

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

TIAGO NOVELLO DE BRITO

CÁLCULO DE LINHAS DE CURVATURA SOBRE MALHAS DE
TRIÂNGULOS SEM PARAMETRIZAÇÃO USANDO GEODÉSICAS
DISCRETAS

Maceió
2014

TIAGO NOVELLO DE BRITO

CÁLCULO DE LINHAS DE CURVATURA SOBRE MALHAS DE
TRIÂNGULOS SEM PARAMETRIZAÇÃO USANDO GEODÉSICAS
DISCRETAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thales Vieira

Co-Orientador: Prof. Dr. Dimas Martínez

Maceió

2014

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Maria Auxiliadora G. da Cunha

B862C Brito, Tiago Novello de.
Cálculo de linhas de3 curvatura sobre malhas de triângulos sem
parametrização usando geodésicas discretas / Tiago Novello de Brito. – 2014.
53 f. : il.

Orientador: Thales Vieira.
Co-orientadora: Dimas Martínez.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Maceió, 2014.

Bibliografia: f. 50-51.
Apêndice: f. 52-53.

1. Tensor de curvatura . 2. Linhas de curvaturas. 3. Geodésicas retas. 4.
Transporte paralelo. I. Título.

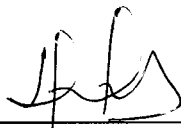
CDU: 514.12/.774.8

CÁLCULO DE LINHAS DE CURVATURA SOBRE MALHAS DE TRIÂNGULOS SEM PARAMETRIZAÇÃO USANDO GEODÉSICAS DISCRETAS

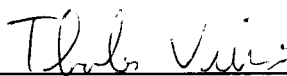
TIAGO NOVELLO DE BRITO

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Computação Gráfica apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Dimas Martinez (Co-orientador)



Prof. Dr. Thales Vieira (Orientador)



Prof. Dr. Thomas Lewiner

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela força concedida.

A minha família, em particular meus pais Clarinda e Jose carlos, meu irmão Rafael, pelo constante apoio e carinho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Thales Vieira pelo seu apoio, comprometimento e pelas várias reuniões que foram de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Dimas Martínez por suas sugestões e ajuda na compreensão de alguns tópicos ao longo do trabalho.

Aqueles que fizeram e fazem parte do Laboratório de Computação Gráfica, por sua amizade, pelos momentos de descontração e aprendizado.

A todos os companheiros de Mestrado, pois através da amizade, companheirismo e compartilhamento de conhecimento, momentos importantes e difíceis ao longo do curso tornaram-se menos difíceis e foram concluídos. Em especial, obrigado Douglas, Diego Barboza, Joas, Abraão, Nayane e Diego Chicuta.

Aos docentes do Instituto de Matemática que tanto contribuíram na minha formação acadêmica. Em especial aos professores Thales Vieira, Dimas Martínez, Adelailson Peixoto, Marcio Batista, krerley Oliveira, e Walter Huaraca, pelas disciplinas ministradas que cursei ao longo do curso.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro durante o curso.

Lista de Figuras

1.1	Desenho do Cone.	10
1.2	Centro cultural Heydar Aliyev Center em Baku, capital do Azerbaijão, projetado por Zaha Hadid.	11
1.3	Pinturas de Vincent van Gogh.	12
1.4	Ilustração do trabalho de Hildebrandt et al. [6]. Lado esquerdo, malha com as linhas características, do direito as linhas e as silhuetas.	13
1.5	Passos do remalhamento poligonal anisotrópico proposto por Alliez et al. [1]	13
1.6	As linhas sobre a malha de triângulos buda representam as linhas de curvatura calculadas pelo método apresentado no artigo [11].	14
2.7	Aplicação de Gauss	16
2.8	C e C_n têm mesma curvatura normal em p . Π é a seção normal em p ao longo de v	16
2.9	Construção do tensor. A região em cinza é a vizinhança V de v	18
2.10	Base de uma triângulo	19
2.11	Campo de direções de mínima curvatura sobre a malha de triângulo Mulher	20
2.12	Do lado esquerdo temos um wedge, do direito um trisector	23
3.13	Distribuição de sementes. Os pontos s_i são sementes.	26
3.14	Do lado esquerdo a representação do Método de Euler, e do lado direito o Método Runge-Kutta de quarta ordem.	27
3.15	Ângulos entre as arestas incidentes em um vértice $p \in M$	29
3.16	Ângulos θ_l e θ_r são as somas dos β_i e α_i , respectivamente.	29
4.17	Aproximação inicial Γ_0	36
4.18	Passos para correção de um vértice $p \in M$. A aplicação ϕ é uma isometria	37
5.19	Suavização do tensor de curvatura 3D. Figura (1): sem suavização, na Figura (2): 1 suavização, na Figura (3): 3 suavizações, e na Figura (4): 20 suavizações.	42
5.20	Suavização do tensor de curvatura 3D. Figura (1): 0 suavização, na Figura (2): 1 suavização, na Figura (3): 3 suavizações.	43

5.21	Linhas de curvatura sobre o elipsoide. Do lado esquerdo as linhas de curvatura mínima, e do direito de curvatura máxima	44
5.22	Linhas de curvatura sobre o toro. Do lado esquerdo as linhas de curvatura mínima, e do direito de curvatura máxima	44
5.23	Linhas de curvatura sobre o coelho. Do lado esquerdo as linhas de curvatura mínima, e do direito de curvatura máxima	45
5.24	Linhas de curvatura sobre a mulher. Do lado de baixo as linhas de curvatura mínima, e de cima de curvatura máxima	45
5.25	Linhas de curvatura sobre a vaca. Do lado esquerdo as linhas de curvatura mínima, e do direito de curvatura máxima	46
5.26	Linhas de curvatura sobre o armadillo. Do lado esquerdo as linhas de curvatura mínima, e do direito de curvatura máxima	46
5.27	Linhas de curvatura sobre a vaca. Na figura (a) usamos σ igual a 0,5 vezes o comprimento m da aresta mediana, na (b) $\sigma = 1,8 \cdot m$, e em (c) $\sigma = 3,6 \cdot m$	47

RESUMO

As linhas de curvatura são objetos de grande importância em diversas áreas do conhecimento, como na Arquitetura, nas Engenharias, nas Artes, e na própria Computação Visual, para realizar análise de geometria ou remalhamento, por exemplo. Este trabalho descreve um método para calcular linhas de curvatura sobre malhas de triângulos sem usar parametrização. Baseando-se no trabalho de Alliez et al. [1], o qual usa parametrizações aproximadamente conformes para calcular linhas de curvatura, foram aplicados conceitos envolvendo geodésicas e transporte paralelo de vetores para calcular e suavizar tensores de curvatura, e integrar linhas de curvatura na própria geometria da superfície. Foram realizadas experiências para demonstrar que o método é capaz de calcular linhas de curvatura em superfícies de gênero arbitrário, além de evitar problemas causados por distorções de parametrizações.

Palavras-chave: tensor de curvatura. linhas de Curvatura. geodésicas retas. transporte paralelo.

ABSTRACT

Lines of curvature are objects of great importance in several areas of knowledge, such as architecture, engineering, arts, and Visual Computing itself, where they are useful to perform geometry analysis and remeshing, for example. This work describes a method to compute lines of curvature on triangle meshes without requiring a parameterization. Based on the work of Alliez et al. [1], which uses approximately conform parameterizations to compute lines of curvature, concepts involving geodesics and parallel transport of vectors were applied to calculate and smooth curvature tensors, and integrating lines of curvature in the geometry of the surface. Experiments were performed to demonstrate that the method is able to compute lines of curvature on surfaces of arbitrary genus, and avoid problems caused by distortions of parameterizations.

Keywords: tensor of curvature. lines of curvature. straight geodesics. parallel transport.

SUMÁRIO

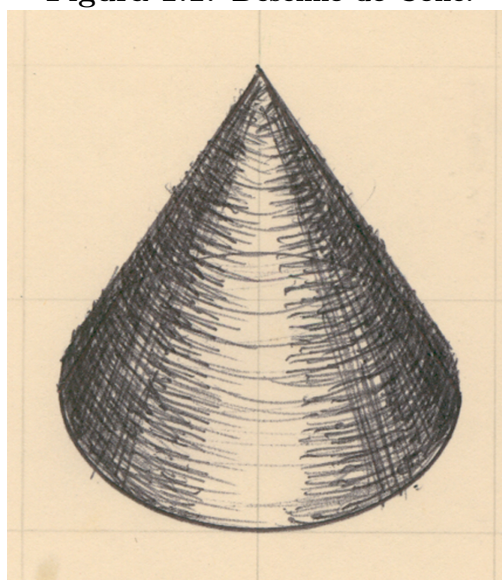
1 INTRODUÇÃO	10
1.1 Trabalhos relacionados	12
2 CAMPOS TENSORIAIS	15
2.1 Aplicação de Gauss	15
2.2 Tensor em malhas	17
2.3 Interpolação de campos tensoriais em malhas	18
2.4 Pontos umbílicos	20
2.4.1 Cálculo de pontos umbílicos sobre triângulos	21
2.4.2 Caracterização de ponto umbílicos	21
3 INTEGRAÇÃO	24
3.1 Sistema de equações diferenciais	25
3.1.1 Distribuição de sementes	25
3.2 Runge-Kutta 2D	26
3.3 Transporte paralelo e geodésicas sobre malhas de triângulos	28
3.4 Runge-Kutta sobre malhas de triângulos	30
3.5 Extração de autovetores durante a integração	31
3.6 Critério de paradas e densidade das linhas de curvatura	32
4 SUAVIZAÇÃO	35
4.1 Geodésicas iterativas	35
4.2 Suavizando T	37
5 RESULTADOS	38
5.1 Performance	38
5.2 Suavização	41
5.3 Integração das linhas de curvatura	41
5.4 Detalhes de implementação	44
6 CONCLUSÃO	48
REFERÊNCIAS	50
APÊNDICE	52

INTRODUÇÃO

Em geometria diferencial as linhas de curvaturas são curvas regulares traçadas sobre uma superfície regular, cujas direções tangentes são paralelas as direções na qual a superfície se curva mais ou se curva menos. Podemos pensar em linhas de curvatura ao desenhar um cone: uma das maneiras mais fácil de representar a forma da sua geometria seria traçar os círculos e as retas que este contém, os quais são suas linhas de curvatura, veja por exemplo a Figura .

As linhas de curvatura são objetos de grande importância em várias áreas, veja na Figura um exemplo de sua aplicação na arquitetura. Note que as linhas do monumento se aproximam de linhas de curvatura, dando um destaque maior na geometria de sua superfície. Na Figura , temos dois exemplos de pinturas de Vincent van Gogh, onde ele usa linhas para descrever a geometria de alguns detalhes, por exemplo os chapéus, e estas linhas assemelham-se à linhas

Figura 1.1: Desenho do Cone.



Fonte: Disponível em

<<http://4.bp.blogspot.com/-eDv0ye5bUZM/UUlqKtysTI/AAAAAAAAABtk/a1kLFmI5Neo/>>. Acesso em 17

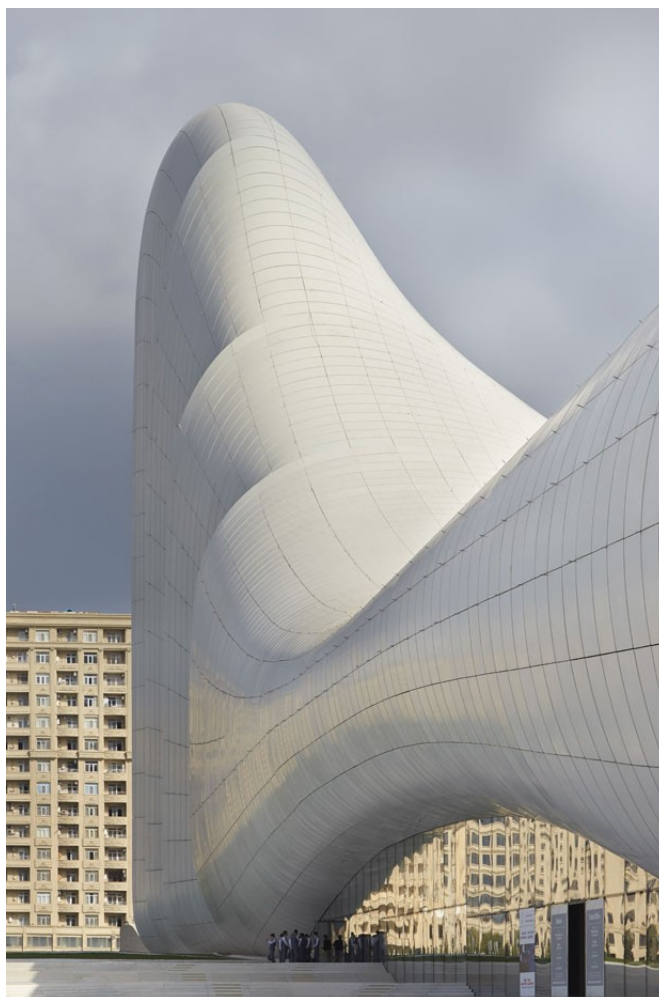
fev. 2014

de curvatura.

Transportar este conceito à uma malha de triângulos não é uma tarefa fácil, muito menos exato e único como no caso de superfícies regulares, pois é necessário trabalhar com aproximações. As malhas de triângulos podem apresentar ruídos, auxiliando na dificuldade de estimar tais linhas.

Apresentamos na próxima seção alguns trabalhos relacionados, mostrando como aproximar linhas de curvatura em malhas de triângulos, e algumas aplicações deste conceito. E finalizamos com a inspiração do nosso trabalho.

Figura 1.2: Centro cultural Heydar Aliyev Center em Baku, capital do Azerbaijão, projetado por Zaha Hadid.



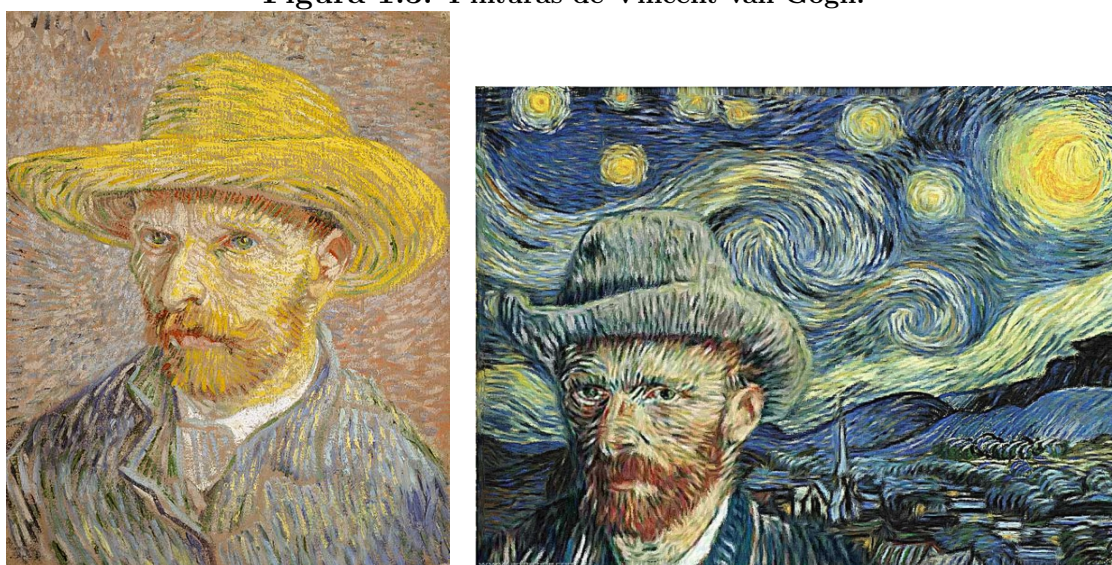
Fonte: Disponível em <<http://www.colegiodearquitetos.com.br/centro-de-heydar-aliyev/>>. Acesso em 17 fev.

1.2 TRABALHOS RELACIONADOS

Apresentamos agora duas aplicações de linhas de curvatura sobre malhas de triângulos. A primeira é o trabalho de Hildebrandt et al. [6] intitulado “Smooth Feature Lines on Surface Meshes”, que apresenta um esquema para discretização de um tipo de curva sobre superfícies regulares que carrega em poucos traços, características mais destacadas da geometria da superfície, onde apenas com estas linhas possivelmente conseguimos identificar a sua geometria. Estas curvas são chamadas de *linhas características*, veja ilustração na Figura 1.2. Estas linhas são também linhas de curvatura, pois matematicamente as definimos como linhas cujas tangentes são direções principais, mas que apenas contém pontos que são extremos locais das funções curvatura mínima e máxima.

A segunda aplicação de linhas de curvatura é o remalhamento poligonal de malhas de triângulos. O trabalho de Alliez et al. [1] “Anisotropic Polygonal Remeshing”, usa das linhas de curvatura de uma dada malha de triângulos para então calcular uma nova malha composta por quadriláteros em regiões onde não existem pontos umbílicos, e por triângulos onde existem pontos umbílicos. O artigo inicia com o cálculo do tensor de curvatura em cada vértice, conforme feito por Cohen-Steiner e Morvan [3], e após é calculada uma parametrização aproximadamente conforme da superfície. A partir desta é estimado o tensor de curvatura 2D sobre a parametrização, e posteriormente todos os cálculos são feitos na parametrização e levados para a superfície. Na Figura 1.2 ilustramos os passos deste trabalho.

Figura 1.3: Pinturas de Vincent van Gogh.



Fonte: Disponível em <http://en.wikipedia.org/wiki/Vincent_van_Gogh>. Acesso em 17 fev. 2014

Por utilizar uma parametrização aproximadamente conforme, surgem alguns problemas no método de cálculo de linhas de curvatura de Alliez et al. [1], por exemplo custo computacional para calcular uma parametrização aproximadamente conforme, além de problemas de distorção de ângulos e área.

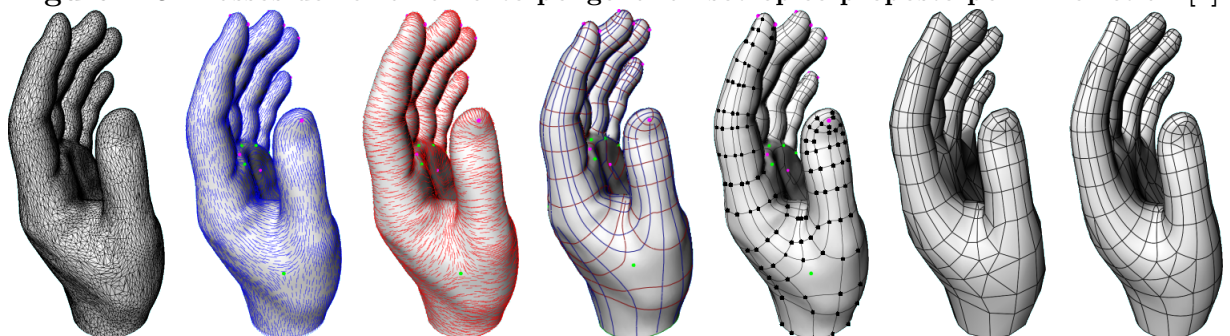
O trabalho de Marinov e Kobbelt [11] “Direct Anisotropic Quad-Dominant Remeshing” apresenta uma extensão da técnica de remalhamento poligonal anisotrópico de Alliez et al. [1], a novidade é que não fazem uso de parametrizações. No entanto, o cálculo das linhas de curvaturas descrito é de certo modo simples. Para passar a linha de curvatura de um triângulo para outro,

Figura 1.4: Ilustração do trabalho de Hildebrandt et al. [6]. Lado esquerdo, malha com as linhas características, do direito as linhas e as silhuetas.



Fonte: Disponível no trabalho de Hildebrandt et al. [6]. Acesso em 17 fev. 2014

Figura 1.5: Passos do remalhamento poligonal anisotrópico proposto por Alliez et al. [1]

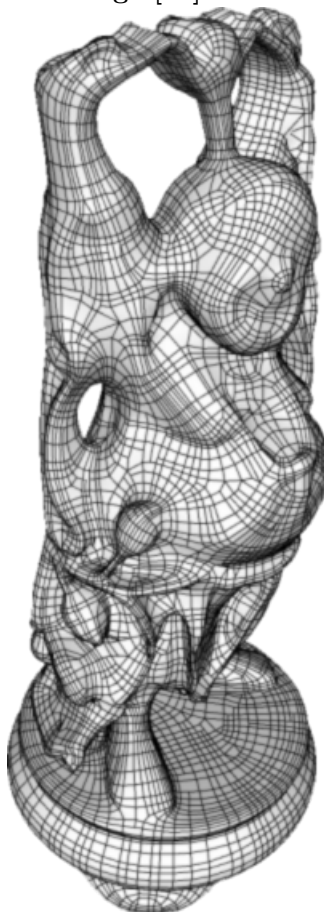


Fonte: Disponível no trabalho de Alliez et al. [1]. Acesso em 17 fev. 2014

parametrizam estes, de forma que esta aplicações seja aproximadamente uma isometria. Veja um exemplo do método na Figura 1.2.

Decidimos a partir dos problemas mostrados acima, calcular linhas de curvaturas sem usar uma parametrização conforme, usando apenas de uma aproximação da geometria intrínseca da malha. Utilizamos geodésicas e transporte paralelo sobre a malha de triângulos para resolver este problema. De início estimamos o tensor de curvatura em cada vértice da malha de triângulos, como feito por Cohen-Steiner e Morvan [3]. Após, definimos para cada triângulo um tensor de curvatura 2D. Utilizando transporte paralelo de vetores e geodésicas adotamos o método Runge-Kutta geodésico sobre a malha para campo de autovetores, sem usar de uma parametrização. Para amostrar várias linhas de curvaturas, utilizamos um campo de distância dado pelo método *Fast Marching* de Kimmel e Sethian [8]. Apresentamos também uma forma de suavizar o tensor de curvatura, utilizando apenas geodésicas e transporte paralelo.

Figura 1.6: As linhas sobre a malha de triângulos buda representam as linhas de curvatura calculadas pelo método apresentado no artigo [11].



2 CAMPOS TENSORIAIS

Neste capítulo, vamos descrever o tensor de curvatura em superfícies regulares e uma adaptação para malhas de triângulos. Estes tensores possibilitarão, posteriormente, a extração de campos de direções principais, usados para integrar as linhas de curvatura.

2.1 APLICAÇÃO DE GAUSS

Dada uma superfície regular orientada S , temos que em cada ponto $p \in S$ podemos tomar uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, onde para cada ponto $q \in \mathbf{x}(U)$

$$N(q) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v|}(q)$$

representa um vetor normal unitário bem definido. Assim, sendo $N : \mathbf{x}(U) \rightarrow S^2$ uma aplicação diferenciável, podemos estender a S , obtendo assim a aplicação de Gauss $N : S \rightarrow S^2$. Veja ilustrações destes conceitos na Figura 2.1.

A diferencial dN_p de N no ponto $p \in S$ é uma aplicação linear $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$, e $-dN_p$ é chamada de *tensor de curvatura*. Um fato importante é que dN_p é auto-adjunta, com isso podemos associar a dN_p uma forma quadrática Q em $T_p S$, fornecida por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle, v \in T_p S$.

Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p , n o vetor normal a C e N o vetor normal a S em p . O valor $k_n = k \cos \theta$ é chamado de *curvatura normal* de $C \subset S$ em p , onde θ é o ângulo entre n e N .

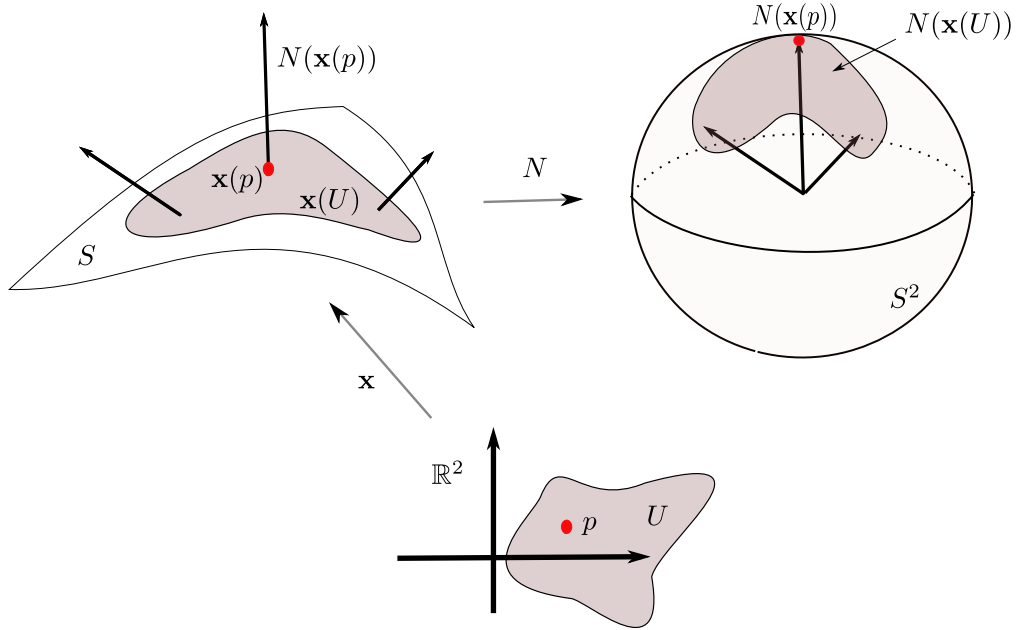
É fácil verificar que todas as curvas em uma superfície S que possuem, no ponto $p \in S$ a mesma reta tangente, têm a mesma curvatura normal neste ponto. Inclusive a curva C_n que é interseção entre S e a seção normal, gerada pelo vetor normal N em p e o vetor tangente v a C , veja Figura 2.1

Como a aplicação linear dN_p é auto-adjunta, temos que existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$ tal que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$, $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$, sendo k_1 e k_2 ($k_1 \geq k_2$) sendo o máximo e

o mínimo da forma quadrática $-Q$ restrito aos vetores do círculo unitário de T_pS . Veja que k_1 e k_2 são os valores extremos da função k_n , e as definimos como *curvaturas principais*, e os vetores associados a elas, e_1 e e_2 , são as *direções principais*.

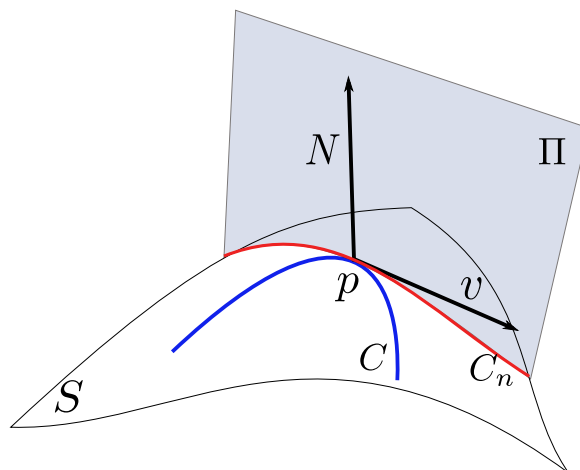
Finalmente, considere $p \in S$ e $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss. O

Figura 2.7: Aplicação de Gauss



Fonte: Autor, 2014

Figura 2.8: C e C_n têm mesma curvatura normal em p . Π é a seção normal em p ao longo de v .



Fonte: Autor, 2014

determinante e a metade do traço de dN_p são chamados *curvatura Gaussiana* K e *curvatura média* H respectivamente de S em p . Escrevendo dN_p na base dos auto-vetores temos

$$K = k_1 k_2$$

e

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Para maiores detalhes, consultar o livro “Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies” de do Carmo [5].

2.2 TENSOR EM MALHAS

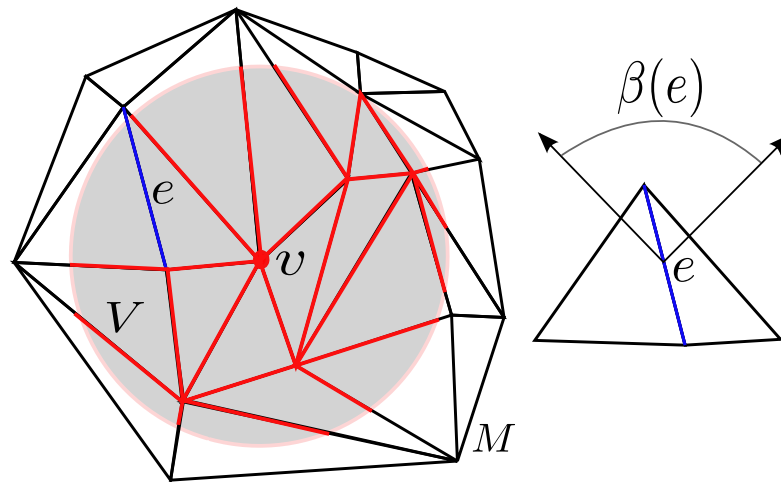
Uma malha de triângulos é uma superfície linear por partes necessariamente não diferenciável, portanto as definições de tensor de curvatura descritas na seção anterior não se aplicam. Em nosso trabalho vamos utilizar a definição dada por Cohen-Steiner e Morvan [3] para calcular o tensor em cada vértice da malha. Em seguida, obtemos um campo tensorial contínuo sobre toda a superfície, estimando primeiramente o tensor de curvatura em cada vértice da malha, e posteriormente interpolando o tensor nos pontos interiores dos triângulos.

Dado um ponto p sobre uma aresta e da malha, temos o mínimo e o máximo (em valores absolutos) da função $k_n(p)$ na direção e , e na direção tangente à malha e perpendicular a e respectivamente, pois a curvatura é claramente zero na direção da aresta. Podemos então definir o tensor de curvatura ao longo de cada aresta, como feito em [3]. Dado qualquer vértice v da malha, e uma vizinhança V de v , podemos estimar o tensor somando várias contribuições das aresta contidas em V , de acordo com a seguinte expressão:

$$T(v) = \frac{1}{\text{area}(V)} \sum_{\text{arestas } e} \beta(e) |e \cap V| \bar{e} \bar{e}^t,$$

onde $\beta(e)$ é o ângulo com sinal entre as normais dos triângulos adjacentes e orientados a e , $|e \cap V|$ é o comprimento do segmento de reta $e \cap V$, e por ultimo \bar{e} é um vetor unitário na direção de e . Veja na Figura 2.2 a ideia geométrica. Note que $\beta(e)$ está diretamente relacionado com a curvatura na direção perpendicular à aresta, e apresenta sinal positivo caso convexo e negativo se côncavo. Usamos em nossa implementação a primeira vizinhança estrelada de v no lugar de V , por questões de performance, e por termos obtido resultados com boa precisão. O tensor T avaliado no vértice v fornece um auto-vetor aproximadamente na direção do vetor normal a malha em v , o qual está associado ao auto-valor de menor valor absoluto. Os

Figura 2.9: Construção do tensor. A região em cinza é a vizinhança V de v .



Fonte: Autor, 2014

outros auto-vetores restantes são as direções principais, onde a direção de curvatura máxima está associada com o menor dos auto-valores restantes, e a direção de curvatura mínima esta associada com o maior dos auto-valores restantes.

2.3 INTERPOLAÇÃO DE CAMPOS TENSORIAIS EM MALHAS

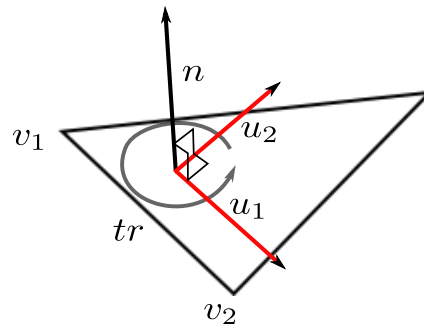
Uma vez que temos um tensor de curvatura 3D definido em cada vértice da malha de triângulos, podemos, através de rotações e interpolações lineares, obter um campo tensorial 2D linear para cada triângulo tr da malha da seguinte forma:

1. Tomamos uma orientação para M , de modo que dado um triângulo tr qualquer temos um vetor n que é normal a tr e respeita a orientação da malha.
2. Fixamos uma base ortonormal u_1, u_2 para o plano que contém o triângulo. Sejam v_1 e v_2 dois vértices de tr escolhidos pela orientação do triângulo. Então os vetores

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_2 - v_1}{|v_2 - v_1|}, \\ u_2 &= n \wedge v_1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

formam uma base ortonormal do plano que contém tr , na mesma orientação do triângulo, veja Figura 2.

3. Sejam T_1, T_2 e T_3 os tensores de curvatura 3D nos vértices v_1, v_2 e v_3 de tr . Usando a orientação da malha temos um triedro ortonormal em cada vértice v_i de tr , formado

Figura 2.10: Base de uma triângulo

Fonte: Autor, 2014

pelos vetores n_i (normal à malha em v_i), e_{1i} (direção de curvatura máxima) e e_{2i} (direção de curvatura mínima), com $i = 1, 2, 3$. Rotacionamos o tensor da seguinte forma, para $i = 1, 2$ e 3 : considere o eixo de rotação dado pelo vetor $n_i \wedge n$. Rotacione com ângulo $\theta = \arccos(\langle n_i, n \rangle)$ o triedro definido no vértice v_i , de modo que a normal unitária no vértice n_i seja igual à normal unitária do triângulo n . Teremos que os vetores e_{1i} e e_{2i} poderão ser escritos como combinações lineares da base $\{u_1, u_2\}$.

4. Podemos calcular um tensor 2D sobre cada vértice v_i de tr , como

$$T_i = \mathbf{P}_i^t \begin{pmatrix} k_{1i} & 0 \\ 0 & k_{2i} \end{pmatrix} \mathbf{P}_i,$$

onde

$$\mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} e_{1i} & e_{2i} \end{pmatrix}.$$

As colunas de \mathbf{P}_i representam as direções principais em v_i escritas na base $\{u_1, u_2\}$ de tr , e k_{1i} e k_{2i} são as curvaturas principais. Desse modo, os tensores T_1 , T_2 e T_3 estão agora representados na mesma base, tornando o processo de interpolação linear trivial.

5. Dado qualquer ponto $p \in tr$ podemos estimar um tensor $T(p)$ usando interpolação baricêntrica em cada componente T_{ij} de T , da seguinte forma: escrevemos $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$, com $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, onde p_1, p_2 e p_3 são os vértices do triângulo tr . Desse modo, o tensor em p fica então escrito da seguinte forma:

$$T(p) = \lambda_1 T(p_1) + \lambda_2 T(p_2) + \lambda_3 T(p_3).$$

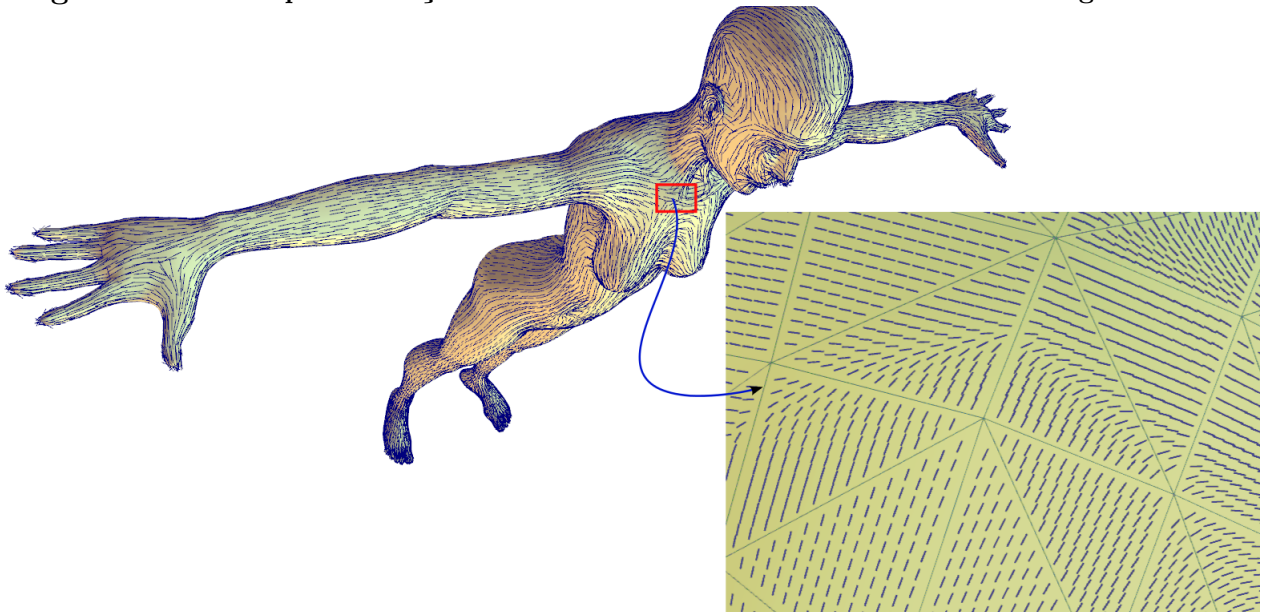
Para cada triângulo tr da malha temos agora um campo tensorial 2D linear que passamos a chamar de *tensor de curvatura 2D*:

$$T_{tr}(p) = \begin{pmatrix} T_{11}(p) & T_{12}(p) \\ T_{12}(p) & T_{22}(p) \end{pmatrix}, \quad p \in tr,$$

onde $T_{tr}(p)$ esta expressa na base $\{u_1, u_2\}$ de tr .

Em cada ponto $p \in M$ podemos agora calcular as direções principais, exceto em pontos que os auto-valores do tensor de curvatura são iguais, os quais são chamados pontos umbílicos; e nos vértices e arestas da malha, onde esta definição é ambígua, pois como estes pontos pertencem a mais de um triângulo, existe mais de um tensor associado. A Figura 2.3 exhibe um exemplo, foi plotado na malha de triângulos Mulher, apenas o campo de direção de curvatura mínima. No Capítulo 3 vamos tratar esse problema para integrar linhas de curvatura usando conceitos

Figura 2.11: Campo de direções de mínima curvatura sobre a malha de triângulo Mulher



Fonte: Autor, 2014

de geodésicas retas. O problema dos pontos umbílicos será tratado na próxima seção.

2.4 PONTOS UMBÍLICOS

Um ponto $p \in tr$ é dito *umbílico* se o tensor de curvatura 2D nele avaliado possui auto-valores iguais, ou seja, as curvaturas principais são iguais, então podemos escrever:

$$T_{tr}(p) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

em qualquer base de T_pM . Assim, para qualquer direção representada pelo vetor $v \in T_pM$ (escrito nesta base), teremos $T_{tr}(p)v = kv$, o que implica que qualquer direção é principal, e portanto as direções principais de máxima e mínima curvatura não estão bem definidas em p .

Nas próximas subseções descrevemos o cálculo dos pontos umbílicos sobre a malha de triângulos M . Vamos descrever também a caracterização do comportamento de campo de tensores lineares, numa vizinhança de um ponto umbílico sobre um triângulo, de acordo com Delmarcelle e Hesselink [4], e Tricoche [14].

2.4.1 CÁLCULO DE PONTOS UMBÍLICOS SOBRE TRIÂNGULOS

Devido ao cálculo do tensor de curvatura 2D sobre cada triângulo ser resultado de uma interpolação linear, conforme feito na seção 2.3, obteremos, em cada triângulo, um campo tensorial linear. Consequentemente, cada triângulo pode ter no máximo um ponto umbílico, a menos que mais de um de seus vértices sejam pontos umbílicos.

Seja um triângulo $tr \subset M$ e um ponto $p \in tr$, é fácil ver que se p for umbílico, ele satisfaz a seguinte propriedade:

$$\begin{cases} T_{tr11}(p) - T_{tr22}(p) = 0 \\ T_{tr12}(p) = 0 \end{cases},$$

sob qualquer sistema de coordenada, sendo T_{tr} o tensor de curvatura 2D definido da seção 2.3. Chamando $T_{tr11}(p) - T_{tr22}(p)$ de $\alpha(p)$, e $T_{tr12}(p)$ de $\beta(p)$, e usando o sistema de coordenadas baricêntricas $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de tr , onde tr é definido pelos vértices $p_1, p_2, p_3 \in M$, temos que um ponto umbílico $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in tr$, satisfaz

$$\begin{cases} \lambda_1\alpha(p_1) + \lambda_2\alpha(p_2) + \lambda_3\alpha(p_3) = 0 \\ \lambda_1\beta(p_1) + \lambda_2\beta(p_2) + \lambda_3\beta(p_3) = 0 \end{cases}, \quad (2.2)$$

onde $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Usando que $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$, e desenvolvendo o sistema 2.2, temos:

$$\begin{pmatrix} \alpha(p_1) - \alpha(p_3) & \alpha(p_2) - \alpha(p_3) \\ \beta(p_1) - \beta(p_3) & \beta(p_2) - \beta(p_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \beta_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Caso o determinante da matriz 2×2 no sistema 2.3 seja diferente de zero, e $0 \leq \lambda_i \leq 1$, para $i = 1, 2, 3$, temos um ponto umbílico em tr .

2.4.2 CARACTERIZAÇÃO DE PONTOS UMBÍLICOS

Para estudar o que acontece com o campo na vizinhança de pontos umbílicos p , vamos considerar as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \frac{\partial(T_{11}-T_{22})}{\partial x} & b &= \frac{1}{2} \frac{\partial(T_{11}-T_{22})}{\partial y} \\ c &= \frac{\partial(T_{12})}{\partial x} & d &= \frac{\partial(T_{12})}{\partial y} \end{aligned}$$

avaliadas em $p \in S$, e (x, y) são as coordenadas na base $\{u_1, u_2\}$ do triângulo $tr \subset M$, tal que $p \in tr$. Considerando uma vizinhança de p e usando a série de Taylor de primeira ordem, temos

$$\begin{cases} \frac{T_{11}-T_{22}}{2} \approx a\Delta x + b\Delta y \\ T_{12} \approx c\Delta x + d\Delta y \end{cases}$$

onde (Δ_x, Δ_y) é uma pequena variação de p .

Dada uma curva simples e fechada contida no triângulo tr contendo um único ponto umbílico p , encontramos dois tipos de setores angulares:

1. Setores hiperbólicos, quando as trajetórias das curvas soluções não passam por p ;
2. Setores parabólicos, quando as trajetórias chegam em p .

Chamamos de *separatrizes* as curvas integrais que separam um setor de outro. Sejam θ_k os ângulos entre as separatrizes e o eixo dado pelo vetor u_1 (ver Eq. 2.1). De acordo com Tricoche [14], os valores $X_k = \tan(\theta_k)$ são raízes da equação

$$dX^3 + (c + 2b)X^2 + (2a - d)X - c = 0 \quad (2.4)$$

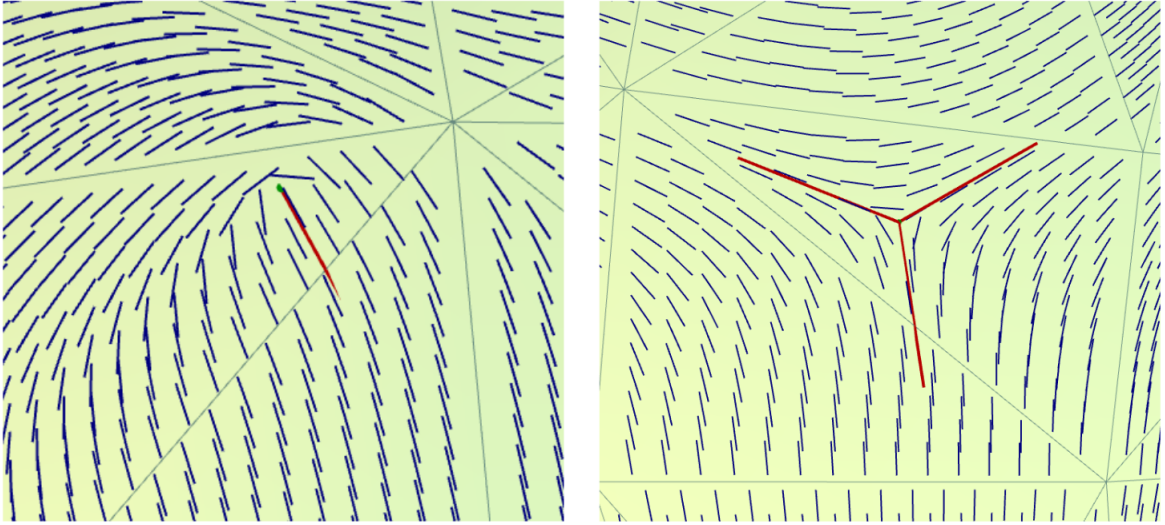
portanto, podem existir no máximo três separatrizes, que caracterizam o tipo do ponto umbílico.

Um valor importante para caracterização de pontos umbílicos é

$$\delta = ad - bc,$$

que possui a propriedade de ser invariante por rotação do sistema de coordenadas. Quando $\delta < 0$ temos um *trisector*, neste caso o polinômio acima possui três raízes, que determinam as separatrizes dos três setores hiperbólicos. Caso $\delta > 0$ temos um *wedge*, que pode ser classificado em dois tipos: um com duas separatrizes, delimitando o setor hiperbólico de dois parabólicos consecutivos. Neste caso, o polinômio fornece três raízes reais, onde uma das raízes representa a separatriz entre os setores parabólicos, e as outras duas representam as separatrizes que delimitam o setor hiperbólico; e um com uma única separatriz, onde os setores parabólicos se resumem a uma linha. Neste último caso, o polinômio apresenta uma única raiz real. Veja na Figura 2.4.2 um exemplo de trisector e outro de wedge.

Figura 2.12: Do lado esquerdo temos um wedge, do direito um trisector



Fonte: Autor, 2014

Para maiores detalhes consultar os trabalhos de Delmarcelle e Hesselink [4], e Tricoche [14].

3 INTEGRAÇÃO

No capítulo anterior estimamos um tensor de curvatura 2D sobre cada triângulo de M . Neste capítulo, vamos usar estes tensores para integrar linhas de curvatura sobre M .

Em [1], é necessário que M seja uma malha com bordo e homeomorfa a um disco, pois após definir o tensor de curvatura, conforme feito na seção 2.2, calcula-se inicialmente uma parametrização de M aproximadamente conforme, usando o método de Lévy et al. [10]. Através desta parametrização, estimam-se tensores de curvatura 2D nos vértices da parametrização de M usando-se projeções dos tensores de curvatura 3D. Daí é possível interpolar linearmente estes tensores no interior dos triângulos. Finalmente, direções principais são extraídas destes tensores, para ser possível integrar os campos de direções principais pelo método de Runge-Kutta sobre o domínio da parametrização.

O método descrito no parágrafo anterior, por utilizar uma parametrização aproximadamente conforme, apresenta problemas de distorção. Por outro lado, M deve ser homeomorfa a um disco com bordo. Finalmente, calcular uma parametrização aproximadamente conforme pode ter custo computacional caro.

Nas próximas seções, será introduzida uma alternativa desse método para cálculo de linhas de curvatura sobre M sem usar parametrização. A seção 3.1 define as linhas de curvatura como solução de sistemas de equações diferenciais ordinárias e trata do problema da condição inicial, ou seja, a determinação dos pontos usados para começar a integrar as curvas. Para a integração da linha de curvatura, descreveremos o método Runge-Kutta geodésico na seção 3.4. Para utilizar do método Runge-Kutta, vamos descrever na seção 3.5 uma estratégia de extração de direções principais a partir do campo tensorial definido sobre M . Finalmente, os critérios de paradas para o método de integração, e como traçar várias linhas de curvatura sobre M , serão fornecidos na seção 3.6.

3.1 SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma curva conexa C sobre M é chamada de *linha de curvatura* se para todo ponto $p \in C$ a direção tangente a C é uma direção principal em p .

Para integrar uma linha de curvatura C sobre qualquer triângulo $tr \subset M$ considere a base $\{u_1, u_2\}$ do plano que contém tr , conforme Equação 2.1. Agora podemos calcular a linha de curvatura $C : t \rightarrow x(t)u_1 + y(t)u_2$ sobre o triângulo tr , apenas integrando a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = e_i(t) \quad (3.5)$$

onde $e_i(t)$ com $i = 1, 2$, é um autovetor do tensor $T(x(t)u_1 + y(t)u_2)$. Para estender o cálculo de C para M , será necessário tratar a integração sobre vértices e aresta de M , apresentamos estes casos nas próximas seções.

Para integrar linhas de curvatura usando o sistema de equações diferenciais acima, é necessário determinar pontos iniciais, que passaremos a chamar de sementes. Além disso, para capturarmos a topologia do campo tensorial, é importante ter um bom critério de distribuição de sementes, o qual discutiremos em seguida.

3.1.1 DISTRIBUIÇÃO DE SEMENTES

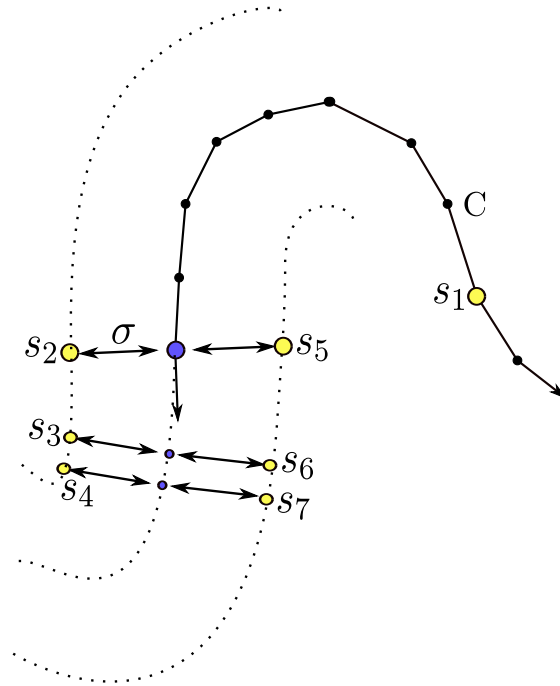
O processo de integração das linhas de curvatura (suponha a de curvatura mínima e_2), sobre M , é iniciado colocando todos os pontos umbílicos em uma fila de prioridades, chamada de \mathcal{S}_1 . Começamos a traçar as linhas de curvatura a partir dos elementos de \mathcal{S}_1 com maior curvatura gaussiana absoluta, como proposto por Verma et al. [15]. Caso M não apresente pontos umbílicos, adicionamos a \mathcal{S}_1 apenas o vértice de maior curvatura gaussiana absoluta.

Seja p_i o ponto obtido no passo i da integração da linha de curvatura C . Plantamos duas sementes q_1 e q_2 na direção ortogonal n_i a C em p_i , em sentidos opostos. Para tal, considere δ a única geodésica reta que passa por p_i e tem como tangente neste ponto a direção n_i , parametrizando δ de forma que $\delta(0) = p_i$, então definimos $q_1 = \delta(\sigma)$ e $q_2 = \delta(-\sigma)$, onde σ é o parâmetro comprimento de arco, e será calculado baseado na densidade das linhas de curvatura, veja os detalhes na próxima seção. Por fim, adicionamos p_1 e p_2 em uma nova fila, chamada \mathcal{S}_2 .

Uma vez que a lista \mathcal{S}_1 termina, é então iniciada a integração das linhas de curvatura, no caso de curvatura mínima, que passam pelas sementes da lista de \mathcal{S}_2 , iniciando pelas sementes que apresentarem maior curvatura gaussiana. Veja a ilustração do processo na Figura 3.1.1.

A próxima seção descreve o método Runge-Kutta geodésico para a integração das linha de curvatura.

Figura 3.13: Distribuição de sementes. Os pontos s_i são sementes.



Fonte: Autor, 2014

3.2 RUNGE-KUTTA 2D

Considere um campo contínuo de vetores $v : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto, ou seja, cada ponto $(x, y) \in U$ está associado a um vetor $v(x, y) = (a(x, y), b(x, y)) \in \mathbb{R}^2$, onde as funções reais a e b são contínuas. Considere $p_0 \in U$, um ponto inicial, $h > 0$ o tamanho do passo. Uma iteração do *método de Euler* é

$$p_{i+1} := p_i + hv(p_i),$$

produzindo uma curva poligonal $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$, onde essa curva é aproximadamente a solução do problema de valor inicial dado pelo campo v e o ponto $p_0 \in U$. Note que h define o tamanho dos segmentos da curva integral, desde que v seja unitário. Observe, que este método fez uso apenas de uma única amostra do campo v para iterar um passo de integração, fornecendo assim uma aproximação mais grosseira da curva solução.

Descrevemos agora um método que faz uso de várias amostras do campo v para um único passo de integração, fornecendo assim uma melhor aproximação da curva solução. Uma iteração

do método Runge-Kutta de quarta ordem é dado por

$$p_{i+1} := p_i + hv_i,$$

onde v_i é definido iterativamente como

$$\begin{aligned} v_i^1 &:= v(p_i) \\ v_i^2 &:= v\left(p_i + \frac{h}{2}v_i^1\right) \\ v_i^3 &:= v\left(p_i + \frac{h}{2}v_i^2\right) \\ v_i^4 &:= v\left(p_i + hv_i^3\right) \end{aligned}$$

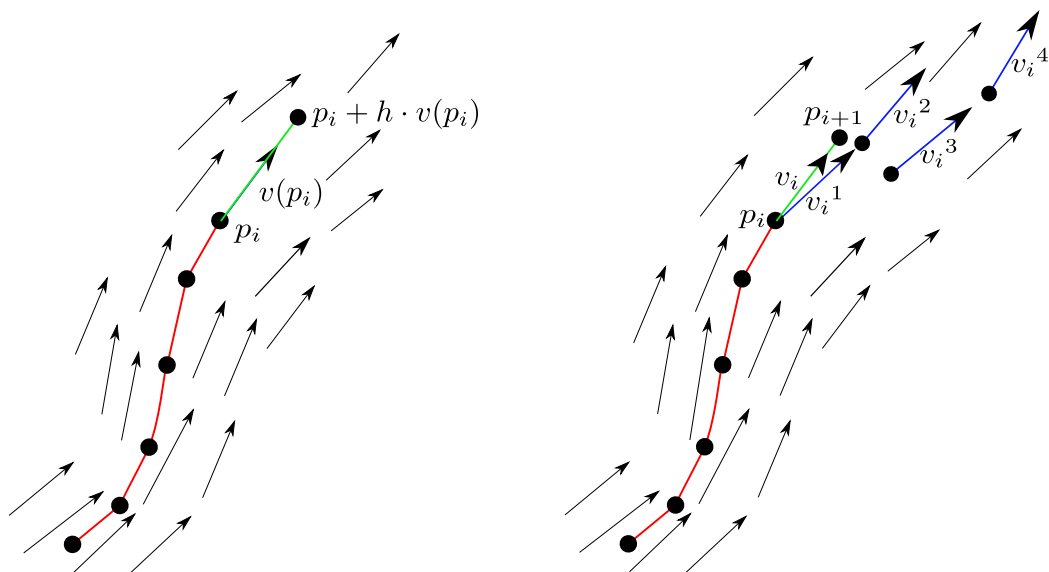
e

$$v_i := \frac{1}{6}(v_i^1 + 2v_i^2 + 2v_i^3 + v_i^4).$$

Veja Figura 3.2 a ilustração dos métodos de Euler e Runge-Kutta de quarta ordem. Para maiores detalhes, consultar o livro “Análise numérica” de Burden e Faires [2].

Note que o método acima recolhe, para um único passo de integração, várias amostras do campo de vetores, transporta estes vetores para a posição atual, gera uma nova direção por meio de uma média ponderada destes vetores, e com essa nova direção calcula o próximo ponto. Esse método só é válido em domínios planos. Para aplicá-lo diretamente sobre M sem usar parametrização será necessário usar conceitos de transporte paralelo de vetores e geodésicas sobre malhas de triângulos.

Figura 3.14: Do lado esquerdo a representação do Método de Euler, e do lado direito o Método Runge-Kutta de quarta ordem.



3.3 TRANSPORTE PARALELO E GEODÉSICAS SOBRE MALHAS DE TRIÂNGULOS

Introduziremos agora o conceito de geodésicas discretas, a qual são curvas que generalizam a ideia de curva reta sobre uma malha de triângulos. Neste capítulo estas curvas serão usadas para substituir os segmentos de retas do método Runge-Kutta 2D, fornecendo assim ferramentas para adaptar o método Runge-kutta sobre uma malha. Apresentaremos também, o conceito de transporte paralelo, que leva para malha de triângulos a noção de transportar paralelamente um vetor no espaço euclidiano. O apêndice 5.1 descreve conceitos básicos de geodésicas e transporte paralelo de vetores sobre superfícies regulares.

Existem algumas generalizações diferentes de geodésicas sobre malha de triângulos, que chamamos de *geodésicas discretas*. Nesta seção descrevemos uma delas, a qual é chamada de *geodésica reta*, definida por Polthier e Schmies [13], inspirada do fato de uma geodésica ter curvatura geodésica nula.

Para definir curvatura geodésica discreta de uma curva poligonal $C \subset M$ em um ponto $p \in C$, precisamos de algumas preliminares.

Definição 3.1. O *ângulo total* θ de um vértice p da malha é a soma dos ângulos α_i entre as arestas incidentes neste, veja Figura 3.1. Denotando por $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ as arestas ordenadas incidentes em p , temos

$$\theta = \sum_{n=0}^{n-1} \hat{\text{ângulo}}(a_n, a_{n+1}).$$

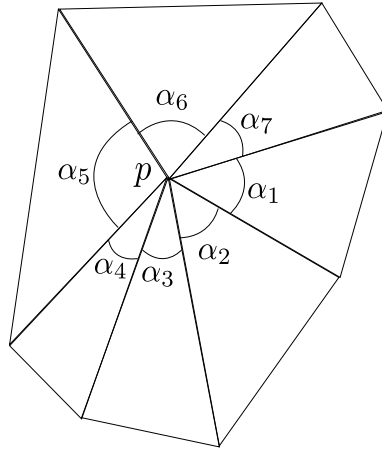
O *ângulo total* de um ponto no interior de um triângulo ou no interior de uma aresta é $\theta = 2\pi$.

Definição 3.2. Considere C uma curva poligonal (tomando uma orientação), seja θ o ângulo total em $p \in C$. A curva C divide θ em dois ângulos: θ_r e θ_l , referentes as somas das arestas e segmentos de C incidentes em p nos lados direito e esquerdo da curva, respectivamente, veja na Figura 3.3 os casos em que p é um vértice ou esta sobre uma aresta. A *curvatura geodésica discreta* da curva C no ponto p é dada pelo valor:

$$k_g(p) = \frac{2\pi}{\theta} \left(\frac{\theta}{2} - \theta_r \right).$$

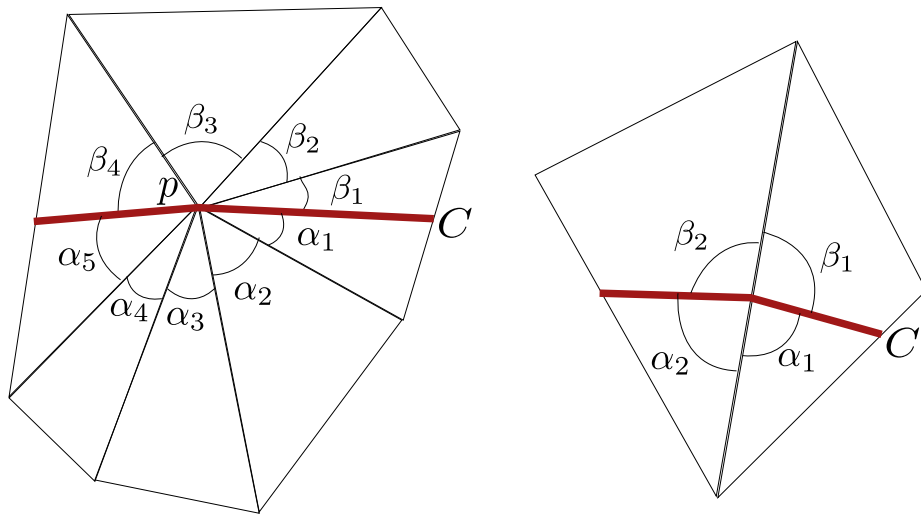
Veja que, ao mudarmos a orientação de C o sinal de k_g é alterado. Uma geodésica reta é agora definida como uma curva poligonal com curvatura geodésica discreta nula em todo ponto. Pela definição de k_g , temos que uma geodésica reta satisfaz $\theta_r = \theta_l$ em todo ponto. Dentro de um triângulo as geodésicas são segmentos de retas que ligam dois pontos quaisquer das arestas.

Figura 3.15: Ângulos entre as arestas incidentes em um vértice $p \in M$.



Fonte: Autor, 2014

Figura 3.16: Ângulos θ_l e θ_r são as somas dos β_i e α_i , respectivamente.



Fonte: Autor, 2014

Polthier e Schmies [13] mostraram que dado um ponto $p \in M$ e $v \in T_pM$, então existe uma única geodésica reta γ , com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Ver algoritmo 3.1.

No caso do transporte paralelo de vetores, sua definição sobre M é similar ao apresentado no apêndice 5.1 sobre superfícies diferenciáveis.

entrada: Malha de triângulos M , um ponto $p_i \in M$, um vetor unitário v_i tangente à M em p_i , e $h > 0$

saída : Geodésica reta $G = \{p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_n\}$ com comprimento h , saindo do ponto $p_i \in M$, com $v_i = (p_{i+1} - p_i)/|p_{i+1} - p_i|$

- 1 Seja $j = 1$;
- 2 Encontre o triângulo $tr_i \subset M$, onde $p_i \in tr_i$;
- 3 Calcule o ponto p_{i+j} de intersecção entre as arestas de tr_i e a semi-reta dada por $p_i + t \cdot v_i$, com $t \in (\mathbb{R}^+ - 0)$;
- 4 **enquanto** a geodésica não tiver comprimento h , ou não atingir o bordo de M ou seu início **faça**
 - 5 Encontre o vetor v_{i+j} , e o triângulo $tr_{i+j} \subset M$, onde $p_{i+j} \in tr_{i+j}$, de maneira que:
 1. A semi-reta dada por $p_{i+j} + t \cdot v_{i+j}$, com $t \in (\mathbb{R}^+ - 0)$, intersekte as arestas de $tr_{i+j} \subset M$, seja p_{i+j+1} este ponto;
 2. A curvatura geodésica k_g da curva $\{p_{i+j-1}, p_{i+j}, p_{i+j+1}\}$ no ponto p_{i+j} seja zero ($\theta_l = \theta_r$).
 - j = j+1;
- 6 Retorne a geodésica reta $G = \{p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_n\}$;

Algoritmo 3.1: Cálculo de uma geodésica reta

3.4 RUNGE-KUTTA SOBRE MALHAS DE TRIÂNGULOS

Nesta seção vamos integrar um campo de vetores v definido sobre uma malha de triângulos M sem usar parametrização, utilizando da adaptação dos métodos de integração de Euler e de Runge-Kutta feita por Polthier e Schmies [13].

Para um ponto $p \in M$ e um valor h (tamanho do passo), considere $\delta(p, t, v(p))$ a única geodésica reta que passa pelo ponto p com vetor tangente $v(p)$. Um simples passo do *método de Euler geodésico* é dado por:

$$p_{i+1} := \delta(h, p_i, v(p_i)).$$

Isto gera uma sequência de pontos $\{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n\}$ sobre M , os quais estão conectados por pedaços de geodésicas retas com comprimento h .

Usando o transporte paralelo de vetores sobre a malha de triângulos, vamos definir o método de Runge-Kutta de quarta ordem geodésico, que chamaremos de Runge-Kutta geodésico. Seja

$p \in M$ e o valor $h > 0$ (tamanho do passo). Denotemos por $\delta(t, p, v(p))$ a única geodésica reta que passa pelo ponto p , tem com vetor tangente $v(p)$ neste ponto, e avaliada no parâmetro t , tal que $p = \delta(0, p, v(p))$. Seja $\pi|_\delta$ o transporte paralelo de vetores ao longo de uma geodésica reta δ a $\delta(0)$. As amostras do método Runge-Kutta geodésico são extraídas como::

$$\begin{aligned} v_i^1 &:= v(p_i) \\ v_i^2 &:= \pi|_\delta \circ v(\delta_1(\frac{h}{2}, p_i, v_i^1)) \\ v_i^3 &:= \pi|_\delta \circ v(\delta_2(\frac{h}{2}, p_i, v_i^2)) \\ v_i^4 &:= \pi|_\delta \circ v(\delta_3(h, p_i, v_i^3)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

e finalmente a direção de integração final é a média ponderada:

$$v_i := \frac{1}{6}(v_i^1 + 2v_i^2 + 2v_i^3 + v_i^4).$$

Uma simples interação do *Método Runge-Kutta de quarta ordem Geodésico* é dado por:

$$p_{i+1} := \delta(h, p_i, v_i).$$

É importante ressaltar que, em nosso problema, temos um campo de autovetores, o qual não tem sentido definido. Portanto, é necessário, em cada passo da integração, determinar o sentido de integração do autovetor.

Suponha agora que v seja um campo de autovetores, ou seja v fornece dois campos de vetores v^- e v^+ , com orientações opostas e direções iguais. Para determinar o sentido de integração de uma curva integral C_k , representada pela curva poligonal $\{p_0, p_1, \dots, p_i\}$ até a iteração i , no ponto p_i usamos o seguinte teste: calcula-se um vetor unitário u_i tangente à curva p_k em p_i , e assim o sentido de $v(p_i)$ usado, suponha que $v(p_i)^-$, tem que satisfazer $\langle v(p_i)^-, u_i \rangle > 0$. O cálculo de u_i pode ser feito por meio da única geodésica reta γ , a qual satisfaz a condição inicial dada pelo ponto p_i e o vetor tangente $w = (p_{i-1} - p_i)/|p_{i-1} - p_i|$, onde p_{i-1} é o ponto anterior à p_i sobre a curva C_k . Veja que, γ é uma curva poligonal da forma $\{\dots, p'_{i-2}, p'_{i-1}, p_i, p'_{i+1}, p'_{i+2}, \dots\}$, assim definimos $u_i = (p'_{i-1} - p_i)/|p'_{i-1} - p_i|$.

Passamos agora para a extração de autovetores do tensor de curvatura T sobre M , e posteriormente utilizamos isto para o cálculo de linhas de curvatura.

3.5 EXTRAÇÃO DE AUTOVETORES DURANTE A INTEGRAÇÃO

Considere um ponto $p \in M$. A função v definida na seção anterior retorna um autovetor tangente usado para integração das linhas de curvatura de uma determinada direção principal,

usamos nesta seção a de curvatura mínima. Estes autovetores serão extraídos usando os tensores 2D descritos no Capítulo 2, de acordo com cada caso abaixo:

1. Se $p \in tr$ for uma semente de integração, onde tr é um triângulo de M , temos dois casos:
 - (a) Caso p seja ponto umbílico, integraremos todas as suas separatrizes, obtendo suas direções (com sentido) $v(p)$ através das raízes da Equação 2.4.
 - (b) Caso contrário, considerando que p esteja no interior de tr , extraímos a direção $v(p)$ como o autovetor do tensor de curvatura 2D T_{tr} correspondente à direção desejada (de máxima ou mínima). Neste caso, é necessário integrar em ambos os sentidos. Se p estiver exatamente sobre uma aresta ou vértice de M , perturbamos este para o interior de algum triângulo adjacente para resolver o problema de ambiguidade do campo conforme comentado no Capítulo anterior.

2. Se p não for uma semente, então estamos em um passo intermediário de integração. Daí temos novamente dois casos:
 - (a) Caso p esteja no interior do triângulo tr , basta extrair a direção que está sendo integrada, por meio do tensor de curvatura 2D T_{tr} , e definir um sentido para continuar a integração da linha de curvatura, usando o teste de sentido como descrito na seção anterior.
 - (b) Caso p esteja exatamente em uma aresta ou em um vértice de M , precisamos encontrar o próximo triângulo no qual a linha de curvatura que está sendo integrada irá passar. Para tal, utilizamos o cálculo do vetor u feito na seção anterior durante o teste de sentido, e atualizamos p para $p + \epsilon \cdot u$, com $\epsilon > 0$ muito pequeno.

3.6 CRITÉRIOS DE PARADA E DENSIDADE DAS LINHAS DE CURVATURA

Nesta seção descrevemos como várias linhas de curvatura podem ser traçadas sobre M , e quando parar o processo de integração de determinada linha de curvatura.

A ideia aqui é calcular a menor distância sobre a malha M entre um vértice desta e as linhas de curvaturas. Construiremos assim, um campo de distâncias D , que será utilizado para critério de parada durante a integração de uma linha de curvatura. O primeiro passo é para cada linha de curvatura C_i calcular um campo de distâncias D_i , onde dado um vértice $p \in M$

teremos aproximadamente a menor distância $D_i(p)$ de p à C_i sobre M . Para tal, usamos do “Fast Marching Method” (que passamos chamar de FMM) desenvolvido por Kimmel e Sethian [8], que é baseado na solução da equação Eikonal

$$|\nabla D| = 1.$$

Logo, dado um vértice $p \in M$, temos aproximadamente a menor distância de p às linha de curvatura C_i , dada por:

$$D(p) = \text{Min}\{D_1(p), D_2(p), \dots, D_n(p)\} \quad (3.7)$$

onde n é o número de linhas de curvatura que foram traçadas. Agora, se p não for um vértice, podemos aproximar a distância $D(p)$ interpolando distâncias entre as curvas e os vértices v_1, v_2 e v_3 do triângulo tr que contem p . Dai teremos:

$$D_i(p) \approx \lambda_1 D_i(v_1) + \lambda_2 D_i(v_2) + \lambda_3 D_i(v_3),$$

onde λ_1, λ_2 e λ_3 são as coordenadas baricêntricas do ponto p em relação ao triângulo tr , e então usando a Equação 3.7, temos $D(p)$.

Finalmente, é necessário definir critérios de parada para encerrar a integração de uma linha de curvatura. Cada vez que um novo ponto p é adicionado à curva C , testamos se p está a uma distância menor que σ' de:

1. Um ponto umbílico;
2. Da própria curva C , neste caso será uma curva fechada, ou;
3. De outra linha de curvatura.

Para o Item 3 acima, utilizamos do campo de distâncias D definido no paragrafo anterior.

Note que σ' define a distância mínima entre duas linhas de curvatura. O algoritmo 3.2 descreve como traçar várias linhas de curvatura, de modo que a menor distância entre duas delas seja maior ou igual a σ' , o qual recebe o nome de *densidade* das linhas de curvatura. Observando que na seção anterior utilizamos um parâmetro σ , para plantar sementes na vizinhança de um linha de curvatura, então temos que σ deve ser maior que σ' . Em nosso trabalho a densidade será constante sobre toda a malha de triângulos.

Para detalhes sobre densidades de linhas integrais, consultar Jobard e Lefer [7].

	entrada: Malha de triângulos M e a valor de densidade $\sigma' > 0$
	saída : Linhas de curvaturas C_i , tal que $distancia(C_i, C_j) > \sigma'$ quando $i \neq j$
1	se M tiver pontos Umbilicos então
2	Coloque todos pontos umbílicos na lista \mathcal{S}_1 ;
3	senão
4	Coloque apenas o vértice de maior curvatura gaussiana da malha em \mathcal{S}_1 ;
5	para $k = 1$ até $k = 2$ faça
6	enquanto $\mathcal{S}_k \neq \emptyset$ faça
7	pegue o ponto p em sementes k com maior curvatura gaussiana e integre C_i ;
8	retire p de \mathcal{S}_k ;
9	
10	

Algoritmo 3.2: Descrevendo linhas de curvatura sobre M

4 SUAVIZAÇÃO

O tensor de curvatura descrito na seção 2.2, por ter natureza linear sobre cada triângulo, tende a capturar uma quantidade excessiva de pontos umbílicos, provenientes de ruído e imperfeições locais na geometria. No entanto, se desejarmos um campo de direções topologicamente mais simples, ou seja, com poucos pontos umbílicos, mas ainda mantendo a geometria das linhas de curvatura fieis à geometria global da superfície, é conveniente suavizar o campo após o cálculo dos tensores nos vértices da malha. Em [1], este passo adicional é realizado no tensor de curvatura 2D definido sobre uma parametrização aproximadamente conforme da malha M . Neste capítulo apresentamos uma forma de suavizar o campo tensorial 3D T definido na seção 2.2, sem utilizar uma parametrização. Nossa abordagem se baseia no uso de transporte paralelo de vetores sobre M , e de geodésicas entre dois vértices próximos de M .

Para suavizar o tensor $T(p)$, basicamente calcularemos uma média ponderada de tensores em uma vizinhança de p . Aqui surgem três problemas:

1. Encontrar os vértices em uma vizinhança de p . Para isto, usamos o Método Fast Marching [8] (FMM), como no capítulo anterior.
2. Cada tensor 3D está representado em uma base própria, daí a necessidade do uso de transporte paralelo de vetores via geodésicas.
3. O peso de um tensor $T(q)$ na vizinhança de p depende da distância entre p e q sobre M .

Usaremos o trabalho de Morera [12] para calcular geodésicas de forma iterativa e resolver estes dois últimos problemas, como descrito na próxima seção.

4.1 GEODÉSICAS ITERATIVAS

Apresentamos nesta seção a descrição do cálculo de uma geodésica curta Γ que liga dois vértices v_1 e v_2 de M , conforme feita por Morera [12]. Esse trabalho é baseado no trabalho

de Polthier e Schmieß [13], e no Método Fast Marching (que passamos a chamar de FMM) desenvolvido por Kimmel e Sethian [8]. Esse método permite uma boa aproximação da geodésica discreta entre dois pontos, por meio de um processo iterativo.

O algoritmo que calcula a geodésica curta Γ entre os dois vértices $v_1, v_2 \in M$, é composto por duas etapas. A primeira, calcula uma curva poligonal Γ_0 sobre as arestas de M , ligando os vértices v_1 e v_2 . Na segunda etapa é feito um processo iterativo aproximando Γ_0 de Γ .

Para encontrar a curva poligonal inicial Γ_0 , usamos do algoritmo 4.3.

entrada:	Malha de triângulos M , e dois vértices v_1 e v_2 desta
saída	: A aproximação inicial Γ_0 formada por arestas de M , ligando v_1 a v_2
1	Use FMM para calcular a distância geodésica $D(v)$ do vértice v_1 a seus vizinhos, recursivamente, até encontrar o vértice v_2 ;
2	Coloque v_1 em Γ_0
3	$p_0 = v_1, i = 0$
4	enquanto $p_i \neq v_2$ faça
5	$p_{i+1} =$ vizinhança de p_i com menor distância D de v_1
6	Coloque p_{i+1} em Γ_0
7	$i = i + 1$
8	

Algoritmo 4.3: Aproximação inicial Γ_0

Uma vez que temos a aproximação inicial Γ_0 para Γ , veja Figura 4.1, precisamos corrigir os

Figura 4.17: Aproximação inicial Γ_0

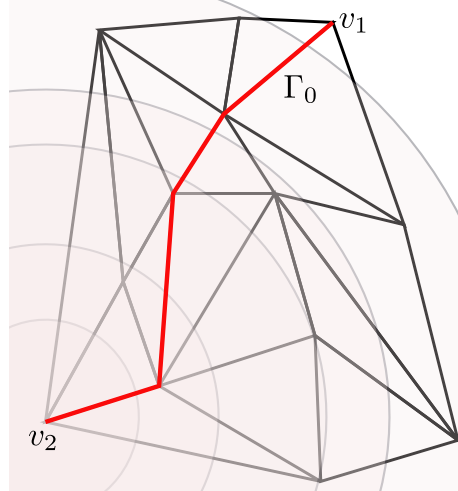
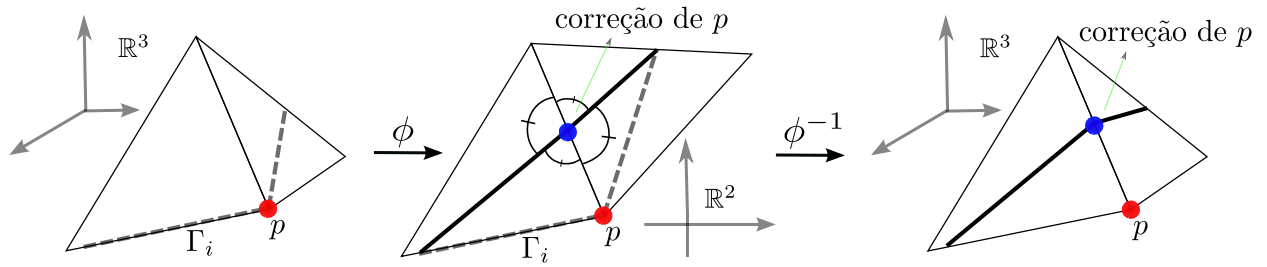


Figura 4.18: Passos para correção de um vértice $p \in M$. A aplicação ϕ é uma isometria



Fonte: Autor, 2014

vértices do interior desta, de maneira iterativa, obtendo Γ_i cada vez mais próxima de Γ . A correção de um vértice p de Γ_i é baseada na teoria de geodésicas retas de Polthier e Schmieß, e é realizada de forma que $\theta_r(p) = \theta_l(p)$, veja Figura 4.1, conforme descrita na seção 3.3.

Na próxima seção descrevemos o cálculo da suavização do tensor de curvatura 3D T .

4.2 SUAVIZANDO T

Dado um vértice p e um raio $r > 0$, temos a vizinhança $V(p) = \{q \in M / D(q) \leq r\}$, com $D(q)$ sendo a distância geodésica de p à q , dado pelo método FMM. Podemos agora estimar o tensor de curvatura T suavizado sobre M , definindo para cada $p \in M$:

$$T(p) = \frac{\sum_{q \in V(p)} \text{peso}(q) \cdot A(q)}{\sum_{q \in V(p)} \text{peso}(q)},$$

onde $\text{peso}(q) = \frac{1}{|\Gamma_q|}$, e $|\Gamma_q|$ é o comprimento da geodésica que liga os vértices p e q de M . A matriz $A(q)$ representa o tensor de curvatura 3D calculado em q e transportado de q até p pela geodésica Γ_q . Portanto,

$$A(q) = P(q) \begin{pmatrix} k_2(q) & 0 & 0 \\ 0 & k_1(q) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P(q)^t,$$

onde

$$P(q) = \begin{pmatrix} \pi_{|\Gamma_q} \circ e_1(q) & \pi_{|\Gamma_q} \circ e_2(q) & N(p) \end{pmatrix}$$

é uma matriz ortogonal, e $\pi_{|\Gamma_q}$ representa o transporte paralelo de vetores do ponto q ao ponto p , ao longo da geodésica Γ_q .

5 RESULTADOS

Para gerar os resultados implementamos uma aplicação em $C++$ usando as bibliotecas `gsl`, `OpenGL 3.0` e a estrutura de dados `CHE` (Compact Half-Edge) apresentada por Lage [9].

A implementação do trabalho foi testada em vários modelos de malhas de triângulos, considerando a geometria, presença de ruídos, topologia distintas, por exemplo o toro, veja Figura 5.3.

O ponto mais importante do trabalho foi usar uma aproximação da geometria intrínseca da malha de triângulos M , e com isso não foi necessário usar parametrizações para calcular linhas de curvaturas sobre M .

Durante a amostragem das linhas podem surgir várias linhas pequenas indesejáveis, as vezes por problemas do campo de distâncias, e outras pelo comportamento da geometria da malha, tais pedaços de linhas vamos chamar de *traços*.

5.1 PERFORMANCE

Na tabela 5.1 apresentamos para alguns modelos os tempos gastos em cada etapa: cálculo do tensor de curvatura, cálculo das geodésicas, 3 suavização do tensor de curvatura, e finalmente o cálculo das linhas de curvatura sobre a malha. Dispomos as malhas em ordem crescente com relação ao número de vértices. Como era de se esperar, o tempo total também ficou em ordem crescente. Contudo nas malhas *armadillo* com 14652 vértices e *toro* com 33480 vértices, apesar do número de vértices no segundo caso ser mais que o dobro, o tempo foi apenas aproximadamente 26% maior. Além disso, o tempo de cálculo das linhas de curvatura foi aproximadamente o mesmo, enquanto que uma diferença de tempo relevante foi observada no cálculo, a diferença maior foi no cálculo da suavização e das geodésicas, o que nos leva a concluir que o tempo para calcular as linhas de curvatura pode depender mais da geometria da malha e depender menos da quantidade de vértices.

Na coluna “# pontos umbílicos”, podemos observar que com apenas três suavizações

já conseguimos reduzir consideravelmente a quantidade de pontos umbílicos dos modelos analisados. Veja por exemplo o modelo armadillo que de início tinha quase cinco mil pontos umbílicos, e após três suavizações restaram um pouco mais de trezentos. No modelo toro, pela malha apresentar ruídos na geometria, de início foram calculados mais de trezentos pontos umbílicos, mas após as suavizações não restaram pontos umbílicos, idêntico ao caso do toro em superfície regulares. Com o elipsoide também chegamos a mesma quantidade de pontos umbílicos apresentada no caso de superfícies regulares.

De geometria diferencial sabemos que os meridianos e paralelos do toro são linhas de curvatura, então ao fazer uma amostragem destas linhas, com uma densidade fixada, restarão poucos traços. Ainda mais, caso escolhido as linhas de curvaturas que são os paralelos, no caso suave não ficaria nenhum traço indesejado, a amostragem seria formada apenas por círculos. Isto seria uma explicação do porque foram calculadas poucas linhas de curvatura no modelo toro, em relação aos outros modelos, mesmo a malha toro contendo mais vértices.

Tabela 5.1: Tempos gastos para calcular as linhas de curvaturas com 3 trêz suavizações. Obs: antes da barra da coluna “# pontos Umbílicos”, esta a quantidade de pontos umbílicos inicial, após a quantidade depois da suavização.

Malha	# Vért.	Tempo (s) cálc. tensor	Tempo cálc. Geodésicas (s)	Tempo(s) Suav.	# pontos Umbílicos	# linhas		# linhas		tempo total(s)
						mín.	máx.	mín.	máx.	
elipsoide	5002	0,02	0,2	0,66	162/4	978	332	3,51	2,76	7,15
mulher	9502	0,05	0,9	1,71	396/146	2508	1869	13,07	11,01	26,74
vaca	10000	0,06	0,92	1,86	901/134	3379	2657	17,01	15,5	35,35
coelho	10000	0,03	0,8	2,04	965/154	3105	2765	15,75	15,13	33,75
armadillo	14652	0,12	1,57	3,72	4924/330	4711	4431	32,35	30,98	68,74
toro	33480	0,16	5,72	16,83	360/0	1997	1629	32,91	31,28	86,9

5.2 SUAVIZAÇÃO

Durante a suavização do campo tensorial, o cálculo que mais custa computacionalmente é o das geodésicas entre dois vértices da malha, isto se a distância sobre a malha entre eles for grande, pois deste modo as aproximações das geodésicas poderão conter vários vértices, e conseqüentemente serão necessárias muitas etapas de correção (ver seção 4.1). Contudo, se a distância entre os vértices for pequena, o cálculo da geodésica é feito rapidamente.

Um detalhe importante é que precisamos calcular as geodésicas iterativas, entre os vértices da malha e seus vizinhos, dado um raio, uma única vez. E ao calcular a geodésica entre os vértices v_1 e v_2 , temos a geodésica que liga v_2 a v_1 . Após isto, podemos suavizar várias vezes o tensor de curvatura 3D, sem a necessidade de recalculá-las.

A suavização do tensor de curvatura pode remover detalhes da topologia dos campos de direções principais, podendo deixar de fazer sentido com a geometria da malha de triângulos. Veja na Figura 5.2, que na terceira iteração da suavização do tensor já temos um campo de direções de curvatura mínima com poucos detalhes. No entanto, em algumas malhas de triângulos a presença de ruídos na geometria é clara ao calcular o tensor e extrair um dos campos de direções, veja por exemplo a Figura 5.2, o exemplo clássico do elipsoide. Sabemos que este possui 4 pontos umbílicos no caso suave. Neste caso, foram necessárias 2 suavizações para o tensor fornecer 4 pontos umbílicos.

5.3 INTEGRAÇÃO DE LINHAS DE CURVATURA

Esta seção apresenta alguns exemplos de linhas de curvatura sobre malhas de triângulos. Foram utilizados cinco modelos. Veja a seguir as descrições de cada modelo:

1. O elipsoide, exemplo clássico de geometria, veja Figura 5.3, cuja malha contém 5002 vértices. Neste exemplo suavizamos o tensor de curvatura 20 vezes. Apesar de permanecerem alguns traços não desejados sobre a malha, o resultado foi bom, pois as linhas se comportam como no caso de superfícies regulares. Uma boa observação é que esta malha é um exemplo de uma malha fechada, onde todos os pontos umbílicos são wedge;
2. O toro, também clássico da geometria diferencial, mostrado na figura 5.3, com 33480 vértices. Foi necessário suavizar o tensor de curvatura 10 vezes. Já nesta malha tivemos poucos traços indesejados, porém como as linhas de curvatura mínima são paralelas do toro (nesta malha), não deveríamos ter traços. No caso das linhas de curvatura máxima,

que são os paralelos do toro, é inevitável durante a amostragem não ter traços. A malha toro é um exemplo de malha de gênero 1 e que não possui pontos umbílicos, e nosso método apresentou resultados bem semelhantes com o caso de superfícies regulares;

3. O coelho, exemplo clássico de computação gráfica, veja Figura 5.3, possui 10000 vértices, e o tensor de curvatura foi suavizado 1 vez. Veja que as linhas de curvatura destaca perfeitamente a geometria da malha, por exemplo a parte de trás da orelha do coelho é uma região parecida com um pedaço de cilindro, e as linhas se comportam aproximadamente

Figura 5.19: Suavização do tensor de curvatura 3D. Figura (1): sem suavização, na Figura (2): 1 suavização, na Figura (3): 3 suavizações, e na Figura (4): 20 suavizações.

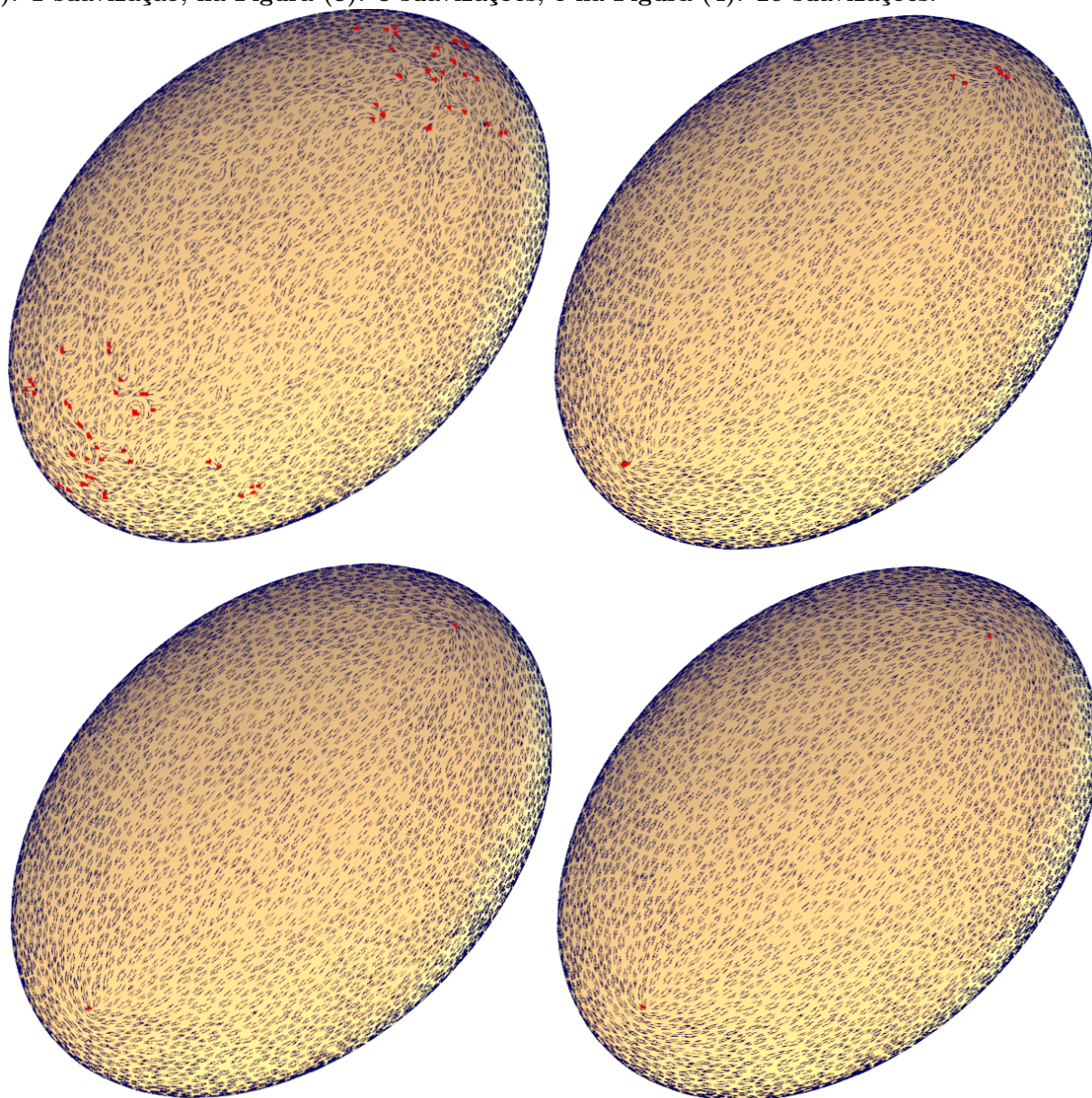
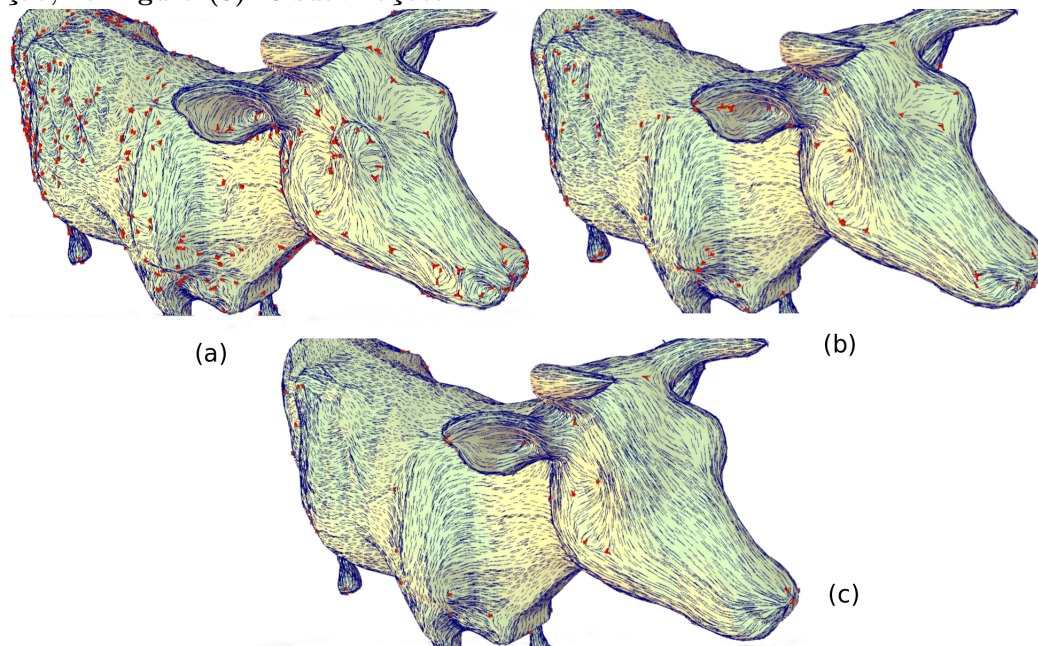


Figura 5.20: Suavização do tensor de curvatura 3D. Figura (1): 0 suavização, na Figura (2): 1 suavização, na Figura (3): 3 suavizações.

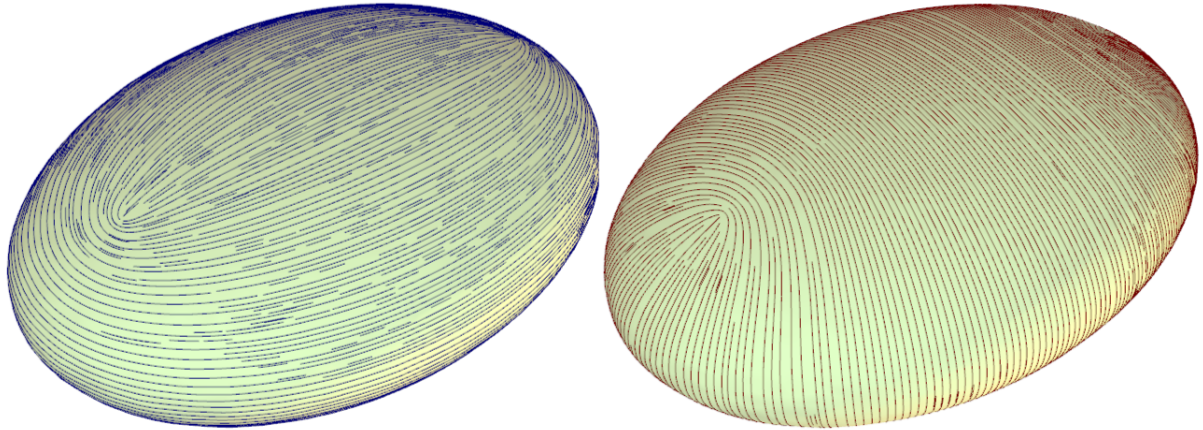


Fonte: Autor, 2014

como no cilindro;

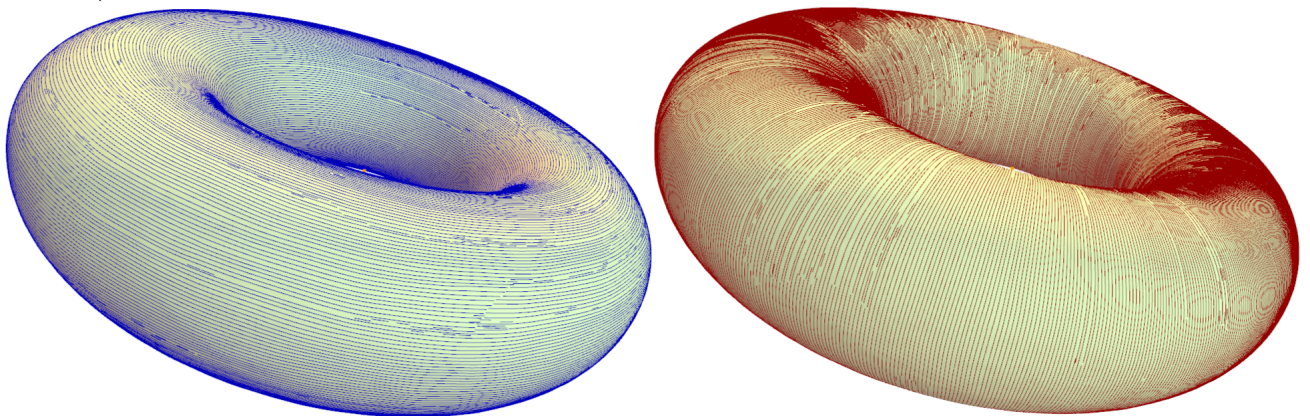
4. A mulher, veja Figura 5.3, com 9502 vértices. Neste caso, o tensor foi suavizado 3 vezes. Este também é um exemplo onde o método destaca com sucesso as linhas que estão bem próximas das linhas de máxima e mínima curvatura.;
5. A vaca, veja Figura 5.3, com 10000 vértices. Aqui o tensor foi suavizado 3 vezes. Este é um exemplo de que se suavizarmos muito tensor de curvatura, começamos a perder detalhes locais da geometria, por exemplo veja que restou pouca informação da geometria da região próxima ao olho da vaca, para isto basta comparar com o campo de vetores desta malha na Figura 5.2;
6. O Armadillo, na Figura 5.3, com 14652 vértices. Aqui o tensor não foi suavizado. Este é um exemplo de que nosso método fornece bons resultados, mesmo sem suavizar o tensor de curvatura. Veja que as linhas destacam claramente os detalhes da geometria da malha, e respeitando a orientação da malha, veja para isto o interior da orelha do armadillo.

Figura 5.21: Linhas de curvatura sobre o elipsoide. Do lado esquerdo as linhas de curvatura mínima, e do direito de curvatura máxima



Fonte: Autor, 2014

Figura 5.22: Linhas de curvatura sobre o toro. Do lado esquerdo as linhas de curvatura mínima, e do direito de curvatura máxima



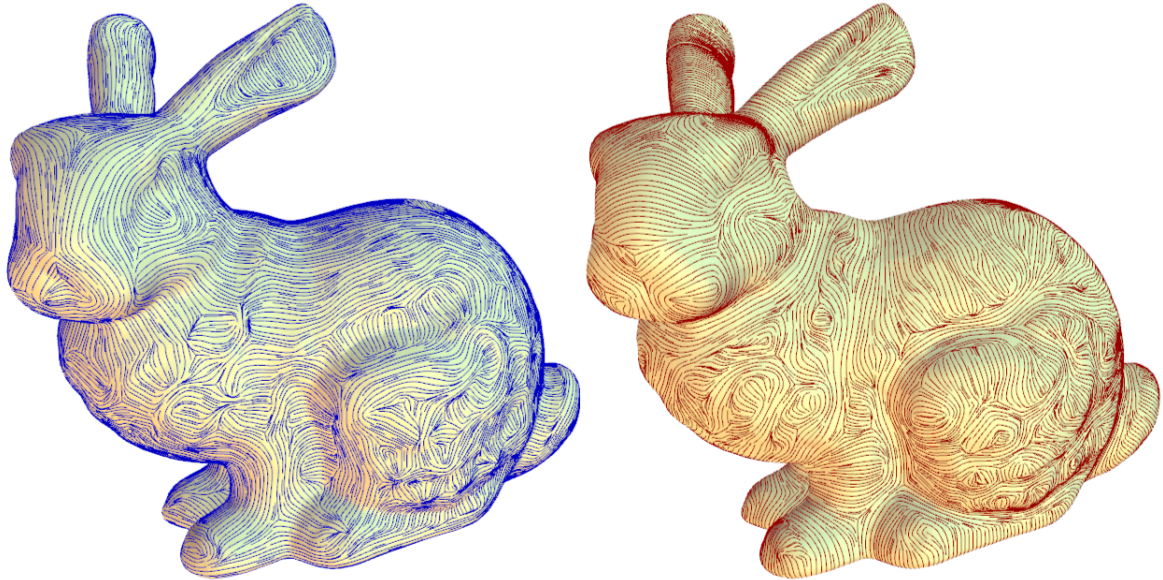
Fonte: Autor, 2014

5.4 DETALHES DE IMPLEMENTAÇÃO

Foi usado para criar o tensor de curvatura T em cada vértices apenas a primeira vizinhança estrelada deste. Pelo trabalho de Cohen-Steiner e Morvan [3] deveríamos utilizar de um disco aproximadamente geodésico, mas nossa implementação mostrou bons resultado usando a primeira vizinhança estrelada, veja por exemplo na Figura 5.2 no item (a).

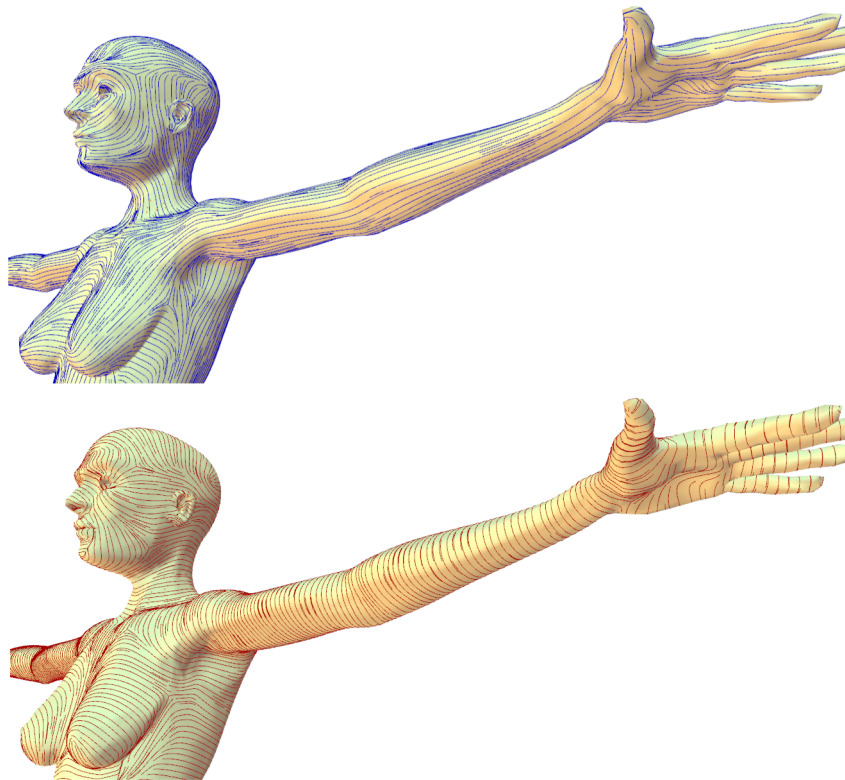
Para suavizar T em um vértice, utilizamos um raio dado por um oitavo do comprimento da maior aresta de M . Mas caso esta vizinhança não atinja 8 vértices, aumentamos iterativamente até atingir. Para cada vértice usamos como peso para transportar seu tensor via geodésica, o inverso da distância deste ao vértice em que o tensor esta sendo suavizado, veja seção 4.2.

Figura 5.23: Linhas de curvatura sobre o coelho. Do lado esquerdo as linhas de curvatura mínima, e do direito de curvatura máxima



Fonte: Autor, 2014

Figura 5.24: Linhas de curvatura sobre a mulher. Do lado de baixo as linhas de curvatura mínima, e de cima de curvatura máxima



Fonte: Autor, 2014

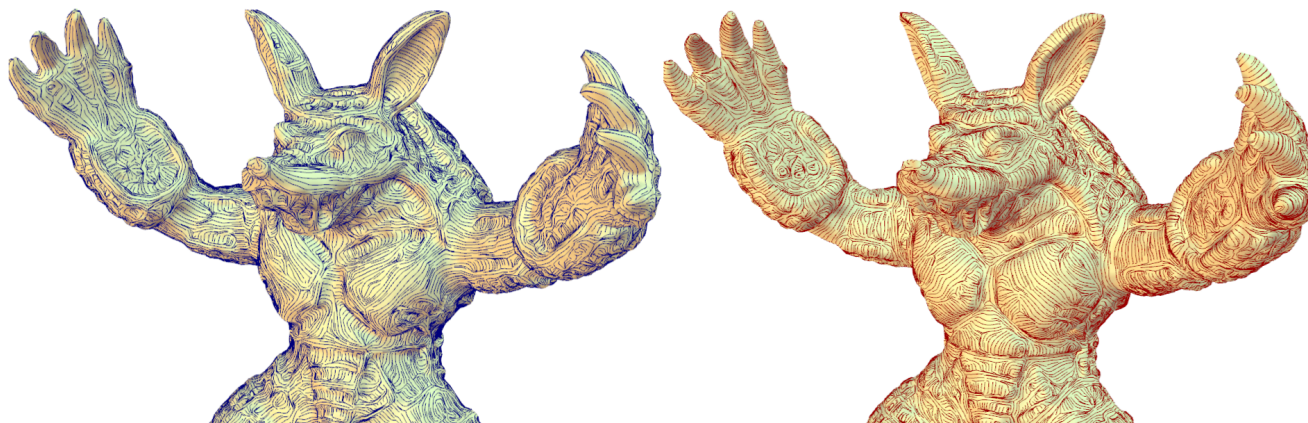
Figura 5.25: Linhas de curvatura sobre a vaca. Do lado esquerdo as linhas de curvatura mínima, e do direito de curvatura máxima



Fonte: Autor, 2014

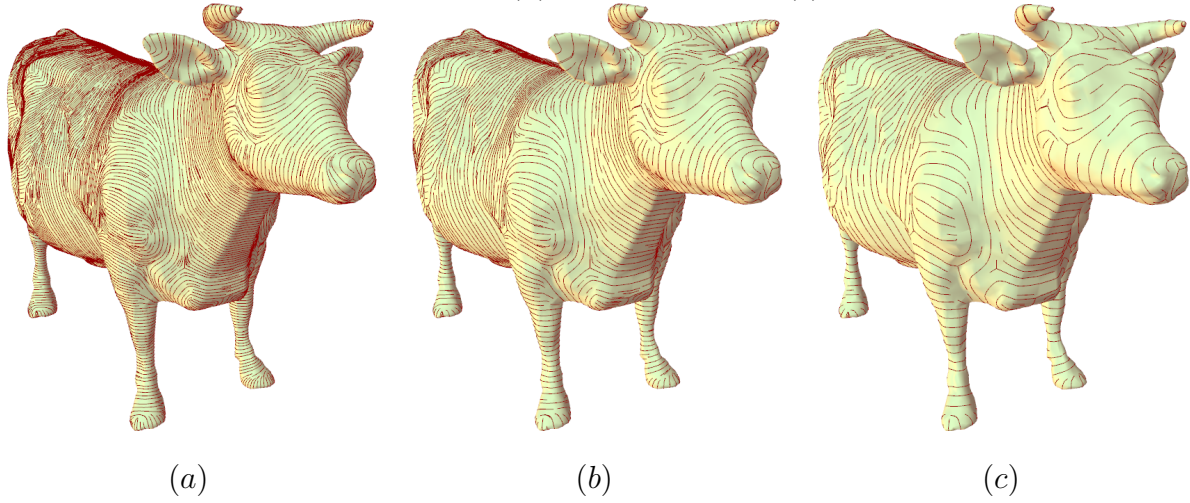
As sementes foram plantadas a uma distância dada pela metade da mediana do comprimento das arestas. E por ultimo, para a densidade σ usamos três décimos da aresta mediana. Como devemos plantar as sementes numa distância maior que a densidade dada, definimos sempre a distâncias das sementes a partir da densidade. Variando a densidade veja os resultados na Figura 5.4.

Figura 5.26: Linhas de curvatura sobre o armadillo. Do lado esquerdo as linhas de curvatura mínima, e do direito de curvatura máxima



Fonte: Autor, 2014

Figura 5.27: Linhas de curvatura sobre a vaca. Na figura (a) usamos σ igual a 0,5 vezes o comprimento m da aresta mediana, na (b) $\sigma = 1,8 \cdot m$, e em (c) $\sigma = 3,6 \cdot m$



Fonte: Autor, 2014

CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um procedimento para calcular linhas de curvaturas e suavização de campos tensoriais sobre uma malha de triângulos M sem usar parametrizações. Utilizamos para isto alguns conceitos intrínsecos de superfícies regulares: transporte paralelo e geodésicas.

O trabalho foi baseado em três etapas. O primeiro foi o cálculo do tensor de curvatura, que fornece uma aproximação das curvaturas principais, e uma base ortogonal em cada vértice, formado pelo vetor normal e as direções principais no vértice. A segunda etapa foi a suavização do tensor de curvatura, tal etapa pode ser necessária quando a malha utilizada possuir ruídos na geometria, como no caso da Figura 5.2, e também como em nosso trabalho utilizamos apenas a primeira vizinhança estrelada para criar o tensor de curvatura em um vértice, ao suavizar o tensor neste, conseguimos uma contribuição melhor da geometria local para este vértice. A terceira e última etapa, foi realizar a integração das linhas de curvatura sobre a malha de triângulos, utilizamos para isto o método Runge-Kutta adaptado para malhas.

De modo geral, o cálculo das linhas de curvatura apresentou bons resultados sobre as malhas utilizadas, inclusive em malhas com gênero maior que zero, por exemplo o toro. A contribuição dada por nosso trabalho em relação ao Artigo [1], é que ao usar da geometria intrínseca, não precisamos nos preocupar com a topologia da malha, apenas precisamos que seja uma variedade, e também evitamos distorções de área e de ângulo, pois não usamos parametrizações.

Segue abaixo uma lista de trabalhos futuros:

1. Verificar se existe aumento na precisão do método em relação ao trabalho [1], devido as distorções causadas pelo uso de parametrizações discretas.
2. Mapear a malha de triângulos em uma malha base, por exemplo: mapear o coelho que tem gênero 0 na esfera. Após transportar para a malha base a métrica da malha original. Então calcular as linhas de curvatura na malha base.
3. Melhorar o campo de distâncias, para conseguir uma melhor densidade de amostragem

das linhas, evitando linhas pequenas e regiões com densidade muito variada.

4. Estender a implementação para malhas abertas, para isto basta uma adaptação do método que calcula uma geodésica discreta entre dois vértices da malha.

Referências

- [1] Pierre Alliez, David Cohen-Steiner, Olivier Devillers, Bruno Lévy, e Mathieu Desbrun. Anisotropic polygonal remeshing. In **Transactions on Graphics**, volume 22, pages 485–493. ACM, 2003.
- [2] Richard Burden e Douglas Faires. **Análise numérica**. Cengage Learning, 2008.
- [3] David Cohen-Steiner e Jean-Marie Morvan. Restricted delaunay triangulations and normal cycle. In **Symposium on Computational Geometry**, pages 312–321. ACM, 2003.
- [4] Thierry Delmarcelle e Lambertus Hesselink. The topology of symmetric, second-order tensor fields. In **Visualization**, pages 140–147. IEEE, 1994.
- [5] Manfredo Perdigao do Carmo. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. SBM, 2010.
- [6] Klaus Hildebrandt, Konrad Polthier, e Max Wardetzky. Smooth feature lines on surface meshes. In **Symposium on Geometry Processing**, pages 85–90, 2005.
- [7] Bruno Jobard e Wilfrid Lefer. Creating evenly-spaced streamlines of arbitrary density. In **Visualization in Scientific Computing**, pages 45–55. Springer, 1997.
- [8] Ron Kimmel e James A Sethian. Computing geodesic paths on manifolds. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, 95(15):8431–8435, 1998.
- [9] Marcos Lage. **Estruturas de dados topológicos escalonáveis para variedades de dimensão 2 e 3**. PhD thesis, Departamento de Matemática, PUC-Rio, 2006. Oriented by Hélio Lopes.
- [10] Bruno Lévy, Sylvain Petitjean, Nicolas Ray, e Jérôme Maillot. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation. In **ACM Transactions on Graphics**, volume 21, pages 362–371. ACM, 2002.

- [11] Martin Marinov e Leif Kobbelt. Direct anisotropic quad-dominant remeshing. In **Pacific Graphics**, pages 207–216. IEEE, 2004.
- [12] Dimas Martínez Morera. **Geodesic-based Modeling on Manifold Triangulations**. IMPA, 2006. Oriented by Paulo Cezar Carvalho and Luiz Velho.
- [13] Konrad Polthier e Markus Schmies. **Straightest geodesics on polyhedral surfaces**. ACM, 2006.
- [14] Xavier Tricoche. **Vector and tensor field topology simplification, tracking, and visualization**. PhD thesis, Department of Computer Science, Universitat Kaiserslautern, 2002.
- [15] Vivek Verma, David Kao, e Alex Pang. A flow-guided streamline seeding strategy. In **Visualization**, pages 163–170. IEEE, 2000.

APÊNDICE

5.1 GEODÉSICAS E TRANSPORTE PARALELO DE VETORES SOBRE SUPERFÍCIES DIFERENCIÁVEIS

Os detalhes do texto abaixo podem ser encontradas em [5].

Considere uma curva parametrizada

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U,$$

onde $U \subset S$, tal que $\alpha(0) = p \in U$ e $\alpha'(0) = y \in T_p S$. Considere um campo diferenciável de vetores v tangentes à superfície sobre U , restringindo v à α , o vetor obtido pela projeção de $(dw/dt)(0)$ sobre o plano tangente $T_p S$ é chamada de *derivada covariante* do campo de vetores v no ponto p em relação ao vetor y , a qual denotamos por $(Dw/dt)(0)$.

A definição de derivada covariante faz parte da geometria intrínseca de S , e não depende da curva α tomada, depende apenas do campo de vetores.

Dizemos que um campo de vetores tangente v restringido a uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ é *paralelo* se $Dw/dt = 0$, para todo $t \in I$. Considerando que S seja um plano, teremos que a noção de campo paralelo ao longo de uma curva torna-se a noção de campo constante.

Dados dois campos de vetores paralelos w e v sobre S , se restringirmos estes à uma curva α teremos que $\langle v(t), w(t) \rangle$ será constante, ou seja o ângulo entre $v(t)$ e $w(t)$ é constante.

Considere uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$, seja $w_0 \in T_{\alpha(t_0)} S$, $t_0 \in I$, temos a existência e unicidade de um campo de vetores paralelo $w(t)$ ao longo da curva $\alpha(t)$, tal que $w(t_0) = w_0$. Seja $t_1 \in I$, tal que $t_1 \neq t_0$, o vetor $w(t_1)$ é chamado *transporte paralelo* de w_0 ao longo de α no ponto t_1 .

Considere $\gamma : I \rightarrow S$ curva parametrizada regular, dizemos que γ é uma *geodésica* caso o

campo $\gamma'(t)$ for paralelo, ou seja

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0, \text{ para todo } t \in I.$$

Pelas propriedades acima temos que $|\gamma'(t)| = \text{constante} \neq 0$. Observe que a definição de geodésica é equivalente à $\gamma''(t) = k(t)n(t)$ ser normal ao $T_{\gamma(t)}S$. Logo γ é geodésica se e somente se a normal $n(t)$ for paralela à normal a S em $\gamma(t)$.

Dado uma geodésica $\gamma : I \rightarrow S$ e $t_0 \in I$, então existe uma vizinhança $(t_1, t_2) \subset I$ de t_0 , tal que $\gamma((t_1, t_2))$ é o menor caminho sobre S que liga o ponto $\gamma(t_1)$ ao $\gamma(t_2)$.

Considere uma curva regular orientada $C \subset S$, em uma vizinhança do ponto $p \in C$ seja uma parametrização $\alpha(s)$ de C pelo comprimento de arco s . O valor

$$\left\langle \frac{d\alpha'(s)}{ds}, N \wedge \alpha'(s) \right\rangle = k_g$$

é chamado *curvatura geodésica* de C no ponto $\alpha(s)$. Uma curva regular que possui curvatura geodésica nula em todo ponto é uma geodésica.