



Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Joás Elias dos Santos Rocha

Dimensão de Hausdorff de Conjuntos Quase-Morán

Maceió  
2014

**Joás Elias dos Santos Rocha**

**Dimensão de Hausdorff de Conjuntos Quase-Morán**

Dissertação de Mestrado, na Área de concentração de Sistemas Dinâmicos submetida em 25 de Março de 2014 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Krerley Irracieli Martins Oliveira.

**Maceió**  
**2014**

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecária Responsável: Maria Auxiliadora G. da Cunha**

R672d Rocha, Joás Elias dos Santos.  
Dimensão de Hausdorff de conjuntos Quase-Morán / Joás Elias dos Santos. – 2014.  
43 f.

Orientador: Krerley Irraciel Martins Oliveira.  
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2014.

Bibliografia: f. 43.

1. Dimensão de Hausdorff. 2. Conjuntos Quase-Morán. 3. Formalismo.  
I. Título.

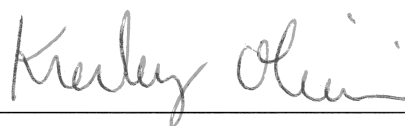
CDU: 517.97

# DIMENSÃO DE HAUSDORFF DE CONJUNTOS QUASE-MORÁN

JOÁS ELIAS DOS SANTOS ROCHA

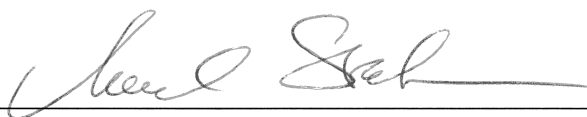
Dissertação de mestrado na área de concentração de Sistemas Dinâmicos apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:



---

Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira (Orientador)



---

Prof. Dr. Manuel Stadlbauer



---

Prof. Dr. Ricardo Abreu Blaya



# Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo, à minha família pelo apoio, aos meus amigos, ao professor Krerley Oliveira pela orientação, e a banca pelas sugestões feitas.



# Resumo

Neste trabalho abordamos um problema clássico do cálculo da dimensão de Hausdorff de uma certa classe de conjuntos. Para isto, no capítulo 2 introduzimos a definição de dimensão de Hausdorff e achamos a dimensão dos conjuntos de Moran . No capítulo 3, introduzimos conceitos que serão úteis para estudar a dimensão de Hausdorff dos conjuntos Quase-Moran. No capítulo 4, encerramos o trabalho com o teorema principal devido a Pesin e Weiss.

**Palavras chave:** Dimensão de Hausdorff, Conjuntos Quase-Moran, Formalismo Termodinâmico .



# Abstract

In this work we will approach a classic problem about Hausdorff Dimension computation of a certain kind of sets. In chapter 2, we introduce the definition of Hausdorff Dimension and we find the Hausdorff dimension of Moran sets. In the Chapter 3 , we present useful topics to study Hausdorff Dimension of Moran-like sets. In the last chapter, we present the main theorem of this work, due to Pesin and Weiss.

**Keywords:** Hausdorff Dimension, Moran-like sets, Thermodynamic Formalism .

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Dimensão de Hausdorff de conjuntos de Moran</b>	<b>11</b>
2.1	Dimensão de Hausdorff . . . . .	11
2.2	Conjuntos de Morán . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Algumas Noções de Dimensão</b>	<b>25</b>
3.1	Capacidade Limite . . . . .	25
3.2	Construção de Carathéodory . . . . .	27
3.2.1	Dimensão de Carathéodory . . . . .	27
3.2.2	Capacidade Limite de Carathéodory . . . . .	29
3.3	Pressão Topológica . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Dimensão de Hausdorff de Conjuntos Quase-Morán</b>	<b>36</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>44</b>
4.1	Lema de Densidade de Borel . . . . .	44
4.2	Equação de Bowen . . . . .	44
4.3	Alguns Resultados de Teoria Ergódica . . . . .	44
4.4	Entropia Métrica ou de Kolmogorov . . . . .	46
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>51</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Em 1927, Abram Besicovitch propôs aos seus alunos o problema de calcular a dimensão de Hausdorff de uma certa classe de conjuntos. Patrick Moran resolveu o problema e a tal classe de conjuntos hoje leva seu nome. Pesin e Weiss perceberam que a idéia de Moran podia ser usada para calcular a dimensão de Hausdorff de uma classe ainda mais ampla de conjuntos, modeladas por um shift, via formalismo termodinâmico. Neste trabalho, veremos como a dimensão de Hausdorff desses conjuntos se relacionam com outras espécies de dimensão.

# Capítulo 2

## Dimensão de Hausdorff de conjuntos de Moran

### 2.1 Dimensão de Hausdorff

Por vezes o conjunto no qual estamos interessados tem medida de Lebesgue nula, mas não é completamente negligenciável. Isso pede então uma definição mais fina de dimensão que 'enxergue' tais conjuntos. Tendo isso em vista, neste capítulo vamos ver uma noção de dimensão que generaliza aquela de espaços vetoriais.

Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Definimos o diâmetro de  $A$  como  $diam(A) = \sup\{|x - y|; x, y \in A\}$

**Definição 1.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  e  $\delta, s \geq 0$ . Definimos*

$$\mathcal{H}_\delta^s(X) = \inf\left\{\sum_i diam(A_i)^s; X \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \text{ e } diam A_i \leq \delta \text{ para todo } A_i\right\}.$$

Uma cobertura  $\{A_i\}_i$  de  $X$  é chamada de  $\delta$ -cobertura se  $diam A_i \leq \delta$  para todo  $i$ . É claro que se  $\delta \geq \tilde{\delta}$ , então toda  $\tilde{\delta}$ -cobertura de  $X$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $X$  e portanto,  $\mathcal{H}_\delta^s(X) \leq \mathcal{H}_{\tilde{\delta}}^s(X)$  (se  $A \subset B$  então  $\inf A \geq \inf B$ ). Assim, definimos a medida  $s$ -dimensional de Hausdorff como:

**Definição 2.**  $\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(X) = \sup_{\delta \geq 0} \mathcal{H}_\delta^s(X)$ .

**Proposição 2.1.** *Seja  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  uma família enumerável de conjuntos. Então:*

$$1. \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(X_i)$$

$$2. \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^s(X_i)$$

**Demonstração.** Seja  $\{A_{i,j}\}_j$  uma  $\delta$ -cobertura de  $X_i$ . Então  $\{A_{i,j}\}_{i,j}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $X \equiv \bigcup X_i$ . Da definição:

$$\mathcal{H}_\delta^s(X) \leq \sum_i \sum_j |A_{i,j}|^s$$

e tomando o ínfimo sobre todas as coberturas vem:

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(X_i).$$

E assim obtemos a primeira desigualdade. Da definição:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(X_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^s(X_i)$$

assim, por 1:

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} X_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^s(X_i).$$

Agora, tomando o limite quando  $\delta$  vai para zero, o resultado segue. ■

Se  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $\lambda > 0$  definimos  $\lambda U \equiv \{\lambda x : x \in U\}$ .

**Proposição 2.2.** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $\lambda > 0$ . Então  $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ .*

**Demonstração.** Seja  $\delta > 0$ . Considere  $\{U_n\}_n$  uma  $\delta$ -cobertura de  $A$ . Então  $\{\lambda U_n\}_n$  é uma  $\lambda\delta$ -cobertura de  $\lambda A$ . Da definição,  $\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf\{\Lambda^s(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } A\}$  onde

$$\Lambda^s(\mathcal{C}) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam} U_i)^s \text{ e } \mathcal{C} = \{U_n\}_n. \text{ Temos } \Lambda^s(\lambda\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s = \lambda^s \Lambda^s(\mathcal{C}).$$

Assim:

$$\lambda^s \{\Lambda^s(\mathcal{C}); \mathcal{C} \text{ é } \delta\text{-cobertura de } A\} \subset \{\Lambda^s \tilde{\mathcal{C}}; \tilde{\mathcal{C}} \text{ é } \lambda\delta\text{-cobertura de } \lambda A\} \implies \mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda A) \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(A). \text{ Fazendo } \delta \downarrow 0 :$$

$$\mathcal{H}^s(\lambda A) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(A).$$

Seja  $B \subset \mathbb{R}^n$  e  $\alpha > 0$ . Na desigualdade obtida acima façamos  $\lambda = \frac{1}{\alpha}$  e  $A = \frac{B}{\lambda}$ . Então:

$$\mathcal{H}^s\left(\lambda \frac{B}{\lambda}\right) \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^s \mathcal{H}^s\left(\frac{B}{\lambda}\right)$$

$$\mathcal{H}^s(B) \leq \frac{1}{\alpha^s} \mathcal{H}^s(\alpha B)$$

$$\alpha^s \mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(\alpha B)$$

Juntando os dois resultados, já que eles valem em geral, o resultado segue.

**Proposição 2.3.** *Se  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é  $\alpha$ -Hölder, i.e., existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$  então*

$$\mathcal{H}_\alpha^{\frac{s}{\alpha}}(f(A)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(A).$$

**Demonstração.** Seja  $\mathcal{C} = \{U_n\}_n$  uma  $\delta$ -cobertura de  $A$ . Então  $f(\mathcal{C}) \equiv \{f(U_n)\}_n$  é uma  $c\delta^\alpha$ -cobertura de  $f(A)$ . Além disso,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(U_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq \sum c^{\frac{s}{\alpha}} |U_i| = c^{\frac{s}{\alpha}} \sum |U_i|^\alpha.$$

Assim  $\Lambda_\alpha^{\frac{s}{\alpha}}(f(\mathcal{C})) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \Lambda^s(\mathcal{C})$ . Logo:

$$\mathcal{H}_\delta^{\frac{s}{\alpha}}(f(A)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(A).$$

Fazendo  $\delta \downarrow 0$  obtemos  $\mathcal{H}_\alpha^{\frac{s}{\alpha}}(f(A)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(A)$ . ■

Faremos agora algumas considerações a respeito da medida de Hausdorff.

Suponha que  $\mathcal{H}^\alpha(A) = \infty$ . Seja  $s < \alpha$  e  $\delta > 0$  e faça  $\varepsilon = \alpha - s > 0$ . Tome uma  $\delta$ -cobertura qualquer  $\{U_i\}$  de  $A$ . Então:

$$\sum_i |U_i|^s = \sum_i |U_i|^{\alpha-\varepsilon} = \sum_i |U_i|^\alpha |U_i|^{-\varepsilon} \geq \delta^{-\varepsilon} \sum_i |U_i|^\alpha.$$

Como a cobertura foi tomada arbitrária, vem:

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \geq \delta^{-\varepsilon} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A).$$

Fazendo  $\delta \downarrow 0$  temos  $\mathcal{H}^s(A) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}(A)^\alpha}{\delta^\varepsilon} = \infty$

Suponha agora que  $\mathcal{H}^\alpha(A) < \infty$ . Seja  $s > \alpha$  e  $\delta > 0$  tal que  $\mathcal{H}_\delta^s(A) < \infty$ . Considere uma  $\delta$ -cobertura de  $A$ ,  $\{U_n\}$  e  $\varepsilon = s - \alpha$ . Temos:

$$\sum_i |U_i|^\alpha = \sum_i |U_i|^s |U_i|^{-\varepsilon} \geq \delta^{-\varepsilon} \sum_i |U_i|^s.$$

Como consequência,  $\delta^\varepsilon \mathcal{H}_\delta^\alpha(A) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A)$ . Fazendo  $\delta \downarrow 0$  vem  $0 \geq \mathcal{H}^s(A)$ . Obtemos então:

**Proposição 2.4.** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  então existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\mathcal{H}^s(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } s > \alpha, \\ \infty, & \text{se } s < \alpha. \end{cases}$$

**Definição 3.** *O número  $\alpha$  da proposição acima é chamado dimensão de Hausdorff de  $A$  e escrevemos  $\alpha \equiv \dim_H A$ , ou ainda,  $HD(A)$ .*

**Exemplo 2.5.** *Seja  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$  a bola de centro  $x$  e raio  $r$ . Então :*

$$\mathcal{H}^s(B(x, r)) = \begin{cases} 0, & \text{se } s > n, \\ \infty, & \text{se } s < n. \end{cases}$$

*Com efeito,  $\mathcal{H}^n(B(x, r)) = 2^n r^n$  ( ver [4]).*

Algumas propriedades da dimensão de Hausdorff são:

**Corolário 2.6.** *Se  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é  $\alpha$ -Hölder, então:*

$$\dim_H(A) \geq \alpha \dim_H(f(A)).$$

**Demonstração.** Se  $\mathcal{H}^s(A) = 0$  então  $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(A)) = 0$ .

Assim  $s > \dim_H A \implies \frac{s}{\alpha} > \dim_H(f(A))$ . Logo:

$$\dim_H(A) \geq \alpha \dim_H(f(A)).$$

■

**Corolário 2.7. (Invariância por aplicações bi-Lipschitz)**

*Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação bi-Lipschitz ,i.e., existem  $0 < c, d \in \mathbb{R}$  tais que  $c|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq d|x - y| \forall x, y \in A$ . Então:*

$$\dim_H A = \dim_H(f(A)).$$

**Corolário 2.8. (Invariância por normas equivalentes)** *Se  $|\cdot|_1$  e  $|\cdot|_2$  são normas equivalentes, então*

$$\dim_{(H, |\cdot|_1)}(A) = \dim_{(H, |\cdot|_2)}(A).$$

**Demonstração.** A aplicação  $i : (M, |\cdot|_1) \rightarrow (M, |\cdot|_2)$  dada por  $i(x) = x$  é bi-Lipschitz. Assim, usando o corolário acima, o resultado segue.

**Proposição 2.9.** *Se  $A \subset B$  então  $\dim_H A \leq \dim_H B$ .*

**Demonstração.** Se  $\mathcal{U}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $B$  então é uma  $\delta$ -cobertura de  $A$ . Logo, para todo  $s > 0$ :

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \mathcal{H}_\delta^s(B).$$

Portanto:

$$\sup\{s; \mathcal{H}^s(A) = \infty\} \leq \sup\{s; \mathcal{H}^s(B) = \infty\}.$$

■

**Proposição 2.10.** *Seja  $\{A_n\}_n$  uma família de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Então vale:*

$$\dim_H(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup_i \{\dim_H(A_i)\}.$$

**Demonstração.** Seja  $s = \sup_i \{\dim_H A_i\}$  e  $\varepsilon > 0$ . Então:

$$s + \varepsilon > \dim_H A_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Pelo item 2 da proposição 2.1:

$$\mathcal{H}^{s+\varepsilon}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^{s+\varepsilon}(A_i) = 0.$$

Da definição,  $s + \varepsilon \geq \dim_H \cup_{i=1}^{\infty} A_i$  como  $\varepsilon$  é arbitrário, temos  $s \geq \dim_H(\cup A_i)$ .

Por outro lado,  $\dim_H(\cup A_i) \geq \dim A_n$ , pois  $A_n \subset \cup A_i$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e portanto  $\dim_H(\cup A_i) \geq \sup\{\dim_H A_i\}$ . Juntando as duas desigualdades o resultado segue.

■

Enunciaremos agora dois lemas que seram utilizados adiante.

**Lema 2.11.** *Se existe  $C$  constante com  $\infty > C > 0$  e tal que para todo  $\varepsilon$ , existe uma  $\varepsilon$ -cobertura  $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$  de  $A$  com  $\sum |U_i|^\alpha \leq C$  então,*

$$\dim_H A \leq \alpha.$$

**Demonstração.**  $\mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(A) = \inf\{\sum_i |U_i|^\alpha; \mathcal{U} = \{U_i\}_i \text{ é uma } \varepsilon\text{-cobertura}\} \leq C$ .

Assim:

$$\mathcal{H}^\alpha(A) \leq C < \infty.$$

Logo,

$$\alpha \geq \inf\{s; \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \dim_H A.$$

■



**Lema 2.12.** Se existem  $\varepsilon > 0$  e  $C > 0$  constante tal que para toda  $\varepsilon$ -cobertura  $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$  de  $A$  temos  $\sum_i |U_i|^\alpha \geq C$  então

$$\dim_H A \geq \alpha.$$

**Demonstração.**  $\mathcal{H}_\varepsilon^\alpha(A) = \inf\{\sum_i |U_i|^\alpha; \mathcal{U} = \{U_i\}_i \text{ é } \varepsilon\text{-cobertura de } A\} \geq C.$

Assim,  $\mathcal{H}^\alpha(A) \geq C > 0$ . Logo:

$$\alpha \leq \sup\{s; \mathcal{H}^s(A) > 0\} = \dim_H A.$$

■

Note que é mais fácil, em geral, obter uma estimativa superior para a dimensão de Hausdorff do que uma estimativa inferior.

## 2.2 Conjuntos de Morán

Vamos definir conjuntos de Moran na reta. Façamos a seguinte construção:

Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in (0, 1)$  tais que  $\sum \lambda_i < 1$ .

Na primeira etapa, considere  $k$  intervalos disjuntos  $I_1, \dots, I_k \subset [0, 1]$ . Na  $n$ -ésima etapa considere intervalos  $I_{i_1 \dots i_{n-1} j} \subset I_{i_1 \dots i_{n-1}}$ ,  $j = 1, \dots, k$  com  $|I_{i_1 \dots i_{n-1} j}| = \lambda_j |I_{i_1 \dots i_{n-1}}|$ ,  $\forall j = 1, \dots, k$ , ou seja,  $|I_{i_1 \dots i_n}| = \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} |I_{i_1}|$ , além disso, exija que  $I_{i_1, \dots, i_n} \cap I_{j_1, \dots, j_n} = \emptyset$ , se  $(i_1, \dots, i_n) \neq (j_1, \dots, j_n)$



Figura 2.1: caso  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/3$

Em 1927, Patrick Moran provou que:

**Teorema 2.13.** A dimensão de Hausdorff de  $K \equiv \bigcup_{(i_1, \dots, i_n, \dots)} \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{i_1, \dots, i_n}$  é igual a única solução

em  $t$  de  $\sum_{i=1}^k \lambda_i^t = 1$ .

**Demonstração.**

Parte 1:  $\dim_H K \leq t$

Seja  $\lambda_{max} = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ . Temos:

$$|I_{w_1 \dots w_n}| = |I_{w_1}| \prod_{j=2}^n (\lambda_{w_j}).$$

Além disso,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{max}^{n-1} = 0$ , pois  $\lambda_{max} < 1$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n$  e de  $K$  tal que  $\lambda_{max}^{n-1} < \varepsilon$ . Considere então:

$\mathcal{U} = \{I_{w_1 \dots w_n}; 1 \leq w_j \leq k, \forall 1 \leq j \leq n\}$ . Da definição de  $n$  segue que  $\mathcal{U}$  é uma  $\varepsilon$ -cobertura. Assim, da definição de  $t$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon^t(K) &\leq \sum_{(w_1, \dots, w_n)} |I_{w_1 \dots w_n}|^t \\ &\leq \sum_{(w_1, \dots, w_{n-1})} |I_{w_1 \dots w_{n-1} 1}|^t + \dots + |I_{w_1 \dots w_{n-1} k}|^t \\ &\leq \sum_{(w_1, \dots, w_{n-1})} |I_{w_1 \dots w_{n-1}}|^t (\lambda_1^t + \dots + \lambda_k^t) \\ &\leq \sum_{(w_1, \dots, w_{n-1})} |I_{w_1 \dots w_{n-1}}|^t \end{aligned}$$

Por indução:

$$\mathcal{H}_\varepsilon^t(K) \leq \sum_{w_1} |I_{w_1}|^t = C = \text{constante}$$

Assim, pelo Lema 1.10 vem :

$$\dim_H K \leq t.$$

Parte 2:  $\dim_H K \geq t$

Agora vamos usar o lema 1.11 para provar que  $\dim_H K \geq t$ , i.e., vamos mostrar que existe  $C$  para o qual  $\sum |U_i|^t \geq C$  para toda  $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ,  $\varepsilon$ -cobertura. Para isso vamos dividir a prova em dois casos, à saber: quando a cobertura é feita por intervalos básicos e quando a cobertura é arbitrária.

Caso 1 : A cobertura de  $\mathcal{U}$  é formada por intervalos básicos.

Seja  $C = \sum_{j=1}^k |I_j|^t$  e considere uma cobertura  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  uma  $\varepsilon$ -cobertura por intervalos básicos. Como  $K$  é compacto então existe uma subcobertura de  $\mathcal{U}$  finita. Essa cobertura pode ser tomada minimal, no sentido de que não pode conter subcobertura própria. Continuaremos chamando tal cobertura de  $\mathcal{U}$ .

Seja  $A = \{m : \text{existe } I_{w_1 \dots w_m} \in \mathcal{U}\}$ . Considere  $n = \max A$ . Seja então  $I_{w_1 \dots w_n} \in \mathcal{U}$ .

Como  $\mathcal{U}$  é minimal, então  $I_{w_1 \dots w_{n-l}} \notin \mathcal{U}$  se  $l > 0$  (Se  $I_{w_1 \dots w_{n-l}} \in \mathcal{U}$ , então  $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \setminus \{I_{w_1 \dots w_n}\}$  ainda seria um cobertura) e portanto  $I_{w_1 \dots w_{n-1} j} \in \mathcal{U}$  para todo  $j = 1, \dots, k$  (Se  $I_{w_1 \dots w_{n-1} j} \notin \mathcal{U}$  então existe  $I_{w_1 \dots w_{n-1} j w_{n+1}} \in \mathcal{U}$  uma contradição, pela definição de  $n$ , ou  $I_{w_1 \dots w_k} \in \mathcal{U}$  com  $k < n$  uma contradição pelo que foi observado acima).

Note que:

$$\sum_{j=1}^k |I_{w_1 \dots w_{n-1} j}|^t = \sum_{j=1}^k |I_{w_1 \dots w_{n-1}}|^t \lambda_j^t$$

o que implica que

$$\sum_{j=1}^k |I_{w_1 \dots w_{n-1} j}|^t = |I_{w_1 \dots w_{n-1}}|^t \sum_{j=1}^k \lambda_j^t$$

então:

$$\sum_{j=1}^k |I_{w_1 \dots w_{n-1} j}|^t = |I_{w_1 \dots w_{n-1}}|^t$$

Assim, se definimos  $\mathcal{C} = \{I_{w_1 \dots w_{n-1}}\} \cup \mathcal{U} \setminus \{I_{w_1 \dots w_{n-1} 1}, \dots, I_{w_1 \dots w_{n-1} k}\}$  teremos:

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} |U|^t = \sum_{V \in \mathcal{C}} |V|^t$$

Assim, fazendo indução em  $n = \max A$  segue que para toda cobertura por intervalos básicos  $\mathcal{U} = \{U_i\}$ :

$$\sum_{i \geq 1} |U_i|^t \geq \sum_{j=1}^k |I_j|^t$$

Isso conclui a prova no caso de cobertura por intervalos básicos.

Seja então  $\mathcal{V}(r)$  o conjunto dos intervalos básicos  $I_{w_1, \dots, w_n}$  tais que

$$r \lambda_{\min} \leq |I_{w_1 \dots w_n}| \leq \frac{r}{\lambda_{\min}}.$$

É claro que :

$$\lambda_{\min} |I_{w_1 \dots w_{n-1}}| \leq |I_{w_1 \dots w_n}| \leq \lambda_{\max} |I_{w_1 \dots w_{n-1}}|.$$

Seja  $\mathcal{V}_m(r) = \{I_{w_1 \dots w_m}; I_{w_1 \dots w_m} \in \mathcal{V}(r)\}$ . Se  $\mathcal{V}_m(r) \neq \emptyset$  então :

1.  $\lambda_{\min}^m \leq \frac{r}{\lambda_{\min}}$
2.  $r \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max}^m$

Portanto  $m \geq 1$ ,  $m \geq \frac{\log r - \log \lambda_{\min}}{\log \lambda_{\min}}$  e  $m \leq \frac{\log r + \log \lambda_{\min}}{\log \lambda_{\max}}$ . Logo:

$$\text{card}(\{m; \mathcal{V}_m(r) \neq \emptyset\}) \leq \frac{\log r + \log \lambda_{\min}}{\log \lambda_{\max}} - \frac{\log r - \log \lambda_{\min}}{\log \lambda_{\max}}.$$

Portanto:

$$\text{card}(\{m; \mathcal{V}_m(r) \neq \emptyset\}) \leq 2 \frac{\log \lambda_{\min}}{\log \lambda_{\max}}.$$

Assim,  $x \in K$  esta contido em no máximo  $M \equiv 2 \frac{\log \lambda_{\min}}{\log \lambda_{\max}}$  elementos de  $\mathcal{V}(r)$  uma vez que ele não pode estar em dois elementos distintos da mesma etapa da construção.

Vamos usar o seguinte lema:

**Lema 2.14.** *Se  $U = [a, b] \subset \mathbb{R}$  e  $|U| = r$  então  $U$  intersecta no máximo  $M' = 2 \frac{M}{\lambda_{\min}}$  elementos de  $\mathcal{V}(r)$*

**Demonstração.** Sejam  $x_0 = a, x_1, \dots, x_m = b \in U$  com  $x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$  tais que  $x_{j+1} - x_j < r\lambda_{\min}$  e  $m \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} + 1$ .

Se  $V \in \mathcal{V}(r)$  intersecta  $U$ , então deve conter algum  $x_j$  ( $V$  é um intervalo de comprimento  $\geq r\lambda_{\min}$ ). Digamos  $V = [c, d]$ . Se  $a, b \cap V \neq \emptyset$  não há o que fazer. Se não, então  $a > c$ ,  $d < b$ . Tome  $x_j$  tal que  $x_j - a = \min_k (x_k - a)$ . Mas cada  $x_j$  está contido em no máximo,  $M$  elementos de  $\mathcal{V}(r)$ . Portanto:

$$\text{card}\{V \in \mathcal{V}(r); V \cap U \neq \emptyset\} \leq \sum_{i=0}^{m+1} M \leq 2Mm \leq 2 \frac{M}{\lambda_{\min}}.$$

Assim, concluímos a prova do lema.

Considere uma  $\varepsilon$ -cobertura  $\{U_i\}_i$  de  $K$ . Seja  $r_i \equiv |U_i|$  e  $U_{i,1}, \dots, U_{i,m(i)}$  os intervalos básicos de  $\mathcal{V}(r_i)$  que intersectam  $U_i$ .

Pelo que acabamos de mostrar,  $m(i) \leq M$ .

Da definição de  $\mathcal{V}(r)$ :

$$|U_{i,j}| \leq \frac{|U_i|}{\lambda_{\min}}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m(i)} |U_{i,j}|^t &\leq \sum_{j=1}^{m(i)} \frac{|U_i|^t}{\lambda_{\min}^t} \\ &\leq M' \frac{|U_i|^t}{\lambda_{\min}^t}. \end{aligned}$$

Como  $U_{i,j}$  é cobertura por intervalos básicos :

$$\begin{aligned} \sum |U_i|^t &\geq \frac{\lambda_{\min}^t}{M'} \sum_{i=1}^{\infty} \sum |U_{i,j}|^t \\ &\geq \frac{\lambda_{\min}^t}{M'} \sum |I_j|^t > 0. \end{aligned}$$

E usando o Lema 1.11 concluimos a prova. ■

**Exemplo 1.** Considere para  $j = 1, \dots, k$  conjuntos  $[a_j, b_j] \subset [0, 1]$  disjuntos. Defina a aplicação  $f : [a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_k, b_k] \rightarrow [0, 1]$  por  $f(x) = \frac{1}{|b_k - a_k|}(x - a_k)$ .

Seja  $C = \bigcap_{l=0}^{\infty} f^{-l}([a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_k, b_k])$ , ou seja,  $C$  é o conjunto dos pontos que podem ser iterados para sempre.

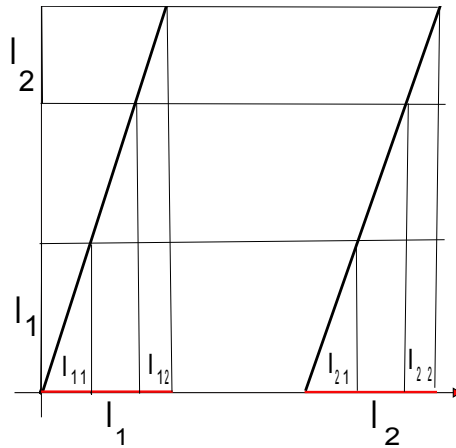


Figura 2.2: caso  $I_1 = [0, 1/3], I_2 = [3/2, 1]$

O conjunto  $C$  é um conjunto de Morán.

De fato,  $f^{-1}([0, 1]) = I_1 \cup \dots \cup I_k$  e  $f^{-j}([0, 1]) = \bigcup_{(i_1, \dots, i_j) \in \{1, \dots, k\}^j} I_{i_1 \dots i_j}$  onde os intervalos  $I_{i_1 \dots i_n}$  são definidos recursivamente como segue. Escreva  $I_{i_1 \dots i_j} = [a_{i_1 \dots i_n}, b_{i_1 \dots i_n}]$ . Ora,  $f^{-1}(I_{i_1 \dots i_m}) = \bigcup_{j=1}^k I_{ji_1 \dots i_m}$  onde  $a_{ji_1 \dots i_m} = a_j + \frac{1}{|I_j|} a_{i_1 \dots i_m}$  e  $b_{ji_1 \dots i_m} = a_j + \frac{1}{|I_j|} b_{i_1 \dots i_m}$ .

Defina  $\lambda_j \equiv \frac{1}{|I_j|}$ . Temos:

$$|b_{ji_1 \dots i_m} - a_{ji_1 \dots i_m}| = \lambda_j |a_{i_1 \dots i_m} - b_{i_1 \dots i_m}|.$$

Usando então indução vem:

$$|I_{i_1 \dots i_m}| = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_m}.$$

Vamos mostrar que dado  $n$ ,  $I_{i_1 \dots i_n j} \subset I_{i_1 \dots i_n}$  qualquer que seja a  $n$ -úpla  $(i_1, \dots, i_n)$  e para todo  $j = 1, \dots, k$ . Isto será feito por indução forte em  $n$ .

De fato,  $a_{ij} = a_i + \lambda_i a_j \geq a_i$ , para todo  $j = 1, \dots, k$  e para todo  $i$ . De modo análogo podemos provar que  $b_i \leq b_{ij}$  quaisquer que sejam  $i, j = 1, \dots, k$ . Assim, a prova esta feita no caso  $n = 1$ .

Suponha agora que a afirmação é válida para um certo  $l$ . Então, dado  $m = 1, \dots, k$  temos:  $a_m + \lambda_m a_{i_1 \dots i_l} \geq a_m + \lambda_m a_{i_1 \dots i_{l-1}}$ . O que nos dá:

$$a_{mi_1 \dots i_l} \geq a_{mi_1 \dots i_{l-1}}.$$

E de modo análogo  $b_{mi_1 \dots i_l} \leq b_{mi_1 \dots i_{l-1}}$ . O que conclui a demonstração.

Portanto estamos em condições de aplicar Morán. Logo,  $\dim_H(C) = t$  onde  $t$  é a única solução de :

$$\sum_j \left( \frac{1}{|b_j - a_j|} \right)^t = 1.$$

**Exemplo 2.** Considere o conjunto  $C$  dos pontos em  $[0, 1]$  que não possuem 2 em sua expansão decimal infinita.

Então, basta considerar a aplicação  $f : [0, \frac{2}{10}] \cup [\frac{3}{10}, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por  $f(x) = 10x - [10x]$  onde  $[x]$  representa a parte inteira de  $x$ . Tal aplicação é como a do exemplo anterior com  $I_j = [\frac{j-1}{10}, \frac{j}{10}]$  se  $1 \leq j \leq 2$  e  $I_k = [\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}]$  para  $3 \leq k \leq 9$ . Portanto a dimensão de

Hausdorff  $t$  de  $C$  é tal que  $\sum_{j=1}^9 \left(\frac{1}{10}\right)^t = 1$ . Logo:

$$t = \frac{\log 9}{\log 10}.$$

**Exemplo 3.** Ainda nessa linha temos o conjunto de Cantor ternário,  $K$ . O cálculo da dimensão de  $K$  é feito de maneira análoga a feita acima (notando que o conjunto de Cantor é o conjunto de pontos que não possuem dígito 1 na sua expansão binária):

$$\dim_H K = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

O teorema de Moran se aplica a uma classe mais ampla de conjuntos. Façamos a seguinte construção:

Dizemos que  $A \subset \mathbb{R}^d$  é semelhante a  $B \subset \mathbb{R}^d$  com razão  $\alpha$  (ou fator de escala) se existe  $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  com  $L = \alpha O + P$  onde  $O$  é uma transformação ortogonal e  $P \in \mathbb{R}^d$  tal que  $A = L(B)$ .

1. Considere conjuntos  $\Delta_j \subset \mathbb{R}^d$ ,  $j = 1, \dots, k$  fechados sem pontos isolados e  $\lambda_j > 0$  com  $\sum_{j=1}^k \lambda_j < 1$ .
2. Na  $n$ -ésima etapa construa  $\Delta_{i_1 \dots i_n}$  disjuntos e com  $\Delta_{i_1 \dots i_n}$  semelhante à  $\Delta_{i_1 \dots i_{n-1}}$  com fator de escala  $\lambda_{i_n}$ . Além disso,  $\Delta_{i_1 \dots i_{n-1} j} \subset \Delta_{i_1 \dots i_{n-1}}$  para todo  $j = 1, \dots, k$ .
3. Defina  $K \equiv \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{i_1 \dots i_n} \Delta_{i_1 \dots i_n}$ .

A prova de que  $\dim_H K$  é a única solução em  $t$  de  $\sum_{j=1}^k \lambda_j^t = 1$  é praticamente a mesma feita acima, exceto na estimativa do Lema 2.14. Não faremos aqui, mas no capítulo de Dimensão de Hausdorff de conjuntos quase-Moran (capítulo 4) faremos uma estimativa que serve em geral.

**Exemplo 4. (Triângulo de Sierpinski)**

Considere um triângulo  $\Delta$  equilátero. Retire de  $\Delta$  o triângulo com vértices nos pontos médios dos lados do triângulo  $\Delta$ . Desse modo, restam 3 triângulos  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  e  $\Delta_3$  que são semelhantes à  $\Delta$  com razão de semelhança  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Em cada triângulo  $\Delta_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , repita o procedimento feito com  $\Delta$ . Desse modo, obtemos para cada  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3$  um triângulo  $\Delta_{ij}$  com  $\Delta_{ij} \subset \Delta_i$ , e  $\Delta_{ij}$  semelhante a  $\Delta_i$  com razão  $\frac{1}{2}$ . Continuando o processo indutivamente, obtemos um conjunto  $K = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup \Delta_{i_1 \dots i_n}$  para o qual podemos aplicar o teorema de Morán. Assim:

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{\dim_H K} = 1$$

e portanto

$$\dim_H K = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

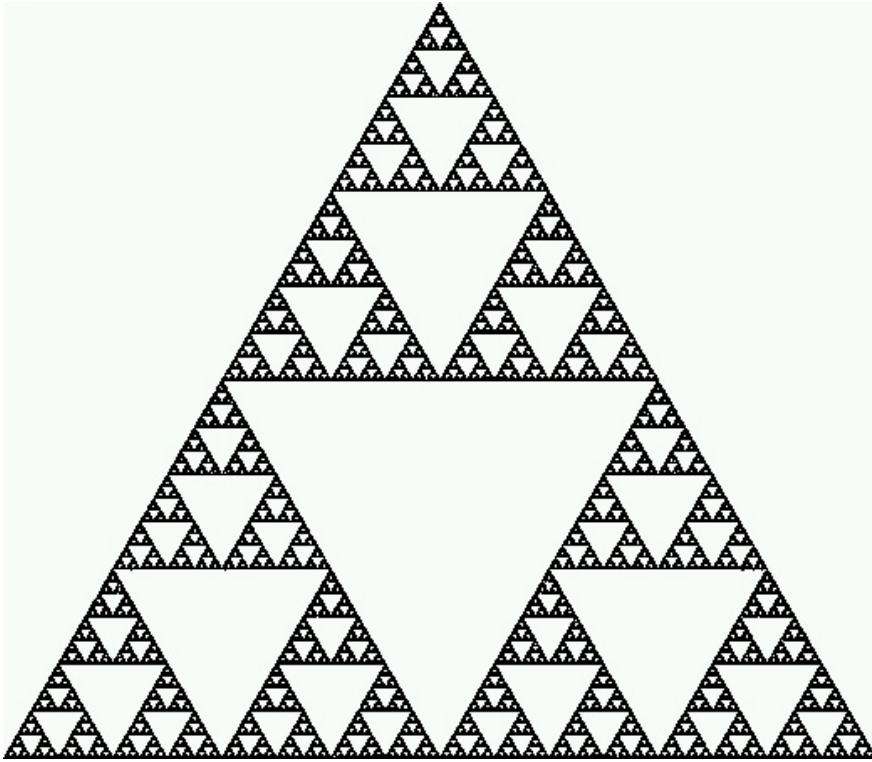


Figura 2.3:

O conjunto  $K$  é conhecido como *Triângulo de Sierpinski*.

**Exemplo 5. (Esponja de Menger)**

Considere agora um cubo  $\square$ . Para facilitar a construção, suponhamos  $\square = [0, 3]^3$ . Divida  $\square$  em 27 cubos com lados de mesmo comprimento. Mais precisamente, considere os cubos:

$$\square^{k,l,m} = [k, k + 1] \times [l, l + 1] \times [m, m + 1]$$

com  $k, l, m = 0, 1, 2$ . Agora retire todos cubos  $\square^{k,l,m}$  para os quais vale pelos menos uma das 3 alternativas:  $k = l = 1$  ou  $k = m = 1$  ou  $l = m = 1$ , isto é, retire os cubos 'centrais'.

Desse modo, restam agora 20 cubos, digamos  $\square_i$  com  $i = 1, \dots, 20$  que são semelhantes a  $\square$  com razão  $\lambda = \frac{1}{3}$ . Repita então o processo indutivamente para cada um desses cubos. O conjunto limite desta construção  $K = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup \square_{i_1 \dots i_n}$  é conhecido como *Esponja de Menger*. E pelo que fizemos, sua dimensão é  $t$  tal que

$$\sum_{s=1}^{20} \left(\frac{1}{3}\right)^t = 1$$



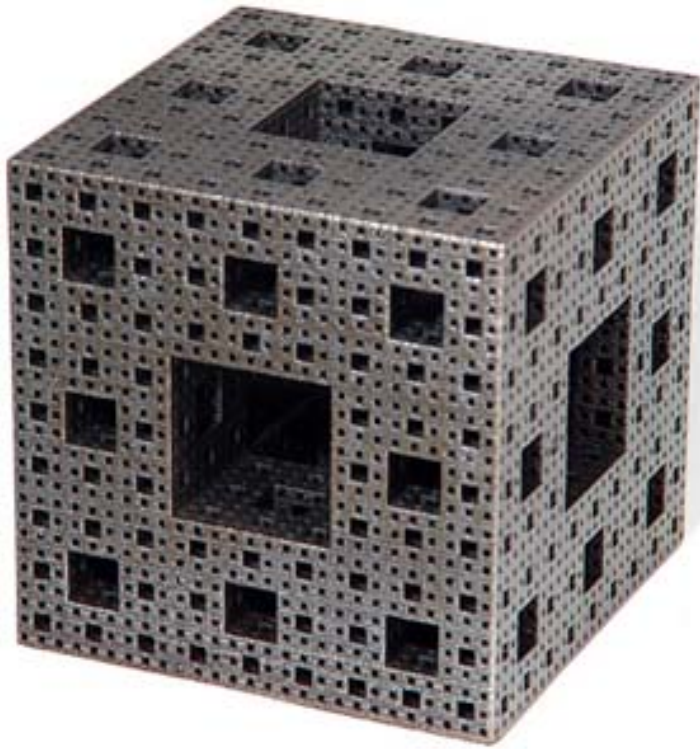


Figura 2.4:

*e pertanto*

$$t = \frac{\log 20}{\log 3}$$

# Capítulo 3

## Algumas Noções de Dimensão

### 3.1 Capacidade Limite

A noção de dimensão de Hausdorff é uma das noções de dimensão mais utilizadas e, como vimos, apresenta propriedades bastante razoáveis. No entanto, existem outras noções de dimensão importantes. Falaremos um pouco mais à respeito.

Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Denote por  $N_\delta(A)$  o número mínimo de conjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  necessários para cobrir  $A$ . Então definimos:

$$\overline{\dim}_B(A) = \overline{\lim} \frac{N_\delta(A)}{-\log \delta}$$

$$\underline{\dim}_B = \underline{\lim} \frac{N_\delta(A)}{-\log \delta}$$

Quando essas dois números coincidem nós os chamamos capacidade limite. e denotamos por  $\dim_B(A)$ . Temos a seguinte relação entre as noções de dimensão até agora definidas:

**Proposição 3.1.**

$$\dim_H A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A.$$

**Demonstração.** Para ver isso, comece notando que  $\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq N_\delta(A)\delta^s$  (Da definição, existe uma cobertura  $\{U_i\}_{i=1, \dots, N_\delta}$  com  $|U_i| < \delta \forall i = 1, \dots, N_\delta(A)$  assim  $\sum_{i=1}^{N_\delta(A)} |U_i|^s \leq N_\delta(A)\delta^s$  e portanto da definição,  $\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq N_\delta(A)\delta^s$ ).

Suponha que  $\mathcal{H}^s(A) > 1$ . Da definição existe  $1 > \delta_0 > 0$  tal que se  $\delta < \delta_0$  então  $\mathcal{H}_\delta^s(A) > 1$  logo  $1 < N_\delta(A)\delta^s$  e portanto,  $0 < \log N_\delta(A) + s \log \delta$  de onde vem:

$$s < \frac{\log N_\delta(A)}{\log \delta^{-1}}, \quad \forall \delta < \delta_0$$

e finalmente:

$$s \leq \underline{\dim}_B(A), \quad \forall s > \dim_H A.$$

A outra desigualdade é direta, o que prova a afirmação inicial. ■

Como exemplo onde a dimensão de Hausdorff difere da capacidade limite, temos o conjunto  $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  para o qual vale,  $\dim_H A = 0$ , já que  $A$  é enumerável,  $\dim_B A = 1$ , já que  $A$  é denso em  $[0, 1]$ .

**Observação 3.1.1.** *Em geral, não temos a igualdade. De fato, dados  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  com  $0 < \alpha < \beta$  existe um conjunto  $F \subset [0, 1]$  fechado, tal que  $\dim_H F = 0$ ,  $\underline{\dim}_B F = \alpha$  e  $\overline{\dim}_B F = \beta$ . Uma prova para este fato pode ser encontrada em [1].*

Considere um espaço métrico  $X$  e  $\mu$  uma medida em  $X$  (todas as medidas que aparecerão ao longo do texto são medidas de probabilidade borelianas.)

**Definição 4.** *A dimensão de Hausdorff de  $\mu$  é  $\dim_H \mu = \inf\{\dim_H(Z) : \mu(Z) = 1\}$ .*

Uma consequência direta da definição é que  $\dim_H \mu \leq \dim_H X$ .

**Definição 5.** *Definimos a dimensão pontual de  $\mu$  em  $x$  como  $d_\mu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}$  se tal limite existir.*

Além disso, definimos a dimensão pontual inferior e superior como:

$$\begin{aligned} \underline{d}_\mu(x) &= \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\mu(B(x, r)))}{\log r} \\ \overline{d}_\mu(x) &= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\mu(B(x, r)))}{\log r} \end{aligned}$$

Alguns resultados relacionam a dimensão de uma medida  $\mu$  com a dimensão de  $X$ . De fato, temos:

**Teorema 3.2. (Princípio de Distribuição de Massa Não-Uniforme)**

*Suponha que  $\mu$  é uma medida finita em  $\mathbb{R}^d$ ,  $E \subset \mathbb{R}^d$  tem medida positiva e que existe  $\alpha > 0$  tal que*

$$\underline{d}_\mu(x) \geq \alpha$$

*para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in E$ . Então  $\dim_H E \geq \alpha$ .*

**Teorema 3.3.** *Suponha que  $\mu$  é uma medida finita em  $\mathbb{R}^d$  e que existe  $\alpha > 0$  tal que*

$$\underline{d}_\mu(x) \leq \alpha$$

*para todo  $x \in Z$ . Então  $\dim_H Z \leq \alpha$ .*

As provas dos teoremas acima podem ser encontradas em [1].

## 3.2 Construção de Carathéodory

### 3.2.1 Dimensão de Carathéodory

Seja  $X$  um conjunto e  $\mathcal{F}$  uma coleção de subconjuntos de  $X$ .

Sejam  $\eta, \psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfazendo :

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ;  $\eta(\emptyset) = 0$   $\psi(\emptyset) = 0$ ;  $\eta(U), \psi(U) > 0$  para todo  $\emptyset \neq U \in \mathcal{F}$ .
2. Para todo  $\delta > 0$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\eta(U) \leq \delta$  se  $\psi(U) \leq \varepsilon$ .
3. Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  enumerável que cobre  $X$  e  $\psi(\mathcal{G}) \equiv \sup\{\psi(U); U \in \mathcal{G}\} \leq \varepsilon$ .

Seja agora  $\xi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função. Através das funções  $\psi, \xi, \eta$  introduzimos uma estrutura de dimensão de Caratheódory  $\tau = (\mathcal{F}, \xi, \eta, \psi)$  em  $X$  ou  $C$ -estrutura. Dado  $Z \subset X$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\varepsilon > 0$  defina:

$$m_C(Z, \alpha, \varepsilon) = \inf_{\mathcal{G}} \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}} \xi(U) \eta(U)^\alpha \right\}$$

onde o ínfimo tomado sobre todas as enumeráveis  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  que cobrem  $Z$  com  $\psi(\mathcal{G}) \leq \varepsilon$ .

**Exemplo 6.** Considere  $X = \mathbb{R}^n$ . Tome  $\mathcal{F} = \{U; U \text{ é aberto}\}$ ,  $\psi(U) = \eta(U) = |U|$  e  $\xi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$  como  $\xi(U) = 1$  para todo  $U \in \mathcal{F}$ .  $(\mathcal{F}, \xi, \eta, \psi)$  é uma  $C$ -estrutura em  $\mathbb{R}^n$ . De fato:

1.  $\emptyset$  é aberto. Além disso, se  $U \neq \emptyset$  é aberto então existe  $x \in U$  e portanto existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset U$ . Logo,  $\psi(U) = \eta(U) = |U| \geq r > 0$ .
2. A propriedade 2 vale com  $\varepsilon = \delta$ .
3. Seja  $\varepsilon > 0$ . Considere  $\{x_i\}$  uma enumeração de  $\mathbb{Q}^n$ . Então  $\{B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}); i \in \mathbb{N}\}$  é uma cobertura enumerável de  $X$  com  $\psi\left(B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = \varepsilon$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Quando diminuimos o  $\varepsilon$  as coberturas admissíveis diminuem, assim existe :

$$m_C(Z, \alpha) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_C(Z, \alpha, \varepsilon).$$

**Proposição 3.4.** Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

1.  $m_C(\emptyset, \alpha) = 0$ .
2.  $m_C(Z_1, \alpha) \leq m_C(Z_2, \alpha)$  se  $Z_1 \subset Z_2$ .
3.  $m_C\left(\bigcup_{i \geq 0} Z_i\right) \leq \sum_{i \geq 0} m_C(Z_i, \alpha)$ .

**Demonstração.**

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$  e  $\eta(\emptyset) = 0$  portanto  $m_C(\emptyset, \alpha) = 0$ .
2. Dado que  $\mathcal{G}$  é uma cobertura de  $Z_2$  com  $\psi(\mathcal{G}) \leq \varepsilon$  então  $\mathcal{G}$  é uma cobertura de  $Z_1$ , o resultado segue (Se  $A \subset B$  então  $\inf A \geq \inf B$ ).
3. Sejam  $\varepsilon, \delta > 0$ . Para cada  $i \geq 0$  existe um cobertura  $\mathcal{G}_i = \{U_{ij} \in \mathcal{F}; j \geq 0\}$  de  $Z_i$  com  $\psi(\mathcal{G}_i) \leq \varepsilon$  tal que :

$$|m_C(Z_i, \alpha) - \sum_{j \geq 0} \xi(U_{ij})\eta(U_{ij})^\alpha| < \frac{\delta}{2^i}$$

Assim  $\mathcal{G} = \{U_{ij}, i \geq 0, j \geq 0\}$  é uma cobertura de  $Z = \bigcup_{i \geq 0} Z_i$  e é claro que  $\psi(\mathcal{G}) \leq \varepsilon$ . Portanto:

$$m_C(Z, \alpha, \varepsilon) \leq \sum_{U_{ij} \in \mathcal{G}} \xi(U_{ij})\eta(U_{ij})^\alpha \leq 2\delta + \sum_{i \geq 0} m_C(Z_i, \alpha)$$

Fazendo  $\varepsilon$  ir para zero e  $\delta$  em seguida, temos o resultado. ■

A próxima proposição possibilita a definição de dimensão.

**Proposição 3.5.** *Existe  $\alpha_C$  tal que  $m_C(Z, \alpha) = +\infty$  se  $\alpha < \alpha_C$  e  $m_C(Z, \alpha) = 0$  se  $\alpha > \alpha_C$ .*

**Demonstração.** Suponha que  $0 \leq m_C(Z, \alpha) < +\infty$ . Considere  $\beta > \alpha$  e  $\delta > 0$ . Existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $\varepsilon < \varepsilon_0$  vale:

1.  $m_C(Z, \alpha, \varepsilon) < L < +\infty$ .
2.  $\eta(U) < \delta$  se  $\psi(U) \leq \varepsilon$  (pela Propriedade 2 da estrutura de Carathéodory).

Considere então  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Temos para toda  $\mathcal{G}$  cobertura de  $Z$  com  $\psi(\mathcal{G}) < \varepsilon$ :

$$\sum_{U \in \mathcal{G}} \xi(U)\eta(U)^\beta = \sum_{U \in \mathcal{G}} \xi(U)\eta(U)^\alpha (U)^{\beta-\alpha} < \delta^{\beta-\alpha} \sum_{U \in \mathcal{G}} \xi(U)\eta(U)^\alpha < \delta^{\beta-\alpha} L. \text{ Assim:}$$

$$m_C(Z, \beta, \varepsilon) < \delta^{\beta-\alpha} L$$

para todo  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  vem:

$$m_C(Z, \beta) \leq \delta^{\beta-\alpha} L.$$

Fazendo, por fim,  $\delta \rightarrow 0$  vem :

$$m_C(Z, \beta) = 0$$

Suponha agora que  $m_C(Z, \alpha) = +\infty$ . Se  $\beta < \alpha$  então  $m_C(Z, \beta) = +\infty$  (se não fosse assim, pelo que acabamos de provar  $m_C(Z, \alpha) < +\infty$ ) ■

**Definição 6.** A dimensão de  $Z$  (de acordo com a  $C$ -estrutura) é  $\dim_C Z = \alpha_C$  dado pela proposição acima.

**Exemplo 7.** Quando a  $C$ -estrutura é aquela do exemplo 4 então  $\alpha_C = \dim_H Z$ .

Vejam algumas propriedades básicas.

**Proposição 3.6.** 1.  $\dim_C \emptyset = 0$ .

2. Se  $Z_1 \subset Z_2$  temos  $\dim_C Z_1 \leq \dim_C Z_2$ .

3.  $\dim_C(\bigcup Z_i) = \sup_i \dim_C Z_i$ .

A prova da proposição acima segue da proposição 3.4.

### 3.2.2 Capacidade Limite de Carathéodory

Seja  $X$  um conjunto com a  $C$ -estrutura  $(\mathcal{F}, \xi, \eta, \psi)$ . Vamos definir em  $X$  uma nova noção de dimensão.

Vamos assumir que vale a seguinte condição :

3'. Para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe uma subcoleção  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  que cobre  $X$  tal que  $\psi(U) = \varepsilon \forall U \in \mathcal{G}$ .

Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $Z \subset X$ , defina:

$$R_C(Z, \alpha, \varepsilon) = \inf_{\mathcal{G}} \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}} \xi(U) \eta(U)^\alpha \right\}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas enumeráveis  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  tais que  $\psi(U) = \varepsilon$  para todo  $U \in \mathcal{G}$ .

Sejam

$$\underline{r}_C(Z, \alpha) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} R_C(Z, \alpha, \varepsilon)$$

$$\bar{r}_C(Z, \alpha) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} R_C(Z, \alpha, \varepsilon).$$

**Proposição 3.7.** Para todo  $Z \subset X$  existe  $\underline{\alpha}_C$ , e  $\bar{\alpha}_C$  tais que:

1.  $\underline{r}_C(Z, \alpha) = \infty$  se  $\alpha < \underline{\alpha}_C$  e  $\underline{r}_C(Z, \alpha) = 0$  se  $\alpha > \underline{\alpha}_C$ .

2.  $\bar{r}_C(Z, \alpha) = \infty$  para  $\alpha < \bar{\alpha}_C$  e  $\bar{r}_C(Z, \alpha) = 0$  se  $\alpha > \bar{\alpha}_C$ .

Por fim definimos, respectivamente, a capacidade superior e inferior de  $Z$  :

$$\underline{Cap}_C Z = \underline{\alpha}_C = \inf \{ \alpha; \underline{r}_C(Z, \alpha) = 0 \}$$

$$\overline{Cap}_C Z = \bar{\alpha}_C = \inf\{\alpha; \bar{r}_C(Z, \alpha) = 0\}.$$

Algumas propriedades básicas seguem abaixo.

**Proposição 3.8.** 1.  $\dim_C Z \leq \underline{Cap}_C Z \leq \overline{Cap}_C Z$  para todo  $Z \subset X$ .

2. Se  $Z_1 \subset Z_2$  então  $\underline{Cap}_C Z_1 \leq \underline{Cap}_C Z_2$  e  $\overline{Cap}_C Z_1 \leq \overline{Cap}_C Z_2$ .

3.

$$\underline{Cap}_C \left( \bigcup Z_i \right) \geq \sup \underline{Cap}_C Z_i$$

$$\overline{Cap}_C \left( \bigcup Z_i \right) \geq \sup \overline{Cap}_C Z_i.$$

**Demonstração.**

1. Temos  $\inf_{\mathcal{G}: \psi(\mathcal{G}) \leq \varepsilon} \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}} \xi(U) \eta(U)^\alpha \right\} \leq \inf_{\mathcal{G}: \psi(\mathcal{G}) = \varepsilon} \left\{ \sum_{U \in \mathcal{U}} \xi(U) \eta(U)^\alpha \right\}$ . Assim,  $m_C(Z, \alpha) \leq \underline{r}_C(Z, \alpha)$ .

Portanto, se  $m_C(Z, \alpha) = +\infty$  então  $\underline{r}_C(Z, \alpha) = +\infty$ . Logo:

$$\{\alpha : m_C(Z, \alpha) = +\infty\} \subset \{\alpha; \underline{r}_C(Z, \alpha) = +\infty\}.$$

O que nos dá:

$$\dim_C Z \leq \underline{Cap}_C Z.$$

É claro que  $\underline{Cap}_C Z \leq \overline{Cap}_C Z$ . E o resultado segue.

2. Se  $\mathcal{G}$  é uma cobertura de  $Z_2$  com  $\psi(\mathcal{G}) = \varepsilon$  então é também cobertura para  $Z_1$ . Assim,  $\underline{r}_C(Z_1, \alpha) \leq \underline{r}_C(Z_2, \alpha)$  e portanto  $\underline{Cap}_C Z_1 \leq \underline{Cap}_C Z_2$ . A outra desigualdade é análoga.

3. Do item anterior,  $\underline{Cap}_C(Z_n) \leq \underline{Cap}_C \left( \bigcup_{i \geq 0} Z_i \right)$  para todo  $n \geq 0$ .

Logo:

$$\underline{Cap}_C \left( \bigcup_{i \geq 0} Z_i \right) \geq \sup_{i \geq 0} \underline{Cap}_C Z_i$$

A outra desigualdade é análoga.

### 3.3 Pressão Topológica

A construção acima aplicada no contexto de dinâmica, produz a noção de Pressão topológica, como descrito abaixo.

Considere  $f : X \rightarrow X$  contínua, um conjunto  $Z \subset X$  invariante e  $\varphi : Z \rightarrow \mathbb{R}$  contínua.

Considere  $\mathcal{U}$  uma cobertura de  $X$ . Seja  $\mathcal{S}_m(\mathcal{U})$  o conjunto dos cilindros :

$$V = \{U_{i_0} \dots U_{i_{m-1}}; U_{i_j} \in \mathcal{U}\}.$$

Faça agora  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{U}) = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{S}_m(\mathcal{U})$ .

Dado um cilindro  $V = \{U_{i_0} \dots U_{i_{m-1}}\} \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ , defina  $m(V) = m$  e

$$X(V) = \{x \in X; f^j(x) \in U_{i_j}, j = 0, \dots, m(V) - 1\}.$$

Ponha ainda

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{U}) = \{X(V); V \in \mathcal{S}(\mathcal{U})\}.$$

Agora defina  $\xi, \eta, \psi : \mathcal{S}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\xi(U) = \exp \left( \sup_{x \in X(U)} \sum_{k=0}^{m(V)-1} \varphi(f^k(x)) \right)$$

$$\eta(U) = \exp(-m(U))$$

$$\psi(U) = m(U)^{-1}.$$

De acordo com a construção da secção acima:

$$m_C(Z, \alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} M(Z, \alpha, \varphi, \mathcal{U}, N)$$

onde,

$$M(Z, \alpha, \varphi, \mathcal{U}, N) = \inf_{\mathcal{G}} \left\{ \sum_{V \in \mathcal{G}} \exp \left( -\alpha m(V) + \sup_{x \in X(V)} \sum_{k=0}^{m(V)-1} \varphi(f^k(x)) \right) \right\}$$

todas as coleções enumeráveis de cilindros  $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}(\mathcal{U})$ ,  $m(V) \geq N$  para todo  $V \in \mathcal{G}$  onde  $\mathcal{G}$  cobre  $Z$ .

Além disso,

$$\underline{r}_C(Z, \alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \inf R(Z, \alpha, \varphi, \mathcal{U}, N)$$



$$\bar{r}_C(Z, \alpha) = \limsup_{N \rightarrow \infty} R(Z, \alpha, \varphi, \mathcal{U}, N)$$

onde,

$$R(Z, \alpha, \varphi, \mathcal{U}, N) = \inf_{\mathcal{G}} \left\{ \sum_{U \in \mathcal{G}} \exp \left( -\alpha N + \sup_{x \in X(U)} \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(f^k(x)) \right) \right\}$$

Tomado sobre todas as coleções enumeráveis de cilindros  $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}(\mathcal{U})$  tais que  $m(V) = N$  para todo  $V \in \mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}$  cobre  $Z$ .

Por fim,

$$P_Z(\varphi, \mathcal{U}) = \inf\{\alpha; m_C(Z, \alpha) = 0\} = \sup\{\alpha; m_C(Z, \alpha) = +\infty\}$$

$$\underline{CP}_Z(\varphi, \mathcal{U}) = \inf\{\alpha; \underline{r}_C(Z, \alpha) = 0\} = \sup\{\alpha; \underline{r}_C(Z, \alpha) = +\infty\}$$

$$\overline{CP}_Z(\varphi, \mathcal{U}) = \inf\{\alpha; \bar{r}_C(Z, \alpha) = 0\} = \sup\{\alpha; \bar{r}_C(Z, \alpha) = +\infty\}.$$

Note que as dimensões acima dependem da cobertura inicial  $\mathcal{U}$ .

**Teorema 3.9.** *Existem os limites:*

$$1. P_Z(\varphi) = \lim_{|\mathcal{U}| \rightarrow 0} P_Z(\varphi, \mathcal{U})$$

$$2. \underline{CP}_Z(\varphi) = \lim_{|\mathcal{U}| \rightarrow 0} \underline{CP}_Z(\varphi, \mathcal{U})$$

$$3. \overline{CP}_Z(\varphi) = \lim_{|\mathcal{U}| \rightarrow 0} \overline{CP}_Z(\varphi, \mathcal{U})$$

**Demonstração.**

Considere uma cobertura  $\mathcal{V}$  de diâmetro menor que o número de Lebesgue de  $\mathcal{U}$ . Assim dado  $V \in \mathcal{V}$  existe  $U(V) \in \mathcal{U}$  tal que  $V \subset U(V)$ . Dado um cilindro  $\mathbf{V} = \{V_{i_0} \dots V_{i_m}\} \in \mathcal{S}(\mathcal{V})$  podemos associá-la a  $\mathbf{U}(\mathbf{V}) = \{U(V_{i_0}), \dots, U(V_{i_m})\} \in \mathcal{S}(\mathcal{U})$ . Além disso, é claro que se  $\mathcal{G} \in \mathcal{S}(\mathcal{V})$  é uma cobertura de  $Z$  então  $U(\mathcal{G}) = \{U(V); V \in \mathcal{G}\}$  cobre  $Z$ .

Seja  $\gamma = \gamma(\mathcal{U}) = \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)|; x, y \in U \text{ para algum } U \in \mathcal{U}\}$ . Assim:

$$\begin{aligned} E &\equiv \sum_{V \in \mathcal{G}} \exp \left( -(\alpha - \gamma)m(V) + \sup_{x \in X(V)} \sum_{k=0}^{m(V)-1} \varphi(f^k(x)) \right) = \\ &= \sum_{V \in \mathcal{G}} \exp \left( -\alpha m(V) + \sup_{x \in X(V)} \left( \sum_{k=0}^{m(V)-1} \varphi(f^k(x)) + \gamma \right) \right). \end{aligned}$$

Note que se  $x \in U(V)$  então  $f^k(x) \in U(V_{i_k})$  para todo  $k$ . Assim, se  $y \in V$  temos

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \gamma.$$

Portanto:

$$E \geq \sum_{U \in \mathcal{U}(\mathcal{G})} \exp \left( -\alpha m(U(V)) + \sup_{y \in X(U(V))} \sum_{k=0}^{m(V)-1} \varphi(f^k(y)) \right).$$

A desigualdade acima nos dá:

$$M(Z, \alpha, \varphi, \mathcal{U}, N) \leq M(Z, \alpha - \gamma, \mathcal{V}, N).$$

Logo:

$$P_Z(\varphi, \mathcal{U}) - \gamma \leq \liminf_{|\mathcal{V}| \rightarrow 0} P_Z(\varphi, \mathcal{V}).$$

Como  $X$  é compacto, temos que  $\varphi$  é uniformemente contínua e portanto  $\lim_{|\mathcal{U}| \rightarrow 0} \gamma(\mathcal{U}) = 0$ .

Logo:

$$\limsup_{|\mathcal{U}| \rightarrow 0} P_Z(\varphi, \mathcal{U}) \leq \liminf_{|\mathcal{U}| \rightarrow 0} P_Z(\varphi, \mathcal{U}).$$

Portanto, o primeiro limite existe. Para os outros dois a prova é inteiramente análoga. ■

**Definição 7.** *Os limites do teorema acima são chamados respectivamente de Pressão Topológica, Capacidade Inferior e Capacidade Superior de  $\varphi$ .*

Em geral,  $P_Z(\varphi) \leq \underline{CP}_Z(\varphi) \leq \overline{CP}_Z(\varphi)$ . As propriedades que listaremos abaixo são as traduções das propriedades da construção de Carathéodory para o nosso contexto.

**Proposição 3.10.** 1.  $P_\emptyset(\varphi) \leq 0$

2. Se  $Z_1 \subset Z_2$  então  $P_{Z_1}(\varphi) \leq P_{Z_2}(\varphi)$

3. se  $Z = \bigcup_i Z_i$   $P_Z(\varphi) = \sup_i P_{Z_i}(\varphi)$

**Proposição 3.11.** 1.  $\underline{CP}_\emptyset \leq 0, \overline{CP}_\emptyset(\varphi) \leq 0$

2. Se  $Z_1 \subset Z_2$  então  $\underline{CP}_{Z_1} \leq \overline{CP}_{Z_1}(\varphi)$  e  $\overline{CP}_{Z_1} \leq \overline{CP}_{Z_2}(\varphi)$ .

3. Se  $Z = \bigcup Z_i$  então  $\underline{CP}_Z(\varphi) \geq \sup_i \underline{CP}_{Z_i}$  e  $\overline{CP}_Z(\varphi) \geq \sup_i \overline{CP}_{Z_i}(\varphi)$ .

No caso que em o espaço em questão é compacto, esses números coincidem.

**Teorema 3.12.** 1. Se  $Z \subset X$  invariante então  $\underline{CP}_Z(\varphi) = \overline{CP}_Z(\varphi)$ . Além disso, para qualquer cobertura  $\mathcal{U}$  de  $Z$  temos  $\underline{CP}_Z(\varphi, \mathcal{U}) = \overline{CP}_Z(\varphi, \mathcal{U})$ .

2. Se  $Z \subset X$  é invariante compacto então vale  $P_Z(\varphi) = \underline{CP}(\varphi) = \overline{CP}(\varphi)$ . Além disso para toda cobertura aberta  $\mathcal{U}$  temos  $P_Z(\varphi, \mathcal{U}) = \underline{CP}_Z(\varphi, \mathcal{U}) = \overline{CP}_Z(\varphi, \mathcal{U})$

A prova do teorema acima pode ser encontrada em [2].

O conjunto  $\Sigma_p = \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$  é chamado shift com  $p$  símbolos. No caso em que estamos no shift e a dinâmica é a aplicação  $\sigma((i_1, \dots, i_n, \dots)) = (i_2, i_3, \dots)$  as definições de Pressão, Capacidade limite superior e inferior podem ser simplificadas. Seja  $\mathcal{U}_n$  uma cobertura por cilindros de comprimento  $n$ ,  $C_{i_1 \dots i_n} \equiv \{(j_1, \dots, j_m, \dots); j_1 = i_1, \dots, j_n = i_n\}$ . Temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{U}_n| = 0$  e para todo  $U \in \mathcal{S}(\mathcal{U}_n)$ ,  $X(U)$  é um cilindro. Assim, podemos escrever:

$$M(Z, \alpha, \varphi, \mathcal{U}_n, N) = \inf_{\mathcal{G}} \left\{ \sum_{C_{i_0 \dots i_n}} \exp \left( -\alpha(m+1) + \sup_{w \in C_{i_0 \dots i_n}} \sum_{k=0}^m \varphi(\sigma^k(w)) \right) \right\} \text{ onde o ínfimo}$$

é tomado sobre todas as  $\mathcal{G}$  coberturas por cilindros  $C_{i_0 \dots i_m}$ ,  $m \geq N \geq n$ .

$$R(Z, \alpha, \varphi, \mathcal{U}_n, N) = \sum_{C_{i_0 \dots i_N} \in \mathcal{G}} \exp \left( -\alpha(N+1) + \sup_{w \in C_{i_0 \dots i_N}} \sum_{k=0}^N \varphi(\sigma^k(w)) \right) \text{ onde a soma é}$$

feita sobre todos os cilindros  $C_{i_0 \dots i_N}$  que intersectam  $Z$ .

**Teorema 3.13. (Princípio Variacional)** *Seja  $f : X \rightarrow X$  contínua, e  $Z \subset X$  compacto invariante. Então para toda  $\varphi : Z \rightarrow \mathbb{R}$  contínua temos:*

$$P_Z(\varphi) = \sup \{ h_\nu(f) + \int \varphi d\nu; \nu \text{ é } f\text{-invariante} \}.$$

Um prova para o teorema acima pode ser encontrada em [3].

Uma medida que realiza o supremo do teorema acima é chamada estado de equilíbrio.

Uma transformação  $f : X \rightarrow X$  é dita expansiva se existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que se  $x, y \in X$  e  $x \neq y$  então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_0$ . Note que esse é o caso dos shifts a esquerda  $\sigma : \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$  com a métrica  $d_\beta$ ,  $d_\beta((x_k), (y_k)) = \sum_k \frac{|x_k - y_k|}{\beta^k}$ . Nesse caso temos:

**Teorema 3.14.** *Se  $f : X \rightarrow X$  ( $X$  métrico compacto) é expansiva então todo potencial  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  admite estado de equilíbrio.*

Não faremos a prova completa do Teorema acima, apenas um esboço é feito abaixo. Os detalhes podem ser encontrados em [3].

Como  $X$  é compacto,  $\mathcal{M}_1(f) \equiv \{\mu; \mu(X) = 1 \text{ e } \mu \text{ medida } f\text{-invariante}\}$  é compacto na topologia  $fraca^*$ . Além disso, a aplicação  $\mu \rightarrow \int \varphi d\mu$  é contínua na mesma topologia. Pelo

Princípio Variacional, existe uma sequência  $\{\mu_n\}_n$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{\mu_n}(f) + \int \varphi d\mu_n = P(f, \varphi).$$

Mas  $\mathcal{M}_1(f)$  é compacto e portanto  $\{\mu_n\}_n$  admite uma subsequência convergente para um certo  $\nu$ . Como  $f$  é expansiva a aplicação  $\mu \rightarrow h_\mu(f)$  é semi-contínua superiormente. Logo:

$$h_\nu(f) + \int \varphi d\nu \geq \liminf_n h_{\nu_n}(f) + \int \varphi d\mu_n = P(f, \varphi).$$

Logo,  $\nu$  é um estado de equilíbrio.

# Capítulo 4

## Dimensão de Hausdorff de Conjuntos Quase-Morán

Os conjuntos quase-Moran são obtidos de acordo com a seguinte construção. Considere  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in (0, 1)$ . Na etapa  $n$  considere conjuntos  $\Delta_{i_0 \dots i_n}$  fechados tais que:

1.  $\Delta_{i_0 \dots i_n j} \subset \Delta_{i_0 \dots i_n} \subset \mathbb{R}^l$  para todo  $j = 1, \dots, p$ .
2. Existem bolas tais que  $B(\underline{x}_{i_0 \dots i_n}, \underline{r}_{i_0 \dots i_n}) \subset \Delta_{i_0 \dots i_n} \subset B(\bar{x}_{i_0 \dots i_n}, \bar{r}_{i_0 \dots i_n})$  qualquer que seja a  $n$ -úpla  $(i_1, \dots, i_n)$ .
3. Os raios das bolas acima satisfazem:

$$\underline{r}_{i_0 \dots i_n} = K_1 \lambda_{i_0} \dots \lambda_{i_n}$$

$$\bar{r}_{i_0 \dots i_n} = K_2 \lambda_{i_0} \dots \lambda_{i_n}$$

$K_1$  e  $K_2$  são constantes.

4.  $\text{int } \underline{B}_{i_1 \dots i_n} \cap \text{int } \underline{B}_{j_1 \dots j_m} = \emptyset$  se  $(i_1, \dots, i_n) \neq (j_1, \dots, j_m)$  e  $m \geq n$ .

Seja  $K$  o conjunto limite dessa construção.

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_{i_1 \dots i_n}| = 0$  (de acordo com a propriedade de 3) então  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{i_1 \dots i_n}$  consiste de um ponto. Podemos então definir uma aplicação de maneira natural:

$$\chi : \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow K \text{ como } \chi((i_1, \dots, i_n, \dots)) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1 \dots i_n}.$$

Vamos considerar em  $\Sigma_p = \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$  a métrica  $d_\beta(\omega, \omega') = \sum_{k \geq 1} \frac{|i_k - i'_k|}{\beta^k}$  se  $\omega = (i_1, \dots, i_n, \dots)$  e  $\omega' = (i'_1, \dots, i'_n, \dots)$ . Isso nos permite obter informações sobre  $F$  através do shift.

Um subshift  $Q \subset \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$  é um conjunto invariante pela aplicação shift  $\sigma : \Sigma_p \longrightarrow \Sigma_p$  dada por  $\sigma((i_1, \dots, i_n, \dots)) = (i_2, i_3, \dots)$ . Seja  $Q \subset \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$  subshift compacto. Dizemos que uma  $n$ -úpla  $(i_1, \dots, i_n)$  é  $Q$ -admissível se existe um elemento  $(j_k)_k \in Q$  tal que  $(j_1, \dots, j_n) = (i_1, \dots, i_n)$ . Assim podemos falar no conjunto modelado pelo subshift, i.e.,

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{(i_1 \dots i_n) \text{ é} \\ Q\text{-admissível}}} \Delta_{i_1, \dots, i_n}.$$

### Cobertura de Morán

Seja  $0 < r < 1$ . Dado  $\omega = (i_1, \dots, i_n, \dots) \in Q$  existe, e é único,  $n(\omega) \in \mathbb{N}$  tal que:

$$\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{n(\omega)}} > r \text{ e } \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{n(\omega)+1}} \leq r.$$

Considere então os cilindros  $C_{i_1 \dots i_{n(\omega)}}$ , com  $\omega \in Q$ . Dois cilindros ou são disjuntos ou um está contido no outro (Suponha que  $\omega \in C_{i_1 \dots i_{n(\omega')}}$ . Se isso ocorre então necessariamente  $n(\omega') \leq n(\omega)$  o que nos dá  $C_{i_1 \dots i_{n(\omega)}} \subset C_{i_1 \dots i_{n(\omega')}}$ ). Considere então os cilindros maximais (isto é, cilindros que não estão contidos em nenhum outro). É claro que esses cilindros formam uma cobertura de  $Q$ .

Chamamos essa cobertura de cobertura de Morán, e denotamos por  $\mathcal{U}_{r,Q}$  ou  $\mathcal{U}_r$  se não houver perigo de confusão. A cobertura de  $F$  formada pelos conjuntos  $\chi(C(\omega))$ , onde  $C(\omega) \in \mathcal{U}_{r,Q}$ , também é chamada cobertura de Morán. Quando estiver implícito o espaço em questão, escreveremos apenas  $\mathcal{U}_r$ .

Quando  $R \subset Q$  não é invariante ainda podemos construir uma cobertura de Moran para  $R$ . Nesse caso os conjuntos  $C(\omega)$  não são necessariamente disjuntos, mas satisfazem  $C(\omega_i) \cap C(\omega_j) \cap R = \emptyset$  se  $i \neq j$ .

A principal propriedade das coberturas de Moran é:

**Proposição 4.1.** *Existe uma constante  $M$ , independente de  $r$  e  $x$  tal que  $B(x, r)$  intersecta no máximo  $M$  elementos de  $\mathcal{U}_{r,F}$ .*

**Demonstração.** Considere a cobertura de Moran  $\mathcal{U}_r$  de  $F$ , digamos,  $\Delta^j$  com  $j = 1, \dots, N$ .

Se  $\Delta^j \cap B(x, r) \neq \emptyset$  então  $\Delta^j \subset B(x, r + \text{diam } \Delta^j)$ . Lembrando que  $\text{diam } \Delta^j \leq 2 \frac{r}{\lambda_{\min}} K_2$  (de fato,  $\Delta^j \subset B(\bar{x}_j, \bar{r}_j)$  onde  $\bar{r}_j = K_2 \lambda_1 \dots \lambda_{n(\omega)}$  para algum  $\omega \in Q$  e portanto, da definição de cobertura de Morán,  $\bar{r}_j \leq K_2 \frac{r}{\lambda_{\min}}$ ). Assim:

$$\Delta^j \subset B\left(x, r + 2 \frac{r K_2}{\lambda_{\min}}\right).$$

Mas existe  $B(\underline{x}_j, \underline{r}_j) \subset \Delta^j$  com  $\underline{r}_j \geq K_1 r$  e portanto  $B(\underline{x}_j, \underline{r}_j) \subset B\left(x, r \left(1 + 2 \frac{K_2}{\lambda_{\min}}\right)\right)$ .

Considere então a grade de pontos em  $\mathbb{R}^l$ ,  $G = \frac{K_1 r}{2\sqrt{l}} \mathbb{Z}^l$ . Como  $\text{diam } B(\underline{x}_j, \underline{r}_j) \geq 2K_1 r$  então  $B(\underline{x}_j, \underline{r}_j)$  deve conter pelo menos um ponto de  $G$  de acordo com o lema 4.2 abaixo.

Assim, como as bolas  $\underline{B}(x_j, r_j)$  são disjuntas (pela Propriedade 4 dos conjuntos de Morán) temos

$$\text{card} \left\{ \underline{B}(x_j, r_j); \underline{B}(x_j, r_j) \subset B \left( x, r \left( 1 + 2 \frac{K_2}{\lambda_{\min}} \right) \right) \right\} \leq \text{card} G \cap B \left( x, r \left( 1 + 2 \frac{K_2}{\lambda_{\min}} \right) \right).$$

Note que  $\text{card} B \left( x, r \left( 1 + 2 \frac{K_2}{\lambda_{\min}} \right) \right) \cap G \leq \left( \frac{4\sqrt{l}}{K_1} \left( 1 + \frac{K_2}{\lambda_{\min}} \right) + 1 \right)^l$ . Logo:

$$\begin{aligned} \text{card} \{ \Delta^j; \Delta^j \cap B(x, r) \neq \emptyset \} &\leq \text{card} \left\{ \underline{B}(x_j, r_j); \underline{B}(x_j, r_j) \subset B \left( x, r \left( 1 + 2 \frac{K_2}{\lambda_{\min}} \right) \right) \right\} \\ &\leq \text{card} G \cap B \left( x, r \left( 1 + 2 \frac{K_2}{\lambda_{\min}} \right) \right) \\ &\leq \left( \frac{4\sqrt{l}}{K_1} \left( 1 + 2 \frac{K_2}{\lambda_{\min}} \right) + 1 \right)^l. \end{aligned}$$

E esse último número independe de  $r$  e de  $x$ . ■

**Lema 4.2.** *Seja  $B = B(z, s) \subset \mathbb{R}^l$  com  $s \geq r$ . Então  $B$  contém pelo menos um ponto de  $\frac{r}{2\sqrt{l}}\mathbb{Z}^l$ .*

**Demonstração.** Escreva  $z = (z_1, \dots, z_l)$ . Podemos escrever  $z_i = p_i \frac{r}{2\sqrt{l}} + t_i$  para algum  $p_i \in \mathbb{Z}$  e  $0 < t_i < \frac{r}{2\sqrt{l}}$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Assim:

$$\left| z - \left( p_1 \frac{r}{2\sqrt{l}}, \dots, p_l \frac{r}{2\sqrt{l}} \right) \right| = |(t_1, \dots, t_l)| = (t_1^2 + \dots + t_l^2)^{\frac{1}{2}} \leq \left( l \frac{r^2}{4l} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{r}{2} \leq s.$$

Em outras palavras  $(p_1, \dots, p_l) \frac{r}{2\sqrt{l}} \in B(z, s)$ . ■

A equação  $P_Q(s \log \lambda_{i_0}) = 0$  é chamada equação de Bowen. Vamos denotar sua raiz por  $s_\lambda$ , i.e.,  $P_Q(s_\lambda \log \lambda_{i_0}) = 0$ . A medida de equilíbrio para a aplicação  $\varphi = s_\lambda \log \lambda_{i_0}$  será denotada por  $\mu_\lambda$ , e  $m_\lambda = \chi_* \mu$ , i.e.,  $m_\lambda(E) = \mu_\lambda(\varphi^{-1}(E))$ . Esses objetos se relacionam com a dimensão de Hausdorff de conjuntos quase-Morán, como enunciado, e provado abaixo.

**Teorema 4.3.** (Pesin-Weiss) Seja  $F$  o conjunto de obtido através do sistema  $(Q, \sigma)$  de acordo com a construção descrita acima. Então vale :

1.  $HD(F) = \overline{\dim}_B F = \underline{\dim}_B F = s_\lambda$
2.  $\dim_H m_\lambda = s_\lambda$
3.  $s_\lambda = -\frac{h_{\mu_\lambda}(\sigma|Q)}{\int_Q \log \lambda_{i_0} d\mu_\lambda}$

**Demonstração.** Seja  $d = HD(F)$ . Da definição, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $r > 0$  para o qual existe uma cobertura  $\{B_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  por meio de bolas  $B_l$  com raio  $r_l < r$  satisfazendo :

$$\sum_{l=0}^{\infty} r_l^{d+\varepsilon} \leq 1.$$

De fato, como  $d = HD(F)$  então  $\mathcal{H}^{d+\varepsilon}(F) = 0$  e portanto existe  $r > 0$  tal que  $\mathcal{H}_r^{d+\varepsilon}(F) < 1$ .

Para cada  $l > 0$  considere a cobertura de Moran  $\mathcal{U}_{r_l}$  de  $F$ . Denotemos por  $\Delta_l^1, \dots, \Delta_l^{m(l)}$  aqueles elementos da cobertura de  $\mathcal{U}_{r_l}$  que intersectam a bola  $B_l$ . Como observado anteriormente, como propriedade das coberturas de Morán, temos  $m(l) < M$  para todo  $l \in \mathbb{N}$ , onde  $M$  é o fator de multiplicidade da cobertura. De fato, temos  $\Delta_l^j = \Delta_{i_0, \dots, i_{n(l,j)}}$ . Assim, de acordo com a Propriedade 3 de conjuntos quase-Morán:

$$K_1 \prod_{k=0}^{n(l,j)} \lambda_{i_k} = r_{i_0 \dots i_{n(l,j)}} \leq \bar{r}_{i_0 \dots i_{n(l,j)}} = K_2 \prod_{k=0}^{n(l,j)} \lambda_{i_k} \leq C_1 r_l.$$

A constante  $C_1$  independe de  $l$  e  $j$  (de fato,  $\max_i \{\frac{K_2}{\lambda_i}\}$  serve). Assim  $\{\Delta_l^j; j = 1, \dots, m(l), l \in \mathbb{N}\}$  formam uma cobertura de  $F$  digamos  $\mathcal{G}$  (se  $x \in F$  então dado  $l \in \mathbb{N}$  temos  $x \in A_l$  para algum  $A_l \in \mathcal{U}_{r_l}$  e além disso, como  $\{B_l\}_l$  é uma cobertura temos  $x \in B_k$  para algum  $k \in \mathbb{N}$

e portanto  $x \in \bigcup_{j=0}^{m(k)} \Delta_k^j$  assim os cilindros  $\{C_l^j \equiv C_{i_0 \dots i_{n(l,j)}; j = 1, \dots, m(l), l \in \mathbb{N}\}$  formam uma cobertura para  $Q$ . Temos:

$$\begin{aligned} \sum_{\Delta_l^j \in \mathcal{G}} \prod_{k=0}^{n(l,j)} \lambda_{i_k}^{d+\varepsilon} &= \sum_l \sum_{k=0}^{m(l)} \left( \prod_{k=0}^{n(l,j)} \lambda_{i_k} \right)^{d+\varepsilon} \leq \\ &\leq \sum_l \sum_{k=0}^{m(l)} \left( \frac{C_1}{K_1} r_l \right)^{d+\varepsilon} \leq M \left( \frac{C_1}{K_1} \right)^{d+\varepsilon} \sum_{l=0}^{\infty} r_l \leq M \left( \frac{C_1}{K_1} \right)^{d+\varepsilon}. \end{aligned}$$



Dado  $N > 0$  escolha  $r$  pequeno tal que  $n(l, j) > N$  para todo  $l$  e todo  $j$ . Seja  $\mathcal{U}_n$  cobertura de  $Q$  por meio de cilindros de comprimento  $n$ , com  $n < N$ . Então, pela definição e pelo que obtivemos acima:

$$M(Q, 0, \varphi, \mathcal{U}_n, N) \leq \sum_{\Delta_l^j \in \mathcal{G}} \exp \left( \sup_{\omega \in C_l^j} \sum_{k=0}^{n(l,j)} \varphi(\sigma^k(\omega)) \right) = \sum_{\Delta_l^j \in \mathcal{G}} \prod_{k=0}^{n(l,j)} \lambda_{i_k}^{d+\varepsilon} \leq M \left( \frac{C_1}{K_1} \right)^{d+\varepsilon}.$$

Portanto,  $m_c(Z, 0) \leq 0$ ,  $\log 0 \geq P_Q((d + \varepsilon) \log \lambda_{i_0})$ . Assim,  $s \leq d + \varepsilon$  já que  $P_Q(t \log \lambda_{i_0})$  é decrescente. Fazendo  $\varepsilon$  ir a zero, vem  $s \equiv s_\lambda \leq d$ .

Vamos mostrar agora que  $\overline{\dim}_B F \leq s$ . Para simplificar a notação, façamos  $\bar{d} \equiv \overline{\dim}_B F$ . Por definição,  $\overline{\dim}_B F = \limsup \frac{\log N(F, r)}{\log r^{-1}}$ . Seja  $\varepsilon > 0$ , da definição existe  $r$  tal que  $N(F, r) \geq r^{\varepsilon - \bar{d}}$ . Seja então  $C^{(j)} = C_{i_0 \dots i_{n(\omega_j)}}$  com  $j = 1, \dots, N_r$  a cobertura de Moran  $\mathcal{U}_r$  de  $F$ . Da definição,  $N_r \geq N(F, r)$ . Assim, existe  $A > 1$  tal que

$$\frac{r}{A} \leq \prod_{k=0}^{n(\omega_j)+1} \lambda_{i_k} \leq r$$

(tome  $A = (\min_{1 \leq k \leq p} \lambda_k)^{-1}$  como  $\lambda_i < 1$  para todo  $i = 1, \dots, p$ , então pela definição das coberturas

de Moran temos  $\prod_{k=0}^{n(\omega_j)} \lambda_{i_k} > r$  e  $\prod_{k=0}^{n(\omega_j)+1} \lambda_{i_k} \leq r$ . Além disso,  $\lambda_{i_{n(\omega_j)+1}} \prod_{k=0}^{n(\omega_j)} \lambda_{i_k} > r \min_{1 \leq i \leq p} \lambda_i$  para todo  $j = 1, \dots, N_r$ ) Logo,  $(n(\omega_j) + 2) \min_{1 \leq i \leq p} \log \lambda_i \leq \log r$  e além disso,  $(n(\omega_j) + 2) \max_{1 \leq i \leq p} \log \lambda_i \geq \log \frac{r}{A}$ . Assim,

$$C_2 \log \frac{1}{r} - 2 \leq n(\omega_j) \leq C_3 \log \frac{A}{r} - 2$$

onde  $C_2$  e  $C_3$  são constantes para simplificar a notação ( $C_2 \equiv (\min \log \lambda_i)^{-1}$  e  $C_3 \equiv (\max \log \lambda_i)^{-1}$ ). Assim  $n(\omega_j)$  pode tomar no máximo  $C_3 \log \frac{A}{r} - C_2 \log \frac{1}{r} + 1$  valores. Chamaremos essa último número de  $B$ . Pelo princípio da casa dos pombos, existe um  $N \in [C_2 \log \frac{1}{r} - 2, C_3 \log \frac{A}{r} + 2]$  inteiro para o qual vale:

$$\text{card}\{j : n(\omega) = N\} \geq \frac{N_r}{B} \geq \frac{N(F, r)}{B} \geq \frac{r^{\varepsilon - \bar{d}}}{C_3 \log \frac{A}{r}}$$

já que  $B \leq C_3 \log \frac{A}{r}$  se  $r$  é suficientemente pequeno. Além disso,  $\lim_{r \rightarrow 0} r^\varepsilon C_3 \log \frac{A}{r} = 0$

( $\lim_{r \rightarrow 0} r^\varepsilon \log \frac{A}{r} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{s}\right)^\varepsilon \log sA = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1/s}{\varepsilon s^{\varepsilon-1}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon s^\varepsilon} = 0$ ). Portanto, se  $r$  é suficientemente pequeno,  $1 \geq r^\varepsilon C_3 \log \frac{A}{r}$  e portanto

$$\text{card}\{j : n(\omega_j) = N\} \geq r^{2\varepsilon - \bar{d}}.$$

Seja  $\mathcal{G}$  uma cobertura arbitrária de  $Q$  por cilindros de comprimento  $N$ ,  $C_{i_0 \dots i_N}$  e  $x_j = \chi(\omega_j)$ . Então:

$$\begin{aligned} \sum_{C_{i_0 \dots i_N} \in \mathcal{G}} \prod_{k=0}^N \lambda_{i_k}^{\bar{d}-2\varepsilon} &\geq \sum_{j: n(x_j)=N} \prod_{k=0}^{n(x_j)} \lambda_{i_k}^{\bar{d}-2\varepsilon} \geq . \\ &\geq \sum_{j: n(x_j)=N} \left(\frac{r}{A}\right)^{\bar{d}-2\varepsilon} \geq A^{2\varepsilon-\bar{d}} r^{\bar{d}-2\varepsilon} r^{2\varepsilon-\bar{d}} \geq \\ &\geq A^{2\varepsilon-\bar{d}} \equiv C_4 = \text{constante}. \end{aligned}$$

Logo, se  $n > 0$  e  $N > n$ , vem:

$$\begin{aligned} R(Q, 0, \varphi, \mathcal{U}_n, N) &= \sum_{C_{i_0 \dots i_N}} \exp \left( \sup_{\omega \in C_{i_0 \dots i_N}} \sum_{k=0}^N \varphi(\sigma^k(\omega)) \right) \\ &= \sum_{C_{i_0 \dots i_N}} \prod_{k=0}^N \lambda_{i_k}^{\bar{d}-2\varepsilon} \geq C_4 \end{aligned}$$

Isso para  $\varphi = (\bar{d} - 2\varepsilon) \log \lambda_{i_0}$ . Portanto pelo teorema 3.19 (e aqui é usado o fato de que  $Q$  é compacto), vem:

$$\overline{CP}_Q((\bar{d} - 2\varepsilon) \log \lambda_{i_0}) = P_Q((\bar{d} - 2\varepsilon) \log \lambda_{i_0}) \geq 0$$

e portanto,  $\bar{d} - 2\varepsilon \leq s$ . Mas como  $\varepsilon$  é arbitrário vem  $\bar{d} \leq s$ . Temos  $\bar{d} \leq s \leq d$  e é um fato geral que  $d \leq \underline{\dim}_B F \leq \bar{d}$ , assim o a prova do item 1 segue.

Seja  $\mu_\lambda$  medida de equilíbrio para  $s \log \lambda_{i_0}$ . Da definição:

$$h_{\mu_\lambda}(\sigma|Q) + s \int_Q \log \lambda_{i_0} d\mu_\lambda = 0.$$

Para simplificar a notação de agora em diante faremos  $h \equiv h_{\mu_\lambda}$ . Seja  $\varepsilon > 0$  e suponhamos que  $\mu_\lambda$  é ergódica. Considerando a partição de  $Q$  por cilindros o teorema de Shannon-McMillan-Breiman afirma que para  $\mu$ -q.t.p  $\omega \in Q$  existe  $N_1(\omega)$  tal que para todo  $n > N_1(\omega)$ :

$$\mu_\lambda(C_{i_0 \dots i_n}) \leq \exp(-(h - \varepsilon)n).$$

Aqui  $C_{i_0 \dots i_n}(\omega)$  é o cilindro de comprimento  $n$  que contém  $\omega$ .

Pelo teorema de Birkhoff:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} s \log \lambda_{i_0}(\sigma^j \omega) = \int s \log \lambda_{i_0} d\mu_\lambda$$

Visto de outro modo, para  $\mu$ -q.t.p.  $\omega \in Q$  existe  $N_2(\omega)$  tal que

$$s \int_Q \log \lambda_{i_0} d\mu_\lambda \leq \frac{1}{n} \log \prod_{j=0}^n \lambda_{i_j}^s + \varepsilon.$$

Assim se  $n = n(\omega)$  é suficientemente grande :

$$\mu_\lambda(C_{i_0 \dots i_n}) \leq e^{-(h-\varepsilon)n} \leq e^{sn \int_Q \log \lambda_{i_0} d\mu_\lambda} e^{n\varepsilon} \leq e^{n(\varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n \log \lambda_{i_j}^s)} e^{n\varepsilon} \leq e^{2n\varepsilon} \prod_{j=0}^n \lambda_{i_j}^s.$$

Seja  $\alpha = \frac{2\varepsilon}{\min_j \log \frac{1}{\lambda_j}}$ . Então  $\alpha \geq \frac{2n\varepsilon}{\sum_{j=0}^n \log \frac{1}{\lambda_{i_j}}}$  e portanto  $e^{2n\varepsilon} \leq \left( \prod_{j=0}^n \lambda_{i_j} \right)^{-\alpha}$ . Assim, se  $n = n(\omega)$  é suficientemente grande vem:

$$\mu_\lambda(C_{i_0 \dots i_n}) \leq \prod_{j=0}^n \lambda_{i_j}^{s-\alpha}.$$

Para cada  $l \in \mathbb{N}$  defina  $Q_l \equiv \{\omega \in Q; \max\{N_1(\omega), N_2(\omega)\} \leq l\}$ . Temos :

1.  $Q_l \subset Q_{l+1}$
2.  $\mu_\lambda(Q \setminus \bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l) = 0$

O item 1 é de fácil verificação. A segunda afirmação é verdadeira porque  $\bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l$  é a intersecção de dois conjuntos de medida total, a saber, o conjunto dos pontos para os quais vale a convergência no teorema da média de Birkhoff e o conjunto dos pontos para os quais vale a convergência em Shannon-McMillan-Brieman. Assim, existe  $l_0 > 0$  tal que para todo  $l \geq l_0$  temos  $\mu_\lambda(Q_l) > 0$ . Seja  $l > l_0$  e  $0 < r < 1$ . Seja  $\mathcal{U}_{r,l}$  a cobertura de Moran de  $Q_l$ . Tal cobertura é composta por elementos  $C_l^j = C_{i_0 \dots i_{n(\omega_j)}}$  onde  $\omega_j \in Q_l$ ,  $j = 1, \dots, N_{l,r}$ . Seja  $\Delta_l^j = \chi(C_l^j)$ .

Seja  $N = N(x, r, l) \equiv \text{card}\{(l, j) : \Delta_l^j \cap B(x, r) \neq \emptyset\}$ . Sabemos que  $N(x, r, l) < M$  onde  $M$  é a multiplicidade da cobertura de Morán. Assim, pelas propriedades dos quase-Morán

$$m_\lambda(B(x, r) \cap \chi(Q_l)) \leq \sum_{j=0}^N m_\lambda(\Delta_l^j) \leq \sum_{j=0}^N \prod_{k=0}^{n(x_j)} \lambda_{i_k}^{s-\alpha} \leq K_2 N(x, r, l) r^{s-\alpha} \leq K_2 M r^{s-\alpha}.$$

Pelo Lema de densidade de Borel, enunciado no apêndice, como  $m_\lambda(\chi(Q_l)) > 0$  então para quase todo  $x \in Q_l$  existe um  $r_0 = r_0(x)$  tal que  $0 < r < r_0$  então :

$$m_\lambda \leq 2m_\lambda(B(x, r) \cap \chi(Q_l)).$$

Assim se  $l > l_0$  para  $\mu_\lambda$  quase todo  $x \in Q_l$  temos :

$$\bar{d}_{m_\lambda}(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{m_\lambda(B(x, r))}{\log r} \geq \liminf_{r \rightarrow 0} \log \frac{m_\lambda(B(x, r) \cap \chi(Q_l))}{\log r}.$$

Mas  $\log m_\lambda(B(x, r) \cap \chi(Q_l)) \leq \log K_2 M + (s - \alpha) \log r$  o que nos dá  $\frac{\log m_\lambda(B \cap \chi(Q_l))}{\log r} \geq \geq s - \alpha + \frac{\log K_2 M}{\log r}$  se  $r < 1$ . Portanto:

$$\bar{d}_{m_\lambda}(x) \geq s_\lambda - \alpha.$$

Já que  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log K_2 M}{\log r} = 0$ .

Portanto pela propriedade 2 dos  $Q_l$ 's vem que  $d_{m_\lambda}(x) \geq s_\lambda - \alpha$  para quase todo  $x \in Q$ , ou seja,  $\dim_H m_\lambda \geq s_\lambda - \alpha$ . Como  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) = 0$ , fazendo  $\varepsilon$  ir a zero vem que  $\dim_H m_\lambda \geq s_\lambda$  para quase todo  $x \in Q$ . É claro que  $\dim_H F \geq \dim_H \mu_\lambda$  (A medida esta suportada em  $F$ ). Portanto o item 2 esta provado.

No caso geral , considere a decomposição ergódica de  $\mu$  , digamos  $(\mu_P)_P$ . Com efeito,  $\mu_P$  é medida de equilíbrio para  $\hat{\mu}_P$ -quase todo  $P$  de acordo com a proposição 10.5.5 de [3]. Seja  $Z \subset Q$  tal que  $\mu(Z) = 1$  . Então pela decomposição ergódica, temos que  $\mu_P(Z) = 1$  para  $\hat{\mu}$ -quase todo ponto  $P$ . Assim, pelo que foi provado acima,  $\dim_H Z \geq s_\lambda$ . Logo da definição vem:

$$\dim_H \mu = s_\lambda.$$

Por fim, como por definição,  $P(s_\lambda \log \lambda_{i_0}) = 0$  então temos, ja que  $\mu_\lambda$  é medida de equilíbrio:

$$h_{\mu_\lambda}(\sigma|Q) + s_\lambda \int_Q \log_{i_0} d\mu_\lambda = 0.$$

E portanto segue também o item 3.

■

# Apêndice

Nesse apêndice, listaremos conceitos, propriedades e teoremas (sem provas) que foram usadas no texto.

## 4.1 Lema de Densidade de Borel

**Teorema 4.4.** (*Lema de Densidade de Borel*) *Seja  $A \subset X$  com  $\mu(A) > 0$ . Então, para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in A$  temos:*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r) \cap A)}{\mu(B(x, r))} = 1.$$

*Além disso, para cada  $\delta > 0$  existe  $Y \subset A$  com  $\mu(Y) > \mu(A) - \delta$  e  $r_0$  tal que para todo  $x \in Y$  e  $0 < r < r_0$ ,*

$$\mu(B(x, r) \cap A) \geq \frac{1}{2} \mu(B(x, r)).$$

## 4.2 Equação de Bowen

Seja  $X$  espaço métrico,  $f : X \rightarrow X$  e  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas.

**Teorema 4.5.** *Se  $\varphi$  é negativa e  $Z \subset X$  então:*

1.  $\psi(t) \equiv P_Z(t\varphi)$  é Lipschitz, convexa e estritamente decrescente.
2. Existe um único  $s$  tal que  $\varphi(s) = 0$ . No caso de  $Z$  compacto,  $s < +\infty$ .

## 4.3 Alguns Resultados de Teoria Ergódica

As provas dos teoremas aqui citados podem ser encontradas em [V-O].

**Definição 8.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável e  $\mu$  uma medida em  $M$ . A medida  $\mu$  é dita  $f$ -invariante se  $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$  para todo conjunto mensurável  $E$ .*

**Definição 9.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável. Uma medida  $\mu$  é dita ergódica se  $f^{-1}(E) = E \implies \mu(E) = 0$  ou  $\mu(E) = 1$ , ou seja, todo conjunto invariante tem medida nula ou total. Escrevemos que  $(f, \mu)$  é ergódica.*

**Teorema 4.6. (Média de Birkhoff)**

*Seja  $f : M \rightarrow M$  um transformação mensurável e  $\mu$  uma medida invariante. Dado  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  integrável, para  $\mu$ -quase todo ponto  $x$  existe o limite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)).$$

*Além disso,  $\tilde{\varphi}$  é integrável e satisfaz:*

$$\int_M \tilde{\varphi} d\mu(x) = \int_M \varphi d\mu(x).$$

No caso em que  $\mu$  é ergódica temos:

**Teorema 4.7.** *A aplicação  $\tilde{\varphi}$  do teorema acima é constante em  $\mu$ -quase todo ponto  $x$  e portanto:*

$$\int \varphi(y) d\mu(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

*em quase todo ponto.*

Seja  $M$  um espaço métrico e  $\mathcal{P}$  uma partição de  $M$  por conjuntos mensuráveis. Vamos colocar uma estrutura de espaço de probabilidade. Para isso, considere a aplicação  $\pi : M \rightarrow \mathcal{P}$  que associa  $x \in M$  ao único conjunto  $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}$  que o contém. Diremos que um subconjunto  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$  é mensurável se  $\pi^{-1}(\mathcal{Q})$  for mensurável. Por fim, definimos a medida  $\hat{\mu}$  em  $\mathcal{P}$  como:

$$\hat{\mu}(\mathcal{Q}) \equiv \mu(\pi^{-1}(\mathcal{Q})).$$

Temos então os ingredientes para o :

**Teorema 4.8. Decomposição Érgódica**

*Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável num espaço métrico completo e separável  $M$  e  $\mu$  uma medida  $f$ -invariante. Então existem um conjunto  $M_0 \subset M$  mensurável com  $\mu(M_0) = 1$ , uma partição  $\mathcal{P}$  de  $M_0$  e uma família  $(\mu_P)_{P \in \mathcal{P}}$  de medidas ergódicas em  $M$ , tais que*

1.  $\mu_P(P) = 1$  para  $\hat{\mu}$ -quase todo  $P \in \mathcal{P}$ .
2.  $P \rightarrow \hat{\mu}_P(E)$  é mensurável para todo conjunto mensurável  $E \subset M$ .
3.  $\mu_P$  é invariante e ergódica para  $\hat{\mu}$ -quase todo ponto  $P \in \mathcal{P}$ .
4.  $\mu(E) = \int \mu_P(E) d\hat{\mu}(P)$ .

## 4.4 Entropia Métrica ou de Kolmogorov

Seja  $M$  um espaço métrico. Considere  $f : M \rightarrow M$  contínua e  $\mu$  uma medida  $f$  invariante.

Dadas  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  partições de  $M$ , definimos a soma dessas partições como a partição

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P \cap Q; P \in \mathcal{P} \text{ e } Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Mais geralmente, para uma família  $\{\mathcal{P}_n\}$  definimos  $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n = \{\bigcap_n P_n; P_n \in \mathcal{P}_n\}$ .

Seja  $\mathcal{P}$  uma partição finita de  $M$ . Definimos:

**Definição 10.**  $\mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P)$  é a entropia da partição  $\mathcal{P}$ .

Dadas duas partições  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  definimos a entropia condicional de  $\mathcal{P}$  em relação a  $\mathcal{Q}$  como :

$$\mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) \equiv \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} -\mu(P \cap Q) \frac{\mu(P \cap Q)}{\mu(Q)}.$$

**Notação 4.9.** Escrevemos  $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$  se todo elemento de  $\mathcal{Q}$  está contido em algum elemento de  $\mathcal{P}$ .

Vamos listar algumas propriedades da entropia de partições no próximo lema.

**Lema 4.10.** Considere  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$  partições de  $M$ . Então :

1.  $\mathcal{H}_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}|\mathcal{R}) = \mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{R}) + \mathcal{H}_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$
2. Se  $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$  então
 
$$\mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) \leq \mathcal{H}_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P})$$

$$\mathcal{H}_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{P}) \geq \mathcal{H}_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{Q})$$
3.  $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q} \iff \mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$

É claro que  $\mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{M}) = \mathcal{H}_\mu(\mathcal{P})$ , onde  $\mathcal{M}$  é a partição trivial. Usando o item 2 do lema, fazendo  $\mathcal{Q}$  igual a partição trivial (A partição trivial é por definição  $\mathcal{Q} = M$ ), temos:

$$\mathcal{H}_\mu(\mathcal{R}|\mathcal{P}) \leq \mathcal{H}_\mu(\mathcal{R}).$$

Por fim, usando o item 3 com  $\mathcal{R} = \mathcal{M}$  vem:

$$\mathcal{H}_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}) + \mathcal{H}_\mu(\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}) \leq \mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}) + \mathcal{H}_\mu(\mathcal{Q}).$$

Escreva  $f^{-1}(\mathcal{P}) \equiv \{f^{-1}(P); P \in \mathcal{P}\}$ . Se  $f$  preserva a medida  $\mu$  então  $\mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}) = \mathcal{H}_\mu(f^{-1}(\mathcal{P}))$ . Escreva  $\mathcal{P}^n \equiv \mathcal{P} \vee f^{-1}(\mathcal{P}) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\mathcal{P})$ .

**Lema 4.11.**  $\mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}^{m+n}) \leq \mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}^m) + \mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}^n)$

**Demonstração.** Temos  $\mathcal{P}^{m+n} = \mathcal{H}^m \vee f^{-m}(\mathcal{P}^n)$ . Assim:

$$\mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}^{m+n}) \leq \mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}^m) + \mathcal{H}_\mu(f^{-1}(\mathcal{P}^n)).$$

E pelo que foi observado acima vem (se  $f$  preserva  $\mu$  então  $f^m$  também o faz):

$$\mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}^{m+n}) \leq \mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}^m) + \mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}^n).$$

■

Temos o seguinte resultado a respeito de seqüências de números reais:

**Lema 4.12.** *Seja  $\{a_n\}_n$  uma seqüência subaditiva de números reais, i.e.,  $a_{m+n} \leq a_m + a_n$  então existe o limite:*

$$L \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}.$$

Além disso, temos  $L = \inf_n \frac{a_n}{n}$ .

Logo, graças aos lemas anteriores, existe o limite :

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \equiv \lim_n \frac{1}{n} \mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}^n).$$

**Definição 11.** *O limite acima é chamado entropia de  $f$  com relação a partição  $\mathcal{P}$ .*

Por fim, definimos a entropia de  $f$  :



**Definição 12.** O supremo tomado sobre todas as partições finitas

$$h_\mu(f) \equiv \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P})$$

é chamado entropia métrica ou entropia de Kolmogorov de  $f$ .

Alguns resultados ajudam no cálculo da entropia.

Vamos enunciar alguns.

**Teorema 4.13.** Sejam  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n, \dots$  partições de  $M$  com  $\mathcal{P}_n \prec \mathcal{P}_{n+1}$ . Se  $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{P}_n$  gera a  $\sigma$ -álgebra dos mensuráveis então

$$h_\mu(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(f, \mathcal{P}_n).$$

**Demonstração.** Ver [3].

■

Como corolário, temos:

**Corolário 4.14.** Se  $\bigcup_n \mathcal{P}^n$  gera a  $\sigma$ -álgebra dos conjuntos mensuráveis, então :

$$h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P}).$$

Definimos o diâmetro de uma partição  $\mathcal{P}$  como  $\text{diam}\mathcal{P} \equiv \sup\{\text{diam}U; U \in \mathcal{P}\}$

**Corolário 4.15.** Seja  $M$  um espaço métrico. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}\mathcal{P}^n = 0$  então:

$$h_\mu(f) = h(f, \mathcal{P}).$$

Em posse desse resultado vamos calcular a entropia do shift no espaço das seqüências.

**Exemplo 8.** Seja  $M = (\{1, \dots, l\}^{\mathbb{N}}, d)$  onde  $d(\{x_n\}_n, \{y_n\}_n) \equiv \frac{1}{2^n}$  com  $n = \min\{k; x_k \neq y_k\}$  e com a medida definida nos cilindros (definidos logo abaixo) do seguinte modo:

1. Sejam  $p_m \in [0, 1]$   $m = 1, \dots, l$  tais que  $\sum_{j=1}^l p_j = 1$

2. Os conjuntos  $(C_{i_0 \dots i_n})(k) \equiv \{(x_1, \dots, x_n, \dots); x_k = i_0, x_{k+1} = i_1, \dots, x_{k+n} = i_n\}$  são chamados cilindros. Defina

$$\mu((C_{i_0 \dots i_n}))(k) = p_{i_0} p_{i_1} \dots p_{i_n}.$$

A medida definida acima se estende, de maneira única, a todos os borelianos de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , e é chamada medida de Bernoulli.

Considere a aplicação  $\sigma : \{1, \dots, l\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{1, \dots, l\}^{\mathbb{N}}$  definida por  $\sigma(x_1, \dots, x_n, \dots) = (x_2, \dots, x_n, \dots)$ . É fácil ver que a medida é preservada na álgebra gerada pelos cilindros. Como os cilindros geram a  $\sigma$ -álgebra dos borelianos, então essa medida é  $\sigma$ -invariante. Para detalhes, veja Lema 1.3.1 em [3].

Vamos agora calcular a entropia  $h_\mu(\sigma)$

Note que  $\sigma^{-1}(C_{i_1 \dots i_n})(k) = C_{i_1 \dots i_n}(k+1)$ . Considere a partição de  $\mathcal{P} = \{C_1(1), C_1(1), \dots, C_l(1)\}$ .

Temos  $\mathcal{P}^n = \{C_{i_1 \dots i_n}(1); (i_1, \dots, i_n) \in \{0, 1\}^n\}$ . Note que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } \mathcal{P}^n = 0$$

(De fato  $\text{diam } C_{i_1 \dots i_n}(1) = \frac{1}{2^{n+1}}$ ). Assim,  $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}^n) &= \sum -\mu(C_{i_1 \dots i_n}(1)) \log \mu(C_{i_1 \dots i_n}(1)) \\ &= \sum -p_{i_1} \dots p_{i_n} \log p_{i_1} \dots p_{i_n} \\ &= \sum -p_{i_1} \dots p_{i_n} \sum_j \log p_{i_j} \\ &= \sum_j \sum_{i_j} -p_{i_j} \log p_{i_j} \sum_{i_k, k \neq j} p_{i_1} \dots p_{i_{j-1}} p_{i_{j+1}} \dots p_n. \end{aligned}$$

Essa última soma é igual a  $\left( \sum_{j=1}^l p_j \right)^{n-1} = 1$ . Assim:

$$\mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}^n) = -n \sum_j p_j \log p_j.$$

Logo,  $\frac{1}{n} \mathcal{H}_\mu(\mathcal{P}^n) = - \sum_j p_j \log p_j$  e portanto:

$$h_\mu(f) = \sum_j p_j \log p_j.$$

Nessa linha, temos ainda o teorema de Shannon-McMillan-Breiman que é de caráter mais local, e que será enunciado logo abaixo.

Seja  $\mathcal{P}$  uma partição de  $M$ . Denote por  $\mathcal{P}^n(x)$  o elemento da partição  $\mathcal{P}^n$  que contem  $x$ . O teorema de Shannon-McMillan-Breiman afirma que:

**Teorema 4.16.** // Dada qualquer partição  $\mathcal{P}$  com entropia finita existe

$$h_\mu(f, \mathcal{P}, x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x))$$

em  $\mu$ -quase todo ponto. Além disso, a função que associa  $x \rightarrow h_\mu(f, \mathcal{P}, x)$  é  $\mu$ -integrável e o limite também vale em  $L^1$  (isto é, definindo  $g_n(x) = -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x))$  tais funções convergem na norma  $L^1$  para a função que associa  $x \rightarrow h_\mu(f, \mathcal{P}, x)$ ). Por fim,

$$\int h_\mu(f, \mathcal{P}, x) d\mu(x) = h_\mu(f, \mathcal{P})$$

**Demonstração.** Ver [3].



Note que  $h_\mu(f, \mathcal{P}, x) = h_\mu(f, \mathcal{P}, f(x))$  para todo  $x \in M$ . Assim, a média

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} h_\mu(f, \mathcal{P}, f^j(x)) = h_\mu(f, \mathcal{P}, x).$$

Assim, se  $\mu$  é ergódica, pelo teorema de ergódico de Birkhoff, temos que para  $\mu$ -quase todo ponto  $x$ :

$$h_\mu(f, \mathcal{P}, x) = h_\mu(f, \mathcal{P}).$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Yakov Pesin e Vaughan Climenhaga, **Lectures on fractal Geometry and dynamical Systems**, 2009.
- [2] Ya.Pesin, **Dimension Theory in Dynamical Systems, Contemporary Views and Applications** /Yakov B. Pesin.Chicago Lectures in Mathematics series, 1997.
- [3] K.Oliveira,M.Viana , **Fundamentos da Teoria Ergódica**, Sociedade Brasileira de Matemática
- [4] Lawrence C. Evans, Ronald F. Gariepy,**Measure Theory and Fine Properties of Functions**,1992
- [5] D. Ruelle. **Thermodynamic Formalism**. Addison-Wesley, Reading, MA,1978.
- [6] K. Falconer,**Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications**, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1990