \widetilde{g} = \varphi^{p-2}g, \quad a = 4\frac{n-1}{n-2}, \quad \Box = a\Delta + S.$$

Onde $p = \dfrac{2n}{n-2}$, ou seja,

$$e^{2f} = \varphi^{\frac{4}{n-2}}, \quad \widetilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}}g.$$

O operador $\Box = a\Delta + S$ é chamado de *Laplaciano conforme*. Veremos depois o sentido dessa denominação para esse operador, antes façamos a seguinte observação:

Observação 3.1. Podemos simplificar um pouco a fórmula de mudança de curvatura escalar (Lema 2.1 (vi)) com as notações acima.

Comecemos extraindo a raiz quadrada e derivando a penúltima expressão acima. Temos

$$\begin{aligned} e^f \partial_i(f) &= \frac{2}{n-2}\,\varphi^{\frac{4-n}{n-2}}\partial_i\varphi \\ \therefore \partial_i(f) &= \frac{2}{n-2}\,\varphi^{-1}\partial_i\varphi. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como na métrica g temos $|\nabla f|^2 = \sum_{ij} g^{ij}\partial_i f \partial_j f$ e $\Delta f = -\dfrac{1}{\sqrt{|g|}}\displaystyle\sum_{ij}\partial_i(g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_j f)$, obtemos

$$|\nabla f|^2 = \left(\frac{2}{n-2}\right)^2 \sum_{ij} \varphi^{-2} g^{ij}\partial_i(\varphi)\partial_j(\varphi)$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta f &= -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_{ij}\partial_i\left(\frac{2}{n-2}\varphi^{-1}\,g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_j\varphi\right)\\
&= -\frac{2}{(n-2)\sqrt{|g|}}\sum_{ij}\left(-\varphi^{-2}\partial_i(\varphi)g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_j\varphi+\varphi^{-1}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{|g|}\partial_j\varphi\right)\right)\\
&= \frac{2}{n-2}\left(\sum_{ij}\varphi^{-2}g^{ij}\partial_i(\varphi)\partial_j(\varphi)+\varphi^{-1}\Delta\varphi\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
S+2(n-1)\Delta f-(n-1)(n-2)|\nabla f|^2 &= S+4\left(\frac{n-1}{n-2}\right)\left(\sum_{ij}\varphi^{-2}g^{ij}\partial_i(\varphi)\partial_j(\varphi)+\varphi^{-1}\Delta\varphi\right)\\
&\quad -(n-1)(n-2)\left(\frac{2}{n-2}\right)^2\sum_{ij}\varphi^{-2}g^{ij}\partial_i(\varphi)\partial_j(\varphi)\\
&= S+4\left(\frac{n-1}{n-2}\right)\left(\varphi^{-1}\Delta\varphi\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}=e^{-2f}\Big[S+4\frac{n-1}{n-2}\varphi^{-1}\Delta\varphi\Big] &= \varphi^{2-p}\varphi^{-1}\Big[S\varphi+4\frac{n-1}{n-2}\Delta\varphi\Big]\\
&= \varphi^{1-p}\Big[S\varphi+4\frac{n-1}{n-2}\Delta\varphi\Big] \qquad (3.2)\\
&= \varphi^{1-p}\,\Box\varphi. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Em particular, a curvatura escalar $\widetilde{S}$ é igual a uma constante λ se, e somente se, φ satisfaz a equação:

$$\Box\varphi=\lambda\varphi^{p-1}. \qquad (3.4)$$

$\Diamond$

Veremos a seguir duas propriedades importantes do operador $\Box$: a invariância conforme (em um certo sentido) e a naturalidade.

Proposição 3.1. O operador $\Box=a\Delta+S$ é um invariante conforme no seguinte sentido: Se $\widetilde{g}=\varphi^{p-2}g$ e $\widetilde{\Box}$ é definido de forma similar na norma $\widetilde{g}$, tem-se

$$\widetilde{\Box}(u)=\varphi^{1-p}\Box(\varphi u),$$

para toda $u\in C^\infty(M)$.

Demonstração. De (3.1), temos que

$$\nabla f = \sum_{ij} g^{ij}\partial_i(f)\partial_j = \sum_{ij} g^{ij}\frac{2}{n-2}\varphi^{-1}\partial_i\varphi\partial_j = \frac{2\varphi^{-1}}{n-2}\nabla\varphi.$$

Agora, substituindo $\varphi^{p-2} = e^{2f}$ e a expressão acima em (iii) do Lema 2.1, obtemos

$$\widetilde{\Delta}u = \varphi^{2-p}\left[\Delta u - \frac{2}{\varphi}\langle\nabla\varphi, \nabla u\rangle\right] \quad \Longrightarrow \quad \Delta u = \varphi^{p-2}\widetilde{\Delta}u + \frac{2}{\varphi}\langle\nabla\varphi, \nabla u\rangle.$$

Por fim, usando a identidade $\Delta(\varphi u) = u\Delta\varphi + \varphi\Delta u - 2\langle\nabla\varphi, \nabla u\rangle$, a última expressão acima e a expressão (3.2),

$$\begin{aligned}
\varphi^{1-p}\square(\varphi u) = \varphi^{1-p}\left[a\Delta(\varphi u) + S(\varphi u)\right] &= \varphi^{1-p}\left[au\Delta\varphi + a\varphi\Delta u - 2a\langle\nabla\varphi, \nabla u\rangle + S\varphi u\right] \\
&= \varphi^{1-p}\Bigg[a\varphi\Big(\varphi^{p-2}\widetilde{\Delta}u + \frac{2}{\varphi}\langle\nabla\varphi, \nabla u\rangle\Big) \\
&\quad -2a\langle\nabla\varphi, \nabla u\rangle\Bigg] + u\varphi^{1-p}\left(a\Delta\varphi + S\varphi\right) \\
&= a\widetilde{\Delta}u + \widetilde{S}u = \widetilde{\square}(u).
\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 3.2. O operador $\square$ tem a seguinte propriedade de naturalidade: Dada $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, \widetilde{g})$ uma isometria, então para toda função $u \in C^\infty(N)$,

$$\square(\phi^* u) = \phi^*(\widetilde{\square}u).$$

Demonstração. Basta aplicar os itens (ii) e (v) do Lema 2.2:

$$\phi^*(\widetilde{\square}u) = (a\widetilde{\Delta}u)\circ\phi + (\widetilde{S}u)\circ\phi = a\Delta(u\circ\phi) + S(u\circ\phi) = \square(\phi^* u).$$

$\square$

No trabalho de Yamabe, ele procede com métodos analíticos, visto que a equação (3.4) transforma o problema geométrico de Yamabe em um problema de autovalores de uma equação não-linear:

Formulação do Problema de Yamabe em EDP: *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$. O problema de Yamabe tem solução se, e somente se, existem $\varphi \in C^\infty(M)$, $\varphi > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\square\varphi = \lambda\varphi^{p-1}. \tag{3.5}$$

A equação (3.5) é um problema de autovalor não-linear. Será visto no Teorema 3.1 que para $(p-1)$ igual ou próximo a 1 a equação é resolvível pelo método linear, mas para valores altos de $(p-1)$, essa técnica torna-se muito difícil, mais ainda $p-1=\frac{n+2}{n-2}$ é o valor crítico para a solução do problema, em outras palavras, abaixo desse valor é relativamente fácil resolver a equação e acima torna-se quase impossível pela teoria linear.

Uma das primeiras contribuições de Yamabe foi verificar que equação (3.4) é a equação de Euler-Lagrange para o funcional

$$Q(\widetilde{g}) := \frac{\int\limits_M \widetilde{S} dV_{\widetilde{g}}}{\left(\int\limits_M dV_{\widetilde{g}}\right)^{2/p}}, \tag{3.6}$$

onde o domínio de Q é a classe Υ_g de métricas corformes a g. De fato, veremos a seguir que os pontos críticos do funcional acima são exatamente as soluções de (3.4).

Como para cada $\widetilde{g}$ existe uma única função extritamente positiva $\varphi \in C^\infty(M)$ tal que $\widetilde{g} = \varphi^{p-2} g$, podemos reescrever Q da seguinte forma:

$$Q(\widetilde{g}) = Q_g(\varphi) = \frac{E(\varphi)}{\|\varphi\|_p^2}, \tag{3.7}$$

onde

$$E(\varphi) = \int_M a|\nabla\varphi|^2 + S\varphi^2 \, dV_g. \tag{3.8}$$

De fato, a verificação de (3.7) é um cálculo direto usando (3.6) e (3.2:)

$$\begin{aligned} Q(\widetilde{g}) = \frac{\int_M S\varphi^{2-p} + a\varphi^{1-p}\Delta\varphi \, dV_{\widetilde{g}}}{\left(\int_M dV_{\widetilde{g}}\right)^{\frac{2}{p}}} &= \frac{\int_M \left[S\varphi^{2-p} + a\varphi^{1-p}\Delta\varphi\right] \varphi^{\frac{(p-2)n}{2}} \, dV_g}{\left(\int_M \varphi^{\frac{(p-2)n}{2}} dV_g\right)^{\frac{2}{p}}} \\ &= \frac{\int_M \left[S\varphi^{2-p} + a\varphi^{1-p}\Delta\varphi\right] \varphi^p \, dV_g}{\left(\int_M \varphi^p dV_g\right)^{\frac{2}{p}}} \\ &= \frac{\int_M S\varphi^2 + a\varphi\Delta\varphi \, dV_g}{\|\varphi\|_p^2} \\ &\overset{\text{(Int. Partes)}}{=} \frac{E(\varphi)}{\|\varphi\|_p^2}. \end{aligned}$$

Como estamos sempre supondo M compacta temos que S é limitada, visto que é uma função real diferenciável sobre M. Assim, $|S| \leq k$, sendo k uma serta constante positiva. Se $\varphi \in C^\infty(M), \varphi > 0$ temos pela inequação de Hölder:

$$\int_M \varphi^2 dV_g \leq \|1\|_{q'} \|\varphi^2\|_q = \|1\|_{q'} \|\varphi\|_p^2 = vol(M)^{1/q'} \cdot \|\varphi\|_p^2. \quad (\text{onde } p = 2q, \ 1/q + 1/q' = 1)$$

Daí,

$$Q_g(\varphi) = \frac{E(\varphi)}{\|\varphi\|_p^2} \geq \frac{\int_M S\varphi^2 dV_g}{\|\varphi\|_p^2} \geq -k \frac{\int_M \varphi^2 dV_g}{\|\varphi\|_p^2} \geq -k vol(M)^{1/q'} \tag{3.9}$$

Com isso, vemos que o funcional Q é limitado inferiormente sob o conjunto das funções estritamente positivas de $C^\infty(M)$. Podemos assim definir o invariante de Yamabe:

Definição 3.1. Dada (M,g) variedade Riemanniana compacta e conexa de dimensão $n \geq 3$, definimos o **invariante de Yamabe** $\lambda(M) = \lambda((M,g))$ da variedade como sendo

$$\begin{aligned} \lambda(M) &= \inf\{Q(\widetilde{g}); \widetilde{g} \text{ é conforme a } g\} \\ &= \inf\{Q_g(\varphi); \varphi \in C^\infty(M) \text{ e } \varphi > 0\}. \end{aligned}$$

A constante $\lambda(M)$ é chamada de invariante pois de fato é um invariante conforme:

Proposição 3.3. $\lambda(M)$ é um invariante conforme.

Demonstração. Devemos verificar que $\widetilde{\lambda} = \lambda$, sendo $\widetilde{g} = \varphi^{p-2}g$. É suficiente verificar que dada $\psi \in C^\infty(M)$, $\psi > 0$, existe $\phi \in C^\infty(M)$, $\phi > 0$, tal que $Q_{\widetilde{g}}(\psi) = Q_g(\phi)$. Por um lado, usando o Lema 2.1 (ii) e a expressão (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} Q_{\widetilde{g}}(\psi) = \frac{\int\limits_M a|\widetilde{\nabla}\psi|^2 + \widetilde{S}\psi^2 dV_{\widetilde{g}}}{\left(\int\limits_M \psi^p dV_{\widetilde{g}}\right)^{2/p}} &= \frac{\int\limits_M \left[a\varphi^{2-p}|\nabla\psi|^2 + \left(S\varphi^{2-p} + a\varphi^{1-p}\Delta\varphi\right)\psi^2\right]\varphi^p dV_g}{\left(\int\limits_M \psi^p\varphi^p \, dV_p\right)^{2/p}} \\ &= \frac{\int\limits_M a\varphi^2|\nabla\psi|^2 + S\varphi^2\psi^2 + a\varphi\psi^2\Delta\varphi \, dV_g}{\|\psi\varphi\|_p^2}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Q_g(\varphi\psi) &= \frac{\int\limits_M a|\nabla(\varphi\psi)|^2 + S(\varphi\psi)^2 \, dV_g}{\left(\int\limits_M (\varphi\psi)^p \, dV_g\right)^{2/p}} \\ &= \frac{\int\limits_M a\left(\varphi^2|\nabla\psi|^2 + \psi^2|\nabla\varphi|^2 + 2\langle\psi\nabla\varphi, \varphi\nabla\psi\rangle\right) + S\varphi^2\psi^2 \, dV_g}{\|\psi\varphi\|_p^2} \\ &= \frac{\int\limits_M a\left(\varphi^2|\nabla\psi|^2 + \frac{\psi^2}{2}(2\varphi\Delta\varphi - \Delta\varphi^2) + 2\langle\psi\nabla\varphi, \varphi\nabla\psi\rangle\right) + S\varphi^2\psi^2 \, dV_g}{\|\psi\varphi\|_p^2} \\ &= \frac{\int\limits_M a\left(\varphi^2|\nabla\psi|^2 + \psi^2\varphi\Delta\varphi - \frac{1}{2}\langle\nabla\psi^2, \nabla\varphi^2\rangle + 2\langle\psi\nabla\varphi, \varphi\nabla\psi\rangle\right) + S\varphi^2\psi^2 \, dV_g}{\|\psi\varphi\|_p^2} \\ &= \frac{\int\limits_M a\varphi^2|\nabla\psi|^2 + a\psi^2\varphi\Delta\varphi + S\varphi^2\psi^2 \, dV_g}{\|\psi\varphi\|_p^2}. \end{aligned}$$

Onde na segunda e na última igualdade acima usamos a identidade $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$, na terceira igualdade usamos $\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi - 2\langle\nabla\varphi, \nabla\psi\rangle$ e na penúltima igualdade usamos integração por partes. O resultado segue tomando $\phi = \varphi\psi$. $\square$

Também $\lambda(M)$ é um invariante por difeomorfismos conformes, precisamente:

Proposição 3.4. Sejam M e N variedades Riemannianas orientadas compactas e $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, \widetilde{g})$ um difeomorfismo conforme, então $\lambda(N) = \lambda(M)$.

Demonstração. Seja $\{\phi_1, \cdots, \phi_k\}$ uma partição da unidade associada ao atlas $\{\Omega_\alpha, \Phi_\alpha\}$, $\alpha \in \{1, \cdots, k\}$, de M, o qual é compatível com a orientação de M. Também, seja $\{\psi_1, \cdots, \psi_l\}$ uma partição da unidade associada ao atlas $\{\Omega'_\beta, \Psi_\beta\}$, $\beta \in \{1, \cdots, l\}$, de N, o qual é compatível com a orientação de N. Por definição existe $f \in C^\infty(M)$, $f > 0$, tal que $\phi^*\widetilde{g} = fg$. Vamos inicialmente supor que $f \equiv 1$, ou seja, (M, g) e $(N, \widetilde{g})$ serão isométricas e as formas de volume serão dadas, respectivamente, por

$$dV_g = \sqrt{\det(g)}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad \text{e} \quad dV_{\widetilde{g}} = \sqrt{\det(\widetilde{g})}\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n.$$

Para cada $p \in \Omega_\alpha \cap \phi^{-1}\left(\Omega'_\beta\right)$, temos que $(\Omega_\alpha, \Phi_\alpha)$ é uma carta local em torno de p e nessa carta $(\phi^*\widetilde{g})_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$. Por outro lado, $\left(\Omega_\alpha \cap \phi^{-1}\left(\Omega'_\beta\right), \Psi_\beta \circ \phi\right)$ é outra carta local em p e as novas componentes da métrica $\phi^*\widetilde{g}$ são dadas por $h_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j} \right\rangle$. Daí, pela fórmula de mudança de coordenadas (ver DO CARMO [9], p. 44), temos

$$\sqrt{\det(g)} = \det(J)\sqrt{\det(h)},$$

onde J é a matriz Jacobiano da mudança de coordenadas $\Psi_\beta \circ \phi \circ \Phi_\alpha^{-1}$. Dado que $(\Omega'_\beta, \Psi_\beta)$ é uma carta local em N e sejam $\widetilde{g}_{ij} = \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle\right\rangle$ as componentes de $\widetilde{g}$ nessa carta, temos pela isometria e por (2.1) da Proposição 2.1:

$$h_{ij}(p) = \left\langle\left\langle d_p\phi\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right), d_p\phi\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) \right\rangle\right\rangle_{\phi(p)} = \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle\right\rangle_{\phi(p)} = \widetilde{g}_{ij}(\phi(p)),$$

ou seja,

$$\sqrt{\det(g)}(p) = \det(J)(p)\sqrt{\det(\widetilde{g})}(\phi(p)).$$

Notemos que a coleção $\left(\Omega_\alpha \cap \phi^{-1}\left(\Omega'_\beta\right), \Phi_\alpha\right)$ é um atlas em M e $\{\phi_\alpha \cdot (\psi_\beta \circ \phi)\}$ é uma partição da unidade associada a esse atlas. Do Lema 2.2 (v) obtemos $S = \widetilde{S} \circ \phi$ e, usando a fórmula de mudança de variáveis para integrais (ver Teorema 8.1), temos

$$\begin{aligned}
\int_M S dV_g &= \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Phi_\alpha\left(\Omega_\alpha \cap \phi^{-1}\left(\Omega'_\beta\right)\right)} [\phi_\alpha \cdot (\psi_\beta \circ \phi) S] \circ \Phi_\alpha^{-1} \det(J)\sqrt{\det(\widetilde{g})}\, dx^1 \cdots dx^n \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Phi_\alpha\left(\Omega_\alpha \cap \phi^{-1}\left(\Omega'_\beta\right)\right)} \left[\phi_\alpha \cdot (\psi_\beta \widetilde{S}) \circ \phi\right] \circ \Phi_\alpha^{-1} \det(J)\sqrt{\det(\widetilde{g})}\, dx^1 \cdots dx^n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha,\beta} \int_{\Psi_\beta \circ \phi\left(\Omega_\alpha \cap \phi^{-1}\left(\Omega'_\beta\right)\right)} \phi_\alpha \cdot \psi_\beta \widetilde{S} \circ \Psi_\beta^{-1} \sqrt{\det(\widetilde{g})}\, dy^1 \cdots dy^n \\
&= \sum_{\beta} \int_{\Psi_\beta(\Omega'_\beta)} \psi_\beta \widetilde{S} \circ \Psi_\beta^{-1} \sqrt{\det(\widetilde{g})}\, dy^1 \cdots dy^n \\
&= \int_N \widetilde{S} dV_{\widetilde{g}}.
\end{aligned}
$$

E, do mesmo modo

$$
\int_M dV_g \quad = \quad \int_N dV_{\widetilde{g}}.
$$

Conclusão,

$$
Q(\widetilde{g}) = \frac{\int_M \widetilde{S} dV_{\widetilde{g}}}{\int_M dV_{\widetilde{g}}} = Q(g).
$$

Como $g = \phi^* \widetilde{g}$, temos que para cada $\varphi \in C^\infty(N), \varphi > 0$,

$$
\phi^*(\varphi^{p-2}\widetilde{g}) = (\varphi^{p-2} \circ \phi)\phi^*(\widetilde{g}) = (\varphi^{p-2} \circ \phi)g,
$$

onde claramente $(\varphi^{p-2} \circ \phi) \in C^\infty(M)$, daí $Q(\varphi^{p-2}\widetilde{g}) = Q\big((\varphi^{p-2} \circ \phi)g\big)$, implicando

$$
\lambda(N) = \inf_{\varphi \in C^\infty(N), \varphi \not\equiv 0} Q_{\widetilde{g}}(\varphi) \geq \inf_{\varphi \in C^\infty(M), \varphi \not\equiv 0} Q_g(\varphi) = \lambda(M).
$$

Usando a isometria inversa obtemos a outra desigualdade. Segue que $\lambda(N) = \lambda(M)$, no caso $g = \phi^* g$. E no caso geral $\phi^* g = fg$, o resultado segue da Proposição anterior. $\square$

Observação 3.2. Notemos que substituindo $\widetilde{S}$ por uma função $f \in C^\infty(N)$ na integral do teorema anterior, obtemos

$$
\int_M \phi^* f dV_g = \int_M f \circ \phi \, dV_g = \int_N f dV_{\widetilde{g}},
$$

isto é, a integral é invariante por isometrias. Também, sendo f integrável, a igualdade acima ainda é válida independente da compacidade de M e de N, bastando serem orientáveis, em vista dos cálculos do teorema anterior.

Observação 3.3. Notemos que a Definição 3.1 pode ser estendida para o conjunto das funções $u \in L_1^2, u \not\equiv 0$, pois

$$
\frac{1}{p} = \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n},
$$

implicando pelo teorema de mergulho que $L_1^2 \subset L^p$ e, portanto, $Q(u) = E(u)/\|u\|_p^2$ faz sentido. Como também vale (3.9), segue que podemos definir $\inf\{Q_g(u); u \in L_1^2(M), u \not\equiv 0\}$. Mais ainda,

$$
\lambda(M) = \inf\{Q_g(u); u \in L_1^2(M), u \not\equiv 0\}.
$$

De fato, notemos que o funcional Q_g é contínuo sobre o conjunto das funções não-nulas de $L_1^2(M)$, pois dadas u, v nesse conjunto, considere $* = Q_g(u) - Q_g(v)$, temos

$$\begin{aligned} * &= \int_M \frac{(a|\nabla u|^2 + Su^2)\,\|v\|_p^2 - (|\nabla v|^2 + Sv^2)\,\|u\|_p^2}{\|u\|_p^2\|v\|_p^2}\, dV_g \\ &= \int_M \frac{(a|\nabla u|^2 + Su^2)\,(\|v\|_p^2 - \|u\|_p^2) + \|u\|_p^2\,(a|\nabla u|^2 + Su^2 - a|\nabla v|^2 - Sv^2)}{\|u\|_p^2\|v\|_p^2}\, dV_g, \end{aligned}$$

daí,

$$|*| \leq \int_M \frac{\left|a|\nabla u|^2 + Su^2\right| \cdot \left|\|v\|_p^2 - \|u\|_p^2\right| + \|u\|_p^2\left|a(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2) + S(u^2 - v^2)\right|}{\|u\|_p^2\|v\|_p^2}\, dV_g.$$

Sabemos do teorema de mergulho (Teorema 1.3 (a)) que se $u \longrightarrow v$ em L_1^2, implica $u \longrightarrow v$ em L_p, em particular $\|u\|_p^2 \longrightarrow \|v\|_p^2$, segue que o primeiro termo da integral acima tende a zero quando $u \longrightarrow v$ em L_1^2, pois $u \in L_1^2$ implica que $\left|a|\nabla u|^2 + Su^2\right|$ é limitado. Para o segundo termo, notamos que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vale $\left||\alpha|^2 - |\beta|^2\right| \leq (|\alpha| + |\beta|)|\alpha - \beta|$, assim

$$\begin{aligned} \int_M \left|a(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2) + S(u^2 - v^2)\right| dV_g &\leq \int_M a(|\nabla u| + |\nabla v|)\,|\nabla u - \nabla v|\; dV_g \\ &+ \int_M S(|u| + |v|)|u - v|\, dV_g \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $u \longrightarrow v$ em L_1^2, pois $\|u - v\|_{2,1} = \int_M |\nabla u - \nabla v|^2 + |u - v|^2\, dV_g$.

Agora, pela Proposição 1.4 sabemos que $C_c^\infty(M)$ é denso em $L_1^2(M)$, também do Lema 3.2 sabemos que $Q_g(|u|) = Q_g(u)$ para toda $u \in L_1^p(M)$. Assim, dada $u \in L_2^1, u \not\equiv 0$ existe $\{\varphi_n\} \subset C_c^\infty(M), \varphi_n > 0$, tal que $\varphi_n \longrightarrow |u|$ em L_1^2, implicando que $Q(\varphi_n) \longrightarrow Q_g(|u|) = Q_g(u)$. Como

$$\inf_{\substack{u \in L_1^2 \\ u \not\equiv 0}} Q_g(u) \leq \inf_{\substack{u \in C^\infty \\ u > 0}} Q_g(u) \leq \inf_{\substack{u \in C_c^\infty \\ u > 0}} Q_g(u),$$

e não vale a segunda desigualdade estrita, conclui-se que

$$\inf_{\substack{u \in L_1^2 \\ u \not\equiv 0}} Q_g(u) = \inf_{\substack{u \in C^\infty \\ u > 0}} Q_g(u) = \inf_{\substack{u \in C_c^\infty \\ u > 0}} Q_g(u) \quad \Longrightarrow \lambda(M) = \inf\{Q_g(u); u \in L_1^2 \text{ e } u \not\equiv 0\}.$$

$\Diamond$

Observação 3.4. Em particular da observação anterior, temos que

$$\inf_{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} Q_{ds^2}(u) = \inf_{u \in L_1^2(\mathbb{R}^n)} Q_{ds^2}(u),$$

onde ds^2 é a métrica euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$. Como nessa métrica a curvatura escalar é identicamente nula, devemos verificar que

$$\inf_{u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} a|\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p\, dx\right)^{2/p}} = \inf_{u\in L_1^2(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} a|\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p\, dx\right)^{2/p}}.$$

De fato, isso segue dos cálculos da Observação anterior, pois nesta verificamos que

$$\inf_{u\in C_c^\infty(M)} Q_g(u) = \inf_{u\in L_1^2(M)} Q_g(u),$$

e para verificar isso, usamos apenas os seguintes argumentos:

(1) $L_1^2(M)$ está mergulhado continuamente em $L_p(M)$, o que é válido também para $M = \mathbb{R}^n$, como mencionado na Observação 1.7;

(2) $|S|$ é limitado, o que é válido também para $M = \mathbb{R}^n$, visto que a curvatura escalar é identicamente nula sobre $(\mathbb{R}^n, ds^2)$;

(3) $C_c^\infty(M)$ é denso em $L_1^2(M)$, o que é válido para $M = \mathbb{R}^n$, pois $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L_1^2(\mathbb{R}^n)$.

$\diamondsuit$

Na proposição seguinte verificamos que resolver o problema de Yamabe é equivalente a determinar os valores críticos do funcional (3.7).

Definimos o funcional pertubado $Q^s(\varphi) = E(\varphi)/\|\varphi\|_s^2$ para $2 \le s \le p$ e naturalmente $\lambda_s = \inf\{Q^s(\varphi); \varphi \in C^\infty, \varphi > 0\}$. Notemos que se $s \le p$, então por imersão de Sobolev vale $L_1^2(M) \subset L^s(M)$.

Dada uma aplicação $T : \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_2$ entre espaços de Banach $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$. A derivada direcional (ou de Gateaux) $dF(x;y)$ de F em $x \in \mathcal{B}_1$ na direção $y \in \mathcal{B}_1$ é definida por

$$dF(x;y) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{F(x+ty) - F(x)}{t} = \frac{d}{dt} F(x+ty)\Big|_{t=0},$$

se esse limite existe.

Consideraremos a derivada de Q^s como sendo a derivada direcional.

Proposição 3.5. Seja $u \in L_1^2(M)$ com $u \not\equiv 0$ e $u \ge 0$ em quase todo ponto. Para $1 < s \le p$, u é ponto crítico do funcional Q^s se, e somente se, u é solução fraca da equação

$$a\Delta u + Su = \lambda\, u^{s-1},$$

onde $\lambda = \dfrac{E(u)}{\|u\|_s^s}$.

Demonstração. Dada $v \in L_1^2(M)$ qualquer, sempre podemos escolher $t \in \mathbb{R}$ pequeno tal que $\|u+tv\|_s \neq 0$. De fato, fixadas u, v, teremos

$$0 < \big| \|u\|_s - \|tv\|_s \big| \leq \|u+tv\|_s,$$

para t suficientemente pequeno, visto que $\|u\|_s > 0$. Assim, faz sentido considerar $Q^s(u+tv)$ para $t \longrightarrow 0$. Queremos calcular $\frac{d}{dt}Q^s(u+tv)\Big|_{t=0}$, para tanto, vamos calcular $\frac{d}{dt}E(u+tv)\Big|_{t=0}$ e $\frac{d}{dt}\|u+tv\|_s^2\Big|_{t=0}$:

$$\begin{aligned} E(u+tv) &= \int_M a\langle \nabla(u+tv), \nabla(u+tv)\rangle + S(u+tv)^2 dV_g \\ &= \int_M a\left[|\nabla u|^2 + 2t\langle \nabla u, \nabla v\rangle + t^2|\nabla v|^2\right] + S(u^2 + 2tuv + t^2v^2)dV_g. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{t \longrightarrow 0}\left[\frac{E(u+tv) - E(u)}{t}\right] &= \lim_{t \longrightarrow 0}\frac{1}{t}\int_M 2at\langle \nabla u, \nabla v\rangle + at^2|u|^2 + 2tSuv + t^2Sv^2\ dV_g \\ &= \int_M 2a\langle \nabla u, \nabla v\rangle + 2Suv\ dV_g. \end{aligned}$$

Notemos que dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \geq 0$, então

$$\lim_{t \longrightarrow 0}\frac{|a+tb|^s - |a|^s}{t} = sa^{s-1}b. \tag{3.10}$$

Obviamente (3.10) é válido para $a = 0$. Supondo $a > 0$, temos que $a > tb$ para $t \longrightarrow 0$, daí $|a+tb|^s = (a+tb)^s$. A generalização do binômio de Newton diz que para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, com $|x| > |y|$ tem-se

$$(x+y)^z = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{z}{k}x^{z-k}y^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.11}$$

onde a soma acima converge absolutamente (Ver GRAHAM [12], p. 162). Assim,

$$(a+tb)^s = a^s + sa^{s-1}tb + \sum_{k \geq 2}\binom{s}{k}a^{s-k}(tb)^k.$$

Como a soma acima converge absolutamente, podemos aplicar o limite termo a termo. Tomando $\frac{1}{t}\left(|a+tb|^s - |a|^s\right)$ e observando que apenas o primeiro termo dessa expressão não possue fator $t^k,\ k \geq 1$, obtemos o afirmado:

$$\lim_{t \longrightarrow 0}\left(\frac{|a+tb|^s - |a|^s}{t}\right) = sa^{s-1}b.$$

Também,

$$\begin{aligned} |u+tv|^s &\leq (1-t)|u|^s + t|u+v|^s, \quad \text{para} \quad |t| \leq 1 \\ \therefore \frac{|u+tv|^s - |u|^s}{t} &\leq |u+v|^s - |u|^s, \quad \text{para} \quad t \neq 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Considere as funções $f_t = \dfrac{|u+tv|^s - |u|^s}{t}$. De (3.10) sabemos que $f_t(x) \longrightarrow f(x)$ para todo ponto x, onde $f = su^{s-1}v$. Usando (3.12), temos pelo Teorema de Convergência Dominada que

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \int_M f_t \, dV_g = \int_M f dV_g.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\|u+tv\|_s^s\Big|_{t=0} = \lim_{t\longrightarrow 0}\left(\frac{\|u+tv\|_s^s - \|u\|_s^s}{t}\right) = \int_M su^{s-1}vdV_g.$$

Segue pela regra da cadeia que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u+tv\|_s^2\Big|_{t=0} &= \frac{2}{s}\left(\int_M u^s \, dV_g\right)^{\frac{2}{s}-1}\left(\int_M su^{s-1}vdV_g\right) \\ &= 2\int_M \|u\|_s^{2-s}u^{s-1}v \, dV_g. \end{aligned}$$

Usando a regra da derivada do quociente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Q_g(u+tv)\Bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{E(u+tv)}{\|u+tv\|_s^2}\right)\Bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\|u+tv\|_s^2 \frac{d}{dt}E(u+tv) - E(u+tv)\frac{d}{dt}\|u+tv\|_s^2}{\|u+tv\|_s^4}\Bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\|u\|_s^2\left(\int_M 2a\langle\nabla u, \nabla v\rangle + 2Suv \, dV_g\right) - 2E(u)\int_M \|u\|_s^{2-s}u^{s-1}v \, dV_g}{\|u\|_s^4} \\ &= \frac{\int_M 2a\langle\nabla u, \nabla v\rangle + 2Suv \, dV_g - 2E(u)\int_M \|u\|_s^{-s}u^{s-1}v \, dV_g}{\|u\|_s^2} \\ &= \frac{2}{\|u\|_s^2}\int_M a\langle\nabla u, \nabla v\rangle + Suv - E(u)\|u\|_s^{-s}u^{s-1}v \, dV_g. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}Q_g(u+tv)\Bigg|_{t=0} = 0 \quad \Longleftrightarrow \int_M a\langle\nabla u, \nabla v\rangle dV_g = \int_M -Suv + E(u)\|u\|_s^{-s}u^{s-1}vdV_g.$$

Sendo $v \in L_1^2(M)$ qualquer, tem-se que u é ponto crítico de Q^s se, e somente se, u é solução fraca da equação

$$a\Delta u + Su = \frac{E(u)}{\|u\|_s^s}u^{s-1}.$$

□

Corolário 3.1. Seja $\varphi \in C^2(M)$, $\varphi \not\equiv 0$. Então φ é ponto crítico de Q^s se, e somente se, φ é solução (forte) da equação

$$a\Delta\varphi + S\varphi = \lambda\, \varphi^{s-1},$$

onde $\lambda = \dfrac{E(\varphi)}{\|\varphi\|_s^s}$.

Demonstração. Como $C_c^2(M) \subset L_1^2(M)$, dada qualquer $\psi \in C_c^2(M)$, temos pela proposição anterior

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Q^s(\varphi + t\psi)\bigg|_{t=0} &= \frac{2}{\|\varphi\|_p^2}\int_M a\varphi\Delta\psi + S\varphi\psi - E(\varphi)\|\varphi\|_p^{-p}\varphi^{p-1}\psi\, dV_g \\ &\overset{\text{(Int. Partes)}}{=} \frac{2}{\|\varphi\|_p^2}\int_M \left(a\Delta\varphi + S\varphi - E(\varphi)\|\varphi\|_p^{-p}\varphi^{p-1}\right)\psi\, dV_g.\end{aligned}$$

Como $\psi \in C_c^2(M)$ é qualquer, temos

$$\frac{d}{dt}Q^s(\varphi + t\psi)\bigg|_{t=0} = 0 \iff a\Delta\varphi + S\varphi = \frac{E(\varphi)}{\|\varphi\|_p^p}\varphi^{p-1}.$$

□

Assim, pela Proposição e Lema anteriores, o problema de Yamabe para uma variedade Riemanniana compacta (M, g) pode ser resolvido determinando uma métrica conforme a g tal que minimize o funcional (3.6). É o que faremos no próximo capítulo para o caso da esfera $(S^n, \overline{g})$.

Na abordagem de YAMABE [31] ele considera primeiro o funcional perturbado $Q^s(\varphi) = E(\varphi)/\|\varphi\|_s^2$, para $2 \leq s < p$. Definindo $\lambda_s = \inf\{Q^s(\varphi); \varphi \in C^\infty, \varphi \not\equiv 0\}$. Na demonstração do Teorema 3.1 abaixo veremos que uma função φ minimizante de Q^s com $\|\varphi\|_s = 1$ satisfaz

$$\Box\varphi = \lambda_s\varphi^{s-1}. \tag{3.13}$$

A equação acima será chamada de *equação subcrítica* e no Teorema seguinte veremos que ela sempre tem solução para $s < p$, com $\|\varphi\|_s = 1$, ou seja, sempre existe um minimizante para o funcional perturbado Q^s.

Lema 3.1. **(Regularidade)** Supondo que $\varphi \in L_1^2(M)$ é uma solução fraca de (3.13) com $\varphi \geq 0$ em quase todo ponto e seja $2 \leq s \leq p$.

(i) Se $\varphi \in L^r(M)$ para algum r tal que

$$r > \text{máx}\left\{s - 1, \frac{n(s-2)}{2}\right\}, \tag{3.14}$$

então $\varphi \equiv 0$ ou $\varphi > 0$ e $C^\infty(M)$.

(ii) Se $r = s < p$ ou $s = p < r$, então vale (3.14) e, consequentemente, $\varphi \equiv 0$ ou $\varphi > 0$ e $C^\infty(M)$.

(iii) Se $|\lambda_s| \leq K$, tem-se que $\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}} \leq C_{(K,M,g,\|\varphi\|_r)}$. onde $C_{(K,M,g,\|\varphi\|_r)}$ é uma constante positiva que depende apenas de M, g, K e $\|\varphi\|_r$ tal que se $\|\varphi\|_r$ é uniformemente limitada, então $\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}}$ também o será.

Demonstração. (i) Dado $s \in [2, p]$ e supondo $\varphi \in L^r$, defina $q = r/(s-1) > 1$. Como $q \leq r$, segue do Teorema de Mergulho (Teorema 1.3 (a)) que $\varphi \in L^q$. Também $\varphi^{s-1} \in L^q$, pois $\int_M |\varphi^{s-1}|^q \, dV_g = \|\varphi\|_r^r < \infty$. Sendo S limitada, segue de (3.13) que $a\Delta\varphi = \lambda_s \varphi^{s-1} - S\varphi \in L^q$. Então, pelo Teorema de Regularidade (Teorema 1.6 (a)) temos que $\varphi \in L_2^q$.

Se $1/q < 2/n$, escolha $0 < \alpha < 1$ tal que $1/q < (2-\alpha)/n$, daí pelo Teorema de Mergulho (Teorema 1.3 (c)) $L_2^q \subset C^\alpha$. Caso $q = n/2$, escolha $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e defina $r_0 = r - \varepsilon$, $q_0 = r_0/(s-1)$. Temos $\varphi \in L^{r_0}$ e $\varphi \in L_2^{q_0}$ como antes, mas agora $q_0 < n/2$, daí

$$\frac{r_0}{s-1} < \frac{n}{2} \quad \Longrightarrow \quad ns - n - 2r_0 > 0$$

e podemos definir $r_1 = nr_0/(ns - n - 2r_0)$. Por hipótese $\dfrac{2}{n} > \dfrac{(s-2)}{r_0}$, daí

$$\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_0} - \frac{s-1}{r_0} + \frac{2}{n} = \frac{2}{n} - \frac{s-2}{r_0} > 0,$$

segue que $r_1 > r_0$, mais ainda, como $2r_0 - ns + n < 0$, temos

$$r_1 - r_0 > \frac{r_1 - r_0}{r_0 r_1} = \frac{nr_0}{2r_0 - ns + 2n} > \frac{nr_0}{n} = r_0,$$

daí, $q_1 = r_1/(s-1) > n/2$ e $L_2^{q_1} \subset C^\alpha$. Como

$$\frac{1}{r_1} = \frac{s-1}{r_0} - \frac{2}{n} = \frac{1}{q_0} - \frac{2}{n},$$

temos $L_2^{q_0} \subset L^{r_1}$. Assim, $\varphi \in L^{r_1}$, daí $\varphi \in L^{q_1}$ e por regularidade $\varphi \in L_2^{q_1} \subset C^\alpha$.

Caso $q < n/2$, procedemos como acima e indutivamente definindo r_k, observando que $L^{r_k} \subset L^{q_k}$ e $L_2^{q_k} \subset L^{r_{k+1}}$. Seja $N \geq 0$ o primeiro inteiro não-negativo tal que $q_N > n/2$, então pelo visto acima tem-se $\varphi \in L_2^{q_N} \subset C^\alpha$.

Pela Proposição 1.5 e o Corolário 1.1 temos $(\lambda_s\varphi^{s-1} - S\varphi) \in C^\alpha$. Agora por regularidade (Teorema 1.3 (b)) conclui-se que $\varphi \in C^{2,\alpha}$. Em seguida temos pelo Corolário 1.1 que $(\lambda_s\varphi^{s-1} - S\varphi) \in C^{1,\alpha}$ e por regularidade (Teorema 1.3 (b)) vale $\varphi \in C^{2+1,\alpha}$. Repetindo o processo sucessivamente, conclui-se que $\varphi \in C^\infty$.

Por fim, como $a\Delta\varphi = \lambda_s\varphi^{s-1} - S\varphi$ e $\varphi \geq 0$, temos pelo princípio do máximo (Teorema

1.8) que φ é identicamente nula ou estritamente positiva.

(ii) Supondo $r = s < p$, temos obviamente $r > s - 1$. Sendo $s < p = 2n/(n-2)$, temos $n(s-2)/2 < s = r$, ou seja, vale (3.14). Por outro lado, se $s = p < r$, tem-se $r > s > s - 1$ e $r > p = n(p-2)/2 = n(s-2)/2$ e novamente vale (3.14).

(iii) No item (i) vimos que $\|\varphi^{s-1}\|_{q_k} = (\|\varphi\|_{r_k})^{s-1}$, $\|\varphi\|_{q_k} \leq C_1\|\varphi\|_{r_k}$ e $\|\varphi\|_{r_{k+1}} \leq C_2\|\varphi\|_{q_k,2}$, para todo $k \in \{0,1,2,\cdots\}$. Também, tínhamos $\|\varphi\|_{C^\alpha} \leq C_3\|\varphi\|_{q_N,2}$. Dado que $\Delta\varphi = (\lambda_s\varphi^{s-1} - S\varphi)/a$, usando o Teorema 1.6 e a Proposição 1.5, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}} &\leq C_4\Big[\|\Delta\varphi\|_{C^\alpha} + \|\varphi\|_{C^\alpha}\Big] \\
&\leq aC_4\Big[K\big(\|\varphi\|_{C^\alpha}\big)^{s-1} + \|S\|_{C^\alpha}\|\varphi\|_{C^\alpha} + \|\varphi\|_{C^\alpha}\Big] \\
&\leq C_3'C_4\Big[\big(\|\varphi\|_{q_N,2}\big)^{s-1} + \|\varphi\|_{q_N,2}\Big] \qquad (3.15) \\
&\leq C_5\Big[\big(\|\Delta\varphi\|_{q_N} + \|\varphi\|_{q_N}\big)^{s-1} + \big(\|\Delta\varphi\|_{q_N} + \|\varphi\|_{q_N}\big)\Big] \\
&\leq C_6\Big[\big(\|\varphi^{s-1}\|_{q_N} + \|\varphi\|_{q_N}\big)^{s-1} + \big(\|\varphi^{s-1}\|_{q_N} + \|\varphi\|_{q_N}\big)\Big] \\
&\leq C_6C_1'\Big[\big((\|\varphi\|_{r_N})^{s-1} + \|\varphi\|_{r_N}\big)^{s-1} + \big(\|\varphi\|_{r_N})^{s-1} + \|\varphi\|_{r_N}\big)\Big] \qquad (3.16) \\
&\leq C_7C_2'\Big[\big((\|\varphi\|_{q_{N-1},2})^{s-1} + \|\varphi\|_{q_{N-1},2}\big)^{s-1} + \big(\|\varphi\|_{q_{N-1},2})^{s-1} + \|\varphi\|_{q_{N-1},2}\big)\Big].
\end{aligned}$$

Na última expressão acima usamos (3.15) e (3.16) e procedemos por indução, obtendo

$$\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}} \leq C_{K,M,g,\|\varphi\|_r},$$

onde $C_{K,M,g,\|\varphi\|_r}$ é uma constante positiva que envolve somas e potências em $(s-1)$ da norma $\|\varphi\|_r$. Em particular, se $\|\varphi\|_r$ é uniformemente limitada, teremos que $\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}}$ também será uniformemente limitada. $\square$

Lema 3.2. Seja M^n uma variedade Riemanniana e $\varphi \in L_1^p(M)$. Então $|\nabla|\varphi|| = |\nabla\varphi|$ em quase todo ponto.

Demonstração. Ver AUBIN [3], p. 82. $\square$

Teorema 3.1. (Yamabe) Para $2 \leq s < p$, existe uma função φ_s estritamente positiva C^∞ satisfazendo a equação subcrítica (3.13) tal que $Q^s(\varphi_s) = \lambda_s$ e $\|\varphi\|_s = 1$.

Demonstração. Dividimos a demonstração em etapas:

a) Existe $\{u_i\}$ sequência limitada em L_1^2 que converge fracamente em L_1^2 e fortemente em L^s para uma função $\varphi_s \in L^s$, com $\|\varphi_s\|_s = 1$ e u_i converge pontualmente em quase todo ponto. Com efeito, Por definição de ínfimo existe $\{u_i\} \subset C^\infty(M)$ tal que $Q^s(u_i) \longrightarrow \lambda_s$.

Como $Q^s(\varphi) = Q^s\left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|}\right)$, podemos assumir que $\|u_i\|_s = 1$ para cada i. Também, vale $Q^s(u_i) = Q^s(|u_i|)$, pois pelo Lema 3.2 vale $|\nabla|u_i|| = |\nabla u_i|$ em quase todo ponto de M. Assim, podemos considerar que $u_i \geq 0$. Agora, notemos que

$$\begin{aligned}
\|u_i\|_{2,1}^2 &= \int_M |\nabla u_i|^2 + u_i^2 \, dV_g \\
&= \int_M |\nabla u_i|^2 + \frac{S}{a} u_i^2 + u_i^2 - \frac{S}{a} u_i^2 \, dV_g \\
&= \frac{1}{a} Q^s(u_i) + \int_M \left(1 - \frac{S}{a}\right) u_i^2 \, dV_g \\
&\overset{\text{(Hölder)}}{\leq} \frac{1}{a} Q^s(u_i) + C\|u_i\|_s^2.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Segue que $\{u_i\}$ é limitada em $L_1^2(M)$, visto que $\{Q^s(u_i)\}$ é convergente e, portanto, limitada. Como L_1^2 é espaço de Hilbert, existe uma subsequência de $\{u_i\}$ (que consideramos com os mesmos índices) que converge fracamente em L_1^2 para $\varphi_s \in L_1^2$. Pelo Teorema 1.3 item (b), a aplicação inclusão $L_1^2 \subset L^s$ é um operador compacto, visto que

$$\frac{1}{s} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \quad \text{para} \quad s < \frac{2n}{n-2}.$$

Assim, essa subsequência converge fortemente em L^s para φ_s com $\|\varphi_s\|_s = 1$. Por fim, por um teorema de medida existe uma subsequência dessa subsequência que converge pontualmente em quase todo ponto para φ_s.

b) Vamos ver que $Q^s(\varphi_s) = \lambda_s$. De fato, pela desigualdade de Hölder a norma L^2 é dominada pela norma L^s, daí $u_i \longrightarrow \varphi_s$ em L^2. Considere o funcional $T(f) := \int_M \langle \nabla f, \nabla \varphi_s \rangle dV_g$, $T : L_1^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. T é linear contínuo pois:

$$|T(f)| \leq \int_M |\langle \nabla f, \nabla \varphi_s \rangle| \, dV_g \leq \left(\int_M |\nabla f|^2 dV_g\right)^{1/2} \left(\int_M |\nabla \varphi_s|^2 dV_g\right)^{1/2} \leq C\|f\|_{2,1}.$$

Daí, como $\{u_i\}$ converge fracamente em L_1^2 para φ_s, temos $T(\varphi_s) = \lim_{i \longrightarrow \infty} T(u_i)$:

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla \varphi_s|^2 dV_g &= \lim_{i \longrightarrow \infty} \int_M \langle \nabla u_i, \nabla \varphi_s \rangle dV_g \\
&\leq \limsup_{i \longrightarrow \infty} \left(\int_M |\nabla u_i|^2 dV_g\right)^{1/2} \left(\int_M |\nabla \varphi_s|^2 dV_g\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_M |\nabla \varphi_s|^2 dV_g \leq \limsup_{i \longrightarrow \infty} \int_M |\nabla u_i|^2 dV_g.$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
Q^s(\varphi_s) &= \int_M a|\nabla\varphi_s|^2 + S\varphi_s^2\, dV_g \\
&= \lim_{i\longrightarrow\infty} \int_M a|\nabla\varphi_s|^2 + S{u_i}^2\, dV_g \\
&\leq \limsup_{i\longrightarrow\infty} \int_M a|\nabla u_i|^2 + S{u_i}^2\, dV_g \\
&= \lim_{i\longrightarrow\infty} Q^s(u_i) = \lambda_s.
\end{aligned}
$$

Mas, sendo λ_s o ínfimo de Q^s, temos $Q^s(\varphi_s) = \lambda_s$.

c) φ_s é uma solução fraca da equação subcrítica (3.13). Isso segue do fato de que $\varphi_s \geq 0$ em quase todo ponto e φ_s ser um ponto crítico do funcional Q^s, daí pela Proposição 3.5, temos que φ_s é uma solução fraca da equação subcrítica (3.13).

d) $\varphi_s \in C^\infty$ e $\varphi_s > 0$. Como $\varphi_s \in L^s$ e $s < p$, juntamos isso com o item c) acima e notando que $\varphi_s \not\equiv 0$, concluimos do Lema 3.1 (ii) que $\varphi_s \in C^\infty$ e $\varphi_s > 0$. □

Yamabe tentou dar uma solução completa ao seu problema, e ele pensou ter obtido, mas anos depois Trudinger descobriu um erro em sua demonstração, precisamente, Yamabe afirmou que as funções φ_s do teorema acima são uniformemente limitadas quando $s \longrightarrow p$. Essa afirmação é falsa em geral como veremos depois.

4 As Contribuições de Aubin e Trudinger

O objetivo desse capítulo é concluir que se $\lambda(M) < \lambda(S^n)$, então o problema de Yamabe tem solução. Esse resultado seguirá do Teorema de Yamabe e resultados devido a Aubin e Trudinger.

Nesse capítulo supomos $vol(M) = 1$, o que basta multiplicar a métrica por uma constante se necessário. Como veremos no lema abaixo, uma consequência dessa convenção será o fato de $\|u\|_s \leq \|u\|_{s'}$, sempre que $s \leq s'$.

Lema 4.1. (Aubin) Se $\int_M \, dV_g = 1$, então $|\lambda_s|$ é não-crescente como função de $s \in [2, p]$. Também, se $\lambda(M) \geq 0$, então λ_s é contínuo pela esquerda.

Demonstração. a) $|\lambda_s|$ é não-decrescente. Com efeito, para quaisquer s e s', e qualquer $u \in C^\infty(M), u \not\equiv 0$, vale

$$Q^{s'}(u) = \frac{\|u\|_s^2}{\|u\|_{s'}^2} Q^s(u). \tag{4.1}$$

Supondo $s \leq s'$, exite $q > 1$ tal que $s' = qs$. Tomando q' tal que $1/q + 1/q' = 1$, temos pela desigualdade de Hölder:

$$\int_M u^s dV_g \leq \|1\|_{q'} \|u^s\|_q = \|u\|_{s'}^s \quad \Longrightarrow \|u\|_s \leq \|u\|_{s'}. \tag{4.2}$$

Assim, se $s \leq s'$, temos de (4.1) e (4.2) que $|\lambda_{s'}| \leq |\lambda_s|$.

b) Para $\lambda(M) \geq 0$, λ_s é contínua pela esquerda. De fato, notemos que se $\lambda_s < 0$ para algum s, significa que existe $u \in C^\infty(M)$ tal que $Q^s(u) < 0$, daí (4.1) mostra que $Q^{s'}(u) < 0$ para todo s', isto é, $\lambda_s < 0$ para todo s. Assim, se $\lambda(M) \geq 0$, temos que $\lambda_s \geq 0$ para todo s. Dados $s' \in [2, p]$ e $\varepsilon > 0$, temos por definição de ínfimo que existe $u \in C^\infty(M)$ tal que $Q^{s'}(u) < \lambda_{s'} + \varepsilon$. Notemos que a função $\|u\|_s^s$ é uma função contínua em s, pois a função $|u|^s$ é contínua em s, implicando que

$$\left| \|u\|_{s'}^{s'} - \|u\|_s^s \right| = \left| \int_M |u|^{s'} - |u|^s \, dV_g \right| \leq \left| |u|^{s'} - |u|^s \right| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } s \longrightarrow s'.$$

Em particular $\|u\|_s$ é uma função contínua em s, daí podemos tomar s suficientemente próximo a s', com $s \leq s'$, tal que

$$\frac{\|u\|_{s'}^2}{\|u\|_s^2} < 1 + \varepsilon_1,$$

onde tomamos $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{\varepsilon}{\lambda_{s'} + \varepsilon}$. Por (4.1), temos

$$Q^s(u) = \frac{\|u\|_{s'}^2}{\|u\|_s^2} Q^{s'}(u) \quad \Longrightarrow Q^s(u) < (1+\varepsilon_1)Q^{s'}(u) < \lambda_{s'} + 2\varepsilon.$$

Por a) sabemos que $\lambda_{s'} \leq \lambda_s$ e como $\lambda_s \leq Q^s(u), \forall u$, concluimos da expressão acima que $|\lambda_s - \lambda_{s'}| = \lambda_s - \lambda_{s'} < 2\varepsilon$, ou seja, λ_s é contínua pela esquerda. □

Seja $N_R = (0, \cdots, 0, R)$ o polo norte sobre $S_R^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Definimos a projeção estereográfica $\sigma_R : S_R^n \setminus \{N_R\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$\sigma_R(\zeta^1, \cdots, \zeta^n, \xi) = \sigma_R(\zeta, \xi) = \frac{R\zeta}{R - \xi}. \tag{4.3}$$

É conhecido que σ_R é um difeomorfismo e sua inversa é dada por

$$\sigma_R^{-1}(x) = \left(\frac{2R^2 x}{|x|^2 + R^2}, R\frac{|x|^2 - R^2}{|x|^2 + R^2} \right), \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.4}$$

mais ainda:

Lema 4.2. A projeção estereográfica é uma equivalência conforme entre $S_R^n \setminus \{N_R\}$ e $\mathbb{R}^n$. Consequentemente, S_R^n é localmente conformemente plana.

Em LEE [16], p. 36 encontramos uma demonstração desse fato e mais, se ds^2 denota a métrica Euclidiana sobre $\mathbb{R}^n$, então

$$(\sigma_R^{-1})^* \overline{g} = \frac{4R^4}{(R^2 + |x|^2)^2}\, ds^2. \tag{4.5}$$

Observação 4.1. Considerando $\sigma = \sigma_1$ e $R = \alpha$, podemos escrever $\dfrac{1}{\alpha}\, \sigma_\alpha^{-1} = \sigma^{-1} \circ \delta_\alpha$, para cada $\alpha > 0$, onde δ_α é a dilatação sobre $\mathbb{R}^n$ dada por $\delta_\alpha(x) = \alpha^{-1}x$.

Por (4.5), temos

$$(\sigma^{-1})^* \overline{g} = \frac{4}{(1 + |x|^2)^2}\, ds^2, \tag{4.6}$$

que pode ser escrito como

$$\rho^* \overline{g} = 4u_1^{p-2} ds^2, \tag{4.7}$$

onde $\rho = \sigma^{-1}$ $\quad$ e $\quad u_1(x) = \left(|x|^2 + 1\right)^{(2-n)/2}$.

Através da projeção estereográfica é simples escrever difeomorfismos conformes da esfera. Tal grupo de difeomorfismos é gerado por rotações, juntamente com aplicações da forma $\sigma^{-1} \circ \tau_v \circ \sigma$ e $\sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma$, onde $\tau_v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a translação tal que para cada $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\tau_v(x) = x - v.$$

Isso pelo fato de rotações, translações e $\sigma^{-1} \circ \delta_\alpha$ serem difeomorfismos conformes e, consequentemente, as compostas ainda são difeomorfismos conformes.

Denotando $\phi = \sigma^{-1} \circ \delta_\alpha$, obtemos do Lema acima que para todo $X, Y \in T_p\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}(\phi^*\overline{g})_p(X,Y) = \overline{g}_{\phi(p)}(d\phi_p(X), d\phi_p(Y)) &= \frac{1}{\alpha^2}\,\overline{g}_{\phi(p)}\left(d(\sigma_\alpha^{-1})_p(X), d(\sigma_\alpha^{-1})_p(Y)\right)\\ &= \frac{1}{\alpha^2}((\sigma_\alpha^{-1})^*\overline{g})_p(X,Y)\\ &= \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+|x|^2)^2}\,ds^2(X,Y),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\sigma^{-1} \circ \delta_\alpha\right)^* \overline{g} = 4u_\alpha^{p-2} ds^2, \quad \text{onde} \quad u_\alpha(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + |x|^2}\right)^{(n-2)/2}, \tag{4.8}$$

visto que $\dfrac{(p-2)(n-2)}{2} = 2.$ $\Diamond$

Teorema 4.1. A forma ótima da desigualdade de Sobolev (1.6) sobre $\mathbb{R}^n$ é dada por

$$\|u\|_p^2 \leq \frac{a}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx, \quad u \in L_1^2(\mathbb{R}^n),$$

onde $\Lambda = \lambda(S^n)$.

Demonstração. Dada $\varphi \in C^\infty(S^n)$ qualquer, definamos $\overline{\varphi} = u_1\rho^*\varphi$, daí da observação anterior:

$$\rho^*(\varphi^{p-2}\overline{g}) = (\rho^*\varphi)^{p-2}\rho^*\overline{g} = 4\overline{\varphi}^{p-2}ds^2,$$

ou seja, pela Proposição 3.4 temos $Q(\varphi^{p-2}\overline{g}) = Q(4\overline{\varphi}^{p-2}ds^2)$. Daí,

$$\begin{aligned}\lambda(S^n) = \inf_{\varphi \in C_c^\infty(S^n)} Q(\varphi^{p-2}\overline{g}) &= \inf_{\varphi \in C_c^\infty(S^n)} Q(4\overline{\varphi}^{p-2}ds^2)\\ &= \inf_{\varphi \in C_c^\infty(S^n)} Q(\overline{\varphi}^{p-2}ds^2)\\ &= \inf_{\varphi \in C_c^\infty(S^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} a|\nabla\overline{\varphi}|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{\varphi}|^p\, dx\right)^{2/p}},\end{aligned}$$

onde usamos que a curvatura escalar em $\mathbb{R}^n$ com a métrica Euclidiana é identicamente nula. Notemos que dado que ρ é um difeomorfismo, temos que $\{\overline{\varphi}; \overline{\varphi} = u_1\rho^*\varphi, \varphi \in C_c^\infty(S^n \setminus$

$\{N\})\} \supset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. E como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso nesse conjunto, obtemos

$$\Lambda = \lambda(S^n) = \inf_{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} a|\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, dx\right)^{2/p}}. \tag{4.9}$$

Agora, pela Observação 3.4,

$$\inf_{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} a|\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, dx\right)^{2/p}} = \inf_{u \in L_1^2(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} a|\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, dx\right)^{2/p}}. \tag{4.10}$$

Portanto, de (4.9) e (4.10),

$$\|u\|_p^2 \leq \frac{a}{\Lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx, \quad u \in L_1^2(\mathbb{R}^n)$$

e claramente $\dfrac{a}{\Lambda}$ é a melhor constante de Sobolev. □

Observação 4.2. Em AUBIN [3], p. 40 e TALENTI [28] é verificado também que a igualdade no teorema acima somente ocorre para funções que são múltiplas ou translações das funções u_α. Esse resultado e o teorema acima foram obtidos de forma independente pelos autores citados. Verificaremos que as funções u_α são funções extremas, isto é, vale a igualdade no teorema anterior. De fato, temos

$$u_\alpha(x) = \left(\frac{\alpha^2 + |x|^2}{\alpha}\right)^{(2-n)/2}$$

$$\therefore \quad \partial_i u_\alpha = \frac{(2-n)}{2} \left(\frac{\alpha^2 + |x|^2}{\alpha}\right)^{-n/2} \frac{2x_i}{\alpha} = (2-n)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(2-n)/2} \left(\alpha^2 + |x|^2\right)^{-n/2} x_i$$

$$\therefore \quad \partial_i^2 u_\alpha = (2-n)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(2-n)/2} \left[\left(\alpha^2 + |x|^2\right)^{-n/2} - \frac{n}{2}\left(\alpha^2 + |x|^2\right)^{(-n-2)/2} 2x_i^2\right]$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \Delta u_\alpha &= -n(2-n)\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{(2-n)/2} \left[\left(\alpha^2 + |x|^2\right)^{-n/2} - \left(\alpha^2 + |x|^2\right)^{(-n-2)/2} |x|^2\right] \\ &= n(n-2)\left(\frac{\alpha^2 + |x|^2}{\alpha}\right)^{(-n-2)/2} = n(n-2)(u_\alpha)^{(n+2)/(n-2)}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} u_\alpha \Delta u_\alpha &= n(n-2)(u_\alpha)^{2n/(2-n)} \\ \therefore \quad \int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha \Delta u_\alpha dx &= n(n-2) \int_{\mathbb{R}^n} (u_\alpha)^p dx \\ \therefore \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\alpha|^2 dx &= n(n-2) \int_{\mathbb{R}^n} (u_\alpha)^p dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{a \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\alpha|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha^p \, dx\right)^{2/p}} = an(n-2)\left(\int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha^p \, dx\right)^{(p-2)/p} = 4n(n-1)\left(\int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha^p \, dx\right)^{2/n}.$$

Usando (4.8) temos que $(\sigma^{-1}\circ\delta_\alpha)$ é uma isometria entre $\left(\mathbb{R}^n, 4u_\alpha^{p-2}ds^2\right)$ e $((S^n\setminus\{N\}),\overline{g})$. Como o elemento de volume de $\mathbb{R}^n$ na métrica $4u_\alpha^{p-2}ds^2$ é igual a $4^{n/2}u_\alpha^p dx$, pela Observação 3.2, obtemos

$$\int_{R^n} 4^{n/2}u_\alpha^p\, dx = \int_{(S^n\setminus\{N\})} dV_{\overline{g}} = \int_{S^n} dV_{\overline{g}} = \omega_n,$$

onde ω_n é o volume da esfera unitária n-dimensional. Com isso, vemos que $u_\alpha \in L_1^2(\mathbb{R}^n)$. Também,

$$\frac{a\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_\alpha|^2dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha^p\, dx\right)^{2/p}} = n(n-1)\left(\int_{\mathbb{R}^n} 4^{n/2}u_\alpha^p\, dx\right)^{2/n} = n(n-1)\omega_n^{2/n}.$$

Veremos no próximo capítulo (Corolário 5.1) que $\Lambda = n(n-1)\omega_n^{2/n}$, portanto vale a igualdade

$$\|u_\alpha\|_p^2 = \frac{a}{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_\alpha|^2dx.$$

$\diamondsuit$

Teorema 4.2. (Trudinger, Aubin) Suponha $\lambda(M) < \lambda(S^n)$ e seja $\{\varphi_s\}$ a coleção de funções dadas pelo Teorema 3.1. Então existem constantes $s_0 < p$, $r > p$ e $C > 0$ tais que $\|\varphi_s\|_r \leq C$ para todo $s \geq s_0$.

Demonstração. Seja $\delta > 0$. Multiplicando (3.13) por $\varphi_s^{1+2\delta}$ e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} a\varphi_s^{1+2\delta}\triangle\varphi_s + S\varphi_s^{2+2\delta} &= \lambda_s\varphi_s^{s+2\delta} \\ \therefore \int_M a\varphi_s^{1+2\delta}\triangle\varphi_s + S\varphi_s^{2+2\delta}dV_g &= \int_M \lambda_s\varphi_s^{s+2\delta}dV_g \\ \therefore \int_M a\left\langle(1+2\delta)\varphi_s^{2\delta}\nabla\varphi_s, \nabla\varphi_s\right\rangle dV_g &= \int_M \lambda_s\varphi_s^{s+2\delta} - S\varphi_s^{2+2\delta}dV_g. \end{aligned}$$

Fazendo $w = \varphi_s^{1+\delta}$, temos que $\nabla\varphi_s = \dfrac{\nabla w}{(1+\delta)\varphi_s^\delta}$, daí

$$\frac{1+2\delta}{(1+\delta)^2}\int_M a|\nabla w|^2dV_g = \int_M \lambda_s w^2\varphi_s^{s-2} - Sw^2dV_g.$$

Agora, usando a expressão do Teorema 1.4, onde sabemos do Teorema 4.1 que podemos tomar $\sigma_n = \dfrac{a}{\Lambda}$. Para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \|w\|_p^2 &\leq (1+\varepsilon)\frac{a}{\Lambda}\int_M|\nabla w|^2dV_g + C_\varepsilon\int_M w^2dV_g \\ &= (1+\varepsilon)\frac{(1+\delta)^2}{\Lambda(1+2\delta)}\int_M \lambda_s w^2\varphi_s^{s-2} - Sw^2 + C_\varepsilon w^2\, dV_g \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq && (1+\varepsilon)\frac{(1+\delta)^2}{\Lambda(1+2\delta)}\int_M \lambda_s w^2 \varphi_s^{s-2} dV_g + C'_\varepsilon \|w\|_2^2 \\
&\overset{\text{(Ineq. Hölder)}}{\leq} && (1+\varepsilon)\frac{\lambda_s(1+\delta)^2}{\Lambda(1+2\delta)} \|w^2\|_{p/2}\|\varphi_s^{s-2}\|_{n/2} + C'_\varepsilon \|w\|_2^2 \\
&= && (1+\varepsilon)\frac{\lambda_s(1+\delta)^2}{\Lambda(1+2\delta)} \|w\|_p^2\|\varphi_s\|_{(s-2)n/2}^{s-2} + C'_\varepsilon \|w\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Dado $s < p = 2n/(n-2)$, temos que $(s-2)n/2 < s$, daí $\|\varphi_2\|_{(s-2)n/2} \leq \|\varphi_s\|_s = 1$. Se $0 \leq \lambda(M) < \Lambda$, sabemos do Lema 4.1 que λ_s é não-crescente e contínua pela esquerda, daí $\lambda_s \geq \lambda(M), \forall s$, e existe $s_0 < s$ tal que $\lambda(M) \leq \lambda_{s_0} < \Lambda$, segue que para todo $s \geq s_0$,

$$\frac{\lambda_s}{\Lambda} \leq \frac{\lambda_{s_0}}{\Lambda} < 1.$$

Por outro lado, se $\lambda(M) < 0 < \Lambda$, vimos no Lema 4.1 que isso implica que $\lambda_s < 0, \forall s$, daí vale $\lambda_s/\Lambda < 1, \forall s$.

Assim, para todo $s \geq s_0$ podemos escolher ε, δ suficientemente pequenos tais que

$$(1+\varepsilon)\frac{\lambda_s(1+\delta)^2}{\Lambda(1+2\delta)} \leq (1+\varepsilon)\frac{\lambda_{s_0}(1+\delta)^2}{\Lambda(1+2\delta)} < 1,$$

visto que $(1+\varepsilon)\dfrac{(1+\delta)^2}{(1+2\delta)} \longrightarrow 1$, quando $\varepsilon, \delta \longrightarrow 0$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\|w\|_p^2 \left(1 - (1+\varepsilon)\frac{\lambda_s(1+\delta)^2}{\Lambda(1+2\delta)}\right) &\leq C'_\varepsilon \|w\|_2^2 \\
\therefore \|w\|_p^2 &\leq C''_\varepsilon \|w\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Por fim, notemos que

$$\|w\|_2 = \left(\int_M \varphi_s^{(1+\delta)s} dV_g\right)^{1/2} = \|\varphi_s\|_{2(1+\delta)}^{1+\delta} \leq \|\varphi_s\|_s^{1+\delta} = 1.$$

Conclusão, $\|w\|_p = \|\varphi_s\|_{p(1+\delta)}^{1+\delta}$ é limitado e independe de s. Assim, tome $r = p(1+\delta)$.

□

Vamos agora verificar que o problema de Yamabe tem solução se $\lambda(M) < \lambda(S^n)$.

Teorema 4.3. Seja $\{\varphi_s\}$ a coleção de funções dada pelo Teorema 3.1 e assuma que $\lambda(M) < \lambda(S^n)$. Considerando a sequência com $s \longrightarrow p$, existe uma subsequência que converge uniformemente para uma função positiva $\varphi \in C^\infty(M)$, satisfazendo

$$\square\varphi = \lambda(M)\varphi^{p-1}, \quad Q_g(\varphi) = \lambda(M).$$

E nesse caso, M tem curvatura escalar constante $\lambda(M)$ na métrica $\widetilde{g} = \varphi^{p-2} g$.

Demonstração. No teorema anterior vimos que $\|\varphi_s\|_r \leq C$, onde $r = p(1+\delta) > p > s > (s-2)n/2$. Sabemos de (3.9) que λ_s é limitado inferiormente por uma constante. Também, visto que λ_s é o ínfimo de Q^s, temos

$$\lambda_s \leq Q^s(1) = \int_M S\, dV_g, \forall s.$$

Assim, $|\lambda_s|$ é limitado por uma constante e podemos usar o Lema de Regularidade (Lema 3.1 (iii)). Para s próximo a p, $\{\varphi_s\}$ é uniformemente limitada em $L^r(M)$ daí, por esse lema $\{\varphi_s\}$ é uniformemente limitada em $C^{2,\alpha}(M)$. Segue pelo Teorema 1.3 (d) que existe uma subsequência (que ainda denotamos por $\{\varphi_s\}$) que converge na norma C^2 para uma função $\varphi \in C^2(M)$. Daí $\left(a\Delta\varphi_s + S\varphi_s - \lambda_s\varphi_s^{s-1}\right) \longrightarrow \left(a\Delta\varphi + S\varphi - \lambda\varphi^{p-1}\right)$ na norma uniforme, onde definimos $\lambda = \lim\limits_{s\longrightarrow p} \lambda_s$, pois o limite $\lim\limits_{s\longrightarrow p} \lambda_s$ existe, dado que $\{\lambda_s\}$ é uma sequência monótona (Lema 4.1) e limitada de números reais. Como $a\Delta\varphi_s + S\varphi_s - \lambda_s\varphi_s^{s-1} = 0$, obtemos

$$a\Delta\varphi + S\varphi = \lambda\varphi^{p-1}.$$

Também temos do Teorema de Yamabe que $\|\varphi_s\|_s = 1$ e $Q^s(\varphi_s) = \lambda_s$, sendo $\|\ \|_s$ uma função contínua em s, obtemos $\|\varphi\|_p = 1$ e $Q(\varphi) = \lambda$.

Agora, se $\lambda(M) \geq 0$, do Lema 4.1 sabemos que $\lim\limits_{s\longrightarrow p} \lambda_s = \lambda_p$, daí $\lambda = \lambda(M)$. E se $\lambda(M) < 0$, do mesmo lema temos que λ_s é não-decrescente, o que implica $\lambda = \lim\limits_{s\longrightarrow p} \lambda_s \leq \lambda_p$; mas sendo $\lambda(M)$ o ínfimo de Q_g, devemos ter também nesse caso $\lambda = \lambda(M)$.

Aplicando o Lema de Regularidade (Lema 3.1 (ii)), obtemos que $\varphi \in C^\infty$ e estritamente positiva.

Por fim, de (3.4) da Observação 3.1, temos que $\widetilde{S}$ é constante e igual a $\lambda(M)$.

$\square$

5 Solução na esfera S^n

Nesse capítulo vamos descrever a solução do problema de Yamabe para $(S^n, \overline{g})$, que será nosso caso modelo.

A métrica $\overline{g}$ induzida da métrica Euclidiana sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ é tal que sua curvatura seccional é constante e vale $K = +1$ sobre S^n (Ver BOOTHBY [5], p. 389-390). Daí, sua curvatura escalar será a constante $\overline{S} = n(n-1)$. Calculando o valor do funcional de Yamabe (3.6) para $\overline{g}$, obtemos

$$Q(\overline{g}) = \frac{\int_{S^n} \overline{S} dV_{\overline{g}}}{\left(\int_{S^n} dV_{\overline{g}}\right)^{2/p}} = n(n-1)\frac{\int_{S^n} dV_{\overline{g}}}{\left(\int_{S^n} dV_{\overline{g}}\right)^{2/p}} = n(n-1){\omega_n}^{1-2/p} = n(n-1){\omega_n}^{2/n}, \quad (5.1)$$

onde ω_n denota o volume da esfera S^n. Assim, $\lambda(S^n) \leq n(n-1){\omega_n}^{2/n}$.

Veremos como consequência dos dois teoremas seguintes que $\overline{g}$ é um minimizante para o funcional Q sobre $(S^n, \overline{g})$, isto é, $\Lambda = \lambda(S^n) = Q(\overline{g}) = n(n-1){\omega_n}^{2/n}$.

Teorema 5.1. (Obata). Se g é uma métrica sobre S^n que é conforme à métrica padrão $\overline{g}$ e tem curvatura escalar constante então, a menos de um fator de escala constante, g é obtida de $\overline{g}$ por um difeomorfismo conforme da esfera.

Demonstração. Primeiro, verificaremos que g é Einstein. Por hipótese, podemos escrever $\overline{g} = \varphi^{-2}g$, onde $\varphi \in C^\infty(S^n)$ é estritamente positiva. Assim, estamos tomando $e^{2f} = \varphi^{-2}$ no Lema 2.1. Como $f = -\ln\varphi$, temos com respeito à métrica g :

$$f_i f_j = \varphi^{-2}\varphi_i\varphi_j, \quad f_{ij} = \varphi^{-2}\varphi_j\varphi_i - \varphi^{-1}\varphi_{ij}, \quad |\nabla f|^2 = \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2},$$

$$\Delta f = -\frac{\Delta\varphi}{\varphi} - \varphi^{-2}|\nabla\varphi|^2.$$

Dado que a métrica canônica $\overline{g}$ é Einstein, vale $\overline{B}_{ij} = 0$. Substituindo os cálculos acima em (viii) do Lema 2.1: vspace-0.2cm

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{B}_{ij} \\
&= B_{ij} - (n-2)\left[f_{ij} - f_i f_j\right] - \frac{n-2}{n}\left[\Delta f + |\nabla f|^2\right] g_{ij} \\
&= B_{ij} - (n-2)\left[\varphi^{-2}\varphi_j\varphi_i - \varphi^{-1}\varphi_{ij} - \varphi^{-2}\varphi_i\varphi_j\right] - \frac{n-2}{n}\left[-\frac{\Delta\varphi}{\varphi} - \varphi^{-2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2}\right] g_{ij} \\
&= B_{ij} + (n-2)\varphi^{-1}\left(\varphi_{ij} + \frac{1}{n}\Delta\varphi g_{ij}\right).
\end{aligned}$$

Usando que o traço de B_{ij} é nulo e da Observação 1.5 sabemos que ${B^{ji}}_{,j} \equiv 0$, temos:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{S^n} \varphi |B|^2 dV_g &= \int\limits_{S^n} \varphi B_{ij} B^{ji} dV_g \\
&= -(n-2) \int\limits_{S^n} B^{ji} \left(\varphi_{ij} + \frac{1}{n} \Delta\varphi g_{ij} \right) dV_g \\
&= -(n-2) \int\limits_{S^n} B^{ji} \varphi_{ij} + \frac{1}{n} \Delta\varphi g_{ij} B^{ji} dV_g \\
&= -(n-2) \int\limits_{S^n} B^{ji} \varphi_{ij} + \frac{1}{n} \Delta\varphi B_i^i \, dV_g \\
&= -(n-2) \int\limits_{S^n} B^{ji} \varphi_{ij} \, dV_g \\
&\overset{\text{(Int. Partes)}}{=} (n-2) \int\limits_{S^n} B^{ji}{}_{,j} \varphi_i \, dV_g = 0.
\end{aligned}
$$

Segue que $B \equiv 0$, implicando que g é Einstein.

Dado que g é conforme à métrica canônica $\overline{g}$ sobre a esfera, temos que $W \equiv 0$, pois $\overline{W} \equiv 0$ (Lema 4.2) e aplicando (vx) do Lema 2.1. Segue da Observação 1.6 que (S^n, g) tem curvatura constante, dada por

$$
K = \frac{S}{n(n-1)}.
$$

Notemos que K é positivo, pois de (vii) do Lema 2.1,

$$
\begin{aligned}
\overline{S} &= e^{-2f} \left[S + 2(n-1)\Delta f - (n-1)(n-2)|\nabla f|^2 \right] \\
&= \varphi^2 \left[S + 2(n-1) \left(-\frac{\Delta\varphi}{\varphi} - \varphi^{-2} |\nabla\varphi|^2 \right) - (n-1)(n-2) \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2} \right] \\
\therefore \varphi^2 S &= \overline{S} + 2(n-1) \left(\varphi\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2 \right) + (n-1)(n-2)|\nabla\varphi|^2, \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

integrando essa expressão, obtemos $\int_{S^n} \varphi^2 S dV_g > 0$, implicando que a constante S é positiva.

Assim, sendo K uma constante positiva, o Teorema 8.2 afirma que (S^n, g) é isométrica a $(S^n_R, \overline{g})$, onde $K = 1/R^2$. Reescalando g tal que $K = 1$, obtemos que existem $\gamma \in \mathbb{R}_+$ e $\phi : (S^n, \gamma g) \longrightarrow (S^n_R, \overline{g})$ isometria, isto é, $\gamma g = \phi^* \overline{g}$. Essa isometria é o difeomorfismo desejado. □

Proposição 5.1. Existe uma função ψ positiva C^∞ sobre S^n satisfazendo $Q_{\overline{g}}(\psi) = \lambda(S^n)$.

Demonstração. Para $2 \leq s < p$, seja φ_s a solução sobre S^n para o problema subcrítico (3.13), dada pelo Teorema 3.1. Sabemos da demonstração do Teorema 4.3 que se $\{\varphi_s\}$ é uniformemente limitado, existe uma subsequência que converge para um ponto crítico e a demonstração terminaria aqui. Assim, vamos supor o oposto, isto é, $\sup \varphi_s \longrightarrow \infty$.

Também, compondo com uma rotação, podemos assumir que o supremo de φ_s é atingido no polo sul para cada s. De fato, isso é devido ao fato de que rotações $\mathcal{R}$ são isometrias, implicando pela Proposição 3.4 que λ_s é invariante e juntamente com as Proposições 3.2 e 3.1, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\Box}(\varphi_s \circ \mathcal{R}) &= \overline{\Box}(\mathcal{R}^*\varphi_s) = \mathcal{R}^*\left(\widetilde{\Box}\varphi_s\right) = \mathcal{R}^*\left(1^{1-p}\overline{\Box}(1\cdot\varphi_s)\right) = \mathcal{R}^*\left(\lambda_s\varphi_s^{s-1}\right) \\ &= (\lambda_s \circ \mathcal{R})\,(\varphi_s\circ\mathcal{R})^{s-1} = \lambda_s\,(\varphi_s\circ\mathcal{R})^{s-1}. \end{aligned}$$

Segue que $(\varphi_s \circ \mathcal{R})$ satisfaz a mesma equação subcrítica que φ_s satisfaz.

Agora, seja $\kappa_\alpha = \sigma^{-1}\circ\delta_\alpha\circ\sigma : S^n\setminus\{N\} \longrightarrow S^n\setminus\{N\}$ o difeomorfismo conforme, como descrito na Observação 4.1. Denotando $g_\alpha = \kappa_\alpha^*\overline{g}$, temos que

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha^*\overline{g} &= \left(\sigma^*\circ\left(\sigma^{-1}\circ\delta_\alpha\right)^*\right)(\overline{g}) \\ &\overset{(4.8)}{=} \sigma^*\left(4\left(\frac{\alpha}{|x|^2+\alpha^2}\right)^2 ds^2\right) \\ &= \sigma^*\left(\frac{\alpha^2(|x|^2+1)^2}{(|x|^2+\alpha^2)^2}\,4\left(\frac{1}{|x|^2+1}\right)^2 ds^2\right) \\ &= \sigma^*\left(\frac{\alpha^2(|x|^2+1)^2}{(|x|^2+\alpha^2)^2}\right)\sigma^*\left(4\left(\frac{1}{|x|^2+1}\right)^2 ds^2\right) \\ &\overset{(4.6)}{=} \sigma^*\left(\frac{\alpha^2(|x|^2+1)^2}{(|x|^2+\alpha^2)^2}\right)\overline{g} \\ &= \left(\frac{\alpha^2(|\sigma(\zeta,\xi)|^2+1)^2}{(|\sigma(\zeta,\xi)|^2+\alpha^2)^2}\right)\overline{g} \\ &\overset{(4.3)}{=} \left(\frac{\alpha^2\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}+1\right)^2}{\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}+\alpha^2\right)^2}\right)\overline{g} \\ &= \left(\frac{2\alpha}{(1+\xi)+\alpha^2(1-\xi)}\right)^2\overline{g} = t_\alpha^{p-2}\overline{g}. \end{aligned}$$

Onde $t_\alpha(\zeta,\xi) = \left(\dfrac{2\alpha}{(1+\xi)+\alpha^2(1-\xi)}\right)^{(n-2)/2}$, visto que $\dfrac{(p-2)(n-2)}{2} = 2$. Assim, no polo sul, temos $t_\alpha(0,-1) = \alpha^{(2-n)/2}$ e t_α é uma função suave extritamente positiva.

Para cada s, defina $\psi_s = t_\alpha\kappa_\alpha^*\varphi_s$, com $\alpha = \alpha_s$ escolhido tal que $\psi_s = 1$ no polo sul. Com efeito, no polo sul temos $\psi_s(0,-1) = (t_\alpha\kappa_\alpha^*\varphi_s)(0,-1) = \alpha^{(2-n)/2}(\sup\varphi_s)$, e basta escolher $\alpha_s = (\sup\varphi_s)^{2/(n-2)}$. Assim, $\alpha_s \longrightarrow \infty$ quando $s \longrightarrow p$ e $\psi_s \leq t_\alpha\alpha^{(n-2)/2}$. Também, sobre qualquer conjunto com distância positiva de N temos $t_\alpha \longrightarrow 0$, quando $s \longrightarrow p$.

Denotando o Laplaciano conforme com respeito à métrica g_α por $\Box_\alpha$; como $g_\alpha = \kappa_\alpha^*\overline{g}$ e $g_\alpha = t^{p-2}\overline{g}$ podemos aplicar as Proposições 3.1 e 3.2 para $\kappa_\alpha : S^n\setminus\{N\} \longrightarrow S^n\setminus\{N\}$, visto que nessas proposições não usamos compacidade ($S^n \setminus \{N\}$ não é compacta). Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{\Box}\psi_s &= \overline{\Box}(t_\alpha \kappa_\alpha^* \varphi_s) = t_\alpha^{p-1} \Box_\alpha (\kappa_\alpha^* \varphi_s) = t_\alpha^{p-1} \kappa_\alpha^* (\overline{\Box}\varphi_s) = t_\alpha^{p-1} \kappa_\alpha^* (\lambda_s \varphi_s^{s-1}) \\
&= \lambda_s t_\alpha^{p-1} \left(\kappa_\alpha^* \varphi_s\right)^{s-1} = \lambda_s t_\alpha^{p-1} \left(t_\alpha^{-1} \psi_s\right)^{s-1} = \lambda_s t_\alpha^{p-s} \psi_s^{s-1}. \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

Sendo $\psi_s \in C^\infty$ sobre $S^n \setminus \{N\}$, temos que para cada compacto $K \subset \{S^n \setminus \{N\}\}$, vale $\psi_s \in L^r(K)$ para todo r, daí pelo Teorema 1.3 (c) temos $\psi_s \in C^\gamma(K)$, para todo γ. Segue que $\lambda_s t_\alpha^{p-s} \psi_s^{s-1} \in C^\beta(K)$ para algum β, implicando pelo Teorema 1.5 que $\psi_s \in C^{2,\beta}(K)$. Continuando argumentando como na demonstração do Lema 3.1 (iii), obtemos para s próximo a p (suficiente para $t_\alpha^{p-s} \le 1$) que $\|\psi_s\|_{C^{2,\beta}} \le C\|\psi_s\|_r$.

Agora, como $t_\alpha \alpha^{(n-2)/2} = \left(\dfrac{2}{(1+\xi)+\alpha^2(1-\xi)}\right)^{(n-2)/2}$ e $\alpha \longrightarrow \infty$, temos que sobre K existe uma constante A tal que $t_\alpha \alpha^{(n-2)/2} \le A$. Daí, sobre K obtemos

$$\psi_s \le t_\alpha \alpha^{(n-2)/2} \le A,$$

ou seja, $\{\psi_s\}$ é limitado e independe de s sobre K, em particular é limitado em L^r para cada r. Segue da desigualdade $\|\psi_s\|_{C^{2,\beta}} \le C\|\psi_s\|_r$ que $\{\psi_s\}$ é uniformemente limitado em $C^{2,\beta}(K)$.

Seja $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ uma sequência de compactos tais que $\bigcup\limits_i K_i = S^n \setminus \{N\}$. Sabemos do Teorema 1.3 (d) que para cada K_i existe uma subsequência de $\{\psi_s\}$ que converge em $C^2(K_i)$. Tomando uma subsequência diagonal, a função limite ψ é C^2 em $S^n \setminus \{N\}$.

Como, a menos de tomar uma subsequência, $\psi_s \longrightarrow \psi$ na norma $C^2(S^n \setminus \{N\})$, temos $\overline{\Box}\psi_s \longrightarrow \overline{\Box}\psi$ na norma uniforme. Por (5.3), $\lambda_s t_\alpha^{p-s} \psi_s^{s-1}$ deve convergir na norma uniforme; sendo $\lambda(S^n) = \Lambda > 0$, temos pelo Lema 4.1 que $\lambda_s \longrightarrow \Lambda$ e dado que $t_\alpha^{p-s} \le 1$ para s próximo a p, devemos ter $(\lambda_s t_\alpha^{p-s} \psi_s^{s-1}) \longrightarrow (f\psi^{p-1})$, para alguma função contínua f com $0 \le f \le \Lambda$. Ou seja, $\overline{\Box}\psi = f\psi^{p-1}$ sobre $S^n \setminus \{N\}$.

Como $\kappa_\alpha : (S^n \setminus \{N\}, g_\alpha) \longrightarrow (S^n \setminus \{N\}, \overline{g})$ é isometria, temos para s próximo a p,

$$\begin{aligned}
\|\psi_s\|_p^p &= \int_{S^n} (\kappa_\alpha^* \varphi_s)^p \, t_\alpha^p \, dV_{\overline{g}} = \int_{S^n} (\kappa_\alpha^* \varphi_s)^p \, dV_{g_\alpha} = \int_{S^n} \kappa_\alpha^* (\varphi_s^p) \, dV_{g_\alpha} \\
&\overset{\text{(Obs. 3.2)}}{=} \int_{S^n} \varphi_s^p \, dV_{\overline{g}} \overset{\text{(Hölder)}}{\le} \|\varphi_s^p\|_{s/p} \|1\|_{s/(s-p)} = \left(\int_{S^n} \varphi_s^s dV_{\overline{g}}\right)^{p/s} \left(\int_{S^n} dV_{\overline{g}}\right)^{(s-p)/s} \\
&= Vol(S^n)^{1-p/s},
\end{aligned}$$

implicando $\|\psi\|_p \le 1$. Segue que

$$\begin{aligned}
Q_{\overline{g}}(\psi) = Q(\widetilde{g}) = \frac{\int_{S^n} \widetilde{S} dV_{\widetilde{g}}}{\left(\int_{S^n} dV_{\widetilde{g}}\right)^{2/p}} = \frac{\int_{S^n} f dV_{\widetilde{g}}}{\left(\int_{S^n} dV_{\widetilde{g}}\right)^{2/p}} \le \Lambda \frac{\int_{S^n} dV_{\widetilde{g}}}{\left(\int_{S^n} dV_{\widetilde{g}}\right)^{2/p}} &= \Lambda \left(\int_{S^n} dV_{\widetilde{g}}\right)^{1-2/p} \\
&= \Lambda \|\psi\|_p^{p-2} \le \Lambda.
\end{aligned}$$

Sendo Λ o ínfimo de $Q_{\overline{g}}$, temos $Q_{\overline{g}}(\psi) = \Lambda$.

Dado que $t_\alpha^{-1}\psi_s = \kappa_\alpha^* \varphi_s$, obtemos da Observação 3.2 que

$$\int_{S^n} \varphi_s^s dV_{\overline{g}} = \int_{S^n} \kappa_\alpha^* \left(\varphi_s^s\right) dV_{g_\alpha} = \int_{S^n} \left(\kappa_\alpha^* \varphi_s\right)^s dV_{g_\alpha} = \int_{S^n} \left(t_\alpha^{-1}\psi_s\right)^s t_\alpha^p dV_{\overline{g}} = \int_{S^n} t_\alpha^{p-s}\psi_s^s dV_{\overline{g}}.$$

Da igualdade (5.3), temos $\psi_s \overline{\Box} \psi_s = \lambda_s t_\alpha^{p-s}\psi_s^s$ e sabemos que $\varphi_s \overline{\Box} \varphi_s = \lambda_s \varphi_s^s$, juntando com a igualdade acima, obtemos

$$\int_{S^n} \psi_s \overline{\Box} \psi_s dV_{\overline{g}} = \int_{S^n} \varphi_s \overline{\Box} \varphi_s dV_{\overline{g}},$$

daí,

$$\begin{aligned} \|\psi_s\|_{2,1}^2 &= \int_{S^n} |\overline{\nabla}\psi_s|^2 + \psi_s^2 dV_{\overline{g}} = \int_{S^n} \psi_s \overline{\Delta}\psi_s + \psi_s^2 dV_{\overline{g}} \\ &\leq C \int_{S^n} a\psi_s \overline{\Delta}\psi_s + \overline{S}\psi_s^2 dV_{\overline{g}} = C \int_{S^n} \psi_s \overline{\Box}\psi_s dV_{\overline{g}} \\ &= C \int_{S^n} \varphi_s \overline{\Box}\varphi_s dV_{\overline{g}} \leq C' \|\varphi_s\|_{2,1}^2 \\ &\overset{(3.17)}{\leq} C''(\lambda_s + 1) \leq C''', \end{aligned} \tag{5.4}$$

implicando que $\{\psi_s\}$ é limitada em $L_1^2(S^n)$ e existe uma subsequência que converge fracamente para uma função em $L_1^2(S^n)$ que, obviamente, coincide com ψ. Assim, como $\psi \in L_1^2(S^n)$ e $Q_{\overline{g}}(\psi) = \Lambda$, temos da Proposição 3.5 que vale a igualdade $\overline{\Box}\psi = \Lambda\psi^{p-1}$ no sentido fraco sobre toda a esfera S^n. Com isso, estamos nas hipóteses do Lema de Regularidade (Lema 3.1) e com isso para ver que $\psi \in C^\infty(M), \psi > 0$, é suficiente mostrar que $\psi \in L^r(S^n)$ para algum $r > n(p-2)/2 = p$.

Seja $4n/(n+2) < q < n$, daí $2 < q$ e consideremos o operador linear limitado $\overline{\Box} : L_2^q \longrightarrow L^q$. Dado que $L_2^q, L^q \subset L^2$ e como $\overline{\Box}u = a\overline{\Delta}u + \overline{S}u$ com $\overline{S} = constante > 0$, temos pelo Teorema de Hodge (ver ROSENBERG [22], p. 32) que $\overline{\Box}$ é invertível. Sendo $\overline{\Box}$ um operador linear limitado, o operador inverso $\overline{\Box}^{-1}$ é linear limitado. Seja a perturbação

$$\overline{\Box}_\eta = \overline{\Box} - \eta\Lambda\psi^{p-2},$$

para $\eta \in C^\infty(S^n)$ com suporte em uma vizinhança pequena $B_{2\varepsilon}$ de N, com $0 \leq \eta \leq 1$ e $\eta \equiv 1$ sobre B_ε. Sendo L_2^q e L^q espaços de Banach e $\overline{\Box}^{-1}$ um operador limitado, temos que $\overline{\Box}_\eta$ também será invertível se a norma do operador do termo da perturbação $\eta\Lambda\psi^{p-2}$ satisfaz $\|\eta\Lambda\psi^{p-2}\| \cdot \left\|\overline{\Box}^{-1}\right\| < 1$ (ver KATO [15], p. 206). Seja o conjunto $r = nq/(n-q)$. Assim, $r > 4n^2/(n^2-2n) > 2n/(n-2) = p$ e

$$\frac{1}{r} > \frac{n-2q}{qn} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n},$$

segue pelo Teorema 1.3 (a) que existe $C > 0$ tal que $\|u\|_r \leq C\|u\|_{q,2}, \forall u \in L^q_2$. Também,

$$
\begin{aligned}
\|\eta\Lambda\psi^{p-2}u\|_q &= \Lambda\left(\int_{S^n}\left|\eta\psi^{p-2}u\right|^q dV_{\overline{g}}\right)^{1/q} \\
&\leq \Lambda\left(\left\|\eta^q\psi^{(p-2)q}\right\|_{r/(r-q)}\|u^q\|_{r/q}\right)^{1/q} \quad \left(\begin{array}{l}\text{usando a desigualda-}\\ \text{de de Hölder, pois}\\ (r-q)/r + q/r = 1\end{array}\right) \\
&= \Lambda\left(\left(\int_{S^n}\left|\eta^{qr/(r-q)}\psi^{(p-2)qr/(r-q)}\right| dV_{\overline{g}}\right)^{(r-q)/r}\|u\|_r^q\right)^{1/q} \\
&= \Lambda\left(\int_{S^n}\left|\eta^{n/2}\psi^{(p-2)n/2}\right| dV_{\overline{g}}\right)^{2/n}\|u\|_r \\
&= \Lambda\left(\int_{S^n}\left|\eta^{p/(p-2)}\psi^{p}\right| dV_{\overline{g}}\right)^{(p-2)/p}\|u\|_r \\
&= \Lambda\left\|\eta^{1/(p-2)}\psi\right\|_p^{p-2}\|u\|_r \leq C\Lambda\left\|\eta^{1/(p-2)}\psi\right\|_p^{p-2}\|u\|_{q,2}.
\end{aligned}
$$

Como $0 \leq \eta \leq 1$, tomando ε pequeno podemos considerar a norma $\|\Lambda\eta\psi^{p-2}\|$ tão pequena quanto quisermos, segue que podemos tomar $\overline{\Box}_\eta$ invertível.

Agora, $\overline{\Box}_\eta\psi = (1-\eta)\Lambda\psi^{p-1} \in L^q(S^n)$, pois $\psi \in C^2(S^n \setminus \{N\})$ e $\eta \equiv 1$ sobre $B_\varepsilon \ni N$. Sendo $\overline{\Box}_\eta$ invertível, existe $\theta \in L^q_2(S^n) \subset L^2_1(S^n)$ tal que $\overline{\Box}_\eta\theta = (1-\eta)\Lambda\psi^{p-1}$. Usando a desigualdade (5.4) e o fato de que existe q' conjugado de q, pois $q > 1$, temos

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{2,1} \leq C_0\int_{S^n} u\overline{\Box}u\, dV_{\overline{g}} &= C_0\int_{S^n} u\overline{\Box}_\eta u + \eta\Lambda\psi^{p-2}u\, dV_{\overline{g}} \\
&\leq C_0\int_{S^n} u\overline{\Box}_\eta u\, dV_{\overline{g}} + C_0\|\eta\Lambda\psi^{p-2}u\|_q\|1\|_{q'} \\
&= C_0\int_{S^n} u\overline{\Box}_\eta u\, dV_{\overline{g}} + C_0'\|\eta\Lambda\psi^{p-2}u\|_q.
\end{aligned}
$$

Assim, se $\overline{\Box}_\eta u = \overline{\Box}_\eta v$ sobre $L^2_1(S^n)$, teremos da expressão acima

$$\|u-v\|^2_{2,1} \leq C_0'\|\eta\Lambda\psi^{p-2}(u-v)\|_q.$$

Vimos que $\|\eta\Lambda\psi^{p-2}(u-v)\|_q \longrightarrow 0$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, segue que $\|u-v\|^2_{2,1} = 0$, ou seja, $\overline{\Box}_\eta$ é injetivo sobre $L^2_1(S^n)$. Portanto $\psi = \theta \in L^q_2(S^n) \subset L^r(S^n)$. Por fim, sendo $r > 2n/(n-2) = p$, temos pelo Lema de Regularidade (Lema 3.1) que $\psi \in C^\infty(S^n)$ e sendo $\psi = 1$ no polo sul, temos pelo mesmo lema que ψ é estritamente positiva. $\Box$

Corolário 5.1.

(i) O funcional de Yamabe sobre $(S^n, \overline{g})$ é minimizado por múltiplos constantes e imagens por difeomorfismos conformes da métrica $\overline{g}$. Em particular $\Lambda = \lambda(S^n) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$.

(ii) Essas são as únicas métricas que são conformes à métrica $\overline{g}$ sobre S^n que têm curvatura escalar constante.

Demonstração. (i) Pelo teorema anterior existe $\psi \in C^\infty(S^n)$ tal que $Q_{\overline{g}}(\psi) = \lambda(S^n)$. Seja $\widetilde{g} = \psi^{p-2}\overline{g}$. Agora pelo Teorema de Obata (Teorema 5.1) existem $\gamma \in \mathbb{R}_+$ e ϕ isometria entre $(S^n, \gamma\widetilde{g})$ e $(S^n, \overline{g})$, daí sabemos da demonstração da Proposição 3.4 que $Q(\gamma\widetilde{g}) = Q(\overline{g})$. Portanto, $\lambda(S^n) = Q(\widetilde{g}) = Q(\gamma\widetilde{g}) = Q(\overline{g}) = n(n-1)\omega_n^{2/n}$. Assim, $\overline{g}$ é um minimizante e claro que múltiplos constantes e imagens por difeomorfismos conformes da métrica $\overline{g}$ minimizam Q, usando novamente a demonstração da Proposição 3.4.

(ii) Segue imediatamente do Teorema de Obata (Teorema 5.1). $\square$

6 A Solução Parcial de Aubin

Nesse capítulo veremos uma estratégia para resolver completamente o problema de Yamabe. De fato, no capítulo 4 vimos que o problema tem solução desde que $\lambda(M) < (S^n)$. Ora, veremos agora que $\lambda(M) \leq \lambda(S^n)$ para toda variedade Riemanniana compacta (conexa) de dimensão $n \geq 3$. Mais ainda, se M tem dimensão $n \geq 6$ e é uma variedade não-localmente conformente plana, então $\lambda(M) < \lambda(S^n)$, implicando que o problema tem solução. Isso sugere que poderíamos tentar verificar se $\lambda(M) < \lambda(S^n)$ é válido para os demais casos para obter a solução completa, isso é justamente o que faremos no próximo capítulo.

6.1 O Invariante de Yamabe é Limitado Superiormente

Lema 6.1. Seja $k \in \mathbb{Z}$ com $k > -n$ e seja $\varepsilon \in \mathbb{R}$ com $0 < \varepsilon < 1$ qualquer fixado. Então para $\alpha \longrightarrow 0$,

$$I(\alpha) = \int_0^\varepsilon r^k u_\alpha^2 r^{n-1} dr$$

é limitada por baixo e por cima por certos múltiplos positivos de α^{k+2} se $n > k+4$, $\alpha^{k+2}\log(1/\alpha)$ se $n = k+4$, e α^{n-2} se $n < k+4$.

Demonstração. Fazendo $\sigma = r/\alpha$, temos $\alpha d\sigma = dr$ e $(\sigma^2+1) = (\alpha^2+r^2)/\alpha^2 = u_\alpha^{2/(2-n)}\alpha^{-1}$. Daí,

$$I(\alpha) = \int_0^\varepsilon (\sigma\alpha)^k(\sigma^2+1)^{2-n}\alpha^{2-n}(\sigma\alpha)^{n-1}dr = \alpha^{k+2}\int_0^{\varepsilon/\alpha}\sigma^{k+n-1}(\sigma^2+1)^{2-n}d\sigma.$$

Como $\alpha \longrightarrow 0$, podemos assumir que $\varepsilon/\alpha > 1$. Notemos que para $\sigma \geq 1$, vale $\sigma^2 \leq \sigma^2 + 1 \leq 2\sigma^2$. Dado que $k+n > 0$, temos que $k+n-1 \geq 0$ e $\sigma^{k+n-1}(\sigma^2+1)^{2-n}$ é contínua e positiva em $[0,1]$, segue que

$$\int_0^1 \sigma^{k+n-1}(\sigma^2+1)^{2-n}d\sigma = C_1 > 0.$$

Com isso, $I(\alpha)$ é limitado abaixo e acima, respectivamente, por

$$\alpha^{k+2}\left(C_1 + \int_1^{\varepsilon/\alpha}\sigma^{k+3-n}d\sigma\right) \quad \text{e} \quad \alpha^{k+2}\left(C_1 + 2^{2-n}\int_1^{\varepsilon/\alpha}\sigma^{k+3-n}d\sigma\right). \tag{6.1}$$

Agora, se

(i) $n > k+4$, temos $k+3-n < -1$ e como $\alpha \longrightarrow 0$,

$$\int_1^{\varepsilon/\alpha} \sigma^{k+3-n} d\sigma \quad = \quad \frac{1}{k+4-n}\left[\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{n-k-4} - 1\right] \leq \frac{1}{n-k-4} = C_2$$

e

$$\int_1^{\varepsilon/\alpha} \sigma^{k+3-n} d\sigma > 0.$$

Segue de (6.1) que $C_1\alpha^{k+2} \leq I(\alpha) \leq (C_1 + 2^{2-n}C_2)\alpha^{k+2} = C_3\alpha^{k+2}$.

(ii) $n = k+4$, temos $k+3-n = -1$, daí

$$\left(C_1 + \int_1^{\varepsilon/\alpha} \sigma^{k+3-n} d\sigma\right) > \log(\varepsilon/\alpha) > C_4 \log(1/\alpha)$$

e

$$\left(C_1 + 2^{2-n}\int_1^{\varepsilon/\alpha} \sigma^{k+3-n} d\sigma\right) \leq 2^{2-n} 2\log(1/\alpha),$$

para $\alpha \longrightarrow 0$. Assim, temos de (6.1) que

$$C_4\alpha^{k+2}\log(1/\alpha) \leq I(\alpha) \leq C_5\alpha^{k+2}\log(1/\alpha).$$

(iii)$n < k+4$, temos $k+3-n \geq 0$, daí para $\alpha \longrightarrow 0$,

$$\begin{aligned}\left(C_1 + 2^{2-n}\int_1^{\varepsilon/\alpha} \sigma^{k+3-n} d\sigma\right) &\leq C_1 + 2^{2-n}\left.\frac{\sigma^{k+4-n}}{k+4-n}\right|_0^{\varepsilon/\alpha} \\ &= C_1 + C_6\alpha^{n-k-4} \leq C_7\alpha^{n-k-4}\end{aligned}$$

e

$$\left(C_1 + \int_1^{\varepsilon/\alpha} \sigma^{k+3-n} d\sigma\right) \quad \geq \quad \int_{\varepsilon/(2\alpha)}^{\varepsilon/\alpha} \sigma^{k+3-n} d\sigma = C_8\alpha^{n-k-4}.$$

Portanto, de (6.1) tem-se que

$$C_8\alpha^{n-2} \leq I(\alpha) \leq C_7\alpha^{n-2}.$$

□

Proposição 6.1. (Aubin) Se M é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$, então $\lambda(M) \leq \lambda(S^n)$.

Demonstração. Para qualquer $\varepsilon > 0$ fixado, seja B_ε a bola com centro na origem e raio ε em $\mathbb{R}^n$ e tomemos uma função de corte radial $0 \leq \eta \leq 1$ com suporte em $B_{2\varepsilon}$ e $\eta \equiv 1$ sobre B_ε. Seja $\varphi = \eta u_\alpha$, temos que φ é uma função suave e tem suporte compacto. Temos,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} a|\nabla\varphi|^2dx &= \int_{B_{2\varepsilon}} a|\eta\nabla u_\alpha + u_\alpha\nabla\eta|^2dx\\ &= \int_{B_{2\varepsilon}} a\eta^2|\partial_r u_\alpha|^2dx + \int_{A_\varepsilon}\left(2a\eta u_\alpha\langle\nabla\eta,\partial_r u_\alpha\rangle + au_\alpha^2|\nabla\eta|^2\right)dx\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} a|\partial_r u_\alpha|^2dx + C_{1,\varepsilon}\int_{A_\varepsilon}\left(u_\alpha|\partial_r u_\alpha| + u_\alpha^2\right)dx, \qquad (6.2)\end{aligned}$$

onde A_ε denota o anel $B_{2\varepsilon}\setminus B_\varepsilon$ e $C_{1,\varepsilon}$ é uma constante que depende de ε. Notemos que

$$\begin{aligned} u_\alpha(x) = \left(\frac{r^2+\alpha^2}{\alpha}\right)^{(2-n)/2} \quad &\Longrightarrow \quad |u_\alpha| \leq \alpha^{(n-2)/2}r^{2-n}, \qquad (6.3)\\ |\partial_r u_\alpha| = (2-n)r\alpha^{-1}\left(\frac{r^2+\alpha^2}{\alpha}\right)^{-n/2} \quad &\Longrightarrow \quad |\partial_r u_\alpha| \leq (n-2)\alpha^{(n-2)/2}r^{1-n}.\end{aligned}$$

Segue das expressões acima que o termo $C_{1,\varepsilon}\int_{A_\varepsilon}\left(u_\alpha|\partial_r u_\alpha| + u_\alpha^2\right)dx$ é da ordem de α^{n-2} quando $\alpha \longrightarrow 0$, isto é,

$$C_{1,\varepsilon}\int_{A_\varepsilon}\left(u_\alpha|\partial_r u_\alpha| + u_\alpha^2\right)dx \leq C_{2,\varepsilon}\alpha^{n-2}. \qquad (6.4)$$

Para o primeiro termo de (6.2), usando a Observação 4.2 que diz que $a\|\nabla u_\alpha\|_2^2 = \Lambda\|u_\alpha\|_p^2$ sobre $\mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} a|\partial_r u_\alpha|^2dx &= \Lambda\left(\int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha^p dx\right)^{2/p}\\ &= \Lambda\left(\int_{B_\varepsilon} u_\alpha^p dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon} u_\alpha^p dx\right)^{2/p}\\ &\leq \Lambda\left(\int_{B_{2\varepsilon}} \varphi^p dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon} \alpha^n r^{-2n}dx\right)^{2/p}\\ &= \Lambda\left(\int_{B_{2\varepsilon}} \varphi^p dx +\right)^{2/p} + O(\alpha^n), \qquad (6.5)\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon} r^{-2n}dx = \int_\varepsilon^\infty\int_{\partial B_s} s^{-2n}s^{n-1}d\omega ds &= \int_\varepsilon^\infty s^{-n-1}s^{n-1}\omega_{n-1}ds\\ &= -\omega_{n-1}s^{-1}\Big|_\varepsilon^\infty < \infty,\end{aligned}$$

para cada $\varepsilon > 0$ fixado.Assim, $\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon}\alpha^n r^{-2n}dx = O(\alpha^n)$ e usando a expansão de Taylor da função $x \longmapsto x^{2/p}$ em torno de $\int_{B_{2\varepsilon}}\varphi^p dx$, obtemos

$$\left(\int_{B_{2\varepsilon}} \varphi^p dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon} \alpha^n r^{-2n}dx\right)^{2/p} = \left(\int_{B_{2\varepsilon}} \varphi^p dx +\right)^{2/p} + O(\alpha^n).$$

Substituindo (6.4) e (6.5) em (6.2), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} a|\nabla\varphi|^2 dx \;\; \leq \;\; \Lambda\left(\int_{B_{2\varepsilon}} \varphi^p dx\right)^{2/p} + C_{3,\varepsilon}\alpha^{n-2}. \tag{6.6}$$

Agora, sobre uma variedade compacta M, seja $\varphi = \eta u_\alpha$ em coordenadas normais em uma vizinhaça de $P \in M$, estendida por zero para uma função suave sobre M. Sendo u_α uma função radial e em coordenadas normais sabemos que $\nabla r = \dfrac{\partial}{\partial_r}$, assim

$$\frac{\partial}{\partial_r}(u_\alpha) = \left\langle \nabla u_\alpha, \frac{\partial}{\partial_r}\right\rangle = \langle \nabla u_\alpha, \nabla r\rangle = \nabla u_\alpha(r) \quad \Longrightarrow \quad |\nabla u_\alpha|^2 = |\partial_r u_\alpha|^2,$$

como antes. As únicas correções nas estimativas acima são introduzidas pela curvatura escalar de M e a diferença entre dV_g e dx. Pelo Corolário 8.2 sabemos que em coordenadas normais vale $dV_g = (1 + O(r^2))dx$. Assim, da estimativa (6.6) e da definição de φ obtemos

$$\begin{aligned} E(\varphi) &= \int_{B_{2\varepsilon}} \left(a|\nabla\varphi|^2 + S\varphi^2\right) dV_g \\ &\leq (1 + C_4\varepsilon^2)\left(\Lambda\|\varphi\|_p^2 + C_{3,\varepsilon}\alpha^{n-2} + C_5\int_0^{2\varepsilon}\int_{\partial B_r} u_\alpha^2 r^{n-1} d\omega dr\right) \\ &= (1 + C_4\varepsilon^2)\left(\Lambda\|\varphi\|_p^2 + C_{3,\varepsilon}\alpha^{n-2} + C_5\omega_{n-1}\int_0^{2\varepsilon} u_\alpha^2 r^{n-1} r^{n-1} dr\right) \end{aligned} \tag{6.7}$$

Pelo Lema anterior, sabemos que o último termo acima é limitado por um múltiplo constante de α^{n-2}. Sendo $n \geq 3$ e α pequeno, o último termo acima é limitado por um múltiplo constante de α. Tomando $C = \max\{C_4, C_5\}$, temos da expressão acima que

$$Q_g(\varphi) = \frac{E(\varphi)}{\|\varphi\|_p^2} \leq (1 + C\varepsilon^2)(\Lambda + C_{6,\varepsilon}\alpha) = \Lambda + C_{6,\varepsilon}\alpha + \Lambda C\varepsilon^2 + CC_{6,\varepsilon}\alpha\varepsilon^2.$$

Assim, escolhendo ε arbitrariamente pequeno e depois α arbitrariamente pequeno também, devemos ter necessariamente, $Q_g(\varphi) \leq \Lambda$. Portanto, $\lambda(M) \leq \Lambda$. $\square$

6.2 Coordenadas Normais Conformes e Uma Solução Parcial

Introduziremos a noção de coordenadas normais conformes, as quais serão bastante úteis para fazer uma demonstração simples da solução parcial devido a Aubin e mais ainda na solução completa do problema de Yamabe.

Teorema 6.1. (Coordenadas Normais Conformes) Sejam M uma variedade Riemanniana e $P \in M$. Existe uma métrica conforme $\widetilde{g}$ sobre M tal que em coordenadas normais em P

$$\det \widetilde{g}_{ij}(x) \equiv 1 \quad \text{em} \quad \Omega_P,$$

onde Ω_P é uma vizinhança pequena de P.

Demonstração. Ver CAO [6] ou GÜNTHER [13]. □

De agora em diante iremos supor que localmente as coordenadas normais na métrica são da forma do Teorema 6.1. Assim, subistituimos $\widetilde{g}$ por g.

Corolário 6.1. Em coordenadas normais conformes a curvatura escalar de g satisfaz $S = O(r^2)$ e $\Delta S = \frac{1}{6}|W|^2$ em P.

Demonstração. Pelo teorema acima $\det g_{ij}(x) \equiv 1$ em Ω_P, daí comparando com a expansão da métrica da Proposição 8.1, devemos ter necessariamente que os coeficientes são nulos em P, ou seja,

$$\begin{aligned} (a) \quad 0 &= R_{ij}, && (6.8)\\ (b) \quad 0 &= R_{ij,k} + R_{jk,l} + R_{kl,j} && (6.9)\\ (c) \quad 0 &= \text{Sym}\left(R_{ij,kl} + \frac{2}{9}R_{pijm}R_{pklm}\right). && (6.10) \end{aligned}$$

Sendo $g_{ij} = \delta_{ij}$ em P, temos por (6.8) que $R_{ijkl}(P) = W_{ijkl}(P)$. Também substituindo (6.8) na identidade de Ricci, temos

$$R_{ij,kl} - R_{ij,lk} = R^m_{ikl}R_{mj} + R^m_{jkl}R_{im} = 0. \tag{6.11}$$

Temos de (6.10) e (6.11) no ponto P

$$\begin{aligned} 0 \;=\;& 2\Big(R_{ij,kl} + R_{ji,kl} + R_{ik,jl} + R_{ki,jl} + R_{il,jk} + R_{li,jk} + R_{jk,il} + R_{kj,il} + R_{jl,ik}\\ &+R_{lj,ik} + R_{kl,ij} + R_{lk,ij}\Big) + \frac{4}{9}\Big(W_{pijm}W_{pklm} + W_{pijm}W_{plkm} + W_{pjim}W_{pklm}\\ &+W_{pjim}W_{plkm} + W_{pikm}W_{pjlm} + W_{pikm}W_{pljm} + W_{pkim}W_{pjlm} + W_{pkim}W_{pljm}\\ &+W_{pilm}W_{pjkm} + W_{pilm}W_{pkjm} + W_{plim}W_{pjkm} + W_{plim}W_{pkjm}\Big). \end{aligned}$$

Escolhendo um ponto nessa vizinhança tal que as coordenadas sejam $(x^1, \cdots, x^n) = (c, \cdots, c)$, onde c é constante (obviamente $c \neq 0$). Usando isso e a simetria de R_{ij}, vemos que a igualdade acima é equivalente a

$$\begin{aligned} 0 \;=\;& 2\Big(R_{ij,kl} + 2R_{ik,jl} + 2R_{il,jk} + R_{kl,ij}\Big)x^ix^j\\ &+\frac{4}{9}\Big(W_{pijm}W_{pklm} + W_{pijm}W_{plkm} + W_{pikm}W_{pjlm}\\ &+W_{pikm}W_{pljm} + W_{pkim}W_{pjlm} + W_{pkim}W_{pljm}\Big)x^ix^j, \end{aligned}$$

contraindo sobre k, l, e usando a Identidade de Bianchi Contraída (1.3) obtemos

$$\begin{aligned} 0 \;=\;& \Big(R_{ij,kk} + 3S_{,ij}\Big)x^ix^j + \frac{2}{9}\Big(W_{pikm}W_{pjkm} + W_{pikm}W_{pkjm} + W_{pkim}W_{pjkm}\\ &+W_{pkim}W_{pkjm}\Big)x^ix^j, \end{aligned}$$

Usaremos agora as seguintes igualdades

$$W_{pikm}W_{pkjm} = \frac{1}{2}W_{pikm}(W_{pkjm} - W_{pmjk}) = \frac{1}{2}W_{pikm}W_{pjkm}. \tag{6.12}$$

De fato, a primeira igualdade segue-se permutando os índices de soma m e k do termo W_{pmjk}, depois permutando os dois últimos índices e usando a antisimetria do tensor de Weyl nesses índices. A segunda igualdade segue diretamente da Primeira Identidade de Bianchi.

Assim, usando (6.12) e as simetrias do tensor de Weyl,

$$\begin{aligned}
0 &= \Big(R_{ij,kk} + 3S_{,ij}\Big)x^ix^j + \frac{2}{9}\Big(W_{pikm}W_{pjkm} + \frac{1}{2}W_{pikm}W_{pjkm} + \frac{1}{2}W_{pikm}W_{pjkm} \\
&\quad + W_{pkim}W_{pkjm}\Big)x^ix^j \\
&= \Big(R_{ij,kk} + 3S_{,ij}\Big)x^ix^j + \frac{2}{9}\Big(2W_{pikm}W_{pjkm} + W_{pkim}W_{pkjm}\Big)x^ix^j.
\end{aligned}$$

Em seguida, contraindo sobre i, j teremos

$$0 = 4S_{,ii} + \frac{2}{9}\left(3|W|^2\right),$$

ou seja, $\Delta S = \frac{1}{6}|W|^2$ em P.

Por fim, de (6.8) temos que $S(P) = R_{ii}(P) = 0$. Também contraindo (6.9) sobre j,k e usando a identidade de Bianchi contraída, obtemos $0 = (2R_{ik,k} + R_{kk,i}(P) = 2S_{,i}(P)$. Portanto tomando a expansão de Taylor de S, tem-se

$$S = \frac{1}{K!}\sum_{|K|=0}^{\infty} \partial_K S(P)x^K = \frac{1}{2!}S_{,ij}(P)\, x^ix^j + O(r^3). \tag{6.13}$$

Em particular $S = O(r^2)$. $\square$

Teorema 6.2. (AUBIN) Se M é uma variedade Riemanniana compacta não-localmente conformemente plana com dimensão $n \geq 6$, então $\lambda(M) < \lambda(S^n)$. Em particular, o problema de Yamabe sobre M tem solução.

Demonstração. Seja $\{x^i\}$ um sistema de coordenadas normais conformes em uma vizinhança de $P \in M$. Como nessas coordenadas $dV_g \equiv dx$, procedendo como na demonstração da Proposição 6.1, a estimativa (6.7) não tem o fator $(1 + C_4r^2)$, ou seja,

$$E(\varphi) \leq \Lambda\|\varphi\|_p^2 + C_{3,\varepsilon}\alpha^{n-2} + \int_{B_{2\varepsilon}} S\varphi^2 dx.$$

Pelo corolário anterior, $\Delta S(P) = \dfrac{1}{6}|W(P)|^2$, então

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2\varepsilon}} S\varphi^2 dx &\leq \int_{B_\varepsilon} Su_\alpha^2 dx + C_5 \int_{A_\varepsilon} u_\alpha^2 dx \\
&\overset{(6.13),\,(6.3)}{=} \int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r} \left(\frac{1}{2} S_{,ij}(P) x^i x^j + O(r^3)\right) u_\alpha^2 d\omega_r dr + O(\alpha^{n-2}) \\
&= \int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r} -\frac{1}{2}\Delta S(P) r^2 u_\alpha^2 d\omega_r dr + \int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r} (O(r^3)) u_\alpha^2 d\omega_r dr + O(\alpha^{n-2}) \\
&\leq -\frac{1}{12}|W(P)|^2 \int_0^\varepsilon r^2 u_\alpha^2 \omega_{n-1} r^{n-1} dr + C_7 \int_0^\varepsilon r^3 u_\alpha^2 \omega_{n-1} r^{n-1} dr + O(\alpha^{n-2}) \\
&= -C_8 |W(P)|^2 \int_0^\varepsilon r^2 u_\alpha^2 r^{n-1} dr + C_9 \int_0^\varepsilon r^3 u_\alpha^2 r^{n-1} dr + O(\alpha^{n-2}).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 6.1, a primeira integral do termo acima é limitado inferiormente por algum múltiplo positivo de α^4, se $n > 6$ e $\alpha^4 \log\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$, se $n = 6$. E pelo mesmo lema a segunda integral é limitada superiormente por algum múltiplo positivo de α^4 se $n = 6$, $\alpha^5 \log(1/\alpha)$, se $n = 7$ e α^5 se $n > 7$. Portanto,

$$E(\varphi) \leq \begin{cases} \Lambda \|\varphi\|_p^2 - C_{10,\varepsilon} |W(P)|^2 \alpha^4 \log\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) + C_{11,\varepsilon}\alpha^4 & \text{se} \quad n = 6, \\ \Lambda \|\varphi\|_p^2 - C_{12,\varepsilon} |W(P)|^2 \alpha^4 + C_{13,\varepsilon}\alpha^5 \log\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) & \text{se} \quad n = 7, \\ \Lambda \|\varphi\|_p^2 - C_{14,\varepsilon} |W(P)|^2 \alpha^4 + C_{15,\varepsilon}\alpha^5 & \text{se} \quad n > 7. \end{cases}$$

$$\therefore Q_g(\varphi) = \frac{E(\varphi)}{\|\varphi\|_p^2} \leq \begin{cases} \Lambda - C_{16,\varepsilon} |W(P)|^2 \alpha^4 \log\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) + C_{17,\varepsilon}\alpha^4 & \text{se} \quad n = 6, \\ \Lambda - C_{18,\varepsilon} |W(P)|^2 \alpha^4 + C_{19,\varepsilon}\alpha^5 \log\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) & \text{se} \quad n = 7, \\ \Lambda - C_{20,\varepsilon} |W(P)|^2 \alpha^4 + C_{21,\varepsilon}\alpha^5 & \text{se} \quad n > 7. \end{cases}$$

Sendo M não localmente conformemente plana, pelo Teorema 1.2 podemos escolher P tal que $|W(P)|^2 > 0$. Assim, escolhido $\varepsilon > 0$ pequeno, ficam definidas as constantes na expressão acima e em seguida escolhemos α tão pequeno quanto quisermos, implicando que $Q_g(\varphi) < \Lambda$. Portanto, $\lambda(M) < \Lambda$ e o problema de Yamabe tem solução de acordo com o Teorema 4.3.

$\square$

7 A Contribuição de Schoen e a Solução Completa

Nesse capítulo concluiremos a solução do problema de Yamabe, visto que resta solucionar o problema para dimensões 3, 4, 5, e para variedades localmente conformemente planas. De fato, a grande ideia de Schoen foi usar a projeção estereográfica para obter uma nova variedade assintoticamente plana e usar o Teorema de Massa Positiva para inferir sobre a positividade da constante A do Teorema 7.1 (b) a seguir.

A projeção estereográfica definida recebe esse nome pois, como veremos a seguir, a curvatura escalar na métrica $\widehat{g}$ sobre a variedade $\widehat{M} = M \setminus \{P\}$ é identicamente nula. Mais ainda, $\widehat{M} = M \setminus \{P\}$ é assintoticamente plana. Isso simplificará bastante o problema, similarmente ao que fizemos no caso da esfera no qual usamos a projeção estereográfica de S^n sobre $\mathbb{R}^n$ e simplificamos as contas, visto que sobre $\mathbb{R}^n$ a curvatura escalar é identicamente nula.

7.1 Função de Green do Operador $\Box$ e a Projeção Estereográfica

Verificaremos a existência da função de Green para o laplaciano conforme e faremos uma expansão assintótica dessa função de Green em coordenadas normais conformes.

Uma função de Green para o operador de Laplace Δ sobre M em um ponto P é uma aplicação suave Γ_P sobre $M \setminus \{P\}$ tal que

$$\Delta \Gamma_P = \delta_P$$

no sentido de distribuição, onde δ_P é a medida de Dirac em P. Podemos pensar na função de Green definida em $(M \times M) \setminus D_M$, onde D_M é o subconjunto de $M \times M$ composto por $(P, P), P \in M$. Assim, $\Gamma_P = \Gamma(P, \cdot)$.

Proposição 7.1. Seja M uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ com $\lambda(M) > 0$ e seja $h \in C^{k,\alpha}$ tal que existe $\mu > 0$ satisfazendo

$$I_h(u) = \int_M \left(|\nabla u|^2 + hu^2\right) dV_g \geq \mu \int_M \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dV_g, \quad \forall u \in L_1^2(M) \tag{7.1}$$

e tal que $\inf\limits_u I_h(u) > 0$, onde o ínfimo é tomado no conjunto das funções em $L_1^2(M)$ com $\|u\|_{2,1} = 1$. Então existe uma função contínua $\Gamma : (M \times M) \setminus D_M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $P \in M$, $\Gamma_P = \Gamma(P, \cdot)$ está em $L^1(M)$, satisfaz

$$(\Delta + h)\Gamma_P = \delta_P \tag{7.2}$$

no sentido de distribuição e valem as seguintes propriedades:

(P1) Para quaisquer $P, Q \in M$, $\Gamma(P,Q) = \Gamma(Q,P)$ e $\Gamma(P,Q) > 0$. Mais ainda, para todo $P \in M$, a função $\Gamma_P : M \setminus \{P\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Gamma_P(Q) = \Gamma(P,Q)$ pertence a $C^{k+2,\alpha}_{loc}(M \setminus \{P\})$.

(P2) Para todo $P, Q \in M$, $P \neq Q$, $d_g(P,Q)^{n-2}\Gamma(P,Q) \leq C$.

(P3) Existe $\delta > 0$ tal que para todo $P, Q \in M$, $P \neq Q$, se $d_g(P,Q) < \delta$, então

$$\begin{aligned} \left| d_g(P,Q)^{n-2}\Gamma(P,Q) - \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \right| &\leq C d_g(P,Q), \\ \left| d_g(P,Q)^{n-1} \left| \nabla \Gamma_P(Q) \right| - \frac{1}{\omega_{n-1}} \right| &\leq C d_g(P,Q). \end{aligned}$$

Em particular, da penúltima igualdade acima obtemos

$$\Gamma_P(Q) = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}\, r^{2-n}(1 + O(r)), \tag{7.3}$$

onde r é a distância de Q a P em uma bola geodésica centrada em P com raio menor que δ.

Demonstração. Ver DRUET-HEBEY-ROBERT [10], apêndices A e B. $\square$

Observação 7.1. Nas hipóteses anteriores, se h é estritamente positiva, então pelo Teorema 1.7, a função de Green é única.

Lema 7.1. Supondo $\lambda(M) > 0$. Então em cada ponto $P \in M$ existe uma única função de Green Γ_P para $\Box$, a qual é estritamente positiva e $\Gamma_P \in C^{\infty}_{loc}(M \setminus \{P\})$.

Demonstração. Seja $\varphi = \varphi_s > 0$ a solução suave e estritamente positiva da equação subcrítica (3.13) para qualquer $2 \leq s < p$ dada pelo Teorema de Yamabe (Teorema 3.1) e defina a nova métrica $g' = \varphi^{p-2}g$. De (3.3) e (3.13) temos que $S' = \varphi^{1-p}\Box\varphi = \varphi^{1-p}\lambda_s\varphi^{s-1} = \lambda_s\varphi^{s-p}$. Como $\lambda(M) > 0$, pela demonstração do Lema de Aubin 4.1, vale $\lambda_s > 0$ e, portanto, $S' \in C^{\infty}$ é estritamente positiva. Assim, vale (7.1) e também $\inf_u I_{S'}(u) \geq \lambda(M) > 0$. Segue da Observação anterior que existe uma única função de Green Γ'_P para o operador $\Box' = a\Delta' + S'$, a qual deve satisfazer (P1) e, portanto, $\Gamma'_P > 0$ e $\Gamma'_P \in C^{\infty}_{loc}(M \setminus \{P\})$.

Agora, defina $\Gamma_P(Q) = \varphi(P)\varphi(Q)\Gamma'_P(Q)$. Para toda $f \in C^{\infty}_c(M)$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(P)f(P) &= \int_M \Gamma'_P \Box'(\varphi^{-1}f)dV_{g'} \\
&= \int_M \Gamma'_P \big(\varphi^{1-p}\Box(f)\big)dV_{g'} \\
&= \int_M \varphi^{-1}(P)\varphi^{-1}\Gamma_P \big(\varphi^{1-p}\Box(f)\big)dV_{g'} \\
&= \int_M \varphi^{-1}(P)\Gamma_P \Box(f)\varphi^{p}\, dV_{g'} \\
&= \varphi^{-1}(P)\int_M \Gamma_P \Box(f)\, dV_{g},
\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos a Proposição 3.1. Da expressão acima obtemos que $\Box\Gamma_P = \delta_P$.

Como podemos definir inversamente uma função de Green para $\Box'$ a apartir de Γ_P usando as igualdades acima, devemos ter que Γ_P é única pela unicidade de Γ'_P.

Por fim, temos $\Gamma_P > 0$ e $\Gamma_P \in C^{\infty}_{loc}(M \setminus \{P\})$. $\Box$

De agora em diante, Γ_P significará a função de Green do operador $\Box$ em P.

Definição 7.1. Suponha que (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta com $\lambda(M) > 0$. Dado $P \in M$, defina a métrica $\widehat{g} = G^{p-2}g$ sobre $\widehat{M} = M \setminus \{P\}$, onde

$$G = (n-2)\omega_{n-1}a\Gamma_P. \tag{7.4}$$

A variedade $(\widehat{M}, \widehat{g})$ juntamente com a aplicãção natural $\sigma : M \setminus \{P\} \longrightarrow \widehat{M}$ é chamada de **projeção estereográfica** de M a partir de P. Notemos que de (7.3), temos

$$G(Q) = r^{2-n}(1 + O(r)), \quad Q \neq P, \tag{7.5}$$

em um sistema de coordenadas normais centrado em P.

Notações: Denotamos por $\mathcal{C}_k$ o conjunto de funções de classe $C^{\infty}(M)$ que se anulam juntamente com suas derivadas de ordem até k no ponto P. O conjunto dos polinômios homogêneos em x de grau k será denotado por $\mathcal{P}_k$. Escrevemos $f = O''(r^k)$ significando que $f = O(r^k)$, $\partial f = O(r^{k-1})$ e $\partial\partial f = O(r^{k-2})$.

Teorema 7.1. Em um sistema de coordenadas normais conformes (Φ, Ω) em P, a função G tem uma expansão assintótica da forma

(a)

$$G(x) = r^{n-2}\left(1 + \sum_{k=4}^{n} \psi_k(x)\right) + (c + u_1 + u_2)\ \log r + \alpha(x), \tag{7.6}$$

para todo $x \in \Phi(\Omega) \setminus \{0\}$, onde $r = |x|$, $\psi_k \in \mathcal{P}_k$, $\alpha(x) \in C^{2,\mu}$, u_1 e u_2 são funções harmônicas com $u_1 \in \mathcal{P}_1$, $u_2 \in \mathcal{P}_2$ e os termos com $\log$ aparecem apenas se n é par.

(b) Se $n = 3, 4, 5$, ou M é localmente conformemente plana em uma vizinhança de P, então a expressão do item (a) é simplificada e é dada por

$$G(x) = r^{2-n} + A + O''(r),$$

onde A é uma constante (não necessariamente positiva).

Demonstração.

(a) De (7.5), podemos escrever $G = r^{2-n}(1 + \psi)$, onde $\psi = O(r)$ e queremos expressar ψ tal que $\Box G = (n-2)\omega_{n-1} a \delta_P$ sobre o sistema de coordenadas normais conforme em pontos diferentes de P. Notemos que se f depende apenas de r, então em um sistema de coordenadas normais temos

$$\Delta f = -\frac{1}{r^{n-1}\sqrt{\det g}}\, \partial_r \left(r^{n-1}\sqrt{\det g}\, \partial_r f \right).$$

Como $\det g \equiv 1$ em coordenadas normais conformes, temos da igualdade acima,

$$\Delta f = -\partial_r^2 f - \frac{n-1}{r}\, \partial_r f = \Delta_0 f,$$

onde Δ_0 denota o laplaciano Euclidiano. Sendo $n \geq 3$, sabemos que para $r_0 \neq 0$, $\Upsilon = r_0^{2-n}/((n-2)\omega_{n-1})$ é a solução fundamental da equação de Laplace sobre $\mathbb{R}^n$ e vale $\Delta_0 \Upsilon = \delta_0$ (ver EVANS [11] pp. 22-25), onde r_0 denota a distância euclidiana de um ponto x à origem. Sabemos que $r = r_0 \circ \Phi$, daí para toda $f \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega r^{2-n} \Delta_0 f \, dV_g &= \int_{\Phi(\Omega)} \left(r^{2-n} \Delta_0 f \right) \circ \Phi^{-1} \sqrt{g}\, dx = \int_{\Phi(\Omega)} r_0^{2-n} \Delta_0 (f \circ \Phi^{-1})\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} r_0^{2-n} \Delta_0 (f \circ \Phi^{-1})\, dx = (n-2)\omega_{n-1} (f \circ \Phi^{-1})(0) \\
&= (n-2)\omega_{n-1} f(P).
\end{aligned}$$

Assim, $\Delta r = \Delta_0 r = (n-2)\omega_{n-1}\delta_P$ sobre Ω e a equação $\Box G = \Box r^{2-n} + \Box \left(r^{2-n}\psi \right) = (n-2)\omega_{n-1} a \delta_P$ torna-se

$$S r^{2-n} + \Box \left(r^{2-n} \psi \right) = 0. \tag{7.7}$$

Sendo $\det g \equiv 1$, temos $\Delta\psi - \Delta_0\psi = \sum\limits_i \partial_i^2 \psi - \sum\limits_{ij} \partial_i (g^{ij}\partial_j) = \partial_i \big((\delta^{ij} - g^{ij}) \partial_j \psi \big)$. Fazendo

$$K\psi \;:=\; \Delta\psi - \Delta_0\psi = \partial_i \big((\delta^{ij} - g^{ij}) \partial_j \psi \big), \tag{7.8}$$

$$L \;:=\; r^2 \Delta_0 + 2(n-2) r \partial_r \tag{7.9}$$

e multiplicando (7.7) por r^n/a, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{r^2S}{a} + r^n\Delta(r^{2-n}\psi) + \frac{Sr^2\psi}{a} \\
&= \frac{r^2S}{a} + \frac{Sr^2\psi}{a} + r^n\Big(r^{2-n}\Delta\psi + \psi\Delta(r^{2-n}) - 2\langle \operatorname{grad}\psi, \operatorname{grad} r^{2-n}\rangle\Big) \\
&= \frac{r^2S}{a} + \frac{Sr^2\psi}{a} + r^n\Big(r^{2-n}\big(\Delta_0\psi + K\psi\big) + 0 - 2(2-n)r^{1-n}\langle \operatorname{grad}\psi, \operatorname{grad} r\rangle\Big) \\
&= \frac{r^2S}{a} + \frac{Sr^2\psi}{a} + r^2\Delta_0\psi + r^2K\psi + 2(n-2)r\left\langle \operatorname{grad}\psi, \frac{\partial}{\partial_r}\right\rangle \\
&= L\psi + \frac{r^2}{a}\big(S + S\psi + aK\psi\big),
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos o fato de grad $r = \partial/\partial_r$ em coordenadas normais. Assim, $\Box G = (n-2)\omega_{n-1}a\delta_p$ é equivalente a

$$L\psi + \frac{r^2}{a}\big(S + S\psi + aK\psi\big) = 0, \tag{7.10}$$

para pontos diferentes de P. Vamos expressar uma solução assintótica para essa equação, escrevendo $\overline{\psi} = \psi_1 + \cdots + \psi_n$, com $\psi_k \in \mathcal{P}_k$, resolvendo indutivamente. De (6.13), $S = \frac{1}{2}S_{,ij}(P)x^ix^j + O(r^3)$, daí $r^2S \in \mathcal{C}_3$. Disso, escolha $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ e suponha por indução termos encontrado $\overline{\psi} = \psi_1 + \cdots + \psi_{k-1}$ tal que

$$L\overline{\psi} + \frac{r^2}{a}\big(S + S\overline{\psi} + aK\overline{\psi}\big) \in \mathcal{C}_{k-1}. \tag{7.11}$$

Para cada $f \in \mathcal{P}_m$, temos

$$r\partial_r f = r\frac{x^i}{r}\frac{\partial f}{\partial x^i} = x^i\partial_i f = mf,$$

onde a última igualdade segue da fórmula de Euler para funções homogêneas (ver lema abaixo). Assim, com a hipótese de indução $L\overline{\psi}$ é uma soma de polinômios homogêneos de grau no máximo $k-1$, daí $\partial_K(L\overline{\psi})(P) = 0$, se $|K| = k$.

Do Corolário 8.1 sabemos que g^{ij} tem a expansão

$$g^{ij}(x) = \delta^{ij} + \sum_{l=2}^{s} w_l + \mathcal{C}_s, \quad \text{onde} \quad w_l \in \mathcal{P}_l.$$

Substituindo em (7.8),

$$K\overline{\psi} = \sum_{ij}\partial_i\left(\left(\sum_{l=2}^{s} w_l + \mathcal{C}_s\right)\partial_j\overline{\psi}\right),$$

isto é, $\frac{r^2}{a}K\overline{\psi}$ é a soma de polinômios homogêneos de cujo grau máximo depende do número de termos da expansão de g^{ij}. O mesmo vale para o termo $\dfrac{r^2}{a}(S + S\overline{\psi})$, em vista da expansão (6.13). Em suma, podemos escrever a expressão (7.11) como $b_k + \mathcal{C}_k$, onde $b_k \in \mathcal{P}_k$.

De acordo com o lema abaixo, o operador $L = r^2\Delta_0 + 2k(n-2)$ é invertível sobre $\mathcal{P}_k$ se, e somente se, $-2k(n-2) \neq \lambda_i = -2i(n-2+2k-2i)$. Sendo $k > 3$, a igualdade ocorre somente se

$$\begin{aligned} k(n-2) = 2i(k-i) + i(n-2) \qquad &\iff \qquad (n-2)(k-i) = 2i(k-i) \\ &\iff \qquad (n-2) = 2i. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Se n é ímpar, (7.12) não possui solução e L é invertível sobre $\mathcal{P}_k$. Assim, podemos definir $\psi_k = -L^{-1}b_k$ e obtemos

$$L\psi_k + b_k = 0, \tag{7.13}$$

e como $r^2 S\psi_k \in \mathcal{C}_{k+3} \subset \mathcal{C}_k$ e $r^2 K\psi_k \in \mathcal{C}_{k+1} \subset \mathcal{C}_k$, concluimos o passo de indução nesse caso definindo $\overline{\psi} = \psi_1 + \cdots + \psi_k$ e (7.11) é satisfeito com $k-1$ substituido por k :

$$\begin{aligned} L\overline{\psi} + \frac{r^2}{a}\big(S + S\overline{\psi} + aK\overline{\psi}\big) \in \mathcal{C}_{k-1} \quad &= \quad b_k + \mathcal{C}_k + L\psi_k + \frac{r^2}{a}\big(S\psi_k + aK\psi_k\big) \\ &= \quad \mathcal{C}_k + \frac{r^2}{a}\big(S\psi_k + aK\psi_k\big) \ \in \mathcal{C}_k. \end{aligned}$$

Também, $(r^n/a)(Sr^{2-n} + \Box(r^{2-n}\overline{\psi})) = L\overline{\psi} + (r^2/a)(S + S\overline{\psi} + aK\overline{\psi})$, assim para $k = n$,

$$\Box(r^{2-n}\overline{\psi}) + Sr^{2-n} \in r^{-n}\mathcal{C}_n. \tag{7.14}$$

Se n é par e $k < n-2$, então podemos usar o mesmo argumento para o caso n ímpar, visto que isso implica que $i < (n-2)/2$, daí (7.12) não tem solução e L é invertível. Por outro lado, se n é par e $k \geq n-2$, então (7.12) sempre possui solução e L não é invertível. Contudo, dado que dim $\mathcal{P}_k < \infty$, podemos escrever $\mathcal{P}_k =$ Ker $L +$ Im L. Como para n par e $k \geq n-2$ tem-se Ker $L \neq 0$, para resolver $L\psi_k + b_k = 0$ com $b_k \in \mathcal{P}_k$, tomamos $-b_k = q_k + Lp_k$, onde $q_k \in$ Ker L, $q_k \neq 0$ e definimos

$$\psi_k = p_k + (n-2-2k)^{-1} q_k \log r. \tag{7.15}$$

De fato, (7.15) é solução de (7.13), pois usando que $x^i\partial_i(q_k) = kq_k$ (fórmula de Euler) e $Lq_k = 0$, teremos

$$\begin{aligned} L\psi_k \quad = \quad & Lp_k + r^2(n-2-2k)^{-1}\left[(\Delta_0 q_k)\log r + q_k\Delta_0 \log r - 2\sum_i \partial_i(q_k)\partial_i(\log r)\right] \\ & +(n-2-2k)^{-1}2(n-2)r\partial_r\left(q_k \log r\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Lp_k + r^2(n-2-2k)^{-1}\left[(\Delta_0 q_k)\log r - q_k\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{n-1}{r^2}\right) - 2\frac{1}{r^2}\sum_i x^i\partial_i(q_k)\right] \\
&\quad +(n-2-2k)^{-1}2(n-2)\big[r\partial_r(q_k)\log r + q_k\big] \\
&= Lp_k + (n-2-2k)^{-1}(Lq_k)\log r + (n-2-2k)^{-1}(1-n+1-2k+2(n-2))q_k \\
&= Lp_k + q_k = -b_k.
\end{aligned}
$$

Como $Lq_k = 0$, significa que q_k é uma autofunção de $r^2\Delta_0$ com autovalor $-2k(n-2)$. Do lema abaixo $q_k = r^{2i}u$, onde $u \in \mathcal{P}_{k-2i}$ é harmônica. Usando (7.12), vemos que $i = (n-2)/2$, daí $q_k = r^{n-2}u$ e $u \in \mathcal{P}_{k-(n-2)}$. Assim, para $k = n-2$, temos que u é uma constante e por (7.15) podemos escrever $\psi_{n-2} = p_{n-2} + cr^{n-2}\log r$, com $c \in \mathbb{R}$ e $L\psi_{n-2} + b_{n-2} = 0$.

Do Corolário 8.1 temos $g^{ij}(x) = \delta^{ij} - \frac{1}{3}R_{iklj}(P)x^k x^l + \mathcal{C}_2$. Substituindo em (7.8), obtemos

$$
Kf = \partial_i\left(\left(\frac{1}{3}R_{iklj}(P)x^k x^l + \mathcal{C}_2\right)\partial_j f\right), \tag{7.16}
$$

daí $Kp_{n-2} \in \mathcal{C}_{n-3}$. Por outro lado, $K(r^{n-2}\log r) = 0$, daí $K(\psi_{n-2}) \in \mathcal{C}_{n-3}$. Voltando à hipótese de indução para n par e $k < n-2$, se $\overline{\psi} = \psi_1 + \cdots + \psi_{n-3}$, podíamos escrever (7.11) como $\mathcal{C}_{n-2} + b_{n-2}$. Assim, para $\overline{\psi} = \psi_1 + \cdots + \psi_{n-2}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
L\overline{\psi} + \frac{r^2}{a}(S + S\overline{\psi} + aK\overline{\psi}) &= \mathcal{C}_{n-2} + b_{n-2} + L\psi_{n-2} + \frac{r^2}{a}(S\psi_{n-2} + aK\psi_{n-2}) \\
&= \mathcal{C}_{n-2} + \frac{r^2}{a}(S\psi_{n-2} + aKp_{n-2}) \in \mathcal{C}_{n-2} + \mathcal{C}_n \log r.
\end{aligned}
$$

Para $k = n-1$, escrevemos a expressão acima como $\mathcal{C}_{n-1} + b_{n-1} + \mathcal{C}_n\log r$. Nesse caso, usando os argumentos acima, tem-se $q_k = r^{n-2}u_1$, onde $u_1 \in \mathcal{P}_1$ é uma função harmônica e por (7.15) temos $\psi_{n-1} = p_{n-1} + cr^{n-2}u_1\log r$ e $L\psi_{n-1} + b_{n-1} = 0$. Notando que $R_{iklj}x^k x^l x^j = (1/3)(R_{iklj} + R_{iljk} + R_{ijkl})x^k x^l x^j = 0$ e $\partial_j(u_1 r^{n-2}\log r) = \partial_j(u_1)\big(r^{n-2}\log r\big) + u_1((n-2)x^j r^{n-4}\log r + x^j r^{n-4})$, substituimos em (7.16) e obtemos

$$
\begin{aligned}
K\big(r^{n-2}u_1\log r\big) &= \sum_{ij}\partial_i\Bigg[\left(\frac{1}{3}R_{iklj}(P)x^k x^l + \mathcal{C}_2\right)\Big(\partial_j(u_1)\big(r^{n-2}\log r\big)\Big) \\
&\quad +\mathcal{C}_2\Big(u_1((n-2)x^j r^{n-4}\log r + x^j r^{n-4})\Big)\Bigg] \\
&= \sum_{ij}\Bigg[\partial_i\left(\frac{1}{3}R_{iklj}(P)x^k x^l + \mathcal{C}_2\right)\Big(\partial_j(u_1)\big(r^{n-2}\log r\big)\Big) \\
&\quad + \left(\frac{1}{3}R_{iklj}(P)x^k x^l + \mathcal{C}_2\right)\Big(\partial_i\partial_j(u_1)\big(r^{n-2}\log r\big) \\
&\quad +\partial_j(u_1)\big((n-2)x^i r^{n-4}\log r + x^i r^{n-4}\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$+\partial_i(\mathcal{C}_2)\Big(u_1((n-2)x^j r^{n-4}\log r + x^j r^{n-4})\Big)$$
$$+\mathcal{C}_2\Big(\partial_i\big(u_1 x^j r^{n-4}\big)((n-2)\log r+1) + \big(u_1 x^j r^{n-4}\big)(n-2)x^i r^{-2}\Big)\Bigg],$$

daí $K\big(r^{n-2}u_1\log r\big) \in \mathcal{C}_{n-1} + \mathcal{C}_{n-2}\log r$ e como $K(p_{n-1}) \in \mathcal{C}_{n-2}$, temos $K(\psi_{n-1}) \in \mathcal{C}_{n-2} + \mathcal{C}_{n-1}\log r$. De forma análoga ao passo anterior, definimos $\overline{\psi} = \psi_1 + \cdots + \psi_{n-1}$ e obtemos

$$L\overline{\psi} + \frac{r^2}{a}\big(S + S\overline{\psi} + aK\overline{\psi}\big) \in \mathcal{C}_{n-1} + \mathcal{C}_n \log r.$$

Por fim, para $k = n$, tem-se $q_n = r^{2-n}u_2$, onde $u_2 \in \mathcal{P}_2$ e $\psi_n = p_n + q_n\log r$ satisfaz $L\psi_n + b_n = 0$. Com os mesmos argumentos e em vista da expressão acima para $K\big(r^{n-2}u_2\log r\big)$, concluimos que $K(\psi_{n-1}) \in \mathcal{C}_{n-1} + \mathcal{C}_{n-1}\log r$ e definindo $\overline{\psi} = \psi_1 + \cdots + \psi_n$, obtemos

$$L\overline{\psi} + \frac{r^2}{a}\big(S + S\overline{\psi} + aK\overline{\psi}\big) \in \mathcal{C}_n + \mathcal{C}_n \log r$$

e (7.14) torna-se

$$\Box\big(r^{2-n}\overline{\psi}\big) + Sr^{2-n} \in r^{-n}\mathcal{C}_n + r^{-n}\mathcal{C}_n\log r. \tag{7.17}$$

Agora, para cada n, definamos $\varphi = \psi - \overline{\psi}$. Temos de (7.7),

$$\Box\big(r^{2-n}\varphi\big) = \Box(r^{2-n}\overline{\psi}) - \Box\big(r^{2-n}\psi\big) = -Sr^{2-n} - \Box\big(r^{2-n}\psi\big), \tag{7.18}$$

daí, de (7.14), (7.17) e da expressão acima, $\Box(r^{2-n}\varphi)$ é da forma $r^{-n}\mathcal{C}_n$ ou da forma $r^{-n}\mathcal{C}_n + r^{-n}\mathcal{C}_n\log r$. Notemos que $r^{-n}\mathcal{C}_n, r^{-n}\mathcal{C}_n\log r \in C^{\mu}(\Omega)$, para todo $\mu \in (0,1)$, pois se $f \in \mathcal{C}_n$, $f = O(r^{n+1})$, daí

$$\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{f}{r^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r\longrightarrow 0}\frac{f\log r}{r^n} = 0.$$

Assim, $r^{-n}f$ e $r^{-n}f\log r$ serão contínuas em todo Ω se definirmos $\big(r^{-n}f\big)(0) = \big(r^{-n}f\log r\big)(0) = 0$. Dado que são funções diferenciáveis em $\Omega\setminus\{P\}$, temos que pertencem à $C^{\mu}_{loc}\big(\Omega\setminus\{P\}\big)$ e resta verificar a condição de Hölder no ponto P. Ora,

$$\sup_{x\neq 0}\frac{\big|\big(r^{-n}f\big)(x) - \big(r^{-n}f\big)(0)\big|}{|x-0|^{\mu}} = \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{r^{n+\mu}} \leq \sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{r^{n+1}} < \infty,$$

implicando $r^{-n}f \in C^{\mu}(\Omega)$. Analogamente, $r^{-n}f\log r \in C^{\mu}(\Omega)$. Em resumo, $\Box(r^{2-n}\varphi) \in C^{\mu}(\Omega)$, implicando pelo Teorema 1.7 que $r^{2-n}\varphi \in C^{2,\mu}$ e (7.6) está provado, visto que $G = r^{2-n}(1+\overline{\psi}) + \alpha(x)$, tomando $\alpha(x) = r^{2-n}\varphi(x)$ e as expressões acima de $\overline{\psi}$ resultam na expressão (7.6).

(b) Se M é localmente conformemente plana próximo a P, temos que $S \equiv 0$ em Ω e de (7.18) temos que $r^{2-n}\varphi, r^{2-n}\overline{\psi} \in C^{2,\mu}$, implicando que $r^{2-n}\psi \in C^{2,\mu}$. Agora usando (7.7), concluimos que $r^{2-n}\psi$ é harmônica e, portanto, de classe $C^\infty(\Omega)$. Como $G - r^{2-n} = r^{2-n}\psi$, fazemos a expansão de Taylor em torno de P no lado direito, obtendo $G = r^{2-n} + A + O''(r)$, onde A é a constante $A = \big(r^{2-n}\psi\big)(P)$.

Se $n = 3$, temos $\overline{\psi} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0$, daí

$$G = r^{2-n}(1+\psi) = r^{2-n} + r^{2-n}\overline{\psi} + r^{2-n}\varphi = r^{2-n} + r^{2-n}\varphi,$$

e expandimos o termo $r^{2-n}\varphi \in C^{2,\mu}(\Omega)$ em torno de P, obtendo novamente $G = r^{2-n} + A + O''(r)$, onde agora $A = \big(r^{2-n}\varphi\big)(P)$.

Se $n = 4$, então n é par e temos $\overline{\psi} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = \psi_4 = p_4 + q_4 \log r$, onde vimos acima que $q_4 = cr^{4-2}u$, com u harmônica e $u \in \mathcal{P}_2$. Um cálculo simples e direto mostra que $r^{2-n}\overline{\psi} = r^{-2}\overline{\psi} = r^{-2}p_4 + cu\log r = O''(r)$. Assim,

$$G = r^{2-n} + r^{2-n}\overline{\psi} + r^{2-n}\varphi = r^{2-n} + A + O''(r).$$

Por fim, se $n = 5$, então n é ímpar e temos $\overline{\psi} = \psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4+\psi_5 = \psi_4+\psi_5 = p_4+p_5$. Um cálculo simples mostra que $r^{2-n}\overline{\psi} = r^{-3}p_4 + r^{-3}p_5 = O''(r)$. Segue que $G = r^{2-n} + A + O''(r)$. □

Lema 7.2. Os autovalores de $r^2\Delta_0$ sobre $\mathcal{P}_k$ são

$$\left\{\lambda_i = -2i(n-2+2k-2i); i = 0, \cdots, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \right\},$$

onde $\lceil k/2 \rceil$ denota o maior inteiro que é menor ou igual a $k/2$. As autofunções h_i correspondentes a λ_i são funções da forma $r^{2i}u$, onde $u \in \mathcal{P}_{k-2i}$ é hamônica.

Demonstração. O lema obviamente é válido para $k = 0$ ou $k = 1$, pois

$$\begin{cases} k = 0 \implies i = 0, \lambda_i = 0 \text{ e } h_i = u, \text{ onde } u \in \mathcal{P}_0 \text{ é harmônica,} \\ k = 1 \implies i = 0, \lambda_i = 0 \text{ e } h_i = u, \text{ onde } u \in \mathcal{P}_1 \text{ é harmônica.} \end{cases}$$

Seja $f \in \mathcal{P}_k$ satisfazendo $r^2\Delta_0 f = \lambda f$ com $k \geq 2$. A fórmula de Euler para polinômios homogêneas diz que se $F \in \mathcal{P}_m$, então $x^j\partial_j F = mf$. Como $\Delta_0 f \in \mathcal{P}_{k-2}$, temos

$$\begin{aligned} \lambda\Delta_0 f = \Delta_0(\lambda f) &= \Delta_0(r^2\Delta_0 f) = \Delta_0(r^2)\Delta_0 f + r^2\Delta_0(\Delta_0 f) - 2\big(2x^j\partial_j(\Delta_0 f)) \\ &= -2n\Delta_0 f + r^2\Delta_0(\Delta_0 f) - 4(k-2)\Delta_0 f, \end{aligned}$$

segue que $r^2\Delta_0(\Delta_0 f) = (\lambda+2n+4k-8)\Delta_0 f$. Isso implica que ou $\Delta_0 f = 0$, nesse caso $\lambda = 0$

e f é harmônica; ou $(\lambda + 2n + 4k - 8)$ é um autovalor de $r^2\Delta_0$ sobre $\mathcal{P}_{k-2}$ com autofunção $\Delta_0 f$, nesse caso $f = \lambda^{-1} r^2 \Delta_0 f$.

Assim, por indução suponhamos o lema válido para $k-1, k-2$. Pelo visto acima se λ_i é autovalor de $r^2\Delta_0$ sobre $\mathcal{P}_k$, então $\lambda_i = 0$, ou $\lambda_i + 2n + 4k - 8$ é autovalor de $r^2\Delta_0$ sobre $\mathcal{P}_{k-2}$. Por hipótese de indução, os únicos autovalores de $r^2\Delta_0$ sobre $\mathcal{P}_{k-2}$ são

$$\left\{\lambda_j = -2j(n-2+2(k-2)-2j); j = 0, \cdots, \left\lceil \frac{k-2}{2} \right\rceil \right\},$$

o que implica que os únicos autovalores de de $r^2\Delta_0$ sobre $\mathcal{P}_k$ são

$$\left\{\lambda_i = 0, \text{ ou } \lambda_i = -2j(n-2+2(k-2)-2j) - 2n - 4k + 8; j = 0, \cdots, \left\lceil \frac{k-2}{2} \right\rceil \right\}. \tag{7.19}$$

Fazendo $i = j+1$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_i &= -2(i-1)(n-2+2(k-2)-2(i-1)) - 2n - 4k + 8 \\ &= -2i(n-2+2k-2i) \end{aligned}$$

e dado que $\lceil (k-2)/2 \rceil + 1 = \lceil k/2 \rceil$, vemos que (7.19) é igual a

$$\left\{\lambda_i = -2i(n-2+2k-2i); i = 0, \cdots, \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \right\}.$$

Por fim, se h_i são as autofunções correspondentes, vimos acima que $h_i = u$, onde $u \in \mathcal{P}_k$ é harmônica, quando $\lambda_i = 0$, isto é, para $i = 0$; ou $\Delta_0 h_i$ é autofunção de $r^2\Delta_0$ sobre $\mathcal{P}_{k-2}$. Por hipótese de indução, as autofunções de $r^2\Delta_0$ sobre $\mathcal{P}_{k-2}$ são $h_j = r^{2j}u$, onde $u \in \mathcal{P}_{k-2-2j}$ é harmônica, para $j = 0, \cdots, \lceil (k-2)/2 \rceil$. Assim, para $i \geq 1$,

$$\Delta_0 h_i = h_j = r^{2j}u, \ u \in \mathcal{P}_{k-2-2j}.$$

Sendo $h_i = \lambda_i^{-1} r^2 \Delta_0 h_i$, concluimos que $h_i = r^{2(j+1)}\Delta_0(\lambda_i^{-1}u) = r^{2i}\Delta_0(\lambda_i^{-1}u)$, onde $(\lambda_i^{-1}u) \in \mathcal{P}_{m-2-2j} = \mathcal{P}_{2-2i}$.

□

Como consequência do Teorema 7.1 (b) mostraremos a seguir que $\widehat{M} = M \setminus \{P\}$ com a métrica $\widehat{g} = G^{p-2}g$ é assintoticamente plana.

Definição 7.2. Dada (N, g) uma variedade Riemanniana, (N, g) é chamada *assintoticamente plana de ordem* $\tau > 0$ se existe uma decomposição $N = N_0 \cup N_\infty$ com N_0 compacta, N_∞ difeomorfa a $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R$ para algum $R > 0$ e o difeomorfismo fornece um sistema de coordenadas $\{z^i\}$ sobre N_∞ tal que

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(\rho^{-\tau}), \quad \partial_k g_{ij} = O(\rho^{-\tau-1}), \quad \partial_k\partial_l g_{ij} = O(\rho^{-\tau-2}),$$

para $\rho = |z| \longrightarrow \infty$. As coordenadas $\{z^i\}$ são chamadas de *coordenadas assintóticas.*

Teorema 7.2. Considere a variedade $\widehat{M} = M \setminus \{P\}$ com a métrica $\widehat{g} = G^{p-2}g$. Então

(a) $\widehat{M}$ é assintoticamete plana de ordem $(n-2)$ se $n = 3$, ou M é localmente plana próxima a P. Mais ainda, $\widehat{g}$ admite a seguinte expressão

$$g_{ij} = \big(1 + (p-2)A\big)\delta_{ij} + O''(\rho^{1-n}) \tag{7.20}$$

em algum sistema de coordenadas assintóticas, onde A é a constante do Teorema 7.1.

(b) $\widehat{M}$ é assintoticamete plana de ordem 2 para $n \geq 4$.

Demonstração. Seja (Ω, Φ) uma carta de um sistema de coordenadas normais conforme $\{x^i\}$ em P, onde consideramos Ω como sendo uma bola geodésica e, portanto, Ω é difeomorfo a B_R, para algum $R > 0$ pequeno. Defina $z^i = \dfrac{x^i}{|x|^2} = r^{-2}x^i$ sobre $\Omega \setminus \{P\}$. Esse novo sistema de coordenadas $\{z^i\}$ é chamado de *coordenadas normais conformes invertidas.* Tomando $\widehat{M_0} = \widehat{M} \setminus \Omega$, $\widehat{M_0}$ é compacta e no sistema de coordenadas $\{z^i\}$ temos evidentemente que $\widehat{M_\infty} = \Omega$ é difeomorfa a $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R$. Assim, vale a decomposição $\widehat{M} = \widehat{M_0} \cup \widehat{M_\infty}$ da definição acima. Agora vamos calcular as componentes da métrica $\widehat{g}$ no sistema de coordenadas $\{z^i\}$.

Seja $\rho = |z| = |x|^{-1} = r^{-1}$. Sendo $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ e $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z^i}\right\}$ bases do espaço tangente, temos

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = a_{i1}\frac{\partial}{\partial z^1} + \cdots + a_{in}\frac{\partial}{\partial z^n}.$$

Aplicando a expressão acima à função coordenada $h^j : \widehat{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa cada $Q \in \Omega \setminus \{P\}$ à sua j-ésima coordenada no sistema $\{z^j\}$, obtemos

$$\begin{aligned} a_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i}(h^j) = \frac{\partial z^j}{\partial x^i} = \frac{\partial r^{-2}x^j}{\partial x^i} = -2r^{-3}x^i r^{-1}x^j + r^{-2}\delta_{ij} &= r^{-2}\delta_{ij} - 2r^{-4}x^i x^j \\ &= \rho^2\delta_{ij} - 2z^i z^j. \end{aligned}$$

Note que a matriz (b_{ij}) dada por $b_{ij} = \rho^{-2}\delta_{ij} - 2\rho^{-4}z^i z^j$ é a inversa de (a_{ij}). De fato,

$$\begin{aligned} \sum_k b_{ik}a_{kj} &= \sum_k \big(\rho^{-2}\delta_{ik} - 2\rho^{-4}z^i z^k\big)\big(\rho^2\delta_{kj} - 2z^k z^j\big) \\ &= \sum_k \delta_{ik}\delta_{kj} - 2\sum_k \rho^{-2}\delta_{ik}z^k z^j - 2\sum_k \rho^{-2}\delta_{kj}z^i z^k + 4\sum_k \rho^{-4}z^i z^k z^k z^j \\ &= \delta_{ij} - 2\rho^{-2}z^i z^j - 2\rho^{-2}z^i z^j + 4\rho^{-2}z^i z^j = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial z^i}=\sum_j \rho^{-2}\big(\delta_{ij}-2\rho^{-2}z^iz^j\big)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Escreva $\gamma=\rho^{2-n}G$, daí $G^{p-2}=\gamma^{p-2}\rho^4$ e

$$\begin{aligned}
\widehat{g}_{ij}(z) &= G^{p-2}g\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j}\right)=\gamma^{p-2}\rho^4 g\left(\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j}\right)\\
&= \gamma^{p-2}\sum_{k,l}\left(\delta_{ik}-2\rho^{-2}z^iz^k\right)\left(\delta_{jl}-2\rho^{-2}z^jz^l\right)g_{kl}(\rho^{-2}z)\\
&= \gamma^{p-2}\sum_{k,l}\left(\delta_{ik}\delta_{jl}-2\delta_{ik}\rho^{-2}z^jz^l-2\delta_{jl}\rho^{-2}z^iz^k+4\rho^{-4}z^iz^kz^jz^l\right)g_{kl}(\rho^{-2}z)\\
&= \gamma^{p-2}\Big(g_{ij}-2\sum_l\rho^{-2}z^jz^lg_{il}-2\sum_k\rho^{-2}z^iz^kg_{kj}+4\sum_{k,l}\rho^{-4}z^iz^kz^jz^lg_{kl}\Big)(\rho^{-2}z).
\end{aligned}$$

Se M é localmente plana próximo a P, temos $g_{ij}=\delta_{ij}$ e a expressão acima reduz-se a

$$\widehat{g}(z)=\gamma^{p-2}\delta_{ij}. \tag{7.21}$$

No caso geral, de (8.1) sabemos que $g_{ij}(x)=\delta_{ij}+O''(r^2)$. Se substituimos $x=\rho^{-2}z$ em (8.1) obtemos $g_{ij}(\rho^{-2}z)=\delta_{ij}+O''(\rho^{-2})$. Daí,

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(z) &= \gamma^{p-2}\Big(\delta_{ij}+O''(\rho^{-2})-2\sum_l\rho^{-2}z^jz^l\big(\delta_{il}+O''(\rho^{-2})\big)-2\sum_k\rho^{-2}z^iz^k\big(\delta_{kj}+O''(\rho^{-2})\big)\\
&\quad +4\sum_{k,l}\rho^{-4}z^iz^kz^jz^l\big(\delta_{kl}+O''(\rho^{-2})\big)\Big)\\
&= \gamma^{p-2}\Big(\delta_{ij}+O''(\rho^{-2})\Big).
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Se $n=3,4,5$, ou M é localmente plana próximo a P, temos do Teorema 7.1 (b) que

$$\gamma=r^{n-2}G=r^{n-2}\big(r^{2-n}+A+O''(r)\big)=1+A\rho^{2-n}+O''(\rho^{1-n}).$$

Usando a expansão de Taylor da função $x\longmapsto x^{p-2}$ em torno de $x=1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(z) &= \left[1+A\rho^{2-n}+O''(\rho^{1-n})\right]^{p-2}\left(\delta_{ij}+O''(\rho^{-2})\right)\\
&= \left[1+(p-2)\left(A\rho^{2-n}+O''(\rho^{1-n})\right)+O\left(\left(A\rho^{2-n}+O''(\rho^{1-n})\right)^2\right)\right]\Big(\delta_{ij}+O''(\rho^{-2})\Big).
\end{aligned}$$

Notemos que $A\rho^{2-n}+O''(\rho^{1-n})=O''(\rho^{2-n})$, pois $O''(\rho^{1-n})\subset O''(\rho^{2-n})$. Também, como $2(2-n)\le 1-n$, temos $\left(O''(\rho^{2-n})\right)^2=O''(\rho^{1-n})$, daí

$$\widehat{g}(z)=\left[1+(p-2)\left(A\rho^{2-n}+O''(\rho^{1-n})\right)+O''(\rho^{1-n})\right]\Big(\delta_{ij}+O''(\rho^{-2})\Big). \tag{7.23}$$

a) Se M é localmente plana próximo a P, de (7.21), (7.23) e do fato de $O''(\rho^{1-n}) \subset O''(\rho^{2-n})$, temos

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(z) &= \left[1 + (p-2)\left(A\rho^{2-n} + O''(\rho^{1-n})\right) + O''(\rho^{1-n})\right]\delta_{ij} \\
&= \left(1 + (p-2)A\rho^{2-n}\right)\delta_{ij} + O''(\rho^{1-n}) \qquad (7.24) \\
&= \delta_{ij} + O''(\rho^{2-n}). \qquad (7.25)
\end{aligned}$$

Assim, de (7.25) concluimos que $(\widehat{M}, \widehat{g})$ é assintoticamente plana de ordem $(n-2)$ e (7.24) prova (7.20).

De (7.24) e (7.23), temos

$$\widehat{g}(z) = \left(1 + (p-2)A\rho^{2-n}\right)\delta_{ij} + O''(\rho^{1-n}) + O''(\rho^{-2}) + O''(\rho^{-n}) + O''(\rho^{-1-n}). \qquad (7.26)$$

Assim, se $n = 3$,

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(z) &= \left(1 + (p-2)A\rho^{-1}\right)\delta_{ij} + O''(\rho^{-2}) + O''(\rho^{-3}) + O''(\rho^{-4}) \\
&= \left(1 + (p-2)A\rho^{-1}\right)\delta_{ij} + O''(\rho^{-2}) \\
&= \delta_{ij} + O''(\rho^{-1}).
\end{aligned}$$

Concluindo a prova do item (a).

(b) Se $n \geq 4$, temos $-1-n < -n < 1-n < -2$. Assim, usando (7.26),

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(z) &= \left(1 + (p-2)A\rho^{2-n}\right)\delta_{ij} + O''(\rho^{1-n}) + O''(\rho^{-2}) + O''(\rho^{-n}) + O''(\rho^{-1-n}) \\
&= \delta_{ij} + O''(\rho^{-2}).
\end{aligned}$$

O que mostra que $\widehat{M}$ é assintoticamente plana de ordem 2. □

7.2 Os Teoremas de Massa Positiva e A Solução Completa

Sempre que não citarmos explicitamente, estaremos supondo que $\lambda(M) > 0$ para podermos usar os resultados da seção anterior.

Definição 7.3. Dada uma variedade Riemanniana assintoticamente plana (N, g) com coordenadas assintóticas $\{z^i\}$, definimos a massa da variedade como sendo o limite

$$m(g) = \lim_{R \longrightarrow \infty} \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S_R} i(H)dz,$$

se o limite existe, onde $i(H)dz$ denota o produto interior do campo

$$H = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial}{\partial z^i}(g_{ij}) - \frac{\partial}{\partial z^j}(g_{ii}) \right) \frac{\partial}{\partial z^j}$$

pela forma de volume dz.

De acordo com BARTNIK [4], a definição de $m(g)$ depende apenas de g quando a ordem $\tau > (n-2)/2$.

Como vimos no Teorema 7.2, $(\widehat{M}, \widehat{g})$ sempre é uma variedade assintoticamente plana.

Lema 7.3. Seja $(\widehat{M}, \widehat{g})$ a projeção estereográfica de M a partir de $P \in M$. Se $n = 3, 4, 5$, ou M é localmente conformemente plana próximo a P, então $m(g) = 4(n-1)A$.

Demonstração. Ver LEE-PARKER [17] pp. 68 e 79. □

A conjectura a seguir é a generalização do Teorema de Massa Positiva de Schoen-Yau:

Conjectura de Massa Positiva: Se (N, g) é uma variedade Riemanniana assintoticamente plana de ordem $\tau > (n-2)/2$ com curvatura escalar S não-negativa e $S \in L^1(N)$, então $m(g) \geq 0$ e $m(g) = 0$ se, e somente se, (N, g) é isométrica ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

De fato, sabe-se hoje que a conjectura acima está provada para dimensões $3 \leq n \leq 7$. Mais ainda, temos:

Teorema 7.3. **(Schoen-Yau)** Valem as seguintes afirmações:

(a) Se (M, g) uma variedade Riemanniana compacta (conexa) localmente conformemente plana de dimensão $n \geq 3$ então a massa de $\widehat{M}$ satisfaz $m(g) \geq 0$. Mais ainda $m(g) = 0$ se, e somente se, (M, g) é conformemente equivalente à esfera $(S^n, \overline{g})$.

(b) **(Teorema de Massa Positiva)** Supondo $3 \leq n \leq 7$ e seja (N, g) uma variedade Riemanniana assintoticamente plana de ordem $\tau > (n-2)/2$ com curvatura escalar S não-negativa e $S \in L^1(N)$. Então $m(g) \geq 0$ e $m(g) = 0$ se, e somente se, (N, g) é isométrica ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Para o item (a) ver SCHOEN-YAU [26]. Para o item (b) ver SCHOEN-YAU [25] e SCHOEN [24]. Ver também WITTEN [30] e AMMANN-HUMBERT [2]. □

Usando o teorema acima e em vista do obtido na seção anterior, temos

Corolário 7.1. Se $n = 3, 4, 5$, ou (M, g) é localmente conformemente plana em uma vizinhança de P, então a constante A na expansão de G no Teorema 7.1 (b) é não-negativa. Mais ainda, $A = 0$ se, e somente se, $\widehat{M}$ é isométrica ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Em particular, se M não é conformemente equivalente à S^n, então $A > 0$.

Demonstração. Se M é localmente conformemente plana, o resultado segue do item (a) do teorema acima e do lema anterior. Nos outros casos, considere a variedade $(\widehat{M}, \widehat{g})$ estudada na seção anterior, onde $\widehat{M} = M \setminus \{P\}$ e $\widehat{g} = G^{p-2}g$. Sendo $\Box G = 0$ sobre $\widehat{M}$, temos de (3.4) que $\widehat{M}$ tem curvatura escalar $\widehat{S} \equiv 0$ e, consequentemente, $S \in L^1(\widehat{M})$. Pelo Teorema 7.2 sabemos que $\widehat{M}$ é assintoticamente plana de ordem $\tau = 1, 2$ ou 2, se $n = 3, 4,$ ou 5, respectivamente. Assim, nessas dimensões temos $\tau > (n-2)/2$ e podemos aplicar o Teorema de Massa Positiva, o qual implica que $A \geq 0$ e $A = 0$ se, e somente se, $\widehat{M}$ é isométrica ao espaço $\mathbb{R}^n$. $\Box$

Note que o corolário acima não se aplica a variedades arbitrárias de dimensões $n \geq 6$, visto que o Teorema 7.2 (b) diz que a ordem de $\widehat{M}$ será $\tau = 2$ para $n \geq 4$, daí não vale $\tau > (n-2)/2$ para $n \geq 6$.

A partir do resultado acima, Schoen conseguiu definir uma função teste que garante que $\lambda(M) < \lambda(S^n)$ para $n = 3, 4, 5$, ou M localmente plana, daí o problema de Yamabe tem solução nesses casos. Juntando com a solução parcial obtida no capítulo 6, concluimos a solução completa do problema.

Teorema 7.4. (Schoen) Se $n = 3, 4, 5$, ou M é localmente conformemente plana, então $\lambda(M) < \lambda(S^n)$, exceto se M é conforme à esfera. Consequentemente, o problema de Yamabe tem solução.

Demonstração. Dado um ponto $P \in M$, seja $\{x^i\}$ um sistema de coordenadas normais conformes em P. Pelo Teorema 7.1 (b) temos que $G = r^{2-n} + A + \alpha$, onde $\alpha = O''(r)$. Vamos supor que M não é conformemente equivalente à esfera S^n, visto que nesse caso já sabemos resolver o problema. Assim, pelo Corolário 7.1 teremos $A > 0$.

Usaremos nessa demonstração argumentos similares da demostração da Proposição 6.1.

Considere η uma função radial em $\mathbb{R}^n$ com $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ sobre $B_\rho = B_\rho(0)$ e identicamente nula fora de $B_{2\rho}$. Defina a seguinte função teste

$$\phi(x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x), & \text{se} \quad r \leq \rho, \\ \varepsilon_0\big(G(x) - \eta(x)\alpha(x)\big), & \text{se} \quad \rho \leq r \leq 2\rho, \\ \varepsilon_0 G(x) & \text{se} \quad r > 2\rho. \end{cases}$$

Lembrando que $u_\varepsilon(x) = \left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \|x\|^2}\right)^{(n-2)/2}$, para $\varepsilon > 0$. Também, tomamos $\varepsilon_0 \ll \rho$ com

$$\varepsilon_0\big(\rho^{2-n} + A\big) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \rho^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}. \tag{7.27}$$

A igualdade acima garante que ϕ é contínua, e sendo cada subfunção diferenciável no domínio de definição, temos que ϕ é uma função Lipschitz, daí $\phi \in L_1^k(M)$, $\forall k$ (ver AUBIN [3] p. 81), em particular $\phi \in L_1^2(M)$ e podemos tomá-la como uma função teste, pois pela Observação 3.3 sabemos que $\inf\limits_{\substack{\varphi \in L_1^2 \\ \varphi \not\equiv 0}} Q_g(\varphi) = \inf\limits_{\substack{\varphi \in C^\infty \\ \varphi > 0}} Q_g(\varphi)$.

Vamos verficiar que $Q(\phi) < \lambda(S^n)$. Dividimos a demonstração em dois casos:

Caso (1): $n = 3, 4$, ou 5.

Sabemos que em coordenadas normais conformes temos

$$\det g \equiv 1 \quad \text{e} \quad S = O(r^2) \quad \text{em} \quad \Omega_{2\rho}. \tag{7.28}$$

Também, da Proposição 7.1 (P2) e (P3), temos

$$|G| \leq C_1 r^{2-n} \quad \text{e} \quad |\nabla G| \leq C_2 r^{1-n} \quad \text{em} \quad \Omega_{2\rho}. \tag{7.29}$$

Pela definição de ϕ e usando (7.28) e (7.29), temos

$$\begin{aligned}
\int_{M\setminus\Omega_\rho} \big(a|\nabla\phi|^2 + S\phi^2\big)\, dV_g &= \varepsilon_0^2 \int_{M\setminus\Omega_{2\rho}} \big(a|\nabla G|^2 + SG^2\big)\, dV_g + \varepsilon_0^2 \int_{\Omega_{2\rho}\setminus\Omega_\rho} a|\nabla G|^2 \\
&\quad -2a\langle \nabla G, \nabla(\eta\alpha)\rangle + a|\nabla(\eta\alpha)|^2 + \big(G^2 - 2\eta\alpha G + \eta^2\alpha^2\big)\, S\, dV_g \\
&\leq \varepsilon_0^2 \int_{M\setminus\Omega_\rho} \big(a|\nabla G|^2 + SG^2\big)\, dV_g + \varepsilon_0^2 \int_{\Omega_{2\rho}\setminus\Omega_\rho} 2a|\nabla G||\nabla(\eta\alpha)| \\
&\quad +a|\nabla(\eta\alpha)|^2 + \big(2|\eta\alpha||G| + \big|\eta^2\alpha^2\big|\big)\, |S|\, dV_g \\
&\leq \varepsilon_0^2 \int_{M\setminus\Omega_\rho} \big(a|\nabla G|^2 + SG^2\big)\, dV_g + \varepsilon_0^2 \int_{\Omega_{2\rho}\setminus\Omega_\rho} 2aC_2 r^{1-n} C_{3,\rho} \\
&\quad +a{C_{3,\rho}}^2 + \big(2C_{4,\rho}C_5 r C_1 r^{2-n} + (C_{4,\rho}C_5 r)^2\big)\, C_6 r^2\, dV_g \\
&\leq \varepsilon_0^2 \int_{M\setminus\Omega_\rho} \big(a|\nabla G|^2 + SG^2\big)\, dV_g + \varepsilon_0^2 C_{7,\rho} \int_{B_{2\rho}\setminus B_\rho} \big(r^{1-n}\big)\, dx \\
&\leq \varepsilon_0^2 \int_{M\setminus\Omega_\rho} \big(a|\nabla G|^2 + SG^2\big)\, dV_g + C_{8,\rho}\rho\varepsilon_0^2.
\end{aligned} \tag{7.30}$$

Usando integração por partes e o fato de $a\Delta G + SG = 0$ sobre $M \setminus \{P\}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{M\setminus\Omega_\rho} \big(a|\nabla G|^2 + SG^2\big)\, dV_g &= \int_{M\setminus\Omega_\rho} aG\Delta G dV_g - \int_{\partial\Omega_\rho} aG\langle\nabla G, \nu\rangle d\sigma + \int_{M\setminus\Omega_\rho} SG^2 dV_g \\
&= -\int_{\partial\Omega_\rho} aG\langle\nabla G, \nu\rangle d\sigma
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\partial\Omega_\rho} aG\frac{\partial}{\partial_r}(r^{2-n}+A)d\sigma - \int_{\partial\Omega_\rho} aG\langle\alpha,\nu\rangle d\sigma \\
&\leq -\int_{\partial\Omega_\rho} aG\frac{\partial}{\partial_r}(r^{2-n}+A)d\sigma + C_9\int_{\partial\Omega_\rho}\rho^{3-n}d\sigma \\
&= -\int_{\partial B_\rho} aG\frac{\partial}{\partial_r}(r^{2-n}+A)d\sigma + C_{10}\rho^2.
\end{aligned}
$$

onde ν é um campo vetorial normal apontando para o interior ao longo de $\partial\Omega_\rho$. Assim, juntando com (7.30),

$$
\int_{M\backslash\Omega_\rho}\left(a|\nabla\phi|^2+S\phi^2\right)dV_g \leq -\varepsilon_0^2\int_{\partial\Omega_\rho} aG\frac{\partial}{\partial_r}(r^{2-n}+A)d\sigma + C_{11,\rho}\rho\varepsilon_0^2. \tag{7.31}
$$

Por outro lado, de (7.28), (7.27) e o fato de $u_\varepsilon(r)$ ser uma função decrescente, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\rho}\left(a|\nabla\phi|^2+S\phi^2\right)dV_g &= \int_{\Omega_\rho}\left(a|\nabla u_\varepsilon|^2+S{u_\varepsilon}^2\right)dV_g \\
&\leq \int_{\Omega_\rho} a|\nabla u_\varepsilon|^2dV_g + C_{12}\int_{B_\rho} r^2u_\varepsilon^2dx \\
&\leq \int_{\Omega_\rho} a|\nabla u_\varepsilon|^2dV_g + C_{12}\rho^2\Big[\varepsilon_0(\rho^{2-n}+A)\Big]^2\int_{B_\rho}dx \\
&= \int_{\Omega_\rho} a|\nabla u_\varepsilon|^2dV_g + C_{13}\varepsilon_0^2\Big[\rho^{6-n}+2A\rho^4+A^2\rho^{2+n}\Big] \\
&= \int_{\Omega_\rho} a|\nabla u_\varepsilon|^2dV_g + \varepsilon_0^2O(\rho^{6-n}).
\end{aligned} \tag{7.32}
$$

Onde a última igualdade segue do fato de $0<6-n<4<2+n$, para $3\leq n\leq 5$. Como também $1\leq 6-n$, temos $\rho^{6-n}\leq\rho$. Assim, de (7.31) e (7.32),

$$
\int_M\left(a|\nabla\phi|^2+S\phi^2\right)dV_g \leq \int_{\Omega_\rho} a|\nabla u_\varepsilon|^2dV_g - \varepsilon_0^2\int_{\partial\Omega_\rho} aG\frac{\partial}{\partial r}(r^{2-n}+A)d\sigma + \varepsilon_0^2C_{14,\rho}\rho. \tag{7.33}
$$

Da Observação 4.2 sabemos que

$$
u_\varepsilon\Delta u_\varepsilon = n(n-2)u_\varepsilon^p \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} a|\nabla u_\varepsilon|^2dx = n(n-2)\int_{\mathbb{R}^n} au_\varepsilon^p\,dx = \lambda(S^n)\|u_\varepsilon\|_p^2,
$$

disso e integração por partes, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_\rho} a|\nabla u_\varepsilon|^2dV_g &= \int_{\Omega_\rho} au_\varepsilon\Delta u_\varepsilon dV_g + \int_{\partial\Omega_\rho} u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}d\sigma \\
&= n(n-2)\int_{\Omega_\rho} au_\varepsilon^p\,dV_g + \int_{\partial\Omega_\rho} u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}d\sigma \\
&\leq \lambda(S^n)\|\phi\|_p^2 + \int_{\partial\Omega_\rho} u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}d\sigma.
\end{aligned}
$$

Usando (7.27), sobre $r=\rho$, temos

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} &= \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\rho^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} (2-n)\frac{\rho}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\rho^2}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\rho^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} (2-n)\frac{\rho}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\rho^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\rho^2} \\
&= -(n-2)\frac{1}{\rho}\Big[\varepsilon_0(\rho^{2-n}+A)\Big]^2 \left(\frac{\rho^2}{\varepsilon^2+\rho^2}\right) \\
&\le -(n-2)\frac{1}{\rho}\Big[\varepsilon_0(\rho^{2-n}+A)\Big]^2 \left(1-\frac{\varepsilon^2}{\rho^2}\right) \\
&= -(n-2)\varepsilon_0^2\left[\rho^{3-2n}+2A\rho^{1-n}+A^2\rho^{-1}\right]\left(1-\frac{\varepsilon^2}{\rho^2}\right) \\
&= -(n-2)\varepsilon_0^2\left[\rho^{3-2n}+2A\rho^{1-n}+A^2\rho^{-1}+O(\rho^{-1})\right],
\end{aligned}
$$

onde acima usamos a desigualdade $(t^2+1)^{-1} \ge 1-t^2$ para $t=\varepsilon/\rho$ e o fato de $\varepsilon \ll \rho$.

Por outro lado, sendo $G = r^{2-n}+A+O''(r)$, temos para $r=\rho$,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0^2 G\frac{\partial}{\partial r}(\rho^{2-n}+A) &= \varepsilon_0^2\left[\rho^{2-n}+A+O''(\rho)\right]\left[(2-n)\rho^{1-n}+O(1)\right] \\
&= -(n-2)\varepsilon_0^2\left[\rho^{3-2n}+A\rho^{1-n}+O(\rho^{2-n})\right],
\end{aligned}
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_\rho} u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r}d\sigma - \int_{\partial\Omega_\rho}\varepsilon_0^2 aG\frac{\partial}{\partial r}(r^{2-n}+A)d\sigma &\le -(n-2)\varepsilon_0^2\int_{\partial\Omega_\rho} A\rho^{1-n}+O(\rho^{2-n})d\sigma \\
&= -(n-2)\varepsilon_0^2 A\omega_{n-1}+\varepsilon_0^2 O(\rho).
\end{aligned}
$$

Assim, (7.33) torna-se

$$
E(\phi) = \int_M \left(a|\nabla\phi|^2+S\phi^2\right)dV_g \le \lambda(S^n)\|\phi\|_p^2-(n-2)\omega_{n-1}\varepsilon_0^2 A+\varepsilon_0^2 C_{15,\rho}\rho,
$$

dividindo por $\|\phi\|_p^2$, obtemos

$$
Q(\phi) \le \lambda(S^n) - C_{16}\varepsilon_0^2 A + \varepsilon_0^2 C_{17,\rho}\rho. \tag{7.34}
$$

Sendo $A>0$, temos de (7.27),

$$
\varepsilon_0(\rho^{2-n}+A) \le \varepsilon^{(n-2)/2}\rho^{2-n} \quad\Longrightarrow\quad \varepsilon_0 < \varepsilon^{(n-2)/2} < \varepsilon.
$$

Assim, escolhido ρ arbitrariamente pequeno, fica definida a constante $C_{17,\rho}$ e em seguida escolhemos ε arbitrariamente pequeno. Como $\varepsilon_0 < \varepsilon$ e ρ é pequeno, temos que $\varepsilon_0^2\rho$ decresce mais rápido do que ε_0^2. Daí, sendo $A>0$, de (7.34) temos que $Q(\phi) < \lambda(S^n)$.

Caso (2): M é localmente conformemente plana.

Nesse caso podemos assumir que $g_{ij} = \delta_{ij}$ em $\Omega_{2\rho}$. Em particular $S \equiv 0$ em $\Omega_{2\rho}$ e as estimativas acima são simplificadas. Mais ainda, no caso anterior usamos o fato de $3 \leq n \leq 5$ apenas em (7.32) para obter (7.33). Mas, sendo $S \equiv 0$ em $\Omega_{2\rho}$, não há o fator $\varepsilon_0^2 O(\rho^{6-n})$ em (7.32), implicando que (7.33) continua válido. Com isso, todas as demais estimativas continuam válidas e temos novamente $Q(\phi) < \lambda(S^n)$.

Em resumo obtemos $\lambda(M) < \lambda(S^n)$, o que implica pelo Teorema 4.3 que o problema de Yamabe tem solução.

$\square$

8 Considerações Finais

Vimos como o problema de Yamabe, inicialmente geométrico, foi transformado num problema da teoria de operadores elípticos. O estudo das mudanças conformes de elementos da variedade fora crucial para essa observação, principalmente a mudança conforme de curvatura escalar. Apesar de Yamabe não ter conseguido resolver seu problema usando apenas a teoria linear nesses operadores, ele deixou essa importante contribuição que serviu de base para a busca de soluções.

Aubin e Trundiger complementaram o trabalho e introduziram o conceito de invariante de Yamabe da variedade e precisaram encontrar a forma ótima da desigualdade de Sololev, ou seja, obtiveram novos resultados para atacar o problema. Daí em diante o problema se resumia a encontrar condições para que $\lambda(M) < \lambda(S^n)$.

A solução na esfera foi importante por dois motivos principais: primeiro que os resultados que vinham sendo desenvolvidos não se aplicavam à esfera, pois assumimos que $\lambda(M) < \lambda(S^n)$; segundo que com a solução na esfera conseguimos calcular explicitamente o valor de $\lambda(S^n)$. O Teorema de Obata foi fundamental para este último.

No capítulo 6 vimos dois resultados fundamentais devido a Aubin: para toda variedade Riemanniana compacta vale $\lambda(M) \leq \lambda(S^n)$; e se a variedade é não-localmente conformemente plana, então $\lambda(M) < \lambda(S^n)$ e o problema tinha solução. Note que o uso de coordenadas normais conformes foi fundamental, em vista da expansão da métrica.

Por fim Schoen conclui a conjectura de que $\lambda(M) < \lambda(S^n)$ e, portanto, o problema sempre tem solução. É fato notar que a inspiração de Schoen vem da solução na esfera, pois mudamos as contas para uma variedade com curvatura identicamente zero. Uma teoria nova foi a conjectura de massa positiva, a qual é um problema resolvido para dimensões $3 \leq n \leq 7$.

O problema de Yamabe tem sido uma área de interesse, principalmente outras generalizações como em variedades não-compactas. Um resultado belíssimo provado recentemente garante que o conjunto de soluções do problema de Yamabe tem estrutura de uma variedade compacta. Outra linha de pesquisa é a busca de resultados para operadores do tipo $\Delta + q$, os quais aparecem com certa frequência em vários problemas de análise geométrica.

Referências

[1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces.* 2. ed. New York: Academic Press, 2003.

[2] AMMANN, B.; HUMBERT, E. *Positive mass theorem for the Yamabe Problem on spin manifolds.* Geom. func. anal. 15 (2005), 567-576.

[3] AUBIN, T. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry.* Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[4] BARTNIK, R. *The mass of asymptotically flat manifold.* Commun. Pure Appl. Math. 34 (1986), 661-693.

[5] BOOTHBY, W. M. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry.* New York: Academic Press, 1975.

[6] CAO, J. *The existence of generalized isothermal coordinates for higher dimensional Riemannian manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc., (324): 901-920, 1991.

[7] CHOW, B.; LU, P.; NI, L.. *Hamilton's Ricci Flow.* Graduate Studies in Mathematics, vol. 77. Previdence: American Mathematical Society, 2006.

[8] DO CARMO, M. P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* New Jersey: Prentice-Hall, 1976.

[9] ——————. *Riemannian Geometry.* Boston: Birkhäuser, 1992.

[10] DRUET, O.; HEBEY, E.; ROBERT, F. *Blow-up Theory for Elliptic PDEs in Riemannian Geometry.* Mathematical Notes 45. Princeton: Princeton University Press, 2004.

[11] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics. vol. 19. Providence: American Mathematical Society, 1998.

[12] GRAHAM R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.* 2. ed. Reading, M.A.: Addison-Wesley, 1994.

[13] GÜNTHER, M. *Conformal normal coordinates.* Ann. Global. Anal. Geom., (11): 173-184, 1993.

[14] JOST, J. *Partial Differential Equations.* 3. ed. GTM. New York: Springer Science+Business, 2013.

[15] KATO, T. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[16] LEE, J. M. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature.* GTM. New York: Springer-Verlag, 1997.

[17] LEE, J. M.; PARKER, T. H. *The Yamabe Problem.* Bull. Amer. Math. Soc., (17): 37 - 91, 1987.

[18] LIEB, E. H.; LOSS, M. *Analysis.* 2. ed. Graduate Studies in Mathematics. vol. 14. Providence: American Mathematical Society, 2001.

[19] LIMA, E. L. *Curso de Análise, vol. 2.* 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[20] MELROSE, R. *Lectures Notes: Graduate Analysis Elliptic Regularity and Scattering*. 2008. Disponível em: `http://math.mit.edu/~rbm/18.156-S08/Lecture-Notes.pdf`.

[21] OBATA, M. *The conjectures on transformations of Riemannian manifolds.* J. Diff. Geom. 6 (1971), 271-301.

[22] ROSENBERG, S. *The Laplacian on a Riemannian Manifold: An Introduction to Analysis on Manifolds.* London Mathematical Society Student Texts 31. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[23] SCHOEN, R. *Conformal Deformation of a Riemannian Metric to Constant Scalar Curvature.* J. Diff. Geom. 20 (1984), 479-495.

[24] ——————. *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics.* Em: *Topics in Calculus of Variations*, editado por GIAQUINTA, M. Lectures Notes in Mathematics 1365. Berlin: Springer-Verlag, 1989, 120-154.

[25] SCHOEN, R.; Yau, S. T . *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity.* Comm. Math. Phys. 65 (1979), 45-76.

[26] ——————. *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature.* Invent. Math. 92 (1988), 47-71.

[27] ——————. *Lectures on Differential Geometry.* Boston: International Press, 1994.

[28] TALENTI, G. *Best Constant in Sobolev Inequality.* Ann. Mat. Pura Appl. 110 (1976), 353-372.

[29] VIACLOVSKY, Jeff A. *Lectures Notes: Topics in Riemannian Geometry.* 2011. Disponível em: `http://www.math.wisc.edu/~jeffv/courses/865_F07.html`.

[30] WITTEN, E. *A new proof of the positive energy theorem.* Commun. Math. Phys. 80 (1981) 381-402.

[31] YAMABE, H. *On a deformation of Riemannian structures on a compact manifolds.* Osaka Math. J. 12 (1960), 21-37.

Apêndice

Teorema 8.1. (Mudança de Variáveis) Seja $h : U \longrightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre abertos de $\mathbb{R}^n$. Dado E um subconjunto compacto mensurável de U, então para toda $f : h(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável

$$\int_{h(E)} f(y)dy = \int_E (f \circ h)(x)|detJ(h)(x)|dx.$$

Ver LIMA [19], p. 179.

Teorema 8.2. (Unicidade das Métricas de Curvatura Constante) Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional constante K. Então M^n é isométrica a:

a) S^n_R, se $K = \dfrac{1}{R^2} > 0$,

b) $\mathbb{R}^n_R$, se $K = 0$,

c) $\mathbb{H}^n_R$, se $K = -\dfrac{1}{R^2} < 0$.

Onde $\mathbb{R}^n$, S^n_R e $\mathbb{H}^n_R$ são os chamados espaços modelo de curvatura constante: $\mathbb{R}^n$ com a métrica Euclidiana (com a qual $K \equiv 0$); S^n_R com a métrica induzida da métrica Euclidiana sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ ($K \equiv 1/R^2$); e o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n_R$ de raio R, o qual é o semi-espaço $\{x \in \mathbb{R}^n; x^n > 0\}$ com a métrica $h_R := R^2(x^n)^{-2}\sum(dx^i)^2$ ($K \equiv -1/R^2$).

Demonstração. Ver [16], p. 204. □

Expansão da Métrica e Elemento de Volume

Proposição 8.1. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Em coordenadas normais de g, a função $\det(g_{ij})$ tem a expansão

$$\begin{aligned}\det(g_{ij}) &= 1 - \frac{1}{3}R_{ij}x^ix^j - \frac{1}{6}R_{ij,k}x^ix^jx^k \\ &\quad - \left(\frac{1}{20}R_{ij,kl} + \frac{1}{90}R_{pijm}R_{pklm} - \frac{1}{18}R_{ij}R_{kl}\right)x^ix^jx^kx^l + O(r^5),\end{aligned}$$

onde todas as curvaturas e suas derivadas são avaliadas em P.

Demonstração. Seja $\{x^i\}$ o sistema de coordenadas normais para g sobre uma vizinhança U de p e usemos essas coordenadas para identificar U com um aberto de $\mathbb{R}^n$ e p como sendo a origem. Assim, basta realizarmos a expansão sobre a origem.

Fixados $\tau, \xi \in \mathbb{R}^n$, considere a aplicação $\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma_s(t) = t(\tau + s\xi)$, a qual determina uma família a um parâmetro de geodésicas radiais e seja $T = \gamma_s'(t)$. Vamos escolher $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^n)$ tal que $\xi^i \neq 0$ e $|\tau| = 1$. Notemos que o campo

$$J = t\xi$$

satisfaz a *equação de Jacobi* $\nabla_T^2 J = R_T(X)$, onde R_T é o endomorfismo $R(T, \cdot)T$. De fato, sendo $\gamma_s(t)$ uma geodésica, vale $\nabla_T T = 0$. Também como $\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right] = 0$, temos que $0 = \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s}\right] = [T, J] = \nabla_T J - \nabla_J T$. Com esses dois fatos concluimos o afirmado:

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_J \nabla_T T &= \nabla_T \nabla_J T - \nabla_{[T,J]} T - R(T, J)T \\ &= \nabla_T \nabla_T J - R(T, J)T. \end{aligned}$$

Defina agora $f(t) = \langle J, J \rangle(\gamma_0(t)) = \langle t\xi, t\xi \rangle(t\tau)$. Vamos expandir a função f em torno da origem. Obviamente, $f(0) = 0$, $J(0) = 0$ e $(\nabla_T^2 J)(0) = R(T, J)T(0) = 0$. Assim,

$$\begin{cases} f' = 2\big\langle \nabla_T J, J \big\rangle \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 0, \\ f'' = 2\big\langle \nabla_T^2 J, J \big\rangle + 2\big\langle \nabla_T J, \nabla_T J \big\rangle \quad \Longrightarrow \quad f''(0) = \big\langle \xi, \xi \big\rangle(0), \\ f''' = 2\big\langle \nabla_T^3 J, J \big\rangle + 6\big\langle \nabla_T^2 J, \nabla_T J \big\rangle \quad \Longrightarrow \quad f'''(0) = 0. \end{cases}$$

Derivando novamente, obtemos

$$f^{(4)} = 2\big\langle \nabla_T^4 J, J \big\rangle + 8\big\langle \nabla_T^3 J, \nabla_T J \big\rangle + 6\big\langle \nabla_T^2 J, \nabla_T^2 J \big\rangle,$$

onde podemos calcular $\nabla_T^3 J$ usando a equação de Jacobi e a definição de derivada covariante sobre End(TM) :

$$\nabla_T^3 J = \nabla_T(\nabla_T^2 J) = \nabla_T(R_T(J)) = (\nabla_T R_T)(J) + R_T(\nabla_T J),$$

daí,

$$f^{(4)}(0) = 8\big\langle R_T(\xi), \xi \big\rangle(0).$$

Em seguida, como $\nabla_T^4 J = \nabla_T^2(R_T(J)) = (\nabla_T^2 R_T)(J) + 2(\nabla_T R_T)(\nabla_T J) + R_T(R_T(J))$, temos

$$f^{(5)} = 2\big\langle \nabla_T^5 J, J \big\rangle + 10\big\langle \nabla_T^4 J, \nabla_T J \big\rangle + 20\big\langle \nabla_T^3 J, \nabla_T^2 J \big\rangle$$

$$\therefore f^{(5)}(0) = 20\big\langle (\nabla_T R_T)(\xi), \xi \big\rangle(0).$$

Analogamente, $\nabla_T^5 J = (\nabla_T^3 R_T)(J) + 3(\nabla_T^2 R_T)(\nabla_T J) + 3(\nabla_T R_T)(\nabla_T^2 J) + R_T(\nabla_T^3 J)$, daí $\nabla_T^5 J(0) = 3(\nabla_T^2 R_T)(\xi) + R_T(R_T(\xi))$. Como

$$f^{(6)} = 2\big\langle \nabla_T^6 J, J \big\rangle + 12\big\langle \nabla_T^5 J, \nabla_T J \big\rangle + 30\big\langle \nabla_T^4 J, \nabla_T^2 J \big\rangle + 20\big\langle \nabla_T^3 J, \nabla_T^3 J \big\rangle$$

e R_T é autoadjunto, obtemos

$$f^{(6)}(0) = 36\big\langle(\nabla_T^2 R_T)(\xi), \xi\big\rangle(0) + 32\big\langle R_T(\xi), R_T(\xi)\big\rangle(0).$$

Com isso, tomando a expansão de Taylor de f em torno da origem e dividindo por t^2, obtemos:

$$\begin{aligned}\langle \xi, \xi\rangle(t\tau) &= \langle \xi, \xi\rangle(0) + \frac{t^2}{3}\langle R_T(\xi), \xi\rangle(0) + \frac{t^3}{6}\langle (\nabla_T R_T)(\xi), \xi\rangle(0) \\ &\quad + \frac{t^4}{24}\big\langle (\nabla_T^2 R_T)(\xi), \xi\big\rangle(0) + \frac{2t^4}{45}\langle R_T(\xi), R_T(\xi)\rangle(0) + O(t^5).\end{aligned}$$

Substituindo $x = t\tau$, obtemos $T = \tau = (x^i/t)\partial_i$. Como também $\xi = \xi^p\partial_p$, temos

$$\langle \xi, \xi\rangle(t\tau) = \langle \xi^p\partial_p, \xi^q\partial_q\rangle(x) = g_{pq}(x)\xi^p\xi^q,$$

$$\langle \xi, \xi\rangle(0) = \langle \xi^p\partial_p, \xi^q\partial_q\rangle(0) = \delta_{pq}\xi^p\xi^q,$$

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{3}\big\langle R_T(\xi), \xi\big\rangle(0) &= \frac{t^2}{3}\langle R(T,\xi)T, \xi\rangle(0) = \frac{1}{3}\big\langle R\left(x^i\partial_i, \xi^p\partial_p\right)x^j\partial_j, \xi^q\partial_q\big\rangle(0) \\ &= \frac{1}{3}x^i x^j\xi^p\xi^q R^m_{jip}g_{mj} = \frac{1}{3}x^i x^j \xi^p\xi^q R_{qjip},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{t^3}{6}\langle (\nabla_T R_T)(\xi), \xi\rangle(0) &= \frac{t^3}{6}\langle \nabla_T R(T,\xi)T, \xi\rangle(0) = \frac{1}{6}\big\langle x^k\partial_k R(x^i\partial_i, \xi^p\partial_p)x^j\partial_j, \xi^q\partial_q\big\rangle(0) \\ &= \frac{1}{6}x^i x^j x^k \xi^p\xi^q\partial_k\left(R^m_{jip}\right)g_{mq} = \frac{1}{6}x^i x^j x^k\xi^p\xi^q R_{qjip,k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{t^4}{24}\big\langle (\nabla_T^2 R_T)(\xi), \xi\big\rangle(0) &= \frac{1}{20}\big\langle x^l x^k\partial_l\partial_k R(x^i\partial_i, \xi^p\partial_p)x^j\partial_j, \xi^q\partial_q\big\rangle(0) \\ &= \frac{1}{20}x^i x^j x^k x^l \xi^p\xi^q R_{qjip,kl},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2t^4}{45}\langle R_T(\xi), R_T(\xi)\rangle(0) &= \frac{2t^4}{45}\langle R(T,\xi)T, R(T,\xi)T\rangle(0) \\ &= \frac{2}{45}\big\langle R(x^i\partial_i, \xi^p\partial_p)x^j\partial_j, R(x^k\partial_k, \xi^q\partial_q)x^l\partial_l\big\rangle \\ &= \frac{2}{45}x^i x^j x^k x^l \xi^p\xi^q\big\langle R^m_{jip}\partial_m, R^s_{lkq}\partial_s\big\rangle \\ &= \frac{2}{45}x^i x^j x^k x^l\xi^p\xi^q R_{mjip}R_{mlkq}\end{aligned}$$

Se $|x| = r$, temos $r = |t\tau| = t$. Portanto, substituindo essa e as expressões acima na expansão de f dividida por t^2,

$$\begin{aligned} g_{pq}(x) &= \delta_{pq} + \frac{1}{3}R_{pijq}x^i x^j + \frac{1}{6}R_{pijq,k}x^i x^j x^k \\ &\quad + \left(\frac{1}{20}R_{pijq,kl} + \frac{2}{45}R_{pijm}R_{qklm}\right) x^i x^j x^k x^l + O(r^5), \end{aligned} \tag{8.1}$$

onde o termos com curvatura estão avaliados na origem. Podemos escrever $g_{pq} = \exp A_{pq}$, onde

$$\begin{aligned} A_{pq}(x) &= \frac{1}{3}R_{pijq}x^i x^j + \frac{1}{6}R_{pijq,k}x^i x^j x^k \\ &\quad + \left(\frac{1}{20}R_{pijq,kl} - \frac{1}{90}R_{pijm}R_{qklm}\right) x^i x^j x^k x^l + O(r^5). \end{aligned}$$

De fato, vimos que $g = I + G_2 + G_3 + G_4 + O(r^5)$ e escrevendo $A = A_2 + A_3 + A_4 + O(r^5)$, onde os índices correspondem ao grau do termo. Dado que r é pequeno, temos

$$\begin{aligned} \exp(A) &= I + A + \frac{1}{2}A^2 + O(r^5) = I + G_2 + G_3 + \left(A_4 + \frac{1}{2}A_2^2\right) + O(r^5) \\ &= I + G_2 + G_3 + G_4 + O(r^5). \end{aligned}$$

Por fim, pela fórmula de Jacobi concluimos que

$$\begin{aligned} \det g &= \det(\exp A) = \exp(\mathrm{tr}(A)) = \exp\left(g^{pq}A_{pq}\right) \\ &= \exp\Bigg\{ -\frac{1}{3}R_{ij}x^i x^j - \frac{1}{6}R_{ij,k}x^i x^j x^k \\ &\quad - \left(\frac{1}{20}R_{ij,kl} + \frac{1}{90}R_{pijm}R_{pklm}\right) x^i x^j x^k x^l + O(r^5)\Bigg\} \\ &= 1 + \left\{ -\frac{1}{3}R_{ij}x^i x^j - \frac{1}{6}R_{ij,k}x^i x^j x^k - \left(\frac{1}{20}R_{ij,kl} + \frac{1}{90}R_{pijm}R_{pklm}\right) x^i x^j x^k x^l \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}R_{ij}x^i x^j\right)^2 + O(r^5) \\ &= 1 - \frac{1}{3}R_{ij}x^i x^j - \frac{1}{6}R_{ij,k}x^i x^j x^k \\ &\quad - \left(\frac{1}{20}R_{ij,kl} + \frac{1}{90}R_{pijm}R_{pklm} - \frac{1}{18}R_{ij}R_{kl}\right) x^i x^j x^k x^l + O(r^5). \end{aligned}$$

□

Corolário 8.1. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Em coordenadas normais de g, tem-se a seguinte expansão

$$g^{pq}(x) = \delta^{pq} - \frac{1}{3}R_{pijq}(P)x^i x^j + O(r^3).$$

Demonstração. Dada uma matriz A e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, então usando a expansão de Taylor da função $B \longmapsto B^{-1}$ em torno de $B = I$, obtemos

$$(I + \varepsilon A)^{-1} = I - \varepsilon A + O(\varepsilon^2).$$

De (8.1) podemos escrever $g = I + A + O(r^3)$, onde A é a matriz dada por $A_{pq} = \frac{1}{3} R_{pijq} x^i x^j$. Visto que $|A| = O(r^2)$ e r é pequeno, aplicamos a expansão acima, obtendo

$$g^{-1} = I - (A + O(r^3)) + O(r^6) = I - A + O(r^3).$$

A expressão acima conclui o corolário. Poderíamos continuar o processo, usando a expansão de Taylor, obtendo uma expressão do tipo (8.1).

□

Corolário 8.2. O elemento de volume em coordenadas normais de uma variedade Riemanniana (M, g) tem a expansão

$$\begin{aligned} \sqrt{\det g} &= 1 - \frac{1}{6} R_{ij} x^i x^j - \frac{1}{12} R_{ij,k} x^i x^j x^k \\ &\quad - \left(\frac{1}{40} R_{ij,kl} + \frac{1}{180} R_{pijm} R_{pklm} - \frac{1}{72} R_{ij} R_{kl} \right) x^i x^j x^k x^l + O(r^5). \end{aligned}$$

Demonstração. Como a expansão de Taylor da função $\sqrt{y}$ em torno de $y = 1$ é dada por

$$\sqrt{y} = 1 + \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{8}(y-1)^2 + O(|y-1|^3),$$

para $|y| \longrightarrow 1$, basta aplicá-la à fórmula obtida na proposição acima. □