



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

# Rigidez de esferas bidimensionais área minimizantes em variedades tridimensionais

José Anderson de Lima e Silva

Maceió, Brasil  
Março de 2015

JOSÉ ANDERSON DE LIMA E SILVA

RIGIDEZ DE ESFERAS BIDIMENSIONAIS ÁREA MINIMIZANTES EM VARIEDADES  
TRIDIMENSIONAIS

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 13 de Março de 2015 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva

Maceió, Brasil  
Março de 2015

**Catlogação na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade**

S586r Silva, José Anderson de Lima e.  
Rigidez de esferas bidimensionais área minimizantes em variedades tridimensionais / José Anderson de Lima e Silva – 2015.  
23 f.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.  
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação em Matemática. Maceió, 2015.

Bibliografia: f. 22-23.

1. Imersão. 2. Superfícies mínimas. 3. Curvatura escalar. 4. Superfície com curvatura média constante. 5. Isometria. I. Título.

CDU: 514.756.24

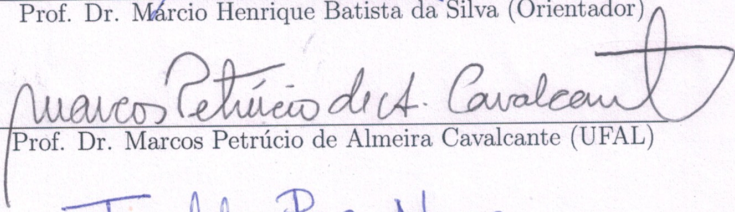
JOSÉ ANDERSON DE LIMA E SILVA

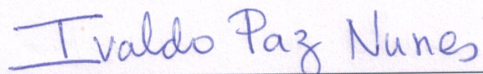
RIGIDEZ DE ESFERAS BIDIMENSIONAIS ÁREA MINIMIZANTES EM VARIEDADES  
TRIDIMENSIONAIS

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 13 de Março de 2015 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

  
Prof. Dr. Marcio Henrique Batista da Silva (Orientador)

  
Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante (UFAL)

  
Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes (UFMA)

*A Jesus*

*“Um sonho adiado por um ano, em virtude de uma encefalite que não se sabe de onde veio. Mas graças ao nosso bom Deus e a pessoas extraordinárias, fiquei curado e o dia tão desejado chegou.  
Obrigado senhor Jesus”*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, a Deus por todo seu amor e cuidado, e por sempre estar comigo em todos os momentos difíceis.

A minha mãe, Regina Lima por todo seu amor e dedicação para comigo. A minha amada noiva Renata Moreira pelo companheirismo, cuidado, amor e incentivo.

Aos meus familiares pelo amor, cuidado e por tornarem a minha vida tão alegre e suave. Em especial a minha querida irmã Aleide Lima pela amizade, amor e cuidado.

Ao orientador e amigo Márcio Batista pela amizade, paciência, cuidado para com minha orientação e pelos seus conselhos tão úteis academicamente e na minha vida pessoal, os quais levarei comigo para sempre.

Agradeço aos professores do Instituto de Matemática da UFAL, que fizeram parte de mais essa etapa da minha formação acadêmica. Ao professor Marcos Petrúcio e ao professor Feliciano Vitório por sempre estar disponível para tirar dúvidas.

Ao Dr. Fernando Tenório Gameleira por seu brilhante trabalho na medicina. Obrigado por tudo.

A todos os colegas de turma e da sala de estudo. Em especial aos amigos Rogério Vitório e Robson Silva pelas conversas matemáticas e pelas distrações durante o coffee da tarde. A Diego Chicuta e Fabrício Lira pelas ajudas nos problemas computacionais. Aos alunos de doutorado José Ivan Santos e Abraão Mendes pela amizade, e por sempre estarem disponíveis para tirarem minhas dúvidas.

A todos os funcionários da UFAL. Em especial aos Funcionários do Instituto de Matemática, com ênfase para dona Maria, pelo café sempre disponível.

Enfim, a CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

Seja  $(M, g)$  uma variedade riemanniana compacta tridimensional. Temos que

$$\inf\{\text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g); f \in \mathcal{F}\} \cdot \inf_M R \leq 4\pi,$$

onde  $\mathcal{F}$  é o conjunto de todas as funções suaves  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$  e  $R$  é a curvatura escalar de  $M$ . Se vale a igualdade, mostraremos que o recobrimento universal de  $(M, g)$  é isométrico a um cilindro.

**Palavras chave:** Imersão, superfícies mínimas, curvatura escalar, superfície com curvatura média constante, isometria.



# Abstract

Let  $(M, g)$  be a compact three-manifold. We have

$$\inf\{\text{area}(\mathbb{S}^2, f^*g); f \in \mathcal{F}\} \cdot \inf_M R \leq 8\pi,$$

where  $\mathcal{F}$  denotes the set of all smooth maps  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$  and  $R$  is the scalar curvature of  $M$ . If equality holds, we show that the universal cover of  $(M, g)$  is isometric to a cylinder.

**Palavras chave:** Immersion, minimal surfaces, scalar curvature, constant mean curvature surfaces, isometry.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1 Definições e fatos básicos . . . . .	2
1.2 Primeira e segunda variação da área . . . . .	3
1.3 Reescalado uma métrica . . . . .	4
<b>2 Prova do resultado</b>	<b>7</b>
2.1 Desigualdade Geométrica . . . . .	7
2.2 Rigidez da Desigualdade Geométrica . . . . .	10
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>21</b>

# Introdução

Neste trabalho consideraremos  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana compacta tridimensional. Denote por  $\mathcal{F}$  o conjunto das aplicações suaves  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$  e defina

$$\mathcal{A}(M, g) := \inf\{\text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g); f \in \mathcal{F}\}.$$

O resultado que abordaremos aqui, foi provado em 2010 por H. Bray, S. Brendle e A. Neves, onde eles consideram  $(M, g)$  com curvatura escalar positiva e provam que

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M R \leq 8\pi.$$

Além disso, se a igualdade ocorre então o recobrimento universal de  $(M, g)$  é isométrico ao cilindro  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .

Esse trabalho está inserido em uma linha de pesquisa bastante fértil, ver [3], [4], [6], [7] e [8], e as referências por eles citadas. O caso de superfícies foi tratado primeiramente por Galloway em [4], o qual usa a técnica de deformação local e em seguida um processo de colagem adequado para assim poder aplicar um resultado de Schoen e Yau, [11]. Em seguida, Bray et al trata o caso de planos projetivos em variedades tri-dimensionais. A prova deste usa fortemente a existência da solução em tempos curtos para o fluxo de Ricci, ver [15]. O trabalho seguinte é o alvo desta dissertação e já explanamos sobre o mesmo no parágrafo anterior. Mais recentemente, Nunes [7] completou a descrição do quadro até agora exposto, provando o caso em que o ambiente pode ter curvatura negativa e o gênero da superfície é maior que um. M. Micallef e V. Moraru [16] fazem uma prova unificada de [4], [5] e [7] com abordagens diferentes.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, fixaremos notações e apresentaremos as principais definições e fatos que serão utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Vale ressaltar que o conhecimento prévio de fatos básicos de geometria Riemanniana será de grande utilidade para uma boa leitura do texto.

### 1.1 Definições e fatos básicos

Considere  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$ . A curvatura  $\mathcal{R}$  de  $M$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  uma aplicação  $\mathcal{R}(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  dada por

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

onde  $Z \in \mathcal{X}(M)$  e  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ . Aqui  $\mathcal{X}(M)$  denota o espaço dos campos de vetores suave em  $M$ .

O tensor curvatura de Riemann de  $(M, g)$  é definido por

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = g(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, W),$$

onde  $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$ . Algumas vezes, denotaremos a métrica  $g$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Para quaisquer campos  $X, Y, Z, W$  em  $\mathcal{X}(M)$ , o tensor curvatura de Riemann satisfaz às seguintes relações de simetria

$$\langle \mathcal{R}(X, Y)Z, W \rangle = -\langle \mathcal{R}(Y, X)Z, W \rangle \quad \text{e} \quad \langle \mathcal{R}(X, Y)Z, W \rangle = -\langle \mathcal{R}(X, Y)W, Z \rangle. \quad (1.1)$$

Ver demonstração de (1.1) em [2], Proposição 2.5, página 102.

Dados um ponto  $p \in M$  e um subespaço bidimensional  $\sigma \subset T_p M$ , o número real

$$K(X, Y) = \frac{(X, Y, X, Y)}{|X \wedge Y|^2},$$

é chamado curvatura seccional de  $\sigma$  em  $p$ , onde  $\{X, Y\}$  é uma base de  $\sigma$ ,  $(X, Y, X, Y) = \langle \mathcal{R}(X, Y)X, Y \rangle$  e  $|X \wedge Y|^2 = |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2$ . O número  $K(X, Y)$  independe da base  $\{X, Y\}$  escolhida (ver Proposição 3.1 em [2], página 104).

A curvatura de Ricci de  $(M, g)$  em  $p \in M$  é a forma bilinear simétrica

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n \mathcal{R}(X, e_i, Y, e_i),$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal de  $T_p M$ .

A curvatura escalar de  $(M, g)$  em  $p$ , é definida por

$$R = \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i),$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal de  $T_p M$ .

Considere  $(\bar{M}^{n+m}, g)$  uma variedade Riemanniana com a conexão riemanniana  $\bar{\nabla}$ . Sejam  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$  uma imersão isométrica e  $p \in M$ , podemos provar usando a fórmula de Koszul que a conexão Riemanniana de  $M$  dada por

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top,$$

e a segunda formula fundamental de  $M$  em  $p$ , denotada por  $II$  é definida como sendo

$$II(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp,$$

onde  $X, Y \in T_p M$ .

O vetor curvatura média  $H(p)$  de  $f$  em  $p \in M$ , é definido por

$$H(p) = \sum_{i=1}^n II(e_i, e_i),$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal de  $T_p M$ .

Sejam  $X, Y, Z \in TM$  e  $A$  o operador simétrico associado à  $II$ , a expressão dada por

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \bar{\mathcal{R}}(X, Y)Z + \langle AX, Z \rangle AY - \langle AY, Z \rangle AX,$$

é chamada a equação de Gauss (ver [10], página 4).

## 1.2 Primeira e segunda variação da área

Seja  $f : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$  uma imersão, onde  $\Sigma$  é compacta. Considere  $f_t : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  uma variação normal de  $\Sigma$ , onde  $\epsilon > 0$  e  $f$  é uma função suave tal que  $f(x, 0) = x$ , para todo  $x \in \Sigma$  e  $f_t = f(t, \cdot) : \Sigma \rightarrow M$  é uma imersão para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  fixo.

**Proposição 1.1** (Primeira formula da variação da área) Temos

$$\left. \frac{d}{dt} V(\Sigma_t) \right|_{t=0} = - \int_{\Sigma} \langle X, H \rangle dv,$$

onde  $X$  denota o campo de vetor variacional  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0)$ ,  $V(\Sigma_t)$  e  $dv$  denotam a área de  $\Sigma_t$  e o elemento de área de  $\Sigma$  respectivamente.

**Demonstração.** Ver capítulo 1, seção 3 em [13]. ■

**Definição 1.1** Uma imersão  $f : \Sigma \rightarrow M$  é dita mínima, se a curvatura média  $H$  é identicamente nula.

Para a Proposição abaixo, considere  $f : \Sigma \rightarrow M$  uma imersão mínima e seja  $f_t : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  uma variação normal de uma  $\Sigma$  compacta. Denotaremos por  $X = \xi N$  o campo variacional.

**Proposição 1.2** (Segunda formula da variação da área) Temos

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} V(\Sigma_t) \right|_{t=0} = \int_{\Sigma} |\nabla \xi|^2 - (\bar{Ric}(N, N) + |A|^2) \xi^2 dv,$$

onde  $\nabla \xi$  denota o gradiente em  $\Sigma$  da função  $\xi$ .

**Demonstração.** Ver capítulo 1, seção 8 em [13]. ■

Dizemos que uma imersão mínima  $f : \Sigma \rightarrow M$  é estável, se para cada variação normal suave  $f_t$  de  $\Sigma$  tivermos

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} V(\Sigma_t) \right|_{t=0} = \int_{\Sigma} |\nabla \xi|^2 - (\bar{Ric}(N, N) + |A|^2) \xi^2 dv \geq 0.$$

Seja  $\Sigma_t$  uma variação suave de  $\Sigma$  e considere  $\rho_t = g(N_t(x), \frac{\partial}{\partial t} f_t(x))$ . Assim

$$-\frac{d}{dt} H(t) = \Delta \rho_t + (\bar{Ric}(N_t(x), N_t(x)) + |II_t|^2) \rho_t, \quad (1.2)$$

onde  $N_t(x)$  denota o campo de vetores normal unitário em  $\Sigma_t$  e os demais elementos já conhecidos que estão com índice  $t$  referem-se à  $\Sigma_t$ , (ver [8], página 39).

### 1.3 Reescalonado uma métrica

**Proposição 1.3** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $c > 0$  um número real, então  $\bar{g} = cg$  é uma métrica e vale as seguintes relações

(i)  $\mathcal{R}^{\bar{g}} = \mathcal{R}^g$ ,  $Ric^{\bar{g}} = Ric^g$  e  $R^{\bar{g}} = \frac{1}{c}R^g$ .

(ii)  $\mathcal{A}(M, \bar{g}) = c \cdot \mathcal{A}(M, g)$ .

**Demonstração.** De

$$\mathcal{A}(M, g) = \inf\{\text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g); f \in \mathcal{F}\}.$$

Se  $c > 0$ , temos

$$\mathcal{A}(M, cg) = \inf\{\text{área}(\mathbb{S}^2, f^*(cg)); f \in \mathcal{F}\}.$$

Agora

$$\begin{aligned} \text{área}(\mathbb{S}^2, f^*(cg)) &= \int_{\mathbb{S}^2} \sqrt{\det(cf^*g)} dx dy = \int_{\mathbb{S}^2} \sqrt{c^2 \det(f^*g)} dx dy \\ &= c \int_{\mathbb{S}^2} \sqrt{\det(f^*g)} dx dy = c \cdot \text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g). \end{aligned}$$

Assim

$$\mathcal{A}(M, cg) = c \cdot \mathcal{A}(M, g).$$

Seja  $\bar{g} = cg$ , seus símbolos de Christoffel são dados por

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_l \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{g}_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{g}_{li} - \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{g}_{ij} \right\} \bar{g}^{lk} \\ &= \frac{1}{2} \sum_l \left\{ c \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) \right\} \cdot (c^{-1} g^{lk}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_l \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} \cdot g^{lk} \\ &= \Gamma_{ij}^k. \end{aligned}$$

Donde

$$\mathcal{R}^{\bar{g}}(X, Y)Z = \mathcal{R}^g(X, Y)Z. \text{ Isto é, } \mathcal{R}^{\bar{g}} = \mathcal{R}^g.$$

Por definição, temos que

$$Ric^{\bar{g}}(X, Y) = \sum_i \bar{g}(\mathcal{R}^{\bar{g}}(X, E_i)E_i, Y), \quad (1.3)$$

onde  $\{E_i\}$  é ortonormal para  $\bar{g}$ . Isto é,  $\bar{g}(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ , daí  $g(E_i, E_j) = \frac{1}{c}\delta_{ij}$ , então  $g(\sqrt{c}E_i, \sqrt{c}E_j) = \delta_{ij}$  e portanto  $\{\sqrt{c}E_i\}$  é ortogonal para  $g$ .

Assim por (1.3), vem que

$$\begin{aligned} Ric^{\bar{g}}(X, Y) &= \sum_i c g(\mathcal{R}(X, E_i)E_i, Y) \\ &= \sum_i \sqrt{c} \cdot \sqrt{c} g(\mathcal{R}(X, E_i)E_i, Y) \\ &= \sum_i g(\mathcal{R}(X, \sqrt{c}E_i)\sqrt{c}E_i, Y) \\ &= Ric^g(X, Y). \end{aligned}$$

Logo

$$Ric^{\bar{g}} = Ric^g.$$

Para  $\{E_j\}$  ortonormal, temos por definição

$$\begin{aligned} R^{\bar{g}} &= \sum_j Ric^{\bar{g}}(E_j, E_j) = \sum_j Ric^g(E_j, E_j) \\ &= \frac{1}{c} \sum_j c Ric^g(E_j, E_j) = \frac{1}{c} \sum_j Ric^g(\sqrt{c}E_j, \sqrt{c}E_j) \\ &= \frac{1}{c} R^g. \end{aligned}$$

Reescrevendo

$$R^{\bar{g}} = \frac{1}{c} R^g.$$

■



# Capítulo 2

## Prova do resultado

Aqui, enunciaremos o principal resultado deste trabalho e faremos a sua prova. Na seção (2.1) começamos enunciando o Teorema principal e em seguida faremos a prova da desigualdade geométrica. Na seção (2.2) é feito o estudo sobre rigidez da desigualdade geométrica.

### 2.1 Desigualdade Geométrica

**Teorema 2.1** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com  $\pi_2(M) \neq 0$ . Temos que*

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M \bar{R} \leq 8\pi,$$

onde  $\bar{R}$  é a curvatura escalar de  $(M, g)$  e  $\mathcal{A}(M, g) := \inf\{\text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g); f \in \mathcal{F}\}$ . Além disso se vale a igualdade, então o recobrimento universal de  $(M, g)$  é isométrico ao cilindro  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  munido da métrica produto padrão.

Vamos apresentar alguns resultados preliminares que serão necessários na prova da desigualdade. O primeiro resultado é:

**Proposição 2.2** *Dada qualquer imersão  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ , temos*

$$\int_{\mathbb{S}^2} (\bar{R} - 2\bar{Ric}(N, N) - |II|^2) d\mu_{f^*g} \leq 8\pi,$$

onde  $II$  representa a segunda forma fundamental de  $f$ .

**Demonstração.** Sejam  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$  uma imersão e  $\{e_1, e_2\}$  em  $T\Sigma$  ortonormais, onde  $\Sigma = f(\mathbb{S}^2)$ . Completando esta base com o vetor normal unitário a  $T\Sigma$ ,  $N$ , obtemos  $\{e_1, e_2, N\}$  em  $TM$  ortonormais.

Utilizando a equação de Gauss na segunda igualdade abaixo, segue que

$$\begin{aligned}
Ric(X, Y) &:= \langle \mathcal{R}(X, e_1)Y, e_1 \rangle + \langle \mathcal{R}(X, e_2)Y, e_2 \rangle \\
&= \langle \bar{\mathcal{R}}(X, e_1)Y + \langle AX, Y \rangle Ae_1 - \langle Ae_1, Y \rangle AX, e_1 \rangle \\
&\quad + \langle \bar{\mathcal{R}}(X, e_2)Y + \langle AX, Y \rangle Ae_2 - \langle Ae_2, Y \rangle AX, e_2 \rangle \\
&= \langle \bar{\mathcal{R}}(X, e_1)Y, e_1 \rangle + \langle AX, Y \rangle \langle Ae_1, e_1 \rangle - \langle Ae_1, Y \rangle \langle AX, e_1 \rangle \\
&\quad + \langle \bar{\mathcal{R}}(X, e_2)Y, e_2 \rangle + \langle AX, Y \rangle \langle Ae_2, e_2 \rangle - \langle Ae_2, Y \rangle \langle AX, e_2 \rangle \\
&= \bar{Ric}(X, Y) - \langle \bar{\mathcal{R}}(X, N)Y, N \rangle + \langle AX, Y \rangle (\langle Ae_1, e_1 \rangle + \langle Ae_2, e_2 \rangle) \\
&\quad - (\langle AX, e_1 \rangle \langle AY, e_1 \rangle + \langle AX, e_2 \rangle \langle AY, e_2 \rangle) \\
&= \bar{Ric}(X, Y) - \langle \bar{\mathcal{R}}(X, N)Y, N \rangle + \langle AX, Y \rangle H - \langle AX, AY \rangle.
\end{aligned}$$

Reescrevendo

$$Ric(X, Y) = \bar{Ric}(X, Y) - \langle \bar{\mathcal{R}}(X, N)Y, N \rangle + H \langle AX, Y \rangle - \langle AX, AY \rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
R &= Ric(e_1, e_1) + Ric(e_2, e_2) \\
&= \bar{Ric}(e_1, e_1) - \langle \bar{\mathcal{R}}(e_1, N)e_1, N \rangle + H \langle Ae_1, e_1 \rangle - \langle Ae_1, Ae_1 \rangle \\
&\quad + \bar{Ric}(e_2, e_2) - \langle \bar{\mathcal{R}}(e_2, N)e_2, N \rangle + H \langle Ae_2, e_2 \rangle - \langle Ae_2, Ae_2 \rangle \\
&= \bar{R} - \bar{Ric}(N, N) - (\langle \bar{\mathcal{R}}(Ne_1)N, e_1 \rangle + \langle \bar{\mathcal{R}}(N, e_2)N, e_2 \rangle) + H \cdot H - Tr A^2 \\
&= \bar{R} - \bar{Ric}(N, N) - \bar{Ric}(N, N) + H^2 - |A|^2 \\
&= \bar{R} - 2\bar{Ric}(N, N) + H^2 - |A|^2.
\end{aligned}$$

Sabemos que a curvatura seccional é dada por

$$K(X, Y) = \frac{\langle \mathcal{R}(X, Y)X, Y \rangle}{|X \wedge Y|}.$$

Assim

$$K = K(e_1, e_2) = \langle \mathcal{R}(e_1, e_2)e_1, e_2 \rangle = Ric(e_1, e_1) = Ric(e_2, e_2),$$

donde

$$2K = R = Ric(e_1, e_1) + Ric(e_2, e_2),$$

portanto

$$K = \frac{R}{2} \text{ curvatura de Gauss.}$$

Dessa forma segue que

$$2K - H^2 = \bar{R} - 2\bar{Ric}(N, N) - |A|^2.$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{R} - 2\bar{Ric}(N, N) - |A|^2) d\mu_{f^*g} &= \int_{\mathbb{S}^2} 2K - H^2 d\mu_{f^*g} \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^2} 2K d\mu_{f^*g} = 2 \cdot 2\pi \cdot 2 = 8\pi, \end{aligned}$$

na penúltima igualdade foi usado o Teorema de Gauss-Bonnet. ■

O próximo resultado, devido Meeks-Yau em [14], nos garante a existência de uma imersão minimizante. O resultado é:

**Proposição 2.3** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana com  $\pi_2(M) \neq 0$ . Então existe  $f \in \mathcal{F}$  suave tal que  $\text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g) = \mathcal{A}(M, g)$ . Além disso  $f$  é uma imersão.*

**Demonstração.** Ver Teorema 7 em [14]. ■

**Demonstração do Teorema 2.1.**

Pela Proposição acima, considere  $f \in \mathcal{F}$  com  $\text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g) = \mathcal{A}(M, g)$ . Assim, como  $f$  minimiza área, a fórmula da segunda variação garante que

$$0 \leq - \int_{\mathbb{S}^2} uLu d\mu_{f^*g} = - \int_{\mathbb{S}^2} u(\Delta_{f^*g}u + \bar{Ric}(N, N)u + |A|^2u) d\mu_{f^*g}.$$

Rescrevendo,

$$- \int_{\mathbb{S}^2} (u\Delta_{f^*g}u + |A|^2u^2 + \bar{Ric}(N, N)u^2) d\mu_{f^*g} \geq 0,$$

donde

$$\int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N, N) + |A|^2)u^2 d\mu_{f^*g} \leq - \int_{\mathbb{S}^2} u\Delta_{f^*g}u d\mu_{f^*g} = \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 d\mu_{f^*g},$$

para cada função suave  $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Tomando  $u = 1$ , vem que

$$\int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N, N) + |A|^2) d\mu_{f^*g} \leq 0.$$

Assim, usando a Proposição 2.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g) \cdot \inf_M \bar{R} &= \int_{\mathbb{S}^2} 1 d\mu_{f^*g} \cdot \inf_M \bar{R} = \int_{\mathbb{S}^2} \inf_M \bar{R} d\mu_{f^*g} \\
&\leq \int_{\mathbb{S}^2} \bar{R} d\mu_{f^*g} \leq \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{R} + |A|^2) d\mu_{f^*g} \\
&= \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{R} + |A|^2) d\mu_{f^*g} - 2 \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N, N) + |A|^2) d\mu_{f^*g} \\
&\quad + 2 \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N, N) + |A|^2) d\mu_{f^*g} \\
&= \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{R} - 2\bar{Ric}(N, N) - |A|^2) d\mu_{f^*g} \\
&\quad + 2 \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N, N) + |A|^2) d\mu_{f^*g} \\
&\leq 8\pi + 2 \int_{\mathbb{S}^2} \bar{Ric}(N, N) + |A|^2 d\mu_{f^*g} \leq 8\pi.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Isto completa a prova do caso da desigualdade.

## 2.2 Rigidez da Desigualdade Geométrica

Nesta seção trataremos da análise do que ocorre na igualdade do Teorema 2.1. Sendo assim, suponha que

$$\mathcal{A}(M, g) \inf_M \bar{R} = 8\pi.$$

A Proposição 1.3 garante que a quantidade  $\text{área}(M, g) \cdot \inf_M \bar{R}$  é invariante por reescalonamento. Assim, assumamos que

$$\mathcal{A}(M, g) = 4\pi \quad \text{e} \quad \inf_M \bar{R} = 2.$$

A Proposição 2.3 garante que existe  $f \in \mathcal{F}$  imersão suave tal que

$$\text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g) = \mathcal{A}(M, g) = 4\pi.$$

Sob a hipótese da igualdade do Teorema 2.1, provaremos que a imagem de  $\mathbb{S}^2$  por  $f$  possui boas propriedades. O resultado é o seguinte:

**Proposição 2.4** *Seja  $f \in \mathcal{F}$  uma imersão suave tal que  $\text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g) = 4\pi$ . Então  $\Sigma = f(\mathbb{S}^2)$  é uma superfície totalmente geodésica. Além disso  $\bar{R} = 2$  e  $\bar{Ric}(N, N) = 0$  em cada ponto de  $\Sigma$ .*

**Demonstração.** Inicialmente provaremos que se  $\int_{\mathbb{S}^2} uLu d\mu_{f^*g} = 0$ , onde  $Lu = \Delta u + (\bar{Ric}(N, N) + |A|^2)u$ . Então  $Lu = 0$ .

De fato, a estabilidade nos garante que

$$- \int_{\mathbb{S}^2} (u + tv) L(u + tv) d\mu_{f^*g} \geq 0, \text{ para } t \in \mathbb{R} \text{ e } v \text{ função suave.}$$

Daí, usando a linearidade e simetria do operador  $L$ , obtemos que

$$- \int_{\mathbb{S}^2} (u + tv) (Lu + tLv) d\mu_{f^*g} \geq 0,$$

donde

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^2} uLu + utLv + tvLu + t^2vLv d\mu_{f^*g} \leq 0 \\ & t^2 \int_{\mathbb{S}^2} vLv d\mu_{f^*g} + 2t \int_{\mathbb{S}^2} vLu d\mu_{f^*g} + \int_{\mathbb{S}^2} uLu d\mu_{f^*g} \leq 0. \end{aligned}$$

Identificando  $a = \int_{\mathbb{S}^2} vLv d\mu_{f^*g}$ ,  $b = 2 \int_{\mathbb{S}^2} vLu d\mu_{f^*g}$  e  $c = \int_{\mathbb{S}^2} uLu d\mu_{f^*g}$ , obtemos um polinômio na variável  $t$ . Vemos que este é não positivo, donde seu discriminante também o é. Então

$$0 \geq \left( 2 \int_{\mathbb{S}^2} vLu d\mu_{f^*g} \right)^2 - 4 \int_{\mathbb{S}^2} vLv d\mu_{f^*g} \cdot \int_{\mathbb{S}^2} uLu d\mu_{f^*g}.$$

Como  $\int_{\mathbb{S}^2} uLu d\mu_{f^*g} = 0$ , obtemos que

$$0 \geq \left( 2 \int_{\mathbb{S}^2} vLu d\mu_{f^*g} \right)^2 \geq 0,$$

assim  $\int_{\mathbb{S}^2} vLu d\mu_{f^*g} = 0$ , para todo  $v$ . Portanto  $Lu = 0$ .

De posse desse resultado vamos desenvolver a demonstração desta proposição. Note que estamos assumindo que

$$\mathcal{A}(M, g) = 4\pi \quad \text{e} \quad \inf_M \bar{R} = 2.$$

Assim, as desigualdades em (2.1) se tornam igualdades. Em particular

$$\int_{\mathbb{S}^2} (\bar{R} + |A|^2) d\mu_{f^*g} = 8\pi \tag{2.2}$$

e

$$\int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N, N) + |A|^2) d\mu_{f^*g} = 0. \tag{2.3}$$

Seja  $u = 1$ . Observe, por 2.3, que  $u$  satisfaz  $\int_{\mathbb{S}^2} uLu = 0$ . Logo  $Lu = 0$ , donde

$$\begin{aligned} 0 &= L1 = \Delta 1 + (\bar{Ric}(N, N) + |A|^2) \cdot 1 \\ &= 0 + \bar{Ric}(N, N) + |A|^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\bar{Ric}(N, N) + |A|^2 = 0. \quad (2.4)$$

Agora por (2.2)

$$8\pi = \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{R} + |A|^2) d\mu_{f^*g} \geq \int_{\mathbb{S}^2} \bar{R} d\mu_{f^*g} \geq \int_{\mathbb{S}^2} \inf_M \bar{R} d\mu_{f^*g} = \inf_M \bar{R} \cdot \text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g) = 8\pi.$$

Daí,

$$|A|^2 = 0 \Rightarrow |A| = 0 \quad \text{e} \quad \bar{R} = \inf_M \bar{R} = 2 \Rightarrow \bar{R} = 2.$$

Assim por (2.4)

$$\bar{Ric}(N, N) = 0,$$

isto completa a prova. ■

O próximo resultado garante a existência de uma folheação local de  $M$  por superfícies com curvatura média constante.

**Proposição 2.5** *Seja  $f \in \mathcal{F}$  uma imersão suave tal que  $\text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g) = 4\pi$ . Então existe  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , positivo e uma aplicação suave  $w : \mathbb{S}^2 \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:*

(a) *Para cada  $x \in \mathbb{S}^2$  e cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,*

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(w, 0) = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{S}^2} (w(x, t) - t) d\mu_{f^*g} = 0.$$

(b) *Para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , a superfície*

$$\Sigma_t = \{\exp_{f(x)}(w(x, t) N(x)) : x \in \mathbb{S}^2\}$$

*tem curvatura média constante.*

**Demonstração.** O operador de Jacobi associado a imersão mínima  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$  é dado por

$$L = \Delta_{f^*g} + Ric(N, N) + |A|^2,$$

donde pela Proposição 2.4, temos  $Ric(N, N) = 0$  e  $|A| = 0$ , daí  $L = \Delta_{f^*g}$ .

Fixe  $\lambda \in (0, 1)$  e considere os seguintes espaços  $X = \{u \in C^{2,\lambda}(\mathbb{S}^2); \int_{\mathbb{S}^2} u d\mu_{f^*g} = 0\}$  e  $Y = \{u \in C^{0,\lambda}(\mathbb{S}^2); \int_{\mathbb{S}^2} u d\mu_{f^*g} = 0\}$  os quais são espaços de Banach, como veremos abaixo.

Temos que  $C^{2,\lambda}(\mathbb{S}^2)$  e  $C^{0,\lambda}(\mathbb{S}^2)$  são espaços de Banach (Ver Teorema 1, [9], página 241), basta olhar  $\mathbb{S}^2 \subset \Omega$  aberto.

Para ver que  $X$  é um espaço de Banach, observe que este é um subespaço de  $C^{2,\lambda}(\mathbb{S}^2)$  e fechado pois é pré-imagem do zero pela função  $F$  abaixo

$$F : C^{2,\lambda}(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$u \mapsto \int_{\mathbb{S}^2} u \, d\mu_{f^*g}$$

Note que  $F$  é uma função contínua, então  $F^{-1}(0) = X$  é fechado. Também não é difícil de ver que  $X$  é um subespaço vetorial de  $C^{2,\lambda}(\mathbb{S}^2)$ , daí  $X$  é Banach. Analogamente se ver que  $Y$  é Banach. Para cada  $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja  $\Sigma_u = \{\exp_{f(x)}(u(x)N(x)); x \in \mathbb{S}^2\}$ , onde  $N(x)$  é o campo de vetores normais em  $\Sigma = f(\mathbb{S}^2)$ .

Sejam  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tais que  $\Sigma_{u+t} = \{\exp_{f(x)}((u(x)+t)N(x)); x \in \mathbb{S}^2\}$  seja compacta de classe  $C^{2,\lambda}$ , para todo  $(u, t) \in B(0, \delta_2) \times (-\delta_1, \delta_1)$ , onde  $B(0, \delta_2) = \{u \in C^{2,\lambda}(\mathbb{S}^2); \|u\|_{C^{2,\lambda}} < \delta_2\}$ . Denotaremos a curvatura média de  $\Sigma_{u+t}$  por  $H_{\Sigma_{u+t}}$ .

Agora considere  $\varphi : B(0, \delta_2) \times (-\delta_1, \delta_1) \rightarrow Y$  dada por

$$\varphi(u, t) = H_{\Sigma_{u+t}} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} H_{\Sigma_{u+t}} \, d\mu_{f^*g}.$$

Note que  $\varphi(0, 0) = 0$ , já que  $\Sigma_0 = \Sigma$ .

Calculando  $D\varphi(0, 0) \cdot v$ , para  $v \in X$ , temos

$$\begin{aligned} D\varphi(0, 0) \cdot v &= \frac{d\varphi}{ds}(0, sv)|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \left( H_{\Sigma_{sv}} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} H_{\Sigma_{sv}} \, d\mu_{f^*g} \right) \Big|_{s=0} \\ &= -Lv + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} Lv \, d\mu_{f^*g} \\ &= -\Delta_{f^*g}v + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \Delta_{f^*g}v \, d\mu_{f^*g} \\ &= -\Delta_{f^*g}v. \end{aligned}$$

Como  $\Delta_{f^*g} : X \rightarrow Y$  é um isomorfismo linear, pelo Teorema da função implícita, vem que existem  $0 < \epsilon < \delta_1$  e  $u(t) = u(\cdot, t) \in B(0, \delta_2)$  para  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  tal que

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(u(t), t) = 0, \quad \text{para todo } t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Assim, definindo  $w(x, t) = u(x, t) + t$ , para  $(x, t) \in \mathbb{S}^2 \times (-\epsilon, \epsilon)$ , temos que toda superfície  $\Sigma_t = \{\exp_{f(x)}(w(x, t)N(x)); x \in \mathbb{S}^2\}$  tem  $H_{\Sigma_t} = t\epsilon$ , pois pela definição da  $\varphi$ , temos

$$0 = \varphi(0, t) = H_{\Sigma_t} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} H_{\Sigma_t} \, d\mu_{f^*g}.$$

Observe que  $w(x, 0) = u(x, 0) = 0$  e  $\int_{\mathbb{S}^2} (w(\cdot, t) - t) \, d\mu_{f^*g} = 0$ , uma vez que  $w(\cdot, t) - t = u(\cdot, t) \in B(0, \delta_2) = \{u \in C^{2,\lambda}(\mathbb{S}^2); \int_{\mathbb{S}^2} u \, d\mu_{f^*g} = 0\}$ .

Agora veremos que

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{S}^2.$$

Note que

$$0 = \varphi(u(t), t) = H_{\Sigma_{w(\cdot, t)}} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} H_{\Sigma_{w(\cdot, t)}} d\mu_{f^*g}, \quad (2.5)$$

para cada  $t \in (-\delta_1, \delta_1)$ .

Defina  $f(x, t) := \exp_{f(x)}(w(x, t)N(x))$ , para  $x \in \mathbb{S}^2$ . Daí

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0)N(x), \text{ para } x \in \mathbb{S}^2.$$

Derivando (2.5) em  $t = 0$  e usando que  $L = \Delta_{f^*g}$ , temos

$$0 = -\Delta_{f^*g} \left( \frac{\partial w}{\partial t}(\cdot, 0) \right) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \Delta_{f^*g} \left( \frac{\partial w}{\partial t}(\cdot, 0) \right) d\mu_{f^*g} = -\Delta_{f^*g} \left( \frac{\partial w}{\partial t}(\cdot, 0) \right).$$

Portanto  $\frac{\partial w}{\partial t}(\cdot, 0) = cte$ .

Finalmente diferenciando  $\int_{\mathbb{S}^2} (w(\cdot, t) - t) d\mu_{f^*g} = 0$  em  $t = 0$ , obtemos

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{\partial w}{\partial t}(\cdot, 0) d\mu_{f^*g} = 4\pi.$$

Assim, concluímos que  $\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ . ■

Defina

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{S}^2 &\rightarrow M \\ x &\mapsto f_t(x) = \exp_{f(x)}(w(x, t)N(x)), \end{aligned}$$

para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Note que  $f_0(x) = f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ . Denotaremos por  $N_t(x) \in T_{f_t(x)}M$  o vetor normal unitário a superfície  $\Sigma_t = f_t(\mathbb{S}^2)$  no ponto  $f_t(x)$ . Assumiremos que  $N_t$  depende suavemente de  $x$  e  $t$ , e  $N_0(x) = N(x)$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ . Além disso,  $II_t$  denota a segunda forma fundamental de  $f_t$ . O próximo resultado garante que variações perto da  $f$ , são estáveis.

**Lema 2.1** *Existe um número real positivo  $\delta < \epsilon$ , tal que se  $t \in (-\delta, \delta)$  e  $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave, onde  $\int_{\mathbb{S}^2} u d\mu_{f_t^*g} = 0$ , então*

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|_{f_t^*g}^2 d\mu_{f_t^*g} - \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2)u^2 d\mu_{f^*g} \geq 0.$$



**Demonstração.** Podemos encontrar uma constante uniforme  $C > 0$  tal que

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|_{f_t^*g}^2 d\mu_{f_t^*g} \geq C \int_{\mathbb{S}^2} u^2 d\mu_{f_t^*g}, \quad (2.6)$$

para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  e cada função suave  $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $\int_{\mathbb{S}^2} u d\mu_{f_t^*g} = 0$ .

Pela Proposição 2.4 resulta que

$$\sup_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) \rightarrow 0$$

quando  $t \rightarrow 0$ . Daí e por (2.6) segue o resultado. ■

**Lema 2.2** *Para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , temos*

$$\int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) d\mu_{f_t^*g} \geq 0.$$

**Demonstração.** Como  $f$  minimiza área em sua classe de homotopia, temos que

$$\text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^*g) \geq \text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g) = 4\pi.$$

Além disso, temos que  $\inf_M \bar{R} = 2$ . Aplicando a Proposição 2.2 a  $f_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$ , vem que

$$\begin{aligned} 8\pi = \text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g) \inf_M \bar{R} &\leq \text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^*g) \inf_M \bar{R} = \int_{\mathbb{S}^2} 1 d\mu_{f_t^*g} \cdot \inf_M \bar{R} \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \inf_M \bar{R} d\mu_{f_t^*g} \leq \int_{\mathbb{S}^2} \bar{R} d\mu_{f_t^*g} \leq \int_{\mathbb{S}^2} \bar{R} + |A_t|^2 d\mu_{f_t^*g} \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} \bar{R} + |A_t|^2 d\mu_{f_t^*g} - 2 \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) d\mu_{f_t^*g} + 2 \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) d\mu_{f_t^*g} \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{R} - 2\bar{Ric}(N_t, N_t) - |A_t|^2) d\mu_{f_t^*g} + 2 \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) d\mu_{f_t^*g} \\ &\leq 8\pi + 2 \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) d\mu_{f_t^*g}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{S}^2} \bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2 d\mu_{f_t^*g} \geq 0. \quad \blacksquare$$

Sabemos que para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  a superfície  $\Sigma_t$  tem curvatura média constante  $H_t$ . Como o vetor curvatura média  $\vec{H}_t$  é normal a superfície  $\Sigma_t$  e como existe apenas uma direção normal, vem que  $\vec{H}_t$  é paralelo a  $N_t$ . Assim podemos escrever  $\vec{H}_t = H_t N_t$ , donde  $\langle \vec{H}_t, N_t \rangle = H_t$ , isto nos garante que fazendo  $t$  variar temos uma função suave  $H(t)$ . Portanto podemos escrever  $\vec{H}_t = -H(t) N_t$ , onde  $H(t)$  é uma função suave em  $t$ .

Para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , defina a função

$$\begin{aligned} \rho_t : \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{R}. \\ x &\mapsto \rho_t(x) := \langle N_t(x), \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

Claramente,  $\rho_0(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ . Pela continuidade, podemos encontrar um número real positivo  $\lambda < \delta$  tal que  $\rho_t(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$  e todo  $t \in (-\lambda, \lambda)$ . A função  $\rho_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a equação de Jacobi

$$\Delta_{f_t^*g} \rho_t + (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) \rho_t = -H'(t). \quad (2.8)$$

**Proposição 2.6** *Temos que  $\text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^*g) = 4\pi$  para todo  $t \in (-\lambda, \lambda)$ .*

**Demonstração.** Denotaremos por  $\bar{\rho}_t$  o valor médio da função  $\rho_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  com respeito a métrica  $f_t^*g$  que é dado por

$$\bar{\rho}_t = \frac{1}{\text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^*g)} \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\mu_{f_t^*g}.$$

Aplicando o Lema (2.1) na função  $\rho_t - \bar{\rho}_t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla(\rho_t - \bar{\rho}_t)|_{f_t^*g}^2 d\mu_{f_t^*g} - \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) (\rho_t - \bar{\rho}_t)^2 d\mu_{f_t^*g} &\geq 0 \\ \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla \rho_t|_{f_t^*g}^2 d\mu_{f_t^*g} - \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) (\rho_t - \bar{\rho}_t)^2 d\mu_{f_t^*g} &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ . Além disso o Lema (2.2) implica que

$$\bar{\rho}_t^2 \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) d\mu_{f_t^*g} \geq 0, \quad (2.10)$$

para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Somando os dois membros de (2.9) e (2.10), temos

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla \rho_t|_{f_t^*g}^2 d\mu_{f_t^*g} + \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) \rho_t (2\bar{\rho}_t - \rho_t) d\mu_{f_t^*g} \geq 0, \quad (2.11)$$

para todo  $t \in (-\delta, \delta)$ .

Agora multiplicando a Equação (2.8) por  $(2\bar{\rho}_t - \rho_t)$ , vem que

$$(2\bar{\rho}_t - \rho_t) [\Delta_{f_t^*g} \rho_t + (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) \rho_t] = (2\bar{\rho}_t - \rho_t) \cdot (-H'(t)).$$

Integrando,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{S}^2} (2\bar{\rho}_t - \rho_t) \Delta_{f_t^* g} \rho_t d\mu_{f_t^* g} + \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) \rho_t (2\bar{\rho}_t - \rho_t) d\mu_{f_t^* g} \\
&= \int_{\mathbb{S}^2} -H'(t) (2\bar{\rho}_t - \rho_t) d\mu_{f_t^* g} = -H'(t) \int_{\mathbb{S}^2} (2\bar{\rho}_t - \rho_t) d\mu_{f_t^* g} \\
&= -H'(t) \left[ \int_{\mathbb{S}^2} 2\bar{\rho}_t d\mu_{f_t^* g} - \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\mu_{f_t^* g} \right] = -H'(t) \left[ 2\bar{\rho}_t \int_{\mathbb{S}^2} 1 d\mu_{f_t^* g} - \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\mu_{f_t^* g} \right] \\
&= -H'(t) \left[ 2 \frac{1}{\text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^* g)} \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\mu_{f_t^* g} \cdot \text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^* g) - \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\mu_{f_t^* g} \right] \\
&= -H'(t) \left[ 2 \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\mu_{f_t^* g} - \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\mu_{f_t^* g} \right] = -H'(t) \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\mu_{f_t^* g}. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^2} (2\bar{\rho}_t - \rho_t) \Delta_{f_t^* g} \rho_t d\mu_{f_t^* g} &= - \int_{\mathbb{S}^2} \nabla(2\bar{\rho}_t - \rho_t) \nabla \rho_t d\mu_{f_t^* g} \\
&= - \int_{\mathbb{S}^2} -\nabla \rho_t \nabla \rho_t d\mu_{f_t^* g} \\
&= \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla \rho_t|_{f_t^* g}^2 d\mu_{f_t^* g}.
\end{aligned}$$

Assim por (2.12), temos

$$\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla \rho_t|_{f_t^* g}^2 d\mu_{f_t^* g} + \int_{\mathbb{S}^2} (\bar{Ric}(N_t, N_t) + |A_t|^2) \rho_t (2\bar{\rho}_t - \rho_t) d\mu_{f_t^* g} = -H'(t) \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\mu_{f_t^* g}. \tag{2.13}$$

De (2.11) e (2.13), obtemos que

$$-H'(t) \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\mu_{f_t^* g} \geq 0,$$

para cada  $t \in (-\delta, \delta)$ . Portanto  $H'(t) \leq 0$  para todo  $t \in (-\lambda, \lambda)$ , pois  $\rho_t(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$  e todo  $t \in (-\lambda, \lambda)$ . Daí como  $H(0) = 0$ , vem que

$$H(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in (-\lambda, 0]$$

e

$$H(t) \leq 0 \text{ para todo } t \in [0, \lambda).$$

Assim pela identidade

$$\frac{d}{dt} \text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^* g) = \int_{\mathbb{S}^2} \langle H(t) N_t, \frac{\partial}{\partial t} f_t \rangle d\mu_{f_t^* g} = H(t) \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\mu_{f_t^* g}.$$

Obtemos que

$$\frac{d}{dt} \text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^*g) = H(t) \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\mu_{f_t^*g} \geq 0 \text{ para todo } t \in (-\lambda, 0]$$

e

$$\frac{d}{dt} \text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^*g) = H(t) \int_{\mathbb{S}^2} \rho_t d\mu_{f_t^*g} \leq 0 \text{ para todo } t \in [0, \lambda).$$

Além disso  $\frac{d}{dt} \text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^*g) = 0$ , em  $t = 0$  já que  $H(0) = 0$ . Pelo teste da primeira derivada, vem que 0 é ponto de máximo da  $\text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^*g)$ .

Portanto

$$\text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^*g) \leq \text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g) = 4\pi \text{ para todo } t \in (-\lambda, \lambda).$$

E como  $f$  minimiza área em sua classe de homotopia, obtemos que  $\text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^*g) = 4\pi$  para todo  $t \in (-\lambda, \lambda)$ .

O próximo resultado garante que as superfícies obtidas na Proposição 2.5 são totalmente geodésicas, possivelmente com tempos menores.

**Proposição 2.7** *Para cada  $t \in (-\lambda, \lambda)$ , a superfície  $\Sigma_t$  é totalmente geodésica, e temos  $\bar{R} = 2$  e  $\bar{Ric}(N_t, N_t) = 0$  em cada ponto da  $\Sigma_t$ . Além disso, a função  $\rho_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é constante.*

**Demonstração.** Seja  $t \in (-\lambda, \lambda)$  fixo. Pela Proposição 2.6, temos que  $\text{área}(\mathbb{S}^2, f_t^*g) = 4\pi$ . Assim da Proposição 2.4, vem que  $\Sigma_t$  é totalmente geodésica,  $\bar{R} = 2$  e  $\bar{Ric}(N_t, N_t) = 0$  em cada ponto de  $\Sigma_t$ . Substituindo estes valores na Equação (2.8), obtemos  $\Delta_{f_t^*g} \rho_t = 0$ .

Por um cálculo simples, podemos obter que  $\Delta_{f_t^*g}(\rho_t)^2 = 2\rho_t \Delta_{f_t^*g} \rho_t + 2|\nabla \rho_t|_{f_t^*g}^2$ , donde  $\Delta_{f_t^*g}(\rho_t)^2 = 2|\nabla \rho_t|_{f_t^*g}^2$ , já que  $\rho_t$  é harmônica. Assim pelo Teorema da Divergência, temos que

$$0 = \int_{\mathbb{S}^2} \Delta_{f_t^*g}(\rho_t)^2 d\mu_{f_t^*g} = \int_{\mathbb{S}^2} 2|\nabla \rho_t|_{f_t^*g}^2 d\mu_{f_t^*g},$$

donde segue que  $\nabla \rho_t = 0$  sobre  $\mathbb{S}^2$ , e portanto a função  $\rho_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é constante. ■

**Corolário 2.8** *O campo de vetor normal  $N_t$  é paralelo perto de  $\Sigma$ . Em particular, para cada ponto de  $\Sigma$  existe uma vizinhança a qual contém este ponto e que é isométrica a um produto Riemanniano.*

**Demonstração.** Por compatibilidade, temos

$$\left\langle D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle N_t, \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle - \left\langle N_t, D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle$$

e

$$\left\langle D_{\frac{\partial f_t}{\partial t}} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle N_t, D_{\frac{\partial f_t}{\partial t}} \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Daí e como  $\rho_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é constante pela Proposição 2.7, segue que

$$\begin{aligned} \left\langle D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle - \left\langle D_{\frac{\partial f_t}{\partial t}} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle N_t, \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial t} \left\langle N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle N_t, \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \rho_t = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

para cada  $x \in \mathbb{S}^2$ . Além disso

$$\left\langle D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle N_t, D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} \frac{\partial f_t}{\partial x_j} \right\rangle$$

e

$$\left\langle D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_j}} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle N_t, D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_j}} \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Assim

$$\left\langle D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_j} \right\rangle - \left\langle D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_j}} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle = 0, \quad (2.15)$$

para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ .

Note que  $\left\{ \frac{\partial f_t}{\partial t}, \frac{\partial f_t}{\partial x_1}, \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \right\}$  é uma base de  $T_{f(x)}M$ . Portanto, se  $V \in T_{f(x)}M$  por (2.14) e (2.15), vem que

$$\left\langle D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t, V \right\rangle - \left\langle D_V N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle = 0,$$

para cada  $x \in \mathbb{S}^2$  e todo vetor  $V \in T_{f(x)}M$ . Em particular, temos

$$\left\langle D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t, N_t \right\rangle - \left\langle D_{N_t} N_t, \frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right\rangle = 0 \text{ para cada } x \in \mathbb{S}^2. \quad (2.16)$$

Agora escreva

$$D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t = -A_{N_t} \frac{\partial f_t}{\partial x_i} + \nabla_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}}^\perp N_t.$$

Daí, como  $\Sigma_t$  é totalmente geodésica e tem codimensão 1, temos  $D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t = 0$  para cada ponto  $x \in \mathbb{S}^2$ , onde  $i = 1, 2$ . Além disso,  $N_t$  unitário nos garante que  $\langle N_t, N_t \rangle = 1$ , donde  $D_{N_t} N_t$  é tangente a  $\Sigma_t$ . Assim por (2.16), vem que  $D_{N_t} N_t = 0$ . Portanto de  $D_{\frac{\partial f_t}{\partial x_i}} N_t = 0$  e  $D_{N_t} N_t = 0$ , concluímos que  $N_t$  é paralelo perto de  $\Sigma$ .

Em particular como  $N_t$  é paralelo perto de  $\Sigma$ , para cada ponto perto de  $\Sigma$  temos que associado a  $N_t$  uma única curva que passa nesse ponto e tem  $N_t$  como direção. Assim associado a  $N_t$ , temos as famílias das curvas. Note que, podemos olhar as famílias das curvas tanto com os pontos em  $\Sigma$  quanto em  $\Sigma_t$ , isto é, no parâmetro  $t$ .

Denotaremos por  $\varphi_t(p)$  a curva mencionada acima que em  $t = 0$  passa no ponto  $p \in \Sigma$  e tem  $N_t$  como direção. Seja  $V \subset \Sigma$  uma vizinhança pequena em torno de  $p$ . Donde temos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned}\varphi : V \times (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow (M, g). \\ (x, t) &\mapsto \exp_{f(x)}(t N(x))\end{aligned}$$

Como

$$\varphi_* \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = N(x)$$

e

$$\varphi_* \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0, x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x).$$

Temos que  $\varphi_*$  leva base em base. Daí  $\varphi_*$  é isomorfismo, de modo que pelo Teorema da Aplicação Inversa  $\varphi$  é difeomorfismo local.

Podemos definir a métrica  $\varphi^*g$ , por

$$\varphi^*g(X, Y) = g(\varphi_*X, \varphi_*Y), \text{ onde } X, Y \in T(V \times (-\epsilon, \epsilon)).$$

Portanto  $\varphi$  é uma isometria local. Como  $\Sigma$  é compacta podemos cobrir  $\Sigma$  com uma quantidade finita de vizinhanças  $V_\lambda$ . Cada  $V_\lambda$  tem um  $\epsilon_\lambda$  associado, assim basta escolher o menor  $\epsilon_\lambda$ . Isto completa nossa prova. ■

Sejam  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $(\mathbb{S}^2, f^*g)$ . Defina a aplicação

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow M. \\ (x, t) &\mapsto \phi(x, t) := \exp_{f(x)}(t N(x))\end{aligned}$$

Decorre do Corolário 2.8, que a restrição  $\phi|_{\mathbb{S}^2 \times (-\delta, \delta)}$  é uma isometria local se  $\delta > 0$  for suficientemente pequeno.

**Proposição 2.9** *A aplicação  $\phi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M$ , como definida anteriormente é uma isometria local.*

**Demonstração.** Primeiro mostraremos que  $\phi|_{\mathbb{S}^2 \times [0, \infty)}$  é uma isometria local. Suponha que isto é falso.

Seja  $\tau$  o menor número real positivo, tal que  $\phi|_{\mathbb{S}^2 \times [0, \tau]}$  é uma isometria local. Agora defina  $\tilde{f}_\tau : \mathbb{S}^2 \rightarrow M$  por  $\tilde{f}_\tau(x) := \phi(x, \tau)$ .

Note que

$$\begin{aligned}\phi(x, t) &\text{ é continua,} \\ \phi(x, 0) &= \exp_{f(x)}(0 \cdot N(x)) = f(x), \\ \phi(x, \tau) &= \tilde{f}_\tau(x).\end{aligned}$$

Daí  $\tilde{f}_\tau$  é homotópica a  $f$ . Por conseguinte  $\tilde{f}$  representa um elemento de  $\mathcal{F}$ .

Além disso

$$\text{área}(\mathbb{S}^2, \tilde{f}^*g) = \text{área}(\mathbb{S}^2, f^*g) = 4\pi,$$

pois  $\phi|_{\mathbb{S}^2 \times [0, \tau]}$  é uma isometria local. Portanto  $\tilde{f}$  tem área mínima entre todos os mapas de  $\mathcal{F}$ .

Pelo Corolário 2.8 cada ponto em  $\tilde{\Sigma} = \tilde{f}(\mathbb{S}^2)$  tem uma vizinhança que é isométrica a um produto riemanniano. Consequentemente, se  $\delta > 0$  é suficientemente pequeno, então  $\phi|_{\mathbb{S}^2 \times [0, \tau + \delta]}$  é uma isometria local. Isto contradiz a maximalidade de  $\tau$ .

Portanto  $\phi|_{\mathbb{S}^2 \times [0, \infty)}$  é isometria local. Um argumento análogo mostra que  $\phi|_{\mathbb{S}^2 \times (-\infty, 0]}$  é uma isometria local. Isto completa nossa prova. ■

De  $\phi : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M$  ser isometria local, segue que  $\phi$  é uma aplicação de recobrimento (ver Lema 3.3, página 166 em [2]). Como  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  é simplesmente conexo, vem que  $\phi$  é o recobrimento universal de  $(M, g)$ . Portanto o cilindro  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  é isométrico ao recobrimento universal de  $(M, g)$ . De modo que concluirmos nosso resultado.

# Referências Bibliográficas

- [1] Bang and Y. Chen, Riemannian Submanifolds: A survey, arXiv: 1307.1875v1 [math.DG] 7 Jul 2013.
- [2] do Carmo, M.P., Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 5ª edição, 2011.
- [3] F. Hang and X. Wang, Rigidity theorems for compact manifolds with boundary and positive Ricci curvature, J. Geom. Anal. 19 (2009), 628-642.
- [4] G. Galloway, Rigidity of marginally trapped surfaces and the topology of black holes, Comm. Anal. Geom. 16 (2008), 217-229.
- [5] H. Bray, S. Brendle and A. Neves, Rigidity of area-minimizing two- spheres in three-manifolds, Comm. Anal. Geom. 18 (2010), 821-830.
- [6] H. Bray, S. Brendle, M. Eichmair, and A. Nenes, Area-minimizing projective planes in tree-manifolds, Comm. Pure Appl. Math. 63 (2010), 1237-1247.
- [7] I. Nunes, Rigidity of area-minimizing hyperbolic surfaces in three- manifolds, J. of Geom. Anal., published electronically 20 December 2011, doi: 10.1007/s12220-011-9287-8.
- [8] L. C. Ambrozio, Constant mean curvature foliations and scalar curvature rigidity of three-manifolds, Doctoral Thesis, IMPA, Rio de Janeiro, March 19th 2014.
- [9] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, American Mathematical Society, Berkeley 1997.
- [10] Marcos Djaczer, Submanifolds and Isometric Immersions, Mathematics Lecture Series, Publish or Perish, United States of America.
- [11] R. Schoen and S.T. Yau, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature, Ann. Math. 110 (1979), 127-142.
- [12] S. Brendle, Rigidity phenomena involving scalar curvature, Surveys in Differential Geometry (to appear).



- [13] Tobias Holck Colding and William P. Minicozzi II, A course in minimal surfaces, Graduate studies in mathematics; v. 121, American Mathematical Society 2011, ISBN 978-0-8218-5323-8.
- [14] W. Meeks and S.T. Yau, Topology of three-dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory, *Ann. Math.* 112 (1980), 441-484.
- [15] Hamilton, R. S. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.* 17, 255-306 (1982).
- [16] M. Micallef and V. Moraru, Splitting of 3-manifolds and rigidity of area-minimising surfaces, [arXiv:1107.5346](https://arxiv.org/abs/1107.5346).