Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Rodrigo Silva dos Santos

Teorema de Aleksandrov para Curvaturas Médias Altas

Maceió
2014

Rodrigo Silva dos Santos

Teorema de Aleksandrov para Curvaturas Médias Altas

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 26 de Março de 2014 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Maceió
2014

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Maria Auxiliadora G. da Cunha

S237t Santos, Rodrigo Silva dos Santos.
Teorema de Aleksandrov para curvaturas médias altas / Rodrigo Silva dos Santos. – 2014.
63 f. : il.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva .
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2014.

Bibliografia: f. 63-64.

1. Curvaturas médias altas . 2. Desigualdade de Heintze-Karcher-Ros. 3. Teorema de Aleksandrov. I. Título.

CDU: 514.772.2

Teorema de Aleksandrov para Curvaturas Médias Altas

Rodrigo Silva dos Santos

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 26 de Março de 2014 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório

Ivaldo Paz Nunes

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva (Orientador)

Às minhas meninas, Fabiana e Sophia.

Agradecimentos

A Deus pela vida e por me conceder a força e determinação necessárias para a realização de mais um sonho.

A minha esposa Fabiana, pelo amor, compreensão e paciência a mim conferidos durante esses anos, principalmente estes últimos, em que estive tão ausente pelas minhas estadias em Maceió e a minha pequena Sophia, que nas coisas mais simples, apesar de sua inocência, me faz tão feliz.

Ao Professor Dr. Márcio Henrique Batista pela orientação, presteza e direcionamento na elaboração desta dissertação, um exemplo de mestre e pessoa.

Aos professores Drs. Feliciano Aguiar Vitório e Ivaldo Paz Nunes por aceitarem participar da banca e pelas sugestões feitas.

Aos colegas de mestrado, Allan George, Felipe Leandro, Max Manoel, Marcos Raniere pela boa amizade, momentos de descontração e pelo compartilhamento mútuo, ao Abraão Mendes por tudo isso e por muito me ajudar desde o meu início no mestrado, ao José Lucyan pela boa receptividade e consideração e à Nayane Freitas por me ajudar com o inkscape.

Aos meus familiares pelo apoio concedido em todos estes anos, pelo incentivo e carinho nos momentos difíceis e por sempre acreditarem em mim.

E a Dona Maria, pelos revigorantes e “eternos” cafezinhos.

"*We are such stuff as dreams are made on.*"
—**William Shakespeare**

Resumo

Neste trabalho demonstramos o teorema de Aleksandrov obtido por António Ros em [18] e uma generalização obtida por Choe & Park em [4] para hipersuperfícies compactas mergulhadas com alguma curvatura média alta constante. Mais precisamente, mostramos os seguintes teoremas:

1) "*Uma hipersuperfície compacta mergulhada no Espaço Euclidiano com* H_r *constante para algum* $r = 1, ..., n$ *é uma esfera.*"

2) "*Se* $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *é uma hipersuperfície compacta mergulhada com alguma* H_ℓ *constante em um cone convexo suave por partes* C *e perpendicular a* ∂C*, então* S *é parte de uma hiperesfera redonda.*"

Palavras chave: curvaturas médias altas, desigualdade de Heintze-Karcher-Ros, teorema de Aleksandrov.

Abstract

In this work we show the Aleksandrov's Theorem due to António Ros in [18] and a generalization obtained by Choe & Park in [4] for compact embedded hypersurfaces with some constant higher mean curvature. More precisely, we show the following theorems:

1) "*The sphere is the only embedded compact hypersurface in the Euclidean space with* Hr *constant for some* $r = 1, \ldots, n$"

2) "*If* $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *is a compact embedded hypersurface with constant higher order mean curvature in a convex piecewise smooth cone* C *which is perpendicular to* ∂C*, then* S *is part of a round hypersphere.*"

Keywords: higher order mean curvatures, Heintze-Karcher-Ros inequality, Aleksandrov's theorem.

Sumário

Introdução

Uma questão fundamental sobre hipersuperfícies no espaço euclidiano é decidir se uma hipersuperfície compacta(imersa ou mergulhada) com curvatura média H_r, de ordem superior, para algum $r = 1, ..., n$ é uma esfera.

Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta, orientável e denote por $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ as curvaturas principais de φ. Se σ_r é o r-ésimo polinômio simétrico elementar, então a r-ésima curvatura média de H_r de φ em um ponto $p \in M$ é definida por

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r}.$$

Neste caso $H_0 = 1$ e $H_r = 0$ sempre que $r > n$. No caso em que $r = 1$, $H_1 = H$ é a curvatura média de φ, para $r = 2$, H_2 é a curvatura escalar de φ e no caso em que $r = n$, H_n é a curvatura de Gauss-Kronecker de φ.

Em 1954, Hsiung mostrou em [9] que se M^n é uma hipersuperfície estritamente convexa ou estrelada com H_r constante para todo $r = 1, \ldots, n$ então M^n é necessariamente uma esfera. Em particular se a curvatura de Gauss-Kronecker H_n é constante e M^n é mergulhada no espaço euclidiano, então pelo Teorema de Hadamard para hipersuperfícies convexas, M^n é uma esfera. O caso convexo foi estudado previamente por Liebmann[13] e Süs[23], sendo que o primeiro mostrou em 1899 que as esferas são as únicas superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante. Ele também mostrou que as esferas são as únicas superfícies ovais com curvatura média H constante.

Em 1958, Aleksandrov em [1] estendeu o resultado de Liebmann mostrando que a única hipersuperfície compacta e mergulhada no espaço euclidiano com curvatura média H_1 constante é uma esfera. No caso de hipersuperfícies compactas imersas, Hsiang, Teng e Yu[10] e Wente[24] foram capazes de construir exemplos não esféricos em $\mathbb{R}^{2n}$ e em $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Em 1988, Ros provou em [19] que se a curvatura escalar H_2 é constante e a hipersuperfície é mergulhada então ela deve ser uma esfera. Entretanto, em 1987, Ros em [18] estendera este resultado para qualquer H_r. Em linhas gerais, ele provou o seguinte

Teorema 0.1. *Uma hipersuperfície compacta mergulhada no Espaço Euclidiano com H_r constante para algum $r = 1, ..., n$ é uma esfera.*

Nesta dissertação provaremos o resultado acima e assim como em [19], usaremos o método de Reilly[16] como principal suporte. Em 1991, Ros e Montiel em [14] obtiveram uma prova diferente do teorema acima. Outra prova foi publicada por N. Korevaar em [25]. Recentemente, Choe & Park no artigo [4] estenderam o Teorema acima para hipersuperfícies compactas mergulhadas em um cone convexo, mais precisamente eles provaram o

Teorema 0.2. *Se $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície compacta mergulhada com alguma H_ℓ constante em um cone convexo suave por partes C e perpendicular a ∂C, então S é parte de uma hiperesfera redonda.*

Para provar este teorema, estenderemos uma fórmula integral de Minkowski obtida em [9] e uma desigualdade integral inspirada no trabalho de Heintze & Karcher [6] e obtida por Ros em [18], ambas enunciadas e demonstradas nesta dissertação em ambas as versões. Dito isto, apresentamos o principal objetivo desta dissertação, que é provar os dois teoremas supracitados e para isso subdividimos este trabalho em quatro capítulos, os quais são descritos a seguir. No primeiro capítulo estabelecemos a notação e apresentamos os resultados e definições relacionados à Geometria Riemanniana, além disso introduzimos as Transformações de Newton e as curvaturas médias de ordem superior, os quais desempenham papel fundamental no decorrer de todo o trabalho.

No segundo capítulo enunciamos e demonstramos a Fórmula de Minkowski, a Fórmula de Reilly e a Desigualdade de Heintze-Karcher-Ros, que são os principais resultados que formam a base necessária para a demonstração dos Teoremas principais.

Como aplicações destes resultados, no terceiro capítulo, enunciamos e demonstramos o Teorema de Aleksandrov, bem como uma extensão do mesmo ao considerar um domínio compacto que é um ponto crítico do funcional isoperimétrico.

Por fim, no quarto capítulo abordamos as hipersuperfícies compactas mergulhadas em um cone convexo suave por partes e feito isto, estendemos o resultado obtido por Ros apresentado no capítulo anterior.

As principais fontes que inspiraram este trabalho foram os artigos de Ros [18] e de Choe & Park [4].

Capítulo 1

Noções Preliminares

Ao longo deste capítulo, apresentaremos as definições e os resultados básicos no tocante à Geometria Riemanniana, que servirão como base para a compreensão e desenvolvimento dos capítulos seguintes. A maior parte deste capítulo encontra-se em [3], sendo assim, a prova dos resultados omitidos estarão claramente referenciados. Denotaremos por M^n(ou simplesmente por M) uma variedade Riemanniana de dimensão n e classe C^∞, $\langle\ ,\ \rangle$ denotará sua métrica Riemanniana e ∇ a sua conexão Riemanniana, sendo que em alguns momentos este mesmo ∇ denotará o gradiente de uma função, no entanto, nestes casos ficará claro no contexto tal diferença, excluindo assim qualquer possibilidade de confusão.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M. Dado $p \in M$, T_pM denotará o plano tangente à variedade M no ponto p.

1.1 Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiano

Definição 1. *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. O gradiente de f é o campo vetorial suave ∇f, definido sobre M da seguinte maneira :*

$$X(f) = \langle \nabla f, X\rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

É imediato da definição que, se $f, g \in \mathcal{D}(M)$ então:

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;
2. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

Proposição 1.1. *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então*

$$\langle \nabla f, v\rangle_p = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)\Big|_{t=0}.$$

Em particular, se p é ponto de máximo ou mínimo local para f, então $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração. Para provarmos a primeira parte basta observar que, sendo X uma extensão local de γ', então

$$\langle \nabla f, v\rangle_p = (X(f))(p) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)\Big|_{t=0}.$$

Agora, suponha que p é ponto de máximo local para f(o outro caso é análogo). Então existe $U \subset M$ vizinhança aberta de p tal que $f(p) \geq f(q)$ para todo $q \in U$. Se $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ é como no enunciado, então $f\circ\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}$ tem um máximo local em 0, donde

$$\langle \nabla f, v\rangle_p = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)\Big|_{t=0} = 0.$$

Como a relação acima é válida para todo $v \in T_pM$, segue que $\nabla f(p) = 0$.

■

Definição 2. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. A divergência de X é a função suave* $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$, *definida por*

$$\operatorname{div} X(p) = \boldsymbol{tr}[Y(p) \longmapsto (\nabla_Y X)(p)],$$

onde ***tr*** *significa o traço da aplicação $\nabla_{\bullet} X : T_pM \to T_pM$.*

Decorre diretamente da definição que, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathcal{D}(M)$ então:

1. $\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$;

2. $\operatorname{div}(f.X) = f.\operatorname{div} X + \langle \nabla f, X\rangle$.

Teorema 1.1 (Teorema da Divergência)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana compacta com bordo e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então*

$$\int_M \operatorname{div} X dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle dS,$$

onde ν é um campo unitário normal à ∂M apontando para fora de M.

O Teorema da Divergência é uma consequência direta do Teorema de Stokes(o Teorema de Stokes pode ser visto, por exemplo, em [21], capítulo 5). Uma prova do Teorema da Divergência pode ser encontrada em [12], página 206.

Corolário 1.1. *Seja M uma variedade Riemanniana sem bordo e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então:*

$$\int_M \operatorname{div} X dM = 0.$$

Observação 1. Diz-se que um referencial ortornomal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ em um aberto $U \subset M$, é geodésico em p , se $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$ para todos $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Sejam X um campo diferenciável de vetores em M e $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial geodésico em p. Escrevendo $X = \sum_{i=1}^{n} x_k E_k$, em $p \in M$, temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_j \rangle \langle E_i, E_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \sum_{k=1}^{n} x_k E_k, E_j \rangle \langle E_i, E_j \rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \langle E_i(x_k) E_k, E_j \rangle \langle E_i, E_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i(x_i).
\end{aligned}$$

Proposição 1.2. *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial geodésico em M, então*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i$$

Demonstração. Ao escrever

$$\sum_{j=1}^{n} a_j e_j,$$

temos que

$$e_i(f) = \langle \nabla f, e_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} a_j e_j, e_i \rangle = a_i.$$

Logo

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i$$

■

Definição 3. *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. O Laplaciano de f é o operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$, definido por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Tomando, em $p \in M$, o referencial geodésico $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é possível expressar o Laplaciano de f por

$$\begin{aligned}
\Delta f(p) &= \operatorname{div} \nabla f(p) \\
&= \operatorname{div}(\sum_{i=1}^{n} f_i E_i)(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_{ii}(p).
\end{aligned}$$

Segue das propriedades do gradiente e do divergente que, se $f, g \in \mathcal{D}(M)$, então:

1. $\Delta(f+g) = \Delta(f) + \Delta(g)$;
2. $\Delta(f.g) = f.\Delta g + g.\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle$;
3. $\operatorname{div}(h(\nabla f)) = h(\Delta f) + \langle \nabla f, \nabla h\rangle$.

Vejamos a prova de (b):

De fato, fixe $p \in M$ e escolha, em $p \in M$, um referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ em uma vizinhança de p. Então,

$$\begin{aligned}
\Delta(fg)(p) &= \sum_{k=1}^{n} E_k E_k(fg)(p) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E_k(gE_k f + fE_k g)(p) \\
&= \sum_{k=1}^{n} gE_kE_kf(p) + \sum_{k=1}^{n} E_kgE_kf(p) + \sum_{k=1}^{n} E_kgE_kf(p) + \sum_{k=1}^{n} fE_kE_kg(p) \\
&= f\Delta(g)(p) + g\Delta(f)(p) + 2\sum_{k=1}^{n} g_kE_kf_kE_k(p) \\
&= f\Delta(g) + g\Delta(f) + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle(p).
\end{aligned}$$

Em particular, $\Delta f^2 = 2f\Delta f + 2|\nabla f|^2$.

A prova de (c) segue diretamente da propriedade (b) da divergência.

Definição 4. *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. Definimos o hessiano de f no ponto p, para $v \in T_pM$, como o operador linear $\operatorname{Hess} f_p : T_pM \to T_pM$, dado por*

$$\operatorname{Hess} f_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue das propriedades de conexão Riemanniana que, se X é uma extensão local de v então $\operatorname{Hess} f_p(v) = (\nabla_X \nabla f)(p)$.

Proposição 1.3. *Se $f \in \mathcal{D}(M)$, então o hessiano de f no ponto p é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração. Dados $x, y \in T_pM$, sejam X, Y extensões de x, y respectivamente a campos definidos em uma vizinhança de p em M. Então,

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{Hess} f_p(x), y\rangle &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle_p \\
&= X\langle \nabla f, Y\rangle_p - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle_p \\
&= (X(Y(f)))_p - \langle \nabla f, \nabla_Y X + [X,Y]\rangle_p \\
&= (Y(X(f)))_p + ([X,Y](f))_p - \langle \nabla f, \nabla_Y X\rangle_p - ([X,Y](f))_p \\
&= \langle \nabla_Y \nabla f, X\rangle_p \\
&= \langle \operatorname{Hess} f_p(y), x\rangle.
\end{aligned}$$

■

Proposição 1.4. *Se $f \in \mathcal{D}(M)$, então para todo p em M vale a igualdade*

$$\Delta f(p) = \boldsymbol{tr}(\text{Hess}\, f_p).$$

Demonstração. Seja $\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$ uma base ortonormal de T_pM, então

$$\begin{aligned}\mathbf{tr}(\text{Hess}\, f_p) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\text{Hess}\, f)_p(\nu_i), \nu_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\nu_i} \nabla f, \nu_i \rangle_p \\ &= \text{div}\, \nabla f(p) \\ &= \Delta f(p).\end{aligned}$$

■

Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. Como Hess f_p é um operador auto-adjunto, este operador induz de modo natural, uma forma bilinear simétrica em T_pM chamada *forma hessiana* de f em p. Abusando da notação, também denotaremos a forma hessiana de f em p por Hess f_p. Dados $x, y \in T_pM$, a forma hessiana de f em p é definida da seguinte maneira:

$$\text{Hess}\, f_p(x, y) = \langle \text{Hess}\, f_p(x), y \rangle$$

1.2 Aplicação Exponencial

Definição 5. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma geodésica se, para todo $t \in I$, $\dfrac{D}{dt}\left(\dfrac{d\gamma}{dt}\right) = 0$.*

Neste caso, se $v(t) = \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}$ é a velocidade de γ, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(v^2(t)) &= \frac{d}{dt}\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \\ &= 2\left\langle \frac{D}{dt}\gamma'(t), \gamma'(t) \right\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que se γ é geodésica, então o vetor velocidade de γ possui norma constante.

Dizemos que uma geodésica γ é *normalizada* ou que está *parametrizada pelo comprimento de arco* quando $|\gamma'(t)| = 1$, para todo $t \in I$.

Como uma consequência do teorema de existência e unicidade das soluções de equações diferenciais ordinárias, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.5. *Seja M uma variedade Riemanniana. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, existe uma única geodésica $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.*

Denotaremos por γ_v a única geodésica que no instante $t = 0$ passa por p com velocidade $v \in T_pM$.

Definição 6. *Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. A aplicação exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ é a aplicação diferenciável*

$$\exp_p(v) = \gamma(1, p, v) = \gamma\left(|v|, p, \frac{v}{|v|}\right),$$

onde $\gamma(t) = \gamma(t, p, v)$ é a única geodésica satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Geometricamente, $\exp_p(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo-se um comprimento $|v|$, a partir de p, sobre a geodésica que passa por p com velocidade $\dfrac{v}{|v|}$.

É possível aumentar a velocidade de uma geodésica diminuindo o seu intervalo de definição e vice-versa. Isso segue de uma propriedade conhecida, chamada *homogeneidade das geodésicas.* Precisamente, expressamos isso da seguinte maneira: $\forall v \in T_pM$ e $\forall \lambda, t \in \mathbb{R}$, temos

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$$

Proposição 1.6. *Para todo $p \in M$, existem uma vizinhança V da origem de T_pM e uma vizinhança U de p, tais que $\exp_p : V \to U$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
d(\exp_p)_0(v) &= \frac{d}{dt}(\exp_p(tv))\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\gamma_v(t))\Big|_{t=0} \\
&= \gamma_v'(0) \\
&= v.
\end{aligned}$$

Logo, $d(\exp_p)_0$ é a identidade de T_pM, então, pelo Teorema da Aplicação Inversa, $\exp_p$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de 0 em T_pM.

■

O aberto U dado pela proposição anterior é chamado *vizinhança normal* de p.

Definição 7. *Dados $p, q \in M$, a distância d de p a q é definida por*

$$d(p,q) = inf\{l(\alpha_{p,q});\quad \alpha_{p,q} \text{ é uma curva diferenciável por partes ligando } p \text{ a } q\},$$

onde $l(\alpha)$ indica o comprimento da curva α.

Podemos ver uma demonstração em [3], página 161, por exemplo, que munido da distância d, M é um espaço métrico.

1.3 Curvaturas

A seguir apresentaremos a definição de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser Euclidiana.

Definição 8. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma atribuição que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 1.7. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

1. *R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é*

$$\begin{aligned} R(fX + gY, Z) &= fR(X,Z) + gR(Y,Z) \\ R(X, fZ + gW) &= fR(X,Z) + gR(X,W), \end{aligned}$$

   com $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$;

2. *Para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ o operador curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear, ou seja*

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z + W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W \\ R(X,Y)(fZ) &= fR(X,Y)Z, \end{aligned}$$

   com $f \in \mathcal{D}(M)$ e $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$;

3. *(Primeira identidade de Bianchi) Para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vale:*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

Demonstração. A prova destas propriedades pode ser vista em [3], pág. 100.

■

Reescrevendo as propriedades acima, obtemos o seguinte corolário

Corolário 1.2. *(a)* $\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(Y,Z)X, T\rangle + \langle R(Z,X)Y, T\rangle = 0$;

(b) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle$;

(c) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$;

(d) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle$.

Relacionado com o operador curvatura está a *curvatura seccional*(ou Riemanniana), que passamos a definir.

Proposição 1.8. *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K_p(\sigma) = K_p(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 9. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real $K_p(\sigma) = K_p(x,y)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado curvatura seccional de σ em p.*

A proposição seguinte mostra que, em uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante, a curvatura pode ser escrita de uma forma mais simples.

Proposição 1.9. *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação trilinear $R' : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por*

$$\langle R'(X,Y)Z, T\rangle = \langle X, Z\rangle\langle Y, T\rangle - \langle Y, Z\rangle\langle X, T\rangle,$$

para todos $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente se, $R = K_0R'$, onde R é a curvatura de M.

Eis agora a curvatura de Ricci, objeto muito importante nos principais resultados desta dissertação.

Sejam $p \in M$ e x um vetor unitário de T_pM. Definimos a *curvatura de Ricci* no ponto p na direção de x da seguinte maneira:

Se $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ é uma base ortonormal do hiperplano de T_pM ortogonal a x, então

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(x, e_i)x, e_i\rangle = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} K(x, e_i).$$

Portanto, se M é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não-negativa em todos os pontos, então o mesmo acontece com a curvatura de Ricci, isto é, $\mathrm{Ric}(M) \geq 0$.

Observação 2. Algumas vezes usaremos a notação de Einsten, ou seja, omitiremos o sinal do somatório em somas que aparecem índices repetidos, por exemplo

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k X_k = \Gamma_{ij}^k X_k.$$

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de campos de vetores em torno de um ponto $p \in M$. Os coeficientes R_{ijk}^l, definidos por

$$\begin{aligned} R(e_i, e_j)e_k &= \sum_l R_{ijk}^l e_l \\ &= R_{ijk}^l e_l \end{aligned}$$

são denominados *componentes do tensor curvatura.*

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
\langle R(e_i, e_j)e_k, e_s \rangle &= \left\langle \sum_l R_{ijk}^l e_l, e_s \right\rangle \\
&= \sum_l R_{ijk}^l \delta_{ls} \\
&= R_{ijk}^s \\
&:= R_{ijks}
\end{aligned}$$

Os coeficientes R_{ijks} são denominados *coeficientes de Ricci*.

Não é difícil verificar que a função Ric : $T_pM \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática associada à forma bilinear simétrica

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_p : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x, y) &\longmapsto \mathbf{tr}(z \longmapsto R(x, z)y).
\end{aligned}$$

Ao variar p sobre M obtemos uma aplicação bilinear Ric : $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M)$, também chamada *tensor Ric de ordem 2*, dado por

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathbf{tr}(Z \longmapsto R(X, Z), Y)$$

Notemos que, se M tem dimensão 2, então Ric_p é a curvatura Gaussiana de M em p. Além disso

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \mathrm{Ric}(X, X)(p)$$

Exemplo 1.1. *Se M é conexa e tem curvatura seccional constante igual a K, então*

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} K(x, e_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} K = K.$$

1.4 Imersões Isométricas

1.4.1 A segunda forma fundamental

Definição 10. *Sejam M^n, $\overline{M}^{n+m=k}$ variedades Riemannianas. Uma aplicação suave* f : $M \to \overline{M}$ *é uma imersão se* $\mathrm{df}_p : T_pM \to T_p\overline{M}$ *é injetiva para todo* $p \in M$.

Sejam $(\overline{M}^{n+m=k}, \langle\ ,\ \rangle, \overline{\nabla})$ uma variedade Riemanniana, M^n uma variedade n-dimensional e f : $M^n \to \overline{M}^k$ uma imersão. Nestas condições, a métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M através da definição

$$\langle u, v \rangle_p = \langle \mathrm{df}_p(u), \mathrm{df}_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad \forall p \in M, \quad \forall u, v \in T_pM.$$

Dessa forma, a aplicação f é uma *imersão isométrica*.

Dado $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\mathrm{f}(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Portanto existem uma vizinhança $\overline{U}$ de $\mathrm{f}(p)$ e um difeomorfismo $\Phi : \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do $\mathbb{R}^k$, tais que Φ aplica difeomorficamente $\mathrm{f}(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Identificaremos U com $\mathrm{f}(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com o vetor $\mathrm{df}_q(v) \in T_{\mathrm{f}(q)}\overline{M}$. Assim, para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $\nu \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$\nu = \nu^T + \nu^{\perp}, \quad \nu^T \in T_pM, \quad \nu^{\perp} \in (T_pM)^{\perp}.$$

Denominamos por ν^T a componente tangencial de ν e $\nu^{\perp}$ a componente normal de ν. Se X, Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

Verifica-se(cf. Cap. II de [3]) que esta é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M por f.

Definição 11. *Sejam* $\mathrm{f} : M \to \overline{M}$ *uma imersão isométrica,* $U \subset M$ *uma vizinhança de* $p \in M$ *tal que* $\mathrm{f}(U) \subset \overline{M}$ *é uma subvariedade de* $\overline{M}$ *e* $N \in \mathfrak{X}(\overline{U})$ *um campo local de* $\overline{M}$*, com* $\overline{U} \subset \overline{M}$ *aberto e* $\mathrm{f}(U) \subset \overline{U}$*. O campo* N *diz-se normal a* M *se* $\overline{X}(p) = \overline{X}_p \in (T_pM)^{\perp}$*, para todo* $p \in U$*.*

Assim, segue da definição acima que, $\sigma(X,Y) := \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$ é um campo local em $\overline{M}$ normal à M. Prova-se que $\sigma(X,Y)$ está bem definida, isto é, $\sigma(X,Y)$ não depende das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$. Indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis em U normais à $\mathrm{f}(U) \approx U$.

Proposição 1.10. *Se* $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$*, a aplicação* $\sigma : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ *dada por*

$$\sigma(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

A demonstração desta proposiçao pode ser vista em [3] com mais detalhes, apenas indicaremos o principal fato usado, a saber: exprimindo σ em um sistema de coordenadas, verifica-se que o valor de $\sigma(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e de $Y(p)$.

Definiremos agora a segunda forma fundamental: Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle \sigma(x,y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_pM,$$

é, pela proposição anterior, uma forma bilinear e simétrica.

Definição 12. *A forma quadrática* II_η *definida em* T_pM *por* $II_\eta(x) = H_\eta(x,x) = \langle \sigma(x,x), \eta \rangle$*, é denominada a segunda forma fundamental de* f *em* p *segundo o vetor normal* η*.*

Às vezes se utiliza também a expressão **segunda forma fundamental** para designar a aplicação σ que em cada $p \in M$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $(T_pM)^\perp$.

Associada à aplicação H_η temos uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$, definida por

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x,y) = \langle \sigma(x,y), \eta\rangle.$$

Definição 13. *A curvatura média H de M em p com relação à η é dada por*

$$H = \frac{\sum_{i=1}^n H_\eta(E_i, E_i)}{n},$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base qualquer de T_pM.

Proposição 1.11. *Sejam $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal à M. Então*

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração. Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y respectivamente. Então $\langle N, Y\rangle = 0$, donde concluímos que

$$\begin{aligned}
\langle A_\eta(x), y\rangle &= \langle \sigma(X,Y)(p), N\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle(p) \\
&= \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p) \\
&= -\langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle(p) \\
&= \langle -\overline{\nabla}_x N, y\rangle,
\end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$. Donde obtemos que $A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T$.

■

Consideremos, por exemplo, o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, ou seja, f : $M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão isométrica. Neste caso, f$(M) \subset \overline{M}$ é então denominada uma *hipersuperfície*.

Sejam f$(M) \subset \overline{M}$ uma hipersuperfície, $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$. Segue do Teorema Espectral que, como $A_\eta : T_pM \to T_pM$ é auto-adjunta existe uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM formada por autovetores com autovalores associados $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, isto é, $A_\eta(e_i) = \lambda_i e_i, \quad 1 \leq i \leq n$. Supondo que M e $\overline{M}$ são orientáveis e estão orientadas então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base na orientação de M, $\{e_1, \ldots, e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de $\overline{M}$. Neste caso, chamamos os e_i de *direções principais* e os $\lambda_i := k_i$ de *curvaturas principais* da imersão f. A aplicação $A = A_\eta$ é denominada o *operador de Weingarten* associado à segunda forma fundamental. Nesse caso, vale a igualdade $A(X) = -(\overline{\nabla}_X N)^T = -\overline{\nabla}_X N$.

Relacionaremos agora as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$. Se $x, y \in T_pM \subset T_p\overline{M}$ são linearmente independentes, indicaremos por $K(x,y)$ e $\overline{K}(x,y)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, segundo o plano gerado por x e y.

Teorema 1.2. *(Equação de Gauss) Sejam* f $: M^n \to \overline{M}^{n+m}$ *uma imersão isométrica,* $p \in M$ *e* x, y *vetores ortonormais de* T_pM*. Então*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle \sigma(x,x), \sigma(y,y) \rangle - |\sigma(x,y)|^2.$$

Demonstração. Vide [3], pág. 144.

■

No caso de uma hipersuperfície f $: M^n \to \overline{M}^{n+1}$, a Equação de Gauss admite uma expressão mais simples. Sejam $p \in M$, $\eta \in (T_pM)^\perp$ (com $|\eta| = 1$) e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM para a qual $A = A_\eta$ é diagonal, isto é, $A(e_i) = k_i e_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Então $H(e_i, e_i) = \langle A(e_i), e_i \rangle = k_i$ e $H(e_i, e_j) = 0$, se $i \neq j$. Assim, $\sigma(e_i, e_j) = 0$ e $\sigma(e_i, e_i) = k_i \eta$. Portanto a Equação de Gauss escreve-se da seguinte forma

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = k_i k_j.$$

1.4.2 As Transformações de Newton P_r

Definição 14. *Uma função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é dita simétrica se* f *é invariante por permutação de suas variáveis independentes, isto é,*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(n)}),$$

para todas as bijeções $\rho : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Definição 15. *Um polinômio* σ*, com coeficientes em um corpo ou em um anel associativo e comutativo* $\mathbb{K}$ *com unidade, é simétrico, se* σ *for uma função simétrica.*

Definição 16. *Definimos o k-ésimo polinômio simétrico elementar* $\sigma_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *por*

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} \ldots x_{i_k}, & k \in \{1, \ldots, n\} \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Proposição 1.12. *Se* $\sigma_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é o k-ésimo polinômio simétrico elementar, então*

1. $\dfrac{\partial}{\partial x_j} \sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_{k-1}(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n)$;
2. $\sigma_k(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) - \sigma_k(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n) = (x_j - x_i)\sigma_{k-1}(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n)$;
3. $\sum_{j=1}^n x_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} \sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = k.\sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$,

onde $\widehat{x_j}$ *indica que o elemento* x_j *foi omitido.*

Demonstração. Usando indução, os itens (1.) e (2.) decorrem diretamente da definição. A prova do item (3.) pode ser consultada em [2].

■

Definição 17. *Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas e seja $A : T_pM \to T_pM$ o operador linear auto-adjunto associado à segunda forma fundamental da imersão φ em cada ponto $p \in M$. Associado a A, tem-se os n invariantes $S_r(A)$, $1 \leq r \leq n$, dados pela igualdade*

$$det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r(A) t^{n-r},$$

onde $S_0(A) = 1$ por definição.

Quando $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de T_pM formada por autovetores de A, com autovalores respectivamente $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, vê-se que

$$S_r(A) = \sigma_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

onde σ_r é o r-ésimo polinômio simétrico elementar.

As transformações $P_r(A) : T_pM \to T_pM$ conhecidas também como o *r-ésimo Tensor de Newton*, são definidas, para cada $r \in \{0, \ldots, n-1\}$, por

$$\begin{aligned} P_0(A) &= I \\ P_1(A) &= S_1(A)I - A \\ &\vdots \\ P_r(A) &= S_r(A)I - AP_{r-1}(A), \end{aligned}$$

onde I é a identidade. De maneira mais geral,

$$P_r(A) = \begin{cases} I, & r = 0 \\ \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j}(A) A^j, & r \in \{1, \ldots, n-1\} \\ 0, & r \geq n, \end{cases}$$

onde 0 denota a transformação linear identicamente nula.

Observação 3. Por simplicidade, doravante, escreveremos P_r e S_r ao invés de $P_r(A)$ e $S_r(A)$, respectivamente.

Note que sendo P_r um polinômio em A, para todo r, ele é também auto-adjunto e comuta com A. Então toda base que diagonaliza A em $p \in M$ também diagonaliza todos os P_r em $p \in M$. Sendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma tal base, com $A(e_i) = \lambda_i e_i$, e denotando por A_i a restrição de A a $\langle e_i \rangle^\perp \subset T_pM$, definimos

$$S_r(A_i) = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n \\ j_1, \ldots, j_r \neq i}} \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_r} = \sigma_r(\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_i}, \ldots, \lambda_n)$$

Proposição 1.13. *Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas e seja A o operador linear associado à sua segunda forma fundamental. O r-ésimo Tensor de Newton associado a A satisfaz:*

1. $\boldsymbol{tr}[P_r] = (n-r)S_r$;
2. $\boldsymbol{tr}[AP_r] = (r+1)S_{r+1}$.

Demonstração. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base que diagonaliza A, vejamos que

$$P_r(e_i) = S_r(A_i)e_i.$$

Usaremos indução sobre r. Para $r = 1$, temos: $P_1 = S_1 I - A$. Portanto,

$$P_1(e_i) = S_1 e_i - A(e_i) = (S_1 - \lambda_i)e_i = S_1(A_i)e_i.$$

Suponha que a sentença é válida para $r-1$. Então

$$P_r(e_i) = S_r e_i - AP_{r-1}(e_i) = S_r e_i - A(S_{r-1}(A_i)e) = (S_r - S_{r-1}(A_i)\lambda_i)e_i = S_r(A_i)e_i.$$

Usando a proposição 1.12 e pelo que vimos acima segue que

$$\begin{aligned}
\mathbf{tr}[P_r] &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(e_i), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle S_r(A_i)e_i, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (S_r - \lambda_i S_{r-1}(A_i)) \\
&= nS_r - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_{r-1}(A_i) \\
&= (n-r)S_r,
\end{aligned}$$

o que prova o item (1.).

Para provar o item (2.), observemos que a igualdade $P_{r+1} = S_{r+1}I - AP_r$ implica

$$AP_r = S_{r+1}I - P_{r+1}.$$

Logo,

$$\mathbf{tr}[AP_r] = \mathbf{tr}[S_{r+1}I] - \mathbf{tr}[P_{r+1}] = nS_{r+1} - (n-r-1)S_{r+1} = (r+1)S_{r+1}.$$

■

Associado a cada operador P_r temos o operador diferencial linear de segunda ordem $L_r : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$, que passamos a definir.

Definição 18. *Dada uma função diferenciável* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *e* $r \in \mathbb{N}$, *com* $0 \leq r \leq n-1$, *definimos o operador diferencial de segunda ordem* L_r *em* M^n *por:*

$$L_r(f)(p) = \boldsymbol{tr}[(P_r \operatorname{Hess} f)(p)].$$

Note que para $r = 0$, $L_0(f) = \mathbf{tr}[\text{Hess}\, f] = \Delta f$ é o Laplaciano. Conforme vemos em [20], fora provado que, se $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante, então L_r pode ser escrito na forma divergente, mais precisamente

$$L_r(f) = \text{div}_M(P_r \nabla f),$$

onde div_M denota o divergente de um campo vetorial sobre M^n. Segue do teorema 1.1 que, se M é compacta então $\int_M L_r(f)dM = 0$.

1.4.3 As r-ésimas curvaturas médias H_r

Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas. As *curvaturas médias de ordem superior* H_r de φ, são definidas, para $0 \leq r \leq n$ por

$$H_r = \frac{S_r}{\binom{n}{r}} = \frac{\sigma_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\binom{n}{r}}.$$

A seguir provaremos uma proposição, onde estaremos estabelecendo algumas desigualdades algébricas sobre as r-ésimas curvaturas médias H_r, que são denominadas Desigualdades de Newton.

Lema 1.1. *Se um polinômio $f \in \mathbb{R}[X]$ possui $n \geq 1$ raízes reais, então sua derivada f' possui ao menos $n - 1$ raízes reais. Em particular, se todas as raízes de f forem reais então todas as raízes de f' também serão reais.*

Demonstração. Sem perda, supomos $n > 1$. Sejam $x_1 < \cdots < x_k$ raízes reais de f, com multiplicidades respectivamente $m_1, \ldots, m_k$ tais que $m_1 + \ldots m_k = n$. Então cada x_j é raiz de f' com multiplicidade $m_j - 1$, se $m_j \geq 2$. Por outro lado, entre x_j e x_{j+1} há, pelo teorema de Rolle, ao menos uma outra raiz de f', de modo que contabilizamos ao menos

$$(m_1 - 1) + \cdots + (m_k - 1) + (k - 1) = n - 1$$

raízes reais para f'. O resultado segue.

∎

Proposição 1.14. *Sejam $n > 1$ inteiro e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ números reais. Defina, para $0 \leq r \leq n$, $S_r = \sigma_r(\lambda_i)$ e $H_r = H_r(\lambda_i) = \binom{n}{r}^{-1}\sigma_r(\lambda_i)$.*

1. *Para $1 \leq r < n$, tem-se $H_r^2 \geq H_{r-1}.H_{r+1}$. Além disso, se a igualdade ocorrer para $r = 1$ ou para algum $1 < r < n$, com $H_{r+1} \neq 0$ neste último caso, então $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.*

2. *Se $H_1, H_2, \ldots, H_{r-1}$ são não negativas e H_r é positivo para algum $1 < r \leq n$, então $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq H_3^{\frac{1}{3}} \geq \cdots \geq H_r^{\frac{1}{r}}$. Além disso, se a igualdade ocorrer para algum $1 \leq j < r$, então $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.*

Demonstração. Usaremos indução no item (1.) sobre a quantidade de números reais. Para $n=2$, veja que $H_1^2 \geq H_2$ é equivalente a $(\lambda_1-\lambda_2)^2 \geq 0$, com a igualdade se e só se $\lambda_1=\lambda_2$.

Suponhamos agora que para quaisquer $n-1$ números reais as desigualdades valham, com a igualdade ocorrendo para $H_{r+1}\neq 0$ se e só se os $n-1$ números forem todos iguais. Dados $n\geq 3$ números reais $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, seja

$$f(x)=(x+\lambda_1)\ldots(x+\lambda_n)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}H_r(\lambda_i)x^{n-r}.$$

Então

$$f'(x)=\sum_{r=0}^{n}(n-r)\binom{n}{r}H_r(\lambda_i)x^{n-r-1}.$$

Pelo lema anterior, existem reais $\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-1}$ tais que

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_{n-1}) \\ &= n\sum_{r=0}^{n-1}S_r(\gamma_i)x^{n-1-r} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1}n\binom{n-1}{r}H_r(\gamma_i)x^{n-1-r}. \end{aligned}$$

Usando que $(n-r)\binom{n}{r}=n\binom{n-1}{r}$, por comparação, obtemos $H_r(\lambda_i)=H_r(\gamma_i)$ para $0\leq r\leq n-1$. Portanto, segue da hipótese de indução que, para $1\leq r\leq n-2$,

$$H_r^2(\lambda_i)=H_r^2(\gamma_i)\geq H_{r-1}(\gamma_i).H_{r+1}(\gamma_i)=H_{r-1}(\lambda_i).H_{r+1}(\lambda_i).$$

Por outro lado, se tivermos igualdade para os λ_i, com $H_{r+1}(\lambda_i)\neq 0$, então também teremos igualdade para os γ_i, com $H_{r+1}(\gamma_i)\neq 0$. Novamente pela hipótese de indução, segue que $\gamma_1=\cdots=\gamma_{n-1}$, e daí $\lambda_1=\cdots=\lambda_n$. Para concluir a prova, é suficiente provarmos que $H_{n-1}^2(\lambda_i)\geq H_{n-2}(\lambda_i).H_n(\lambda_i)$, com igualdade para $H_n\neq 0$ se e só se todos os λ_i forem iguais. Se algum $\lambda_i=0$ o resultado segue. Caso contrário, $H_n\neq 0$ e

$$\begin{aligned} H_{n-1}^2\geq H_{n-2}.H_n &\Leftrightarrow \left[\binom{n}{n-1}^{-1}\sum_i\frac{H_n}{\lambda_i}\right]^2\geq\left[\binom{n}{n-2}^{-1}\sum_{i<j}\frac{H_n}{\lambda_i\lambda_j}\right]H_n \\ &\Leftrightarrow (n-1)\left(\sum_i\frac{1}{\lambda_i}\right)^2\geq 2n\sum_{i<j}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}. \end{aligned}$$

Se denotarmos $\beta_i=\frac{1}{\lambda_i}$, então a última desigualdade acima é equivalente a

$$(n-1)\left(\sum_i\beta_i\right)^2\geq 2n\sum_{i<j}\beta_i\beta_j.$$

Fazendo $T(\beta_i) = (n-1)\left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j}\beta_i\beta_j$, obtemos

$$\begin{aligned}
T(\beta_i) &= n\left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j}\beta_i\beta_j \\
&= n\left[\left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right)^2 - 2\sum_{i<j}\beta_i\beta_j\right] - \left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right)^2 \\
&= n\sum_{i=1}^n \beta_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Neste caso, concluímos que a igualdade ocorre se e só se todos os β_i(e portanto os λ_i) forem iguais.

Agora, como $T(\lambda_i) = n^2(n-1)[H_1^2(\lambda_i) - H_2(\lambda_i)]$, vemos que o argumento acima também prova que $H_1^2 = H_2$ se e só se todos os λ_i forem iguais.

No item (2), como consequência do item (1), observe que $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}}$. Então suponha a desigualdade válida para algum $2 \leq k < r$. Assim, podemos assumir $H_1, H_2, \ldots, H_k \geq 0$ e $H_{k+1} > 0$ donde, pelo item (1), $H_k > 0$. De fato, $H_k = 0 \Rightarrow 0 \geq H_{k-1}.H_{k+1} \Rightarrow H_{k-1} = 0 \Rightarrow H_k^2 = 0 = 0.H_{k+1} = H_{k-1}.H_{k+1}$, isto é, $H_k^2 = H_{k-1}.H_{k+1}$ com $H_{k+1} \neq 0$, então, pelo item (1), $\lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$, daí $\lambda^k = H_k = 0$, isto é, $\lambda = 0$ e, portanto, $H_{k+1} = 0$, o que é um absurdo. Consequêntemente, $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq \cdots \geq H_k^{\frac{1}{k}}$, e então

$$H_k^2 \geq H_{k-1}.H_{k+1} \geq H_k^{\frac{k-1}{k}}.H_{k+1},$$

ou ainda $H_k^{\frac{1}{k}} \geq H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$. Agora, segue imediatamente das desigualdades acima que, caso $H_k^{\frac{1}{k}} = H_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}$ para algum $1 \leq k < n$, então $H_k^2 = H_{k-1}.H_{k+1}$. Logo, o item (1) garante que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

■

Teorema 1.3. *Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas(M^n conexa). Suponha que exista um ponto de M^n onde todas as curvaturas principais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são positivas. Então, se H_r é sempre maior que zero em M^n, temos que o mesmo vale para H_k, $k = 1, \ldots, r-1$. Além disso,*

$$H_k^{\frac{k-1}{k}} \leq H_{k-1} \quad e \quad H_k^{\frac{1}{k}} \leq H, \quad k = 1, \ldots, r.$$

Se $k \geq 2$, a igualdade nas desigualdades acima ocorre somente nos pontos umbílicos.

Demonstração. As desigualdades e a última linha são consequência imediata da Proposiçao 1.14. Portanto, devemos mostrar que H_k é sempre positivo em M qualquer que seja $k = 1, \ldots, r-1$.

Por hipótese, existe um ponto $p \in M$ onde as curvaturas principais são todas positivas. Então, por verificação direta, em $p \in M$, $H_k > 0$. Como as funções H_k são contínuas, existe uma bola aberta $B(p) \subset M$ com centro em $p \in M$ tal que as $H_k > 0$ em $B(p)$.

Pela conexidade de M, dado $q \in M$, existe um caminho $\gamma : [0,1] \to M$ ligando p e q com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Defina $\Lambda = \{t \in [0,1]; H_k > 0 \quad \text{em} \quad \gamma|_{[0,t]},\ k = 1, \dots, r-1\}$. Seja $t_0 = \sup \Lambda$. Note que $H_k > 0$ em $B(p)$ implica $t_0 > 0$. Por continuidade, em t_0, $H_k \geq 0$, então, pela Proposição 1.14, $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq \cdots \geq H_{r-1}^{\frac{1}{r-1}} \geq H_r^{\frac{1}{r}} > 0$ em t_0 e, portanto, $t_0 \in \Lambda$. Afirmamos que $t_0 = 1$. De fato, se não, então $t_0 < 1$, e por continuidade existiria uma bola $B(\gamma(t_0)) \subset M$ com centro em $\gamma(t_0)$ tal que $H_k > 0$ em $B(\gamma(t_0)) \subset M$, o que contradiz a nossa escolha de $t_0 = \sup \Lambda$. Daí, $t_0 = 1$.

Desta forma, $H_k > 0$ em $q \in M$ para todo $k = 1, \dots, r-1$ e, como $q \in M$ é arbitrário, o resultado está provado.

■

A seguir, mostraremos que toda imersão isométrica $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de uma hipersuperfície compacta possui um ponto onde todas as curvaturas principais são positivas. Fixaremos as seguintes notações e relembraremos alguns fatos.

Seja $d : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ a função distância para um ponto fixo $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $d(p) = d(p, p_0)$. Sabemos que d é suave em $\mathbb{R}^{n+1} - \{p_0\}$ e $||\nabla d|| = 1$.

Seja agora uma hiperesfera de centro p_0 e raio r, de $\mathbb{R}^{n+1}$, a saber:

$$\mathbb{S}^n(r) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : d(p) = r\}.$$

Então o campo unitário normal(interior) a $\mathbb{S}^n(r)$ é $N(x) = -\dfrac{x}{r}$, onde x é o vetor posição em $\mathbb{S}^n$. Por outro lado, o operador $A : T_pM \to T_pM$ é dado por $A = -dN$. Portanto,

$$Av = -dN.v = -\lim_{t \to 0} \frac{N(x+tv) - N(x)}{t} = \frac{1}{r}v,$$

isto é $Av = \dfrac{1}{r}v$.

Ou seja, todas as curvaturas principais de $\mathbb{S}^n(r)$ são constantes e iguais a $\frac{1}{r}$.

Proposição 1.15. *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície compacta, então M^n possui um ponto onde todas as curvaturas principais são positivas.*

Demonstração. Denotaremos por q_0 a origem de $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $p \in M^n$ o ponto onde a função $d(q) = d(q, q_0)$ atinge o máximo. No ponto p, a hipersuperfície M^n tem curvatura maior do que a da esfera $\mathbb{S}^n(r)$, então $\lambda_i \geq \frac{1}{r} > 0$.

■

Daqui em diante, admitiremos que as imersões mencionadas são isométricas e quando for conveniente vamos denominar a imersão $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de hipersuperfície, entendendo que φ é um mergulho e que estamos nos referindo à subvariedade $M \approx \varphi(M^n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Vejamos agora um resultado que nos auxiliará na demonstração da Desigualdade de Heintze-Karcher-Ros.

Proposição 1.16. *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície compacta. Então existe um ponto $x_0 \in M$ tal que a segunda forma fundamental A é positiva definida.*

Demonstração. Consideremos a função $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}\|\varphi(x)\|^2$, que é claramente diferenciável, e note que $\varphi(x)$ pode ser vista como um vetor posição em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim, dado $p \in M$ e $X \in T_pM$ temos que $\overline{\nabla}_X\varphi = X(\varphi(x))$, podemos identificar com X, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Como M é compacta, existe um $x_0 \in M$, tal que f assume um valor máximo. Assim, para todo $X \in T_{x_0}M$ temos

$$0 = X(f)(x_0) = X(\frac{1}{2}\langle\varphi, \varphi\rangle)(x_0) = \langle X, \varphi(x_0)\rangle.$$

Por conseguinte, segue que $\varphi(x_0)$ é normal a M em x_0.

Por outro lado, sendo σ a segunda forma fundamental de φ temos que

$$\begin{aligned} 0 \geq X(X(f))(x_0) = X\langle X, \varphi\rangle(x_0) = \langle\overline{\nabla}_X X, \varphi(x_0)\rangle + \langle X, X\rangle = \\ \langle\overline{\nabla}_X X, \varphi(x_0)\rangle + \|X\|^2 = \langle\sigma(X, X), \varphi(x_0)\rangle + \|X\|^2. \end{aligned}$$

Agora, tomando $\xi = -\varphi(x_0) \in (T_{x_0}M)^{\perp}$, obtemos $\langle\sigma(X, X), \xi\rangle \geq \|X\|^2$, ou seja $\langle A_\xi X, X\rangle \geq \|X\|^2$, $\forall X \in TM$ e o resultado segue.

■

Capítulo 2

Resultados importantes

2.1 Fórmula de Minkowski

Nos próximos resultados denotaremos por $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$ e por ∇ a conexão Riemanniana de qualquer hipersuperfície M^n de $\mathbb{R}^{n+1}$. Para provarmos a fórmula de Minkowski precisaremos do seguinte lema.

Lema 2.1. *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável imersa no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e N um campo normal unitário interior de vetores sobre M^n. Então, para $r = 0, \ldots, n-1$, temos*

$$L_r(|\varphi|^2) = 2[(n-r)S_r + (r+1)S_{r+1}\langle \varphi, N\rangle].$$

Demonstração. Dado $p \in M^n$, seja $\{e_1(p), \ldots, e_n(p)\}$ uma base ortonormal em T_pM que diagonaliza o operador A em p e denotemos por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o referencial geodésico que estende a base acima a uma vizinhança de p em M^n. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A associados a $e_1(p), \ldots, e_n(p)$, respectivamente.

Veja que $\nabla_{e_i} e_i(p) = 0, \ \ \forall i = 1, \ldots, n$, implica que existe $a_i \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{\nabla}_{e_i} e_i = a_i N$. E, como $\langle e_i, N\rangle = 0$ temos $\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N\rangle = -\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} N\rangle = \langle e_i, -\overline{\nabla}_{e_i} N\rangle = \lambda_i$. Então, $\overline{\nabla}_{e_i} e_i = \lambda_i N$.

Qualquer que seja o $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ temos $X|\varphi|^2 = 2\langle X, \varphi\rangle$, o que acarreta

$$XX|\varphi|^2 = 2|X|^2 + 2\langle \varphi, \overline{\nabla}_X X\rangle. \tag{2.1}$$

Veja que

$$\begin{aligned}
L_r(|\varphi|^2) &= \mathbf{tr}[P_r \operatorname{Hess}|\varphi|^2] = \sum_{i=1}^{n} \langle (P_r \operatorname{Hess}|\varphi|^2) e_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(\nabla_{e_i} \nabla |\varphi|^2), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla |\varphi|^2, P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \langle \nabla_{e_i} \nabla |\varphi|^2, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \langle \nabla_{e_i} [\sum_{j=1}^{n} e_j(|\varphi|^2) e_j], e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r e_i e_i |\varphi|^2,
\end{aligned}$$

em que λ_i^r é o autovalor de P_r associado a $e_i(p)$. Portanto,

$$L_r(|\varphi|^2)(p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r e_i e_i |\varphi|^2(p). \tag{2.2}$$

Finalmente, substituindo a Igualdade (2.1) na Igualdade (2.2) obtemos

$$\begin{aligned} L_r(|\varphi|^2) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r e_i e_i |\varphi|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r (2|e_i|^2 + 2\langle \varphi, \overline{\nabla}_{e_i} e_i \rangle) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r + 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \langle \varphi, \lambda_i N \rangle \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r + 2\langle \varphi, N \rangle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda_i^r \\ &= 2\mathbf{tr}[P_r] + 2\mathbf{tr}[AP_r]\langle \varphi, N \rangle \\ &= 2(n-r)S_r + 2(r+1)S_{r+1}\langle \varphi, N \rangle, \end{aligned}$$

isto é,

$$L_r(|\varphi|^2) = 2[(n-r)S_r + (r+1)S_{r+1}\langle \varphi, N \rangle]. \tag{2.3}$$

■

Como uma consequência direta temos o seguinte:

Teorema 2.1 (Fórmula de Minkowski). *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de uma hipersuperfície compacta orientável M^n no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e N um campo de vetores normal unitário sobre M^n. Então, para todo $r = 0, \ldots, n-1$, vale*

$$\int_M (H_r + H_{r+1}\langle \varphi, N \rangle) dA = 0. \tag{2.4}$$

Demonstração. Inicialmente, ao multiplicar ambos os membros da igualdade (2.3) por $\frac{r!(n-r-1)!}{n!}$, onde $r = 0, \ldots, n-1$, obtemos

$$\frac{r!(n-r-1)!}{n!} L_r(|\varphi|^2) = 2[H_r + H_{r+1}\langle \varphi, N \rangle].$$

Integrando sobre M^n, obtemos, via o Teorema da Divergência que

$$\begin{aligned} \int_M (H_r + H_{r+1}\langle \varphi, N \rangle) dA &= \frac{r!(n-r-1)!}{2(n!)} \int_M L_r(|\varphi|^2) dA \\ &= \frac{r!(n-r-1)!}{2(n!)} \int_M \mathrm{div}_M[P_r(\nabla|\varphi|^2)] dA \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_M (H_r + H_{r+1}\langle \varphi, N \rangle) dA = 0, \quad \forall r = 0, \ldots, n-1.$$

■

2.2 Fórmula de Reilly

Doravante denotaremos por Ω^{n+1} uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional, compacta com fronteira suave $\partial\Omega = M^n$, por dV o elemento de volume de Ω e por dA o elemento de área de M.

Para provarmos a fórmula de Reilly precisaremos da conhecida fórmula de Bochner-Lichnerowicz, introduzamos, portanto, as famosas fórmulas de Green que serão úteis em sua prova.

Lema 2.2 (Fórmulas de Green). *Sejam h e f funções diferenciáveis em Ω. Então valem*

$$\int_\Omega \{h\Delta f + \langle \nabla f, \nabla h\rangle\} dV = \int_{\partial\Omega} \langle h\nabla f, \eta\rangle dA \tag{2.5}$$

e

$$\int_\Omega \{h\Delta f - f\Delta h\} dV = \int_{\partial\Omega} \{h\langle \nabla f, \eta\rangle - f\langle \nabla h, \eta\rangle\} dA \tag{2.6}$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema da Divergência fazendo $X = h\nabla f$ e usando a propriedade (c) do Laplaciano.

■

Lema 2.3 (Fórmula de Bochner-Lichnerowicz). *Seja Ω^{n+1} uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional, compacta e $f \in C^\infty(\Omega)$. Então, em cada ponto de Ω tem-se*

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = |\operatorname{Hess}(f)|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f\rangle + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) \tag{2.7}$$

Demonstração. Sejam $p \in \Omega$ e $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$ um referencial geodésico em p, isto é, existe uma vizinhança V de p tal que $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$ são ortonormais em cada ponto de V e $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0, \ \ \forall i, j = 1\ldots, n+1$. Usando que $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$ é geodésico, escrevemos

$$\begin{aligned}
\Delta f(p) &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \left\langle \nabla_{E_i}\left(\sum_{j=1}^{n+1} E_j(f)E_j\right), E_i\right\rangle(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \left\langle \sum_{j=1}^{n+1} E_j(f)\nabla_{E_i}E_j + E_i(E_j(f))E_j, E_i\right\rangle(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} E_i(E_j(f))\langle E_j, E_i\rangle(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} E_i(E_i(f))(p).
\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} E_i(E_i(\langle \nabla f, \nabla f\rangle))\\
&= \sum_{i=1}^{n+1} E_i\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\rangle + \sum_{i=1}^{n+1}\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f\rangle. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Reescreveremos $\sum_{i=1}^{n+1}\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\rangle$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\rangle &= \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, \sum_{j=1}^{n+1} E_j(f)E_j \right\rangle\\
&= \sum_{j=1}^{n+1} E_j(f)\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, E_j\rangle\\
&= \sum_{j=1}^{n+1}\langle \nabla f, E_j\rangle\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, E_j\rangle,
\end{aligned}$$

em que $\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, E_j\rangle$ pode ser escrito assim

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, E_j\rangle &= E_i(\langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_j\rangle)\\
&= E_i(\mathrm{Hess}(f)(E_i, E_j))\\
&= E_i(\mathrm{Hess}(f)(E_j, E_i))\\
&= E_i(\langle \nabla_{E_j}\nabla f, E_i\rangle)\\
&= \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\nabla f, E_i\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, a equação (2.8) é equivalente a

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = \sum_{i,j=1}^{n+1}\langle \nabla f, E_j\rangle\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\nabla f, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n+1}\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f\rangle. \qquad (2.9)$$

Usando a definição de curvatura temos:

$$\langle R(E_i, E_j)\nabla f, E_i\rangle = \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\nabla f - \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\nabla f - \nabla_{[E_i,E_j]}\nabla f, E_i\rangle.$$

Do fato de que $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$ é um referencial geodésico em p, temos

$$[E_i, E_j](p) = \nabla_{E_i}E_j(p) - \nabla_{E_j}E_i(p) = 0$$

donde

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\nabla f, E_i\rangle = \langle R(E_i, E_j)\nabla f, E_i\rangle + \langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle.$$

Como, por propriedades de curvatura, vale

$$\langle R(E_i, E_j)\nabla f, E_i\rangle = \langle R(E_j, E_i)E_i, \nabla f\rangle,$$

implica que (2.9) é equivalente a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) &= \sum_{i,j=1}^{n+1}\langle \nabla f, E_j\rangle\langle R(E_j, E_i)E_i, \nabla f\rangle \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n+1}\langle \nabla f, E_j\rangle\langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle \qquad (2.10)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n+1}\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f\rangle.
\end{aligned}$$

Em $\sum_{i,j=1}^{n+1}\langle \nabla f, E_j\rangle\langle R(E_j, E_i)E_i, \nabla f\rangle$ podemos reescrever

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n+1}\langle \nabla f, E_j\rangle\langle R(E_j, E_i)E_i, \nabla f\rangle &= \sum_{i=1}^{n+1}\left\langle R\left(\sum_{j=1}^{n+1}\langle \nabla f, E_j\rangle E_j, E_i\right)E_i, \nabla f\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\langle R(\nabla f, E_i)E_i, \nabla f\rangle \\
&= \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f).
\end{aligned}$$

Reescrevendo $\sum_{i,j=1}^{n+1}\langle \nabla f, E_j\rangle\langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle$ em (2.10) de maneira conveniente, veja que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n+1}\langle \nabla f, E_j\rangle\langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n+1}E_j(f)\langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1}\langle \nabla_{E_j(f)E_j}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\nabla f(\langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sum_{i=1}^{n+1}\nabla f(\langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle) = \nabla f(\Delta f) = \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle.$$

Por último, na equação (2.10), vamos reescrever $\sum_{i=1}^{n+1}\langle\nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f\rangle$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}\langle\nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f\rangle &= \sum_{i,j,k=1}^{n+1}\langle\nabla_{E_i}E_j(f)E_j, \nabla_{E_i}E_k(f)E_k\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1}\langle\nabla_{E_i}E_j(f)E_j, \nabla_{E_i}E_j(f)E_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1}\langle E_i(E_j(f))E_j, E_i(E_j(f))E_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1}|E_i(E_j(f))|^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1}|E_i\langle\nabla f, E_j\rangle|^2.
\end{aligned}$$

Agora, como

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n+1}|E_i\langle\nabla f, E_j\rangle|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n+1}|\langle\nabla_{E_i}\nabla f, E_j\rangle|^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1}|\operatorname{Hess}(f)(E_i, E_j)|^2 \\
&= |\operatorname{Hess}(f)|^2,
\end{aligned}$$

obtemos finalmente que

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle\nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + |\operatorname{Hess}(f)|^2$$

e o resultado segue.

■

Dada $f \in C^\infty(\Omega)$, e fixado um ponto $p \in \Omega$, utilizaremos a seguinte notação:

$$f_{ij} = \operatorname{Hess}(f)(E_i, E_j),$$

$$f_i = \langle\nabla f, E_i\rangle$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal definida em uma vizinhança de p. Além disso, $\overline{\nabla}f$, $\overline{\Delta}f$ e $\operatorname{Hess} f$ denotam o gradiente, Laplaciano e o Hessiano de f em Ω, Ric a curvatura de Ricci de Ω, enquanto ∇z e Δz denotam o gradiente e o Laplaciano de $z = f|_M$.

A prova do teorema 2.2 consiste basicamente em integrar a fórmula de Bochner-Lichnerowicz (2.7).

Teorema 2.2 (Reilly)**.** *Seja Ω uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n+1$ com bordo $M = \partial\Omega$. Suponha que f é uma função definida em Ω satisfazendo $\overline{\Delta} f = g$ em Ω e $f|_M = z$. Então*

$$\int_\Omega [g^2 - |\operatorname{Hess} f|^2 - \operatorname{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)]dV = \int_M [2(\Delta z)u + nHu^2 + H_\eta(\nabla z, \nabla z)]dA,$$

onde H e $H_\eta(\nabla z, \nabla z)$ denotam, respectivamente, a curvatura média e a segunda forma fundamental de M em relação ao normal exterior unitário η, $u = \partial f/\partial\eta$ e $\operatorname{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)$ é a curvatura de Ricci de Ω.

Demonstração. Integrando a fórmula (2.7), temos

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\overline{\Delta}(|\overline{\nabla} f|^2)dV = \int_\Omega [|\operatorname{Hess}(f)|^2 + \langle \overline{\nabla} g, \overline{\nabla} f\rangle + \operatorname{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)]dV. \tag{2.11}$$

Seja $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\}$ uma base ortonormal definida numa vizinhança do bordo de Ω tal que em $q \in \partial\Omega$, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ são tangentes a M e $E_{n+1} = \eta$ é o vetor unitário normal exterior a M.

Usando a fórmula de Green (2.5) na equação (2.11), obtemos

$$\int_\Omega \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} g\rangle = -\int_\Omega g^2 + \int_M gu.$$

Sendo $g = \overline{\Delta} f = \sum_{i=1}^{n+1} f_{ii}$, escrevemos

$$g = f_{n+1,n+1} + \sum_{k=1}^{n} f_{kk}.$$

Então,

$$\int_\Omega \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} g\rangle = -\int_\Omega g^2 + \int_M u\left(f_{n+1,n+1} + \sum_{k=1}^{n} f_{kk}\right). \tag{2.12}$$

Pelo Teorema (1.1), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega \overline{\Delta}(|\overline{\nabla} f|^2) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}(\overline{\nabla}(|\overline{\nabla} f|^2))dV \\ &= \frac{1}{2}\int_M \langle \nabla(|\nabla f|^2), \eta\rangle dA. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\langle \nabla(|\nabla f|^2), \eta\rangle &= \frac{1}{2}\eta(|\nabla f|^2) \\ &= \frac{1}{2}\eta(\langle \nabla f, \nabla f\rangle) \\ &= \langle \nabla_\eta \nabla f, \nabla f\rangle. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Na equação (2.13), escrevendo convenientemente

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla f, E_i \rangle E_i,$$

acarreta que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle \nabla(|\nabla f|^2), \eta \rangle &= \left\langle \nabla_\eta \nabla f, \sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla f, E_i \rangle E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla f, E_i \rangle \langle \nabla_\eta \nabla f, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} f_i f_{n+1,i} \\
&= u f_{n+1,n+1} + \sum_{k=1}^{n} f_k f_{n+1,k}.
\end{aligned}$$

Portanto, escrevemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \overline{\Delta}(|\overline{\nabla} f|^2) = \int_M \left(u f_{n+1,n+1} + \sum_{k=1}^{n} f_k f_{n+1,k} \right). \tag{2.14}$$

Agora, ao subtrair (2.12) de (2.14) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega \overline{\Delta}(|\overline{\nabla} f|^2) &- \int_\Omega \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} g \rangle = \\
&= \int_M \left(u f_{n+1,n+1} + \sum_{k=1}^{n} f_k f_{n+1,k} \right) + \int_\Omega g^2 \\
&\quad - \int_M u \left(f_{n+1,n+1} + \sum_{k=1}^{n} f_{kk} \right) \\
&= \int_M \left(\sum_{k=1}^{n} f_k f_{n+1,k} - u \sum_{k=1}^{n} f_{kk} \right) + \int_\Omega g^2.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
f_{n+1,k} &= f_{k,n+1} = \langle \nabla_{E_k} \nabla f, E_{n+1} \rangle \\
&= E_k \langle \nabla f, E_{n+1} \rangle - \langle \nabla f, \nabla_{E_k} E_{n+1} \rangle \\
&= E_k(u) - \langle \nabla z + u E_{n+1}, \nabla_{E_k} E_{n+1} \rangle \\
&= E_k(u) - \langle \nabla z, \nabla_{E_k} E_{n+1} \rangle - u \langle E_{n+1}, \nabla_{E_k} E_{n+1} \rangle.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Lembrando que $|E_{n+1}| = 1$, segue que

$$E_k(|E_{n+1}|^2) = 0,$$

donde

$$\langle E_{n+1}, \nabla_{E_k} E_{n+1}\rangle = \frac{1}{2}E_k(|E_{n+1}|^2) = 0.$$

Logo, o terceiro termo da direita da equação (2.15) é igual a zero. Por conseguinte

$$\begin{aligned}
f_{k,n+1} &= E_k(u) - \langle \nabla z, \nabla_{E_k} E_{n+1}\rangle \\
&= E_k(u) - \left\langle \sum_{l=1}^{n} E_l(z)E_l, \nabla_{E_k} E_{n+1}\right\rangle \\
&= E_k(u) - \left\langle \sum_{l=1}^{n} z_l E_l, \nabla_{E_k} E_{n+1}\right\rangle \\
&= E_k(u) - \sum_{l=1}^{n} z_l \langle E_l, \nabla_{E_k} E_{n+1}\rangle
\end{aligned}$$

e, desta forma, escrevemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f_k f_{k,n+1} &= \sum_{k=1}^{n} z_k \left(E_k(u) - \sum_{l=1}^{n} z_l \langle E_l, \nabla_{E_k} E_{n+1}\rangle \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} z_k E_k(u) - \sum_{k,l=1}^{n} z_k z_l \langle E_l, \nabla_{E_k} E_{n+1}\rangle, \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

uma vez que, para $k = 1, \ldots, n$, temos que

$$\begin{aligned}
f_k &= \langle \nabla f, E_{n+1}\rangle \\
&= \langle \nabla z + uE_{n+1}, E_k\rangle \\
&= \langle \nabla z, E_k\rangle \\
&= z_k.
\end{aligned}$$

Em (2.16), reescreveremos $\sum_{k=1}^{n} z_k E_k(u)$ como:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} z_k E_k(u) &= \sum_{k=1}^{n} z_k \langle \nabla u, E_k\rangle \\
&= \left\langle \nabla u, \sum_{k=1}^{n} z_k E_k \right\rangle \qquad (2.17) \\
&= \langle \nabla u, \nabla z\rangle.
\end{aligned}$$

A parcela $\sum_{k,l=1}^{n} z_k z_l \langle E_l, \nabla_{E_k} E_{n+1}\rangle$ em (2.16), escrevemos da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{n} z_k z_l \langle E_l, \nabla_{E_k} E_{n+1}\rangle &= \sum_{k,l=1}^{n} \langle f_l E_l, \nabla_{f_k E_k} E_{n+1}\rangle \\
&= \langle \nabla z, \nabla_{\nabla z} E_{n+1}\rangle \\
&= -\langle \nabla_{\nabla z} \nabla z, E_{n+1}\rangle \\
&= \langle \sigma(\nabla z, \nabla z), \eta\rangle \\
&= H_\eta(\nabla z, \nabla z). \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Agora, substituindo (2.17) e (2.18) em (2.16), temos

$$\sum_{k=1}^{n} f_k f_{k,n+1} = \langle \nabla u, \nabla z \rangle - H_\eta(\nabla z, \nabla z).$$

Precisamos mostrar agora que:

$$u\left(\sum_{k=1}^{n} f_{kk}\right) = u(\Delta z + nuH)$$

Inicialmente, decompomos $\nabla_{E_k} E_k$ da seguinte maneira:

$$\nabla_{E_k} E_k = (\nabla_{E_k} E_k)^N + (\nabla_{E_k} E_k)^T,$$

onde $(\ )^N$ é a componente de $\nabla_{E_k} E_k$ normal a TM $(\ )^T$ é a componente de $\nabla_{E_k} E_k$ tangente a TM.

Observe que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f_{kk} &= \sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_{E_k} \nabla f, E_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} E_k \langle \nabla f, E_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle \nabla f, \nabla_{E_k} E_k \rangle. \end{aligned}$$

Na igualdade anterior, somando e subtraindo $\sum_{k=1}^{n} \langle \nabla f, (\nabla_{E_k} E_k)^T \rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f_{kk} &= \sum_{k=1}^{n} \left(E_k \langle \nabla f, E_k \rangle - \langle \nabla f, (\nabla_{E_k} E_k)^T \rangle \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n} \left(\langle \nabla f, \nabla_{E_k} E_k \rangle - \langle \nabla f, (\nabla_{E_k} E_k)^T \rangle \right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Além disso, veja que

$$\begin{aligned} \Delta z &= \sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_{E_k} \nabla z, E_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} (E_k \langle \nabla z, E_k \rangle - \langle \nabla z, \nabla_{E_k} E_k \rangle) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (E_k \langle \nabla f - uE_{n+1}, E_k \rangle - \langle \nabla f - uE_{n+1}, \nabla_{E_k} E_k \rangle) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (E_k \langle \nabla f, E_k \rangle - \langle \nabla f - uE_{n+1}, \nabla_{E_k} E_k \rangle). \end{aligned}$$

Por outro lado, escrevemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\langle\nabla f &- uE_{n+1},\nabla_{E_k}E_k\rangle = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle\nabla f - uE_{n+1},(\nabla_{E_k}E_k)^N+(\nabla_{E_k}E_k)^T\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n}(\langle\nabla f,(\nabla_{E_k}E_k)^N\rangle+\langle\nabla f,(\nabla_{E_k}E_k)^T\rangle \\
&- u\langle E_{n+1},(\nabla_{E_k}E_k)^N\rangle - u\langle E_{n+1},(\nabla_{E_k}E_k)^T\rangle) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(u\langle E_{n+1},(\nabla_{E_k}E_k)^N\rangle+\langle\nabla f,(\nabla_{E_k}E_k)^T\rangle \\
&- u\langle E_{n+1},(\nabla_{E_k}E_k)^N\rangle - u\langle E_{n+1},(\nabla_{E_k}E_k)^T\rangle) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle\nabla f,(\nabla_{E_k}E_k)^T\rangle.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{n}\left(E_k\langle\nabla f,E_k\rangle - \langle\nabla f,(\nabla_{E_k}E_k)^T\rangle\right).$$

Portanto, a equação (2.19) é equivalente a

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f_{kk} &= \Delta z - \sum_{k=1}^{n}\left\langle\nabla f,\nabla_{E_k}E_k-(\nabla_{E_k}E_k)^T\right\rangle \\
&= \Delta z - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n+1}\left\langle\langle\nabla f,E_i\rangle E_i,(\nabla_{E_k}E_k)^N\right\rangle \\
&= \Delta z - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n+1}\langle\nabla f,E_i\rangle\left\langle E_i,(\nabla_{E_k}E_k)^N\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Como $E_{n+1}=\eta$, o produto $\langle E_i,(\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)^N\rangle\neq 0$ somente se $i=n+1$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f_{kk} &= \Delta z - \sum_{k=1}^{n}\langle\nabla f,E_{n+1}\rangle\langle E_{n+1},\nabla_{E_k}E_k\rangle \\
&= \Delta z + u\left(\sum_{k=1}^{n}-\langle E_{n+1},\nabla_{E_k}E_k\rangle\right) \\
&= \Delta z + nu\sum_{k=1}^{n}H_\eta(E_k,E_k) \\
&= \Delta z + nuH.
\end{aligned}
$$

Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \overline{\Delta}(|\overline{\nabla} f|^2) &- \int_\Omega \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} g\rangle = \int_\Omega g^2 \\ &+ \int_M [\langle \nabla u, \nabla z\rangle - H(\nabla z, \nabla z) - u(\Delta z + nuH)]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Voltando à (2.11), vemos que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \overline{\Delta}(|\overline{\nabla} f|^2) - \int_\Omega \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} g\rangle = \int_\Omega [\mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) + |\operatorname{Hess}(f)|^2], \tag{2.21}$$

e agora, substituindo (2.20) em (2.21) temos

$$\begin{aligned}\int_M [\langle \nabla u, \nabla z\rangle - H_\eta(\nabla z, \nabla z) &- u(\Delta z + nuH)] + \int_\Omega g^2 = \\ &= \int_\Omega [\mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) + |\operatorname{Hess} f|^2],\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_\Omega [g^2 - |\operatorname{Hess} f|^2 - \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)] = \int_M [u(\Delta z + nuH) - \langle \nabla u, \nabla z\rangle + H_\eta(\nabla z, \nabla z)] \tag{2.22}$$

Finalmente, note que pela fórmula de Green (2.5) e usando o fato de que $\int_{\partial M}\langle u\nabla z, \eta\rangle = 0$, obtemos

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla z\rangle = -\int_M u\Delta z.$$

Substituindo na igualdade (2.22), segue que

$$\int_\Omega [g^2 - |\operatorname{Hess} f|^2 - \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)] = \int_M [2(\Delta z)u + nHu^2 + H_\eta(\nabla z, \nabla z)]$$

e concluímos a demonstração.

■

2.3 Desigualdade de Heintze-Karcher-Ros

A Desigualdade de Heintze-Karcher-Ros, que passaremos a apresentar, consiste basicamente em aplicarmos a Fórmula de Reilly em sua demonstração. Esta desigualdade nos auxiliará na demonstração do Teorema de Aleksandrov.

Antes, precisamos de dois teoremas. Para provar o segundo deles, precisaremos de um lema.

Teorema 2.3. *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta tal que Ω é o domínio compacto limitado por M. Então existe uma única função diferenciável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que é a solução do seguinte problema de Dirichlet:*

$$\begin{cases} \overline{\Delta}(f) = 1, & em \quad \Omega \\ z = f|_M = 0, & em \quad M = \partial\Omega. \end{cases}$$

Demonstração. Uma prova deste resultado pode ser vista em [7].

■

Lema 2.4 (Identidade de Ricci)**.** *Dada $f \in C^3(M)$, para quaisquer $1 \leq i, j, k \leq n$, vale a igualdade:*

$$f_{ikl} = f_{ilk} + R_{klsi} f_s, \tag{2.23}$$

onde R_{klsi} são os coeficientes de Ricci.

Demonstração. Uma prova deste fato pode ser vista em [22], página 214.

Teorema 2.4. *Suponha que Ω admite uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e uma constante $L \neq 0$ tal que*

1. $\mathrm{Hess}(f) = L\langle\ ,\ \rangle$;

2. $z = f|_M$ *é constante.*

Então Ω é isométrica a uma bola euclidiana.

Demonstração. Considere $\langle\ ,\ \rangle = g$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $L = 1$ e que o valor máximo de f em Ω é 0, isto é

$$max_\Omega f = 0$$

Usando o item (a), temos que

$$\Delta(f) = \mathbf{tr}\,\mathrm{Hess}(f) = \mathbf{tr} g = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} g_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ii} = n > 0$$

logo f é uma função subharmônica, portanto pelo princípio do máximo para funções subharmônicas, f não pode assumir esse máximo em um ponto de $\Omega \setminus M$. Combinando este fato com o item (b), isto implica que $z \equiv 0$ e que $f < 0$ em $\Omega \setminus M$. Assim, f assume um valor mínimo negativo, digamos $-R^2/2$, em algum ponto $q \in \Omega \setminus M$, uma vez que Ω é variedade Riemanniana compacta.

Seja agora $\gamma(s)$ uma geodésica qualquer parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\gamma(0) = q$, e ponha $h(s) = f(\gamma(s))$. O item (a) juntamente com $L = 1$ implica que $h'(s) = \dfrac{d}{ds}(f \circ \gamma)(s) = \langle \nabla f(\gamma(s)), \gamma'(s)\rangle$, donde

$$\begin{aligned} h''(s) &= \langle \frac{D}{ds}(\nabla f(\gamma(s)), \gamma'(s)\rangle + \langle \nabla f(\gamma(s)), \frac{D}{ds}(\gamma'(s)) \\ &= \langle \nabla_{\gamma'(s)} \nabla f(\gamma(s)), \gamma'(s)\rangle \\ &= \langle \mathrm{Hess}(f)_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), \gamma'(s)\rangle \\ &= 1, \end{aligned}$$

posto que $\mathrm{Hess}(f) = g$ e $\dfrac{D}{ds}(\gamma'(s)) = 0$. Assim, $h(s)$ deve ser um polinômio quadrático da forma $s^2/2 + as + b$ em s. Usando o fato de que $f(q) = -R^2/2$ e $\nabla f(q) = 0$ temos que

$h(0) = f(\gamma(0)) = f(q) = -R^2/2$ e com isso, $b = -R^2/2$. Por outro lado, $h'(s) = s + a$, daí $h'(0) = a$, ou seja, $h'(0) = \langle \nabla f(q), \gamma'(0)\rangle = a$, isto implica que $a = 0$, donde $h(s) = (s^2 - R^2)/2$.

Sabemos que γ pode ser estendida, pelo menos, até a fronteira $M = f^{-1}(0)$ e $f \leq 0$ em Ω, isso significa que cada geodésica é definida para $0 \leq s \leq R$ mas não para $s > R$.

Segue-se da Proposição 1.6 que a aplicação exponencial $\exp_q : T_q\Omega \to \Omega$ é um difeomorfismo de $B(0,\epsilon) \subset T_q\Omega$ sobre um aberto de Ω e que

$$f(p) = (d(p,q)^2 - R^2)/2,$$

pois s é o próprio comprimento de arco, onde $p \in \Omega$ e d é a distância Riemanniana em Ω. Para finalizar a prova, devemos mostrar que a métrica em Ω é plana. Para tal, introduziremos coordenadas locais em Ω e usaremos a notação padrão da análise tensorial clássica. Desta forma, o item (a) toma a seguinte forma:

$$f_{,ij} = g_{ij}. \tag{2.24}$$

A expressão (2.23) no Lema 2.4 fica assim:

$$f_{,ijk} - f_{,ikj} = \sum_l f_{,l}\, R^l_{ijk} = f_{,l}\, R^l_{ijk} \tag{2.25}$$

Sabemos de [3], página 103, que $R^l_{ijk} g_{lt} = R_{ijkt}$ e multiplicando ambos os membros desta igualdade por g^{ts} à direita, obtemos $R^l_{ijk}.\delta_{ls} = R_{ijkt}.g^{ts}$, donde

$$R^l_{ijk} = g^{tl} R_{ijkt} = g^{lt} R_{ktij} = g^{lt} R_{tikj}. \tag{2.26}$$

Substituindo (2.26) em (2.25) e levando em conta que $f_{,ijk} = (g_{ij})_k = (g_{ji})_k = (g_{kj})_i = (g_{ik})_j = f_{,ikj}$ obtemos

$$0 = f_{,ijk} - f_{,ikj} = f_{,l}\, g^{lt} R_{tikj} \tag{2.27}$$

Diferenciando a expressão (2.27) uma vez mais, vemos que

$$0 = f_{,lr}\, g^{lt} R_{tikj} + f_{,l}\, g^{lt}{}_{,r}\, R_{tikj} + f_{,l}\, g^{lt} R_{tikj,r}\,,$$

consequêntemente

$$0 = R_{rikj} + f_{,l}\, g^{lt} R_{tikj,r} \tag{2.28}$$

uma vez que $f_{,lr} = g_{lr}$, $g^{lt}{}_{,r} = 0$ e $\delta_{rt} = 1$ quando $r = t$. Permutando i com r e j com k em (2.28) e somando com (2.28) temos

$$0 = (R_{irkj} + R_{rikj}) + g^{lt} f_{,l}\, (R_{trjk,i} + R_{tikj,r}) \tag{2.29}$$

e usando a simetria do tensor curvatura com a conhecida identidade de Bianchi

$$R_{tikj,r} + R_{rtkj,i} + R_{irkj,t} = 0$$

em (2.29) vem que

$$\begin{aligned} 0 &= 2R_{rikj} + g^{lt} f_{,l}\, (R_{trjk,i} - R_{rtkj,i} - R_{irkj,t}) \\ &= 2R_{rikj} + g^{lt} f_{,l}\, (R_{trjk,i} + R_{trkj,i} - R_{irkj,t}) \\ &= 2R_{rikj} + g^{lt} f_{,l}\, R_{rikj,t}\,. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Agora, usando o fato de que $\nabla f(q) = 0$, de (2.30) implica que $R_{rikj}(q) = 0$.

A seguir, considere $p \in \Omega$, $p \neq q$. Existe, portanto, uma única geodésica $\gamma(s)$, $0 \leq s \leq d = d(p,q)$, ligando q a p. Escolhendo coordenadas de Fermi ao longo de γ(isto é, coordenadas para as quais $g_{ij} = \delta_{ij}$ e $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$ nos pontos de γ, mais detalhes em [5]). Por (2.24), temos $f,_{ss} = 1$ e $f,_{sj} = 0$, $j \neq s$, donde $f,_s = s$ usando que $f,_x(q) = 0$, $\forall x$. Como cada função $h(s) = (R_{rikj} \circ \gamma)(s)$ é tal que $h'(s) = R_{rikj},_s(\gamma(s))$ então, em $\gamma(s)$, a expressão (2.30) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} 0 &= 2h(s) + \delta^{ls} f,_l R_{rikj},_s \\ &= 2h(s) + f,_s R_{rikj},_s \\ &= 2h(s) + sh'(s) \end{aligned} \tag{2.31}$$

Sabemos que toda solução da EDO (2.31) é da forma Cs^{-2}, onde C é constante; em particular, a única solução que é contínua em $s = 0$ é $h \equiv 0$. Segue-se daí que $R_{rikj} = 0$ em cada ponto de Ω, donde concluímos que a métrica é plana em Ω, o que prova o resultado.

■

Agora estamos em condições de enunciar e provar a Desigualdade de Heintze-Karcher-Ros, principal resultado deste capítulo. De agora em diante, salvo menção explícita em contrário, M denota uma hipersuperfície compacta mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ representa um domínio compacto que tem M como fronteira.

Teorema 2.5 (Desigualdade de Heintze-Karcher-Ros)**.** *Seja Ω^{n+1} uma variedade Riemanniana compacta com fronteira suave M, curvatura de Ricci não negativa e considere sobre M a orientação dada pelo campo normal unitário interior. Seja H a curvatura média de M. Se H é positiva em todo ponto de M, então*

$$\int_M \frac{1}{H} dA \geq (n+1)V. \tag{2.32}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, Ω é isométrica a uma bola Euclidiana.

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ solução do problema de Dirichlet dada pelo Teorema 2.3, e considerando $f|_M$ temos $\nabla f(x) = 0$ e $\Delta f(x) = 0$ para todo $x \in M$.

Desta forma, usando o Teorema 2.2 obtemos

$$\int_\Omega (1 - |\operatorname{Hess} f|^2 - \operatorname{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)) dV = n \int_M H u^2 dA \tag{2.33}$$

Agora veja que, sendo $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$, temos o seguinte

$$\begin{aligned} (\overline{\Delta} f)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{Hess}(f)(e_i, e_i) \right)^2 \leq (n+1) \sum_{i=1}^{n+1} |\operatorname{Hess}(f)(e_i, e_i)|^2 \\ &\leq (n+1) \sum_{i,j=1}^{n+1} |\operatorname{Hess}(f)(e_i, e_j)|^2 = (n+1)|\operatorname{Hess}(f)|^2 \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde a segunda relação é a desigualdade de Cauchy-Schwarz. A igualdade vale nessa relação se e somente se $\operatorname{Hess}(f)(e_k, e_k) = \operatorname{Hess}(f)(e_l, e_l)$ para todo par de índices k e l. A terceira relação de (2.34) é uma igualdade se e somente se $\operatorname{Hess}(f)(e_i, e_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Portanto,$(\overline{\Delta} f)^2 \leq (n+1)|\operatorname{Hess}(f)|^2$, e a igualdade vale em algum $x \in \Omega$ se e somente se existe um escalar $\lambda(x)$ tal que $\operatorname{Hess}(f)(.,.) = \lambda(x)\langle .,. \rangle$. Mas, $\overline{\Delta} f = 1$ e daí $\lambda(x)$ deve ser $\frac{1}{n+1}$. Por conseguinte, temos

$$|\operatorname{Hess}(f)|^2 \geq \frac{1}{n+1}, \tag{2.35}$$

onde a igualdade é válida em algum $x \in \Omega$ se e somente se $\operatorname{Hess}(f)(.,.) = \frac{1}{n+1}\langle .,. \rangle$ neste ponto.

Assim, substituindo (2.35) em (2.33) resulta que

$$n \int_M H u^2 dA = \int_\Omega (1 - |\operatorname{Hess}(f)|^2 - \operatorname{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)) dV \leq \frac{n}{n+1} \int_\Omega dV,$$

uma vez que $1 - |\operatorname{Hess}(f)|^2 \leq \frac{n}{n+1}$ e $\operatorname{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) \geq 0$, isto é

$$\int_M H u^2 dA \leq \frac{1}{n+1} V. \tag{2.36}$$

Por outro lado, segue, via Teorema 1.1, que $V = \int_\Omega \overline{\Delta} f dV = -\int_M u dA$, donde aplicando a Desigualdade de Schwarz e (2.36) temos que

$$\begin{aligned} V^2 &= \left(\int_M u dA \right)^2 = \left(\int_M (\sqrt{H} u) \frac{1}{\sqrt{H}} dA \right)^2 \\ &\leq \int_M H u^2 dA \int_M \frac{1}{H} dA \leq \frac{V}{n+1} \int_M \frac{1}{H} dA, \end{aligned}$$

ou seja,

$$V \leq \frac{1}{n+1} \int_M \frac{1}{H} dA. \tag{2.37}$$

Observe que (2.37) é uma igualdade se e somente se (2.36) é uma igualdade. Mas (2.36) é uma igualdade se e somente se (2.35) o for, ou seja, se para todo $x \in \Omega$ a função f satisfaz a igualdade $\operatorname{Hess}(f)(.,.) = \frac{1}{n+1}\langle .,. \rangle$.

Pelo Teorema 2.4, usando o fato de que $f|_M = 0$, segue que Ω é isométrica a uma bola Euclidiana.

∎

Capítulo 3

Aplicações

3.1 O Teorema de Aleksandrov para r-curvatura média constante

O tópico que estuda as hipersuperfícies compactas $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ que possuem alguma r-curvatura média constante teve como principal suporte o método de Reilly [17]. O caso em que H é constante configura um teorema clássico, provado por Aleksandrov em [1]. Em 1988, Ros [19] pôde estender o Teorema de Aleksandrov para o caso das hipersuperfícies compactas com curvatura escalar H_2 constante. De maneira mais geral, Ros [18] foi capaz de caracterizar as hiperesferas imersas ou mergulhadas no espaço euclidiano estendendo este resultado ao caso de hipersuperfícies compactas com alguma r-curvatura média constante. Mais precisamente, ele demonstrou o seguinte

Teorema 3.1. *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e mergulhada no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Se H_r é constante para algum $r = 1, \ldots, n$, então M^n é uma esfera.*

Demonstração.
Por M^n ser compacta, segue da Proposição 1.15, que existe um ponto onde todas as curvaturas principais, em relação ao normal interior, são positivas.

Portanto, pelo Teorema 1.3, H_r é uma constante positiva e além disso, $H_r^{\frac{1}{r}} \leq H$ em M. Utilizando o Teorema 2.5, temos que

$$\begin{aligned} (n+1).V &\leq \int_M \frac{1}{H} dA \leq \int_M \frac{1}{H_r^{\frac{1}{r}}} dA \\ &= \frac{1}{H_r^{\frac{1}{r}}} \int_M dA = \frac{A}{H_r^{\frac{1}{r}}}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

ou seja,

$$(n+1) H_r^{\frac{1}{r}}.V \leq A, \tag{3.2}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, M^n é umbílica. Mais uma vez pelo Teorema 1.3 temos

$$H_{r-1} \geq H_r^{\frac{r-1}{r}}. \tag{3.3}$$

Combinando esta desigualdade com a Fórmula de Minkowski(Teorema 2.1) temos o seguinte

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M (H_{r-1} + H_r\langle \varphi, N\rangle)dA \\ &\geq \int_M (H_r^{\frac{r-1}{r}} + H_r\langle \varphi, N\rangle)dA \\ &= H_r^{\frac{r-1}{r}} \int_M (1 + H_r^{\frac{1}{r}}\langle \varphi, N\rangle)dA. \end{aligned}$$

Assim

$$\int_M (1 + H_r^{\frac{1}{r}}\langle \varphi, N\rangle)dA \leq 0. \tag{3.4}$$

Se $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ é o domínio compacto limitado por M^n com $\partial\Omega = M^n$ e x denota o vetor posição em $\mathbb{R}^{n+1}$, então

$$\overline{\Delta}|x|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 |x|^2}{\partial x_i^2} = 2(n+1),$$

onde $\overline{\Delta}$ representa o Laplaciano euclidiano.

Portanto, pelo Teorema 1.1, obtemos

$$\begin{aligned} -\int_M \langle \varphi, N\rangle dA &= \frac{1}{2}\int_M \langle 2\varphi, -N\rangle dA \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}(\overline{\nabla}|x|^2)dV \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \overline{\Delta}|x|^2 dV \\ &= (n+1).V, \end{aligned}$$

isto é,

$$-\int_M \langle \varphi, N\rangle dA = (n+1).V, \tag{3.5}$$

onde N é escolhido sendo o campo normal interior em relação a Ω.

Ao multiplicar a igualdade (3.5) por $H_r^{\frac{1}{r}}$ e subrair A de ambos os membros considerando que $H_r > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} A - H_r^{\frac{1}{r}}(n+1).V &= A + \int_M H_r^{\frac{1}{r}}\langle \varphi, N\rangle dA \\ &= \int_M (1 + H_r^{\frac{1}{r}}\langle \varphi, N\rangle)dA. \end{aligned}$$

Por conseguinte, pela desigualdade (3.4), temos

$$A \leq H_r^{\frac{1}{r}}(n+1).V.$$

Decorre disto, juntamente com a desigualdade (3.2), que

$$A = (n+1)H_r^{\frac{1}{r}}.V,$$

daí as desigualdades em (3.1) tornar-se-ão em igualdade, o que finaliza a prova.

$\blacksquare$

3.2 Uma extensão do Teorema de Aleksandrov

Em linhas gerais, nesta seção, queremos provar o seguinte resultado: Se Ω é um ponto crítico do funcional isoperimétrico

$$\Omega \longmapsto \frac{\mathcal{A}(\partial\Omega)^{n+1}}{\mathcal{V}(\Omega)^n},$$

então Ω é isométrica a uma bola euclidiana.

Com este intuito, vamos introduzir as seguintes definições e fixar as seguintes notações e resultados como se seguem.

Dada uma variedade Riemanniana M^n, n-dimensional, compacta, orientada e com bordo, seja $\Omega \subset M$ um domínio compacto com bordo suave e $\varphi : \Omega \subset M^n \to N^{n+1}$ uma imersão de M^n em uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional N^{n+1}.

Uma *variação* de φ é uma aplicação diferenciável

$$\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times D \to N,$$

tal que, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a aplicação $\Psi_t : D \to N$ para $p \in D$ é definida por $\Psi_t(p) = \Psi(t,p)$, com $\Psi_0 = \varphi$ e $\Psi_t\big|_{\partial\Omega} = \varphi\big|_{\partial\Omega}$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

O *campo variacional* associado a Ψ é o campo vetorial ao longo de φ dado por

$$X(p) = \frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,p)\bigg|_{t=0}$$

e sua componente normal é $f = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Psi\bigg|_{t=0}, \nu \right\rangle$, onde ν é um campo de vetores, normal e unitário em M.

Uma variação é dita *normal* se o campo variacional X é normal a imersão em cada ponto. Diremos que a variação Ψ tem suporte compacto se X o tiver. Nesse tipo de variação a valores pequenos de t, temos que $\Psi_t : D \to N$ é uma imersão.

Consequêntemente, podemos associar a Ψ o *funcional área* $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(\Psi_t)$, o qual é definido por $\mathcal{A}(t) = \int_\Omega dA_t$, onde dA_t denota o elemento de área em M associado a métrica induzida pela imersão Ψ_t e o *funcional volume* $\mathcal{V}(t)$ dado por

$$\mathcal{V}(t) = \int_{[0,t]\times\Omega} |J\Psi| dV,$$

o qual mede o volume delimitado entre $\Psi_0 = \varphi$ e Ψ_t e dV é o elemento de volume em N.

Escreveremos $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}$ para representar a área de Ω.

Definição 19. *Seja Ω um domínio limitado em M^n. Dizemos que Ω é um ponto crítico do funcional isoperimétrico se, para qualquer família a 1-parâmetro de difeomorfismos $\Psi_t : \Omega \to \Psi_t(\Omega) = \Omega_t$ vale*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(\Psi_t(\partial\Omega))\Big|_{t=0} = 0.$$

A *primeira variação da área* de Ω ao longo do campo variacional X é definido por

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_\Omega dA_t\Big|_{t=0} = \int_\Omega \frac{d}{dt}dA_t\Big|_{t=0}$$

Por outro lado, conforme vemos em [15], pág. 193, se uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, então podemos escrever a igualdade acima da seguinte maneira:

$$\mathcal{A}'(0) = -n\int_\Omega fHdA \qquad \text{e} \qquad \mathcal{V}'(0) = -\int_\Omega fdA \tag{3.6}$$

onde H é a curvatura média de φ com relação ao campo normal exterior ν.

Agora, como consequência direta de (3.6), temos que, uma hipersuperfície compacta mergulhada no espaço euclidiano é um ponto crítico do funcional isoperimétrico se, e somente se, tem curvatura média constante (cf. [15], pág. 197).

Vamos ao

Teorema 3.2. *Sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não-negativa e Ω um domínio compacto em $\overline{M}$ com bordo suave. Se Ω é um ponto crítico do funcional isoperimétrico*

$$\Omega \longmapsto \frac{\mathcal{A}(\partial\Omega)^{n+1}}{\mathcal{V}(\Omega)^n},$$

então Ω é isométrica a uma bola euclidiana.

Demonstração. Dada uma função suave f em $\partial\Omega$, consideremos a variação normal de $\partial\Omega$ dada por

$$\begin{array}{rcl}\Psi_t : \partial\Omega & \longrightarrow & \overline{M} \\ p & \longmapsto & \exp_p(-tf(p)N(p)),\end{array}$$

onde exp é a aplicação exponencial de $\overline{M}$. Segue da compacidade de Ω, que Ψ_t determina uma variação de Ω e Ω_t para $|t| < \epsilon$.

Por outro lado, colocando $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}(\Omega_t)$ e $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(\partial\Omega_t)$, a fórmula da primeira variação da área dos funcionais $\mathcal{V}(t)$ e $\mathcal{A}(t)$ são dadas por

$$\mathcal{A}'(0) = n\int_{\partial\Omega} fHdA \qquad \text{e} \qquad \mathcal{V}'(0) = \int_{\partial\Omega} fdA.$$

Por hipótese, temos

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\frac{\mathcal{A}(t)^{n+1}}{\mathcal{V}(t)^n} = 0,$$

ou seja

$$(n+1).\frac{\mathcal{A}^n}{\mathcal{V}^n}\int_{\partial\Omega} nf dA - n.\frac{\mathcal{A}^{n+1}}{\mathcal{V}^{n+1}}\int_{\partial\Omega} f dA = 0,$$

que é equivalente a

$$n.\frac{\mathcal{A}^n}{\mathcal{V}^{n+1}}\int_{\partial\Omega} f[(n+1)H\mathcal{V} - \mathcal{A}]dA = 0,$$

ou ainda

$$\int_{\partial\Omega} f[(n+1)H\mathcal{V} - \mathcal{A}]dA = 0, \quad \forall f.$$

Logo,

$$(n+1)\mathcal{V}H = \mathcal{A},$$

donde

$$H = \frac{\mathcal{A}}{(n+1)\mathcal{V}}.$$

Portanto, temos a igualdade em (2.32) no Teorema 2.5 e o resultado segue.

■

Capítulo 4

Aleksandrov Generalizado

Neste capítulo estaremos estendendo o Teorema 3.1 no seguinte sentido: Se $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície compacta mergulhada com alguma curvatura média alta constante em um cone convexo suave por partes C e perpendicular a ∂C, então S é parte de uma hiperesfera redonda.

Em todos os resultados, seguiremos de perto o artigo de Choe & Park [4].

4.1 Hipersuperfícies mergulhadas em um cone convexo

A fim de provar o teorema supracitado, precisamos estender as fórmulas de Minkowski e Reilly do capítulo 2. Façamos, então, as seguintes considerações.

Definição 20. Seja $\Omega \subset \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e A o seu volume. Definimos o *cone* $C := p \times \Omega$ sobre Ω com vértice p como a união de todos os segmetos de reta de p a q, sobre todos os pontos $q \in \Omega$.

Sendo $S \subset C$ e mergulhada, a região delimitada entre S e ∂C é um domínio D cujo o volume é denotado por V.

Mesmo quando S possui auto-intersecções e fronteira não-vazia, pode-se definir o volume V delimitado por S com relação a $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ de modo natural como sendo o volume de $p \times S$.

Note que $\partial(p \times S)$ é a união disjunta de $\partial(\overset{0}{C})$ com S, onde $\overset{0}{C} := p \times \partial S$. Se η denota o normal unitário exterior a S e $X(q) := \overrightarrow{pq}$, então integrando $\overline{\Delta}|X|^2 = 2(n+1)$ em $p \times S$, onde $\overline{\Delta}$ é o Laplaciano em $\mathbb{R}^{n+1}$ e levando em conta que $\langle \nabla_{\overline{\eta}} X, X \rangle = 0$ ao longo de X em $\partial(\overset{0}{C})$, onde $\overline{\eta}$ denota o normal exterior a $\partial(\overset{0}{C})$, temos

$$\begin{aligned}
(n+1)V &= \frac{1}{2}(2(n+1)V) = \frac{1}{2}\int_{p\times S} \overline{\Delta}|X|^2 dV = \frac{1}{2}\int_{p\times S} \operatorname{div}(\overline{\nabla}|X|^2) dV \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial(p\times S)} \langle \nabla |X|^2, \overline{\eta} \rangle dA = \frac{1}{2}\int_{\partial(p\times S)} \overline{\eta}(|X|^2) dA = \frac{1}{2}\int_{\partial(p\times S)} \overline{\eta}\langle X, X\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial(p\times S)} \langle \nabla_{\overline{\eta}} X, X\rangle dA = \int_{\partial(p\times S)} \langle \overline{\eta}, X\rangle dA = \int_{\partial(\overset{0}{C})} \langle X, \overline{\eta}\rangle + \int_S \langle \eta, X\rangle dA \\
&= \int_S \langle \eta, X\rangle dA,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$(n+1)V = \int_S \langle X, \eta\rangle. \tag{4.1}$$

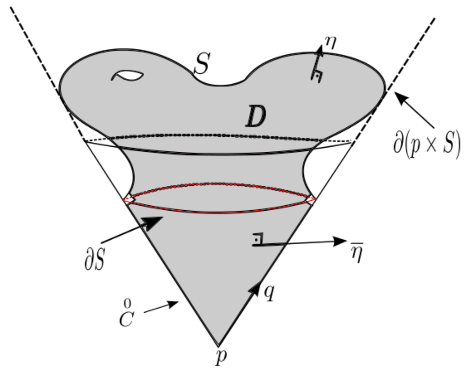

Figura 4.1: Hipersuperfície S mergulhada no cone C.

Por outro lado, veja que, pelo Lema 2.1, temos, para $r = 0$, que

$$\Delta|X|^2 = L_0|X|^2 = 2[n - S_1\langle X, \eta\rangle] = 2[n - nH\langle X, \eta\rangle] = 2n[1 - H\langle X, \eta\rangle],$$

ou seja,

$$\frac{1}{2n}\Delta|X|^2 = 1 - H\langle X, \eta\rangle \tag{4.2}$$

em S, onde Δ é o Laplaciano em S.

À partir de (4.1) e (4.2) podemos estender a fórmula de Minkowski da seguinte maneira. Assuma que $\partial S = \emptyset$ e seja S_t uma superfície paralela a S, isto é, o conjunto dos pontos à distância t de S, na direção η. Seguindo, neste ponto, os argumentos contidos em [15], temos um difeomorfismo $\phi_t : S \to S_t$ para cada t, $|t| < \epsilon$ e $S_t = \phi_t(S)$. Note que, dados $p \in S$ e $v \in T_pS$, temos

$$(d\phi_t)_p(v) = v + tA_p(v),$$

daí, para todo $p \in S$, o espaço tangente a S em p coincide com o espaço tangente a S_t em $p_t = p - t\eta(p)$, de tal modo que $\eta_t(p_t) = \eta(p)$ define uma orientação em S_t. Por outro lado, $\eta_t \circ \phi_t = \eta$. Desta forma, para cada $p \in S$ temos, usando a regra da cadeia, que

$$A_p = -d\eta_p = -(d\eta_t)_{\phi_t(p)}(d\phi_t)_p = (A_t)_{p_t}(d\phi_t)_p.$$

Denotando $(A_t)_{p_t}$ por A_t, seja $v \in T_pS$ um autovetor de A_p associado a um autovalor λ. Assim, obtemos

$$\lambda v = A_p(v) = A_t(d\phi_t)_p(v) = A_t(v + tA_p(v)) = (1 + \lambda t)A_t(v).$$

Agora, veja que, se $1+\lambda t = 0$ para algum $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, então $(d\phi_t)_p(v) = 0$ com $v \neq 0$, contradizendo o fato de ϕ_t ser um difeomorfismo. Portanto,

$$A_t(v) = \frac{\lambda}{1+t\lambda} v,$$

isto é, v é um autovetor de A_t associado ao autovalor $\dfrac{\lambda}{1+\lambda t}$. Em particular, se $e_1, \ldots, e_n \in T_pS$ são direções principais de S com curvaturas principais $k_1(p), \ldots, k_n(p)$, respectivamente, então $e_1, \ldots, e_n$ também são direções principais de S_t em p_t com curvaturas principais

$$k_i(p_t) = \frac{k_i(p)}{1+tk_i(p)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Como $S_t = \phi_t(S)$, usando o fato de que em uma base de T_pS formada por direções principais, vale

$$(d\phi_t)_p = I + tA_p = diag((1+tk_1(p), \ldots, 1+tk_n(p))),$$

então, sendo o determinante invariante por mudança de base, obtemos

$$det((d\phi_t)_p) = \prod_{i=1}^{n}(1+tk_i(p)),$$

e se dS denota o elemento de volume de S, então o elemento de volume de S_t é dado por

$$dS_t = (1+k_1 t)\ldots(1+k_n t)dS = P_n(t)dS, \tag{4.3}$$

onde

$$P_n(t) := (1+k_1 t)\ldots(1+k_n t) = 1 + \binom{n}{1} H_1 t + \cdots + \binom{n}{n} H_n t^n.$$

Sabemos que, sendo o k-ésimo polinômio simétrico elementar em $k_1, \ldots, k_n$, H_k é a k-ésima curvatura média de S, onde $H_1 = H$. Além disso, denotando a curvatura média $H(p_t)$ de S_t no ponto p_t por $H(t)$, obtemos

$$H(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i(p_t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{1+k_i t} = \frac{P_n'(t)}{nP_n(t)}.$$

Consequêntemente, integrando (4.2) em S_t para t suficientemente pequeno e usando (4.3) obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \int_{S_t}(1 - H(t)\langle X + t\eta, \eta\rangle) &= \int_S \left(1 - \frac{P_n'(t)}{nP_n(t)}\langle X + t\eta, \eta\rangle\right) \\ &= \int_S \left(\frac{nP_n(t) - P_n'(t)\langle X + t\eta, \eta\rangle}{nP_n(t)}\right). \end{aligned}$$

Assim, usando mais uma vez (4.3) e lembrando que $\langle X + t\eta, \eta\rangle = \langle X, \eta\rangle + t$, temos

$$0 = \int_S \left(P_n(t) - \frac{P_n'(t)}{n}\langle X, \eta\rangle - \frac{t}{n}P_n'(t) \right), \tag{4.4}$$

donde

$$0 = \int_{S_t} (1 - H(t)\langle X + t\eta, \eta\rangle) = \int_S \left(P_n(t) - \frac{P_n'(t)}{n}\langle X, \eta\rangle - \frac{t}{n}P_n'(t) \right).$$

Por outro lado,

$$P_n(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 + k_i t) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}H_i t^i \quad \text{e} \quad P_n'(t) = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}H_i t^{i-1}.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} P_n(t) - \frac{P_n'(t)}{n}\langle X, \eta\rangle - \frac{t}{n}P_n'(t) &= 1 + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}H_i t^i - \frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}H_i t^{i-1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}H_i t^{i-1}\langle X, \eta\rangle \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{n-i}{n}\binom{n}{i}H_i t^i - \frac{i}{n}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}H_i\langle X, \eta\rangle t^{i-1} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n}\left\{ \frac{n-i}{n}\binom{n}{i}H_i t^i - \frac{i}{n}\binom{n}{i}H_i\langle X, \eta\rangle t^{i-1} \right\}. \end{aligned}$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned} \frac{n-i}{n}\binom{n}{i} &= \frac{n-i}{n}\frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{(i+1)n!}{n(i+1)i!(n-(i+1))!} \\ &= \frac{i+1}{n}\binom{n}{i+1}, \end{aligned}$$

assim, a soma dos termos i e $i+1$ no último somatório acima, com $i = 1, \ldots, n-1$ nos dá

$$\begin{aligned} &\frac{n-i}{n}\binom{n}{i}H_i t^i - \frac{i}{n}\binom{n}{i}H_i\langle X, \eta\rangle t^{i-1} + \frac{n-(i+1)}{n}\binom{n}{i+1}H_{i+1}t^{i+1} - \frac{i+1}{n}\binom{n}{i+1}H_{i+1}\langle X, \eta\rangle t^i = \\ &= -\frac{i}{n}\binom{n}{i}H_i\langle X, \eta\rangle t^{i-1} + \frac{n-(i+1)}{n}\binom{n}{i+1}H_{i+1}t^{i+1} + \frac{i+1}{n}\binom{n}{i+1}\{H_i - H_{i+1}\langle X, \eta\rangle\}t^i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P_n(t) - \frac{P_n'(t)}{n}\langle X, \eta\rangle - \frac{t}{n}P_n'(t) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{n}\binom{n}{i+1}\{H_i - H_{i+1}\langle X, \eta\rangle\}t^i.$$

Substituindo esta igualdade em (4.4), temos

$$\sum_{i=0}^{i-1} \frac{i+1}{n} \binom{n}{i+1} \int_S \{H_i - H_{i+1}\langle X, \eta\rangle\} t^i dS = 0,$$

para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Por fim, usando igualdade de polinômios, segue que

$$\int_S \{H_k - H_{k+1}\langle X, \eta\rangle\} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n-1, \tag{4.5}$$

com $H_0 = 1$.

A seguir, obtemos a fórmula de Minkowski para hipersuperfícies imersas com bordo não-vazio na seguinte

Proposição 4.1. *Seja C um domínio em $\mathbb{R}^{n+1}$, o qual é um cone com bordo suave por partes e vértice na origem. Seja S uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $\partial S \subset \partial C$ tal que próximo a ∂S, S está contida em C e é perpendicular a ∂C. Então:*

$$\int_S (H_{k-1} - H_k\langle X, \eta\rangle) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n \tag{4.6}$$

Demonstração. Inicialmente, integrando (4.2) em S_t, aplicando o Teorema da Divergência e considerando que $\langle \nabla |X + t\eta|^2, \nu\rangle = \nu(|X + t\eta|^2) = 2|X + t\eta|\nu(|X + t\eta|)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_S (P_n(t) - \frac{P_n'(t)}{n}\langle X, \eta\rangle &- \frac{t}{n}P_n'(t)) = \\
&= \frac{1}{2n}\int_{S_t} \Delta |X + t\eta|^2 \\
&= \frac{1}{2n}\int_{S_t} \operatorname{div}(\nabla |X + t\eta|^2) \\
&= -\frac{1}{2n}\int_{\partial S_t} \langle \nabla |X + t\eta|^2, \nu\rangle \\
&= -\frac{1}{n}\int_{\partial S_t} |X + t\eta| \frac{\partial}{\partial \nu}|X + t\eta|,
\end{aligned}$$

portanto

$$0 = \int_S (P_n(t) - \frac{P_n'(t)}{n}\langle X, \eta\rangle - \frac{t}{n}P_n'(t)) + \frac{1}{n}\int_{\partial S_t} |X + t\eta| \frac{\partial}{\partial \nu}|X + t\eta|, \tag{4.7}$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior a ∂S_t em S_t. Note que ν é perpendicular a $T_q\partial C$ e que $X(q) + t\eta$ é paralelo a $T_q\partial C$ uma vez que S é perpendicular a C e $X(q) + t\eta \in S$, para t suficientemente pequeno.

Assim, $\frac{\partial}{\partial \nu}|X + t\eta| = 0$ e por conseguinte a segunda integral em (4.7) é igual a zero.

Então, para t suficientemente pequeno, a primeira integral em (4.7) é nula, logo

$$\int_S (H_{k-1} - H_k\langle X, \eta\rangle) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

como queríamos demonstrar.

$\blacksquare$

Seja agora α uma 1-forma em uma variedade Riemanniana M com curvatura R, então a identidade de Ricci é dada por

$$((\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X)\alpha)(Z) = \alpha(R(X,Y)Z).$$

Dada uma função suave f em M, podemos obter a fórmula de Bochner aplicando a identidade de Ricci a df e tomando o traço, assim

$$\langle \Delta\,\mathrm{df}, \mathrm{df}\rangle = |\nabla\,\mathrm{df}\,|^2 + \frac{1}{2}\Delta|\,\mathrm{df}\,|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla\,\mathrm{f}, \nabla\,\mathrm{f}).$$

Note que, em um domínio D em M^{n+1}, do Teorema 2.2, temos

$$\int_D ((\overline{\Delta}\,\mathrm{f})^2 - |\,\mathrm{Hess}\,\mathrm{f}\,|^2 - \mathrm{Ric}(\overline{\nabla}\,\mathrm{f}, \overline{\nabla}\,\mathrm{f})) = \int_{\partial D} \left(\left(2\Delta\,\mathrm{f} + nH\frac{\partial\,\mathrm{f}}{\partial\eta}\right) \frac{\partial\,\mathrm{f}}{\partial\eta} + H_\eta(\nabla\,\mathrm{f}, \nabla\,\mathrm{f}) \right),$$

onde $\overline{\Delta}\,\mathrm{f}$, $\mathrm{Hess}\,\mathrm{f}$, $\overline{\nabla}\,\mathrm{f}$ são o Laplaciano, Hessiano e o gradiente de f em M, respectivamente e $\Delta\,\mathrm{f}$, $\nabla\,\mathrm{f}$, H, η, e H_η são o Laplaciano de f em ∂D, gradiente de f em ∂D, curvatura média, normal unitário exterior e a segunda forma fundamental de ∂D, respectivamente.

Vimos que Ros usou a fórmula de Reilly para provar que $\int_S \frac{1}{H} \geq (n+1)V$ para uma hipersuperfície compacta mergulhada $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Estendemos este resultado na seguinte

Proposição 4.2. *Seja C um domínio em $\mathbb{R}^{n+1}$, o qual é um cone convexo com bordo suave por partes e vértice na origem. Seja $S \subset C$ uma hipersuperfície mergulhada com $\partial S \subset \partial C$ tal que S é perpendicular a ∂C ao longo de ∂S. Seja H a curvatura média de S e V o volume do domínio D delimitado entre S e ∂C. Se $H > 0$ em S, então*

$$\int_S \frac{1}{H} \geq (n+1)V, \tag{4.8}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, S é uma calota esférica.

Demonstração. Para aplicarmos a fórmula de Reilly é necessário suavizarmos o bordo de D, ∂D. Seja $D_\epsilon \subset D$, $\epsilon > 0$, um domínio com bordo suave, obtido à partir de D, "retirando" os pontos p, cuja distância $d(p, \partial S \cup \widehat{C}) < \epsilon$, onde

$$\widehat{C} := \{q \in \partial C; \partial C \quad \text{não} \quad \text{possui} \quad \text{plano} \quad \text{tangente} \quad \text{em} \quad q\}.$$

Defina $f \in C^\infty(D_\epsilon)$, uma solução do seguinte problema com condição de fronteira combinado

$$\begin{cases} \overline{\Delta}(f) = 1, & \text{em} \quad D_\epsilon \\ f = 0, & \text{em} \quad \partial D_\epsilon \setminus \partial C \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} = 0, & \text{em} \quad \partial D_\epsilon \cap \partial C. \end{cases}$$

Note que $\partial D_\epsilon = (\partial D_\epsilon \setminus \partial C) \cup (\partial D_\epsilon \cap \partial C)$, então pela fórmula de Reilly e do fato de que esta união é disjunta, obtemos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{D_\epsilon} ((\overline{\Delta} f)^2 - |\operatorname{Hess} f|^2) &= \int\limits_{(\partial D_\epsilon \setminus \partial C)\cup(\partial D_\epsilon \cap \partial C)} nH\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \int\limits_{(\partial D_\epsilon \setminus \partial C)\cup(\partial D_\epsilon \cap \partial C)} 2\Delta f\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \\
&+ \int\limits_{(\partial D_\epsilon \setminus \partial C)\cup(\partial D_\epsilon \cap \partial C)} H_\eta(\nabla f, \nabla f) \\
&= \int\limits_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} nH\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \underbrace{\int\limits_{\partial D_\epsilon \cap \partial C} nH\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2}_{=0} + \underbrace{\int\limits_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} 2\Delta f\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)}_{=0} \\
&+ \underbrace{\int\limits_{\partial D_\epsilon \cap \partial C} 2\Delta f\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)}_{=0} + \underbrace{\int\limits_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} H_\eta(\nabla f, \nabla f)}_{=0} + \int\limits_{\partial D_\epsilon \cap \partial C} H_\eta(\nabla f, \nabla f) \\
&= \int\limits_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} nH\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \int\limits_{\partial D_\epsilon \cap \partial C} H_\eta(\nabla f, \nabla f) \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

A convexidade de C implica que $\int_{\partial D_\epsilon \cap \partial C} H_\eta(\nabla f, \nabla f) \geq 0$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz já vimos que $(\overline{\Delta} f)^2 \leq (n+1)|\operatorname{Hess} f|^2$, portanto

$$n\int_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} H\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 \leq \int_{D_\epsilon}(1 - |\operatorname{Hess} f|^2) \leq \int_{D_\epsilon} \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\operatorname{Vol}(D_\epsilon),$$

consequêntemente,

$$\int_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} H\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 \leq \frac{1}{n+1}\operatorname{Vol}(D_\epsilon),$$

posto que em D_ϵ, $1 \leq (n+1)|\operatorname{Hess} f|^2$ implica $1 - |\operatorname{Hess} f|^2 \leq \dfrac{n}{n+1}$.

Por outro lado, levando em conta as considerações acima e o Teorema da Divergência, segue que

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Vol}(D_\epsilon))^2 &= \left(\int_{D_\epsilon} \overline{\Delta} f\right)^2 = \left(\int_{D_\epsilon} \operatorname{div}(\overline{\nabla} f)\right)^2 = \left(\int_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} \langle \overline{\nabla} f, \eta\rangle\right)^2 \\
&= \left(\int_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} \frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\int_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} \left(\sqrt{H}\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{1}{\sqrt{H}}\right)^2 \\
&\leq \int_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} H\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 \int_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} \frac{1}{H} \leq \frac{\operatorname{Vol}(D_\epsilon)}{n+1}\int_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} \frac{1}{H}. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Assim, fazendo $\epsilon \to 0$, temos

$$V^2 \leq \frac{V}{n+1}\int_S \frac{1}{H},$$

donde

$$(n+1)V \leq \int_S \frac{1}{H}. \tag{4.11}$$

Agora, se a igualdade ocorre na desigualdade (4.11), voltando à igualdade (4.9), observando que $(\overline{\Delta} f)^2 - \dfrac{(\overline{\Delta} f)^2}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}(\overline{\Delta} f)^2$ e lembrando que, em D_ϵ, $\overline{\Delta} f = 1$, temos

$$\int_{D_\epsilon} \left((\overline{\Delta} f)^2 - \frac{(\overline{\Delta} f)^2}{n+1} + \frac{(\overline{\Delta} f)^2}{n+1} - |\operatorname{Hess} f|^2 \right) \geq \int_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} nH \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2,$$

separando as integrais do lado esquerdo, obtemos

$$\frac{n}{n+1} \operatorname{Vol}(D_\epsilon) + \int_{D_\epsilon} \left(\frac{1}{n+1} - |\operatorname{Hess} f|^2 \right) \geq \int_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} nH \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2,$$

o que é equivalente a

$$\frac{n}{n+1} \operatorname{Vol}(D_\epsilon) - \int_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} nH \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \geq \int_{D_\epsilon} \left(|\operatorname{Hess} f|^2 - \frac{1}{n+1} \right) \geq 0. \tag{4.12}$$

Note que, fazendo $\epsilon \to 0$, o lado esquerdo de (4.12) tende a zero, pois por (4.10),

$$\lim_{\epsilon \to 0} (\operatorname{Vol}(D_\epsilon))^2 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\operatorname{Vol}(D_\epsilon)}{n+1} \int_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} \frac{1}{H} = \lim_{\epsilon \to 0} H \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \int_{\partial D_\epsilon \setminus \partial C} \frac{1}{H},$$

e D_ϵ tende a D, consequêntemente

$$\int_D \left(|\operatorname{Hess} f|^2 - \frac{1}{n+1} \right) = 0,$$

então $|\operatorname{Hess} f|^2 = \dfrac{1}{n+1}$, logo $\operatorname{Hess} f = \dfrac{1}{n+1} \langle ., . \rangle$.

Isso significa que f é solução do sistema de equações de derivadas parciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0, & \text{se} \quad i \neq j \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \dfrac{1}{n+1}, & \text{se} \quad i = j = 1, \ldots, n+1. \end{cases}$$

Integrando explicitamente a segunda equação deste sistema, obtemos

$$f(x) = \frac{1}{2n+2}|x|^2 + \langle y, x \rangle + c, \quad \text{onde} \quad y \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{e} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Note que, pelo sistema acima, o termo linear $\langle y, x \rangle = 0$, logo

$$f(x) = \frac{1}{2n+2}|x|^2 + c, \quad \text{onde} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Para finalizar, note que $f(x) = 0$ para cada $x \in \partial D_\epsilon \setminus \partial C$ e por conseguinte, quando $\epsilon \to 0$, $f(x) = 0$ para cada $x \in S$, então

$$\frac{1}{2n+2}|x|^2 = -c,$$

qualquer que seja o $x \in S$, e portanto, o lado direito da igualdade acima deve ser positivo.

Logo, S é uma calota esférica centrada na origem de raio $a := \sqrt{-c(2n+2)}$.

■

De posse das proposições 4.1 e 4.2, estamos em condições de provar o Teorema de Aleksandrov generalizado. Antes, porém, relembraremos alguns fatos e notações.

Se $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$ é um *multi-índice* em $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, uma $(n+1)$-upla de inteiros não-negativos $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$, a *ordem* de β é o inteiro não-negativo $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_{n+1}$.

Para $k \geq 0$ inteiro e $f \in C^k(\Omega)$, denotamos por $\partial^\beta f$ a derivada parcial $\partial^\beta f = \dfrac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}$.

Se Ω for aberto e $f \in C^k(\Omega)$ for tal que $\partial^\beta f \in C^\alpha(\Omega)$ para todo multi-índice β de ordem k, dizemos que f é de classe $C^{k,\alpha}$ em Ω e escrevemos $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$.

Teorema 4.1. *Seja C um domínio em $\mathbb{R}^{n+1}$, o qual é um cone convexo com bordo suave por partes e vértice na origem. Seja $S \subset C$ uma hipersuperfície mergulhada com ℓ-ésima curvatura média constante e $\partial S \subset \partial C$ tal que S é $C^{2,\alpha}$ (i.é., $\varphi : S \to \mathbb{R}^{n+1}$ é um mergulho $C^{2,\alpha}$) e perpendicular a ∂C ao longo de ∂S. Então S é uma calota esférica.*

Demonstração. Vimos no Teorema 1.3 que se $H_n > 0$ e $m < n$ então $H_m > 0$. Pelo mesmo Teorema, temos que

$$H_k^{k-1} \leq H_{k-1}^k,$$

desde que $H_j > 0$ para algum $j \geq k$, onde a igualdade ocorre somente nos pontos umbílicos de S.

Note que no ponto de S mais distante da origem, S tem curvatura principal positiva e consequêntemente $H_\ell \equiv \text{cte} > 0$ e

$$0 < H_k^{k-1} \leq H_{k-1}^k, \qquad k = 1, \ldots, \ell. \tag{4.13}$$

Além disso,

$$0 < H_\ell^{\frac{1}{\ell}} \leq H. \tag{4.14}$$

Segue da Proposição 4.1 e da relação (4.1) que

$$0 = \int_S H_{\ell-1} - \int_S H_\ell \langle X, \eta \rangle = \int_S H_{\ell-1} - (n+1) H_\ell V.$$

Por outro lado, lembrando que V denota o volume do domínio delimitado entre S e ∂C, (4.13) implica

$$(n+1) H_\ell V = \int_S H_{\ell-1} \geq \int_S H_\ell^{\frac{\ell-1}{\ell}} = H_\ell^{\frac{\ell-1}{\ell}} \operatorname{Vol}(S). \tag{4.15}$$

Combinando a Proposição 4.2 com (4.14) obtemos

$$(n+1)V \leq \int_S \frac{1}{H} \leq \int_S \frac{1}{H_\ell^{1/\ell}} = H_\ell^{-1/\ell}\,\mathrm{Vol}(S).$$

Portanto,

$$(n+1)VH_\ell \leq H_\ell^{\frac{\ell-1}{\ell}}\,\mathrm{Vol}(S). \tag{4.16}$$

De (4.15) e (4.16) temos

$$(n+1)V = H_\ell^{-1/\ell}\,\mathrm{Vol}(S).$$

Logo,

$$(n+1)V = \int_S \frac{1}{H_\ell^{1/\ell}},$$

que é equivalente a igualdade na proposição 4.2, e o resultado segue.

■

Referências Bibliográficas

[1] Aleksandrov, A. D. *Uniquiness theorems for surfaces in the large*, Vestnik Leningrad Univ. **13**(1958), 5-8.

[2] Aquino, C. P. *Uma Caracterização de Hipersuperfícies na Esfera com Curvatura Escalar Constante*. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal do Ceará, coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior. Ano de obtenção: (2003)

[3] Carmo, M. P. do. *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 5ª Edição (2011).

[4] Choe, J., Park, S. *Capillary surfaces in a convex cone*, Math. Z. (2011) **267**:875–886

[5] Eisenhart, L. P. *Riemannian Geometry.* Princeton: University Press 1925.

[6] E. Heintze and H. Karcher, *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **11**, 451–470, 1978.

[7] Gilbarg, D., Trudinger, N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* Springer-Verlag, 2001.

[8] Gärding, L. *An inequality for hyperbolic polynomials*, J. Math. Mech. **8**(1959), 957-965.

[9] Hsiung, C. C. *Some integral formula for closed hypersurfaces*, Math. Scand **2**(1954), 286-294.

[10] Hsiang, W. Y., Teng, Z. W. and Yu *News examples of constant mean curvature immersion of* $(2k-1)$*-spheres into Euclidian* $2k$*-space*, Ann. of Math. **117**(1983), 609-625.

[11] Jorge, L., Koutroufiotis, D. - *An Estimate for the Curvature of Bounded Submanifolds,* Amer. J. Math. 103, 711-725 (1981).

[12] Lang, S. - *Differential manifolds.* Addiison-Wesley, Inc., Philippines, 1972.

[13] Liebmann, H. *Eine neue Eigenschaft de Kugel*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Klasse, (1899), 44-55.

[14] Montiel, S., Ros, A. *Compact Hypersurfaces: The Alexandrov Theorem for Higher Order Mean Curvatures.* in Differential Geometry. Essex: Longman (1991).

[15] Montiel, S., Ros, A. *Curvas and Surfaces.* Graduate Studies in Mathematics, volume 69, (1998).

[16] Reilly, R. *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold,* Indiana Univ. Math. J. 26(1977), 459-472.

[17] Reilly, R. *Geometric Applications of the Solvability of Neumann Problems on a Riemannian Manifold.* California Univ. (1980), 23-29.

[18] Ros, A. *Compact Hypersurfaces with Constant Higher Order Mean Curvatures.* Revista Matemática Iberoamericana, **3**(1987), 447-453.

[19] Ros, A. *Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem,* J. Diff. Geom. **27**(1988), 215-220.

[20] Rosenberg, H. - *Hypersurfaces of Constant Curvature in Space Forms.* Bull. Sc. Math. 117, 217-239 (1993).

[21] Spivak, M. - *Calculus on Manifolds.* W. A. Benjamin, Inc., New York, 1965.

[22] Spivak. M. - *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry,* Publish or Perish, INC. Houston, Texas (U.S.A.), Volume II, 1970.

[23] Süss, W. *Uber kennzeichnungen der Kugeln un affinsphären durch Herrn K. P. Grotemeyer,* Arch. Math. **3**(1952), 311-313.

[24] Wente, H.C. *Counterexample to a conjecture of H. Hopf,* Pac. J. Math. **121**(1986), 193-243.

[25] Korevaar, N.J. *Sphere theorems via Aleksandrov for constant Weigarten curvature hypersurfaces*-Appendix to a note of A. Ros, J. Diff. Geom. **27**(1988), 221-223.