UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DIEGO PEREIRA BARBOZA

SOBRE VETORES DE ROTAÇÃO NO TORO

Maceió
2014

DIEGO PEREIRA BARBOZA

SOBRE VETORES DE ROTAÇÃO NO TORO

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Sistemas Dinâmicos submetida em 21 de Fevereiro de 2014 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática de Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Walter Teófilo Huaraca Vargas

Maceió

2014

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

B238s Barboza, Diego Pereira.
Sobre vetores de rotação no toro / Diego Pereira Barboza - 2014.
84 f. : il.

Orientador: Walter Teófilo Huaraca Vargas.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2014.

Bibliografia: f. 83-84.

1. Pontos periódicos. 2. Homeomorfismo do toro. 3. Vetor de rotação. 4. Toro (Geometria). 5. Homeomorfismo. I. Título.

CDU: 515.14

SOBRE VETORES DE ROTAÇÃO NO TORO

Diego Pereira Barboza

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Sistemas Dinâmicos submetida em 21 de Fevereiro de 2014 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática de Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Walter Teofilo Huaraca Vargas

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Walter Teofilo Huaraca Vargas (UFV)

Luis Guillermo Martinez M.

Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza (UFAL)

Kleyber Mota da Cunha

Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha (UFBA)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde, força, coragem e perseverança para que eu pudesse concluir este trabalho e pelas pessoas que colocou no meu caminho.

Ao meu querido professor e amigo Walter, um profissional e um ser humano que dispensa comentários, pela atenção, compreensão, paciência, que teve comigo nesta difícil jornada.

À toda minha família, em especial meus irmãos: Thiago, Diogo, Iêda e Igor que me deram muita força, incentivo e momentos de descontração.

À minha mãe, Eva Elaine, que não mediu esforços para que eu pudesse concluir mais esta etapa da minha vida.

Aos professores do IM-UFAL pelas disciplinas que lecionaram e, que com seus conhecimentos contribuíram de forma decisiva para a minha formação.

Aos professores: Dr. Kleyber Mota da Cunha e Dr. Luis Guillermo Martinez Maza por si mostrarem prestativos e disponíveis para fazerem à avaliação deste meu trabalho de dissertação, fazendo parte da Banca Examinadora.

À algumas pessoas especiais que Deus colocou no meu caminho durante o realização desta etapa, pelas horas de estudo, pelos momentos de descontração, pelo companheirismo, pelo carinho e pelo apoio moral e humano: Abraão Mendes, Douglas Oliveira, Fabiane Paim, Joás Rocha, Nayane Carvalho, Rogério Vitório e Tiago Novello.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

À todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para que este projeto pudesse ser realizado.

Lista de Figuras

RESUMO

Um dos teoremas conhecidos de Poincaré afirma: *Seja f um homeomorfismo do círculo homotópico à identidade. Se p/q com $\mathrm{mdc}(p,q) = 1$, é o número de rotação de f, então f possui um ponto periódico de período q.* Quando o conceito de número de rotação para um homeomorfismo do círculo é generalizado para um homeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ homotópico à identidade, o resultado é um subconjunto convexo do plano $\mathbb{R}^2$, chamado conjunto de rotação e denotado por $\rho(F)$ onde F é um levantamento de f.

O objetivo deste trabalho é provarmos o seguinte resultado devido a John Franks: *Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento de f. Se o vetor 0 está no interior de $\rho(F)$, então F possui um ponto fixo.* Com este resultado, concluiremos que se v é um vetor de coordenadas racionais no interior de $\rho(F)$, então f tem um ponto periódico.

ABSTRACT

One of the well know results of Poincaré state: *Let* f *a homeomorphism of the circle homotopic to the identity. If* p/q, *with* $\mathrm{mdc}(p/q) = 1$, *is the rotation number of* f, *then there is a periodic point for* f *whose is* q. When the concept of rotations number, for a homeomorphism of the circle homotopic to the identity, is generalized for torus homeomorphism $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ that are homotopic to the identity, it results in a convex subset of $\mathbb{R}^2$, called rotation set and is denoted by $\rho(F)$ where F is a lifting of f.

The objective of this work is prove the following resulted due to John Franks: *Let* $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ *homeomorphism homotopic to the identity and* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a lift of* f. *If the vector* 0 *is in the interior of* $\rho(F)$, *then* F *has a fixed point.* With this result, we conclude that if v is a vector of rational coordinates in the interior of $\rho(F)$, then f has a periodic point.

Sumário

INTRODUÇÃO

O conceito de número de rotação de um homeomorfismo homotópico à identidade no círculo unitário foi introduzido por Henri Poincaré no ano de 1952 em [22]. A dinâmica desses homeomorfismos é topologicamente simples e caracterizada pelo número de rotação.

Poincaré percebeu que, partindo de um ponto $y \in S^1$ qualquer, as médias dos deslocamentos médios de suas órbitas $\frac{F^n(x)-x}{n}$ convergem para um mesmo número, independente de y. Este é o número de rotação.

Quando o conceito de número de rotação é generalizado para a família de homeomorfismos homotópicos à identidade do toro $\mathbb{T}^n$, obtemos um subconjunto do espaço euclidiano chamado conjunto de rotação. Estudando este conjunto, podemos obter informações sobre a dinâmica destes homeomorfismos e principalmente sobre a existência de pontos periódicos, ver por exemplo os trabalhos dos matemáticos J. Franks [5], [6], S. Zanata [25], M. Misiurewich e K. Ziemian [16], [17], além de L. Jonker e L. Zhang [10].

A seguir, descreveremos o roteiro de nossa dissertação. No capítulo 1 veremos algumas definições e resultados importantes que serão utilizados posteriormente. Dentre estes resultados, iremos definir e provar algumas propriedades para os conceitos de transitividade por cadeia, recobrimento universal e provar a existência de uma função de Lyapounov completa para homeomorfismos de espaços métricos compactos em si próprios. Finalizando o capítulo 1, veremos definição de classe e número de Nielsen para funções contínuas.

No capítulo 2, estudaremos a definição de número de rotação para um homeomorfismo homotópico à identidade no círculo unitário, $f : S^1 \to S^1$, e estudaremos as principais propriedades do número de rotação, em particular, provaremos que

Proposição. *Seja f um homeomorfismo de S^1 homotópico à identidade. Então o número de rotação de f é um número racional se, e somente se, f tem um ponto periódico.*

Está proposição serve de critério para que o homeomorfismo f possua ou não ponto periódico. Como corolário da demonstração desta proposição, iremos obter que f possui ponto fixo se, e somente se, o número de rotação é 0.

Ainda no capítulo 2, estudaremos o Teorema de classificação de Poincaré e o Teorema de Denjoy. Esses teoremas serão enunciados a seguir.

Teorema. (Classificação de Poincaré). *Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo que preserva orientação com número de rotação irracional. Então,*

(1) Se f é topologicamente transitivo, então f é topologicamente conjugada à rotação $R_{\tau(f)}$.

(2) Se f não é topologicamente transitivo, então f tem a rotação $R_{\tau(f)}$ como um fator topológico, via uma aplicação $h : S^1 \to S^1$, não-invertível, contínua e monótona.

Teorema. (Denjoy). *Se $f : S^1 \to S^1$, de classe C^1, é um homeomorfismo que preserva orientação com número de rotação $\tau = \tau(f)$ irracional e derivada de variação limitada, então f é transitivo e portanto topologicamente conjugada à rotação R_τ.*

No capítulo 3, definiremos o conjunto de rotação baseado em pontos, conjunto de rotação e conjunto de rotação médio para homeomorfismos de $\mathbb{T}^n$ que são homotópicos à identidade e veremos propriedades importantes que são semelhantes ao caso dos homeomorfismos de S^1. Entretanto, utilizaremos principalmente a definição de conjunto de rotação, que apresentaremos a seguir.

Definição. Seja $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um levantamento de f ao recobrimento universal. O *conjunto de rotação* de F, $\rho(F)$, é o conjunto de todos os pontos de acumulação do subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

$$\left\{ \frac{F^n(x_i) - x_i}{n} \mid x_i \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{Z}^+ \right\},$$

ou seja, $v \in \rho(F)$ se existe uma sequência $x_i \in \mathbb{R}^n$ e $n_i \in \mathbb{Z}^+$ com $\lim n_i = \infty$ tal que

$$\lim_{i \to \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = v.$$

Esta definição é devido a M. Misiurewicz e K. Ziemian em [16] e, definido desde modo, provaremos que o conjunto de rotação é sempre compacto e conexo.

O conjunto de rotação baseado em pontos de F é

$$\rho_p(F) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(x, F),$$

onde $\rho(x, F)$ é o conjunto de todos os pontos limites da sequência $\left(\frac{F^n(x)-x}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

O conjunto de rotação médio de F é definido como

$$\rho_m(F) = \left\{ \int \phi d\mu : \mu \text{ é ergódica, } f - \text{invariante e } \mu(\mathbb{T}^n) = 1 \right\},$$

com a função $\phi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ definida por $\phi(x) = F(y) - y$, onde y é qualquer ponto na fibra de x no recobrimento.

Temos que $\rho_m(F) \subset \rho_p(F) \subset \rho(F)$, e que a envoltória convexa dos três conjuntos é sempre a mesma. Este é um resultado de M. Misiurewich e K. Ziemian em [16]. Quando $n = 2$, Misiurewich e Ziemian mostram, ainda em [16], que

$$Com(\rho_p(F)) = \rho(F) = Com(\rho_m(F)),$$

onde $Com(C)$ denota a casca convexa de um conjunto C. Esta é uma propriedade interessante sobre o conjunto de rotação e mostra a convexidade de $\rho(F)$ quando f é um homeomorfismo no toro $\mathbb{T}^2$ homotópico à identidade e F é um levantamento ao recobrimento universal.

Então, quando trabalhamos com o toro $\mathbb{T}^2$, o conjunto de rotação é sempre compacto, conexo e convexo. Isto diz que tais conjuntos serão apenas pontos, segmentos de retas ou conjuntos com interior não vazio.

O resultado principal que estudaremos na dissertação, no capítulo 3, é um resultado devido a John Franks em [5] e que enunciaremos a seguir.

Teorema. *Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ um homeomorfismo homotópico à identidade e seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento de f ao recobrimento universal. Suponha que v_1, v_2, v_3 e v_4 são pontos extremais do conjunto convexo $\rho(F)$ (com pelo menos três deles distintos), e que 0 está no interior do envoltório convexo desses vetores. Então F possui um ponto fixo.*

Iniciaremos a demonstração deste resultado provando uma versão mais forte, provando o seguinte teorema:

Teorema. *Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ um homeomorfismo homotópico à identidade e seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento de f ao recobrimento universal. Se para todo $\delta > 0$ podemos encontrar um subconjunto compacto, invariante e δ-transitivo, $\Lambda \subset R(f)$, tal que 0 pertence ao interior do envoltório convexo de $\rho(f, \Lambda)$, então existe um ponto fixo para f.*

Como consequência destes teoremas, obteremos o próximo resultado, também devido a John Franks.

Teorema. *Suponha que $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ é um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento ao recobrimento universal. Se v é um vetor de coordenadas racionais no interior de $\rho(F)$, então existe um ponto $p \in \mathbb{T}^2$ tal que $\pi(p) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto periódico para f e*

$$v = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(p) - p}{n}.$$

No final do Capítulo 3 apresentaremos, sem demonstração, alguns teoremas que estudam a existência de pontos fixos para homeomorfismos $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ homotópicos à identidade cujos conjuntos de rotação são segmentos de reta com inclinação irracional. Apresentaremos também o teorema que garante a existência de conjuntos de rotação com interior não vazio e cujos pontos extremais não necessariamente têm coordenadas racionais.

Este trabalho foi baseado no artigo de John Franks , intitulado Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms [5].

Algumas figuras, ilustrando a representação geométrica dos resultados, foram acrescentadas com o intuito de facilitar a demonstração dos mesmos.

1 PRELIMINARES

1.1 DINÂMICA TOPOLÓGICA

Nesta seção daremos as definições e os principais resultados da dinâmica topológica e áreas relacionadas, que serão usados ao longo da dissertação. Maiores detalhes podem ser encontrados na extensa bibliografia existente, por exemplo, em [5], [11] e [18]. Alguns resultados, faremos referências sem prová-los por se tratar de resultados clássicos.

Definição 1.1.1. *Seja X um conjunto não vazio. Uma topologia em X é uma família τ de subconjuntos de X tal que:*

1. *$\emptyset, X \in \tau$.*
2. *A união de conjuntos de qualquer subfamília de τ pertence a τ.*
3. *A interseção dos conjuntos de toda subfamília finita de τ pertence a τ.*

Um espaço topológico é um par (X, τ) composto de um conjunto e uma topologia nesse conjunto. Um subconjunto U de X é aberto, se $U \in \tau$. Quando nos referimos ao espaço topológico (X, τ), dizemos que X está munido da topologia τ. Pela definição, sempre X e $\emptyset$ são abertos.

Exemplo 1.1.1. *Considere o conjunto $\mathbb{R}^n$. A coleção τ dado por: $\tau = \{A \subset \mathbb{R}^n : \forall\ a \in A, \exists\ \epsilon > 0$ com $B_\epsilon(a) \subset A\}$ é uma topologia sobre $\mathbb{R}^n$, conhecida como a topologia usual de $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 1.1.2. *Seja X um conjunto. Podemos definir uma topologia τ em X consistindo de todos os subconjuntos U, tal que $X - U$ é finito ou é o X todo. Também é uma topologia em X a coleção de todos $U \subset X$, tal que $X - U$ é enumerável ou é o X todo.*

Definição 1.1.2. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $U \subset X$ é uma vizinhança de um ponto $x \in X$, se U contém algum aberto que contenha x.*

Definição 1.1.3. *Uma métrica sobre um conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número $d(x,y)$ chamado a distância de x a y, de modo que se tenha, para todos $x, y, z \in X$:*

(a) $d(x,x) = 0$;

(b) Se $x \neq y$, *então* $d(x,y) > 0$;

(c) $d(x,y) = d(y,x)$;

(d) $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$.

Um conjunto X munido de uma métrica d (fixada) é chamado espaço métrico.

Observação 1.1.1. *Se $X = (X,d)$ é um espaço métrico, existe uma topologia natural sobre X, construída a partir da métrica d da seguinte forma:*

$$\tau = \{A \subset X : \ \forall\ a \in A, \exists\ \epsilon > 0 \ com\ B_\epsilon(a) \subset A\},$$

onde, $B_\epsilon(a) = \{x \in X : d(x,a) < \epsilon$. Como definido, τ é uma topologia em X, dita a topologia induzida pela métrica d.

Seja X um espaço topológico e seja $\sim$ uma relação de equivalência em X. Para cada $x \in X$, a classe de equivalência de x é definida como $[x] := \{y \in X : x \sim y\}$. O conjunto de todas as classes de equivalência

$$X/\sim := \{[x] : x \in X\}$$

é chamado *quociente de* X pela relação de equivalência $\sim$.

Existe uma aplicação natural sobrejetiva π, chamada de *aplicação quociente entre X e $X/\sim$* definida por:

$$\begin{aligned} \pi : X \quad &\to \quad X/\sim \\ x &\mapsto \quad [x]. \end{aligned}$$

Se (X,τ) é um espaço topológico e $\sim$ é uma relação de equivalência em X, então podemos munir $X/\sim$ com uma topologia, chamada topologia quociente. Para este fim faremos uso da próxima proposição.

Proposição 1.1.1. *Seja (X,τ) um espaço topológico e $\pi : X \to Y$ uma função sobrejetora entre X e o conjunto Y. Então podemos definir uma topologia em Y da seguinte forma:*

$$\tau_Y := \{A \subset Y : \pi^{-1}(A) \text{ é aberto em } X\}.$$

A topologia τ_Y é chamada de *topologia co-induzida pela aplicação* π. Se aplicarmos a proposição acima à aplicação quociente $\pi : X \to X/\sim$, então a topologia co-induzida $\tau_{X/\sim}$ em $X/\sim$ por π é chamada de *topologia quociente*. O espaço topológico $(X/\sim, \tau_{X/\sim})$ é chamado de *espaço quociente de* X *por* $\sim$.

Os exemplos que apresentaremos a seguir serão particularmente importantes neste trabalho. No primeiro, identificaremos o círculo unitário S^1 como um espaço quociente e no segundo identificaremos o toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ como um espaço quociente.

Definição 1.1.4. *Usualmente, definimos o círculo* S^1 *como o subconjunto de* $\mathbb{R}^2$

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

ou como o subconjunto de $\mathbb{C}$

$$S^1 = \{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

É imediato verificar que ambas as definições são equivalente. O toro $\mathbb{T}^n$ *é definido como o produto cartesiano*

$$\mathbb{T}^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1, \ n\text{-vezes}.$$

Observação 1.1.2. *Defina a seguinte relação de equivalência sobre* $\mathbb{R}$*: dois números reais* x *e* y *são equivalentes se eles diferem por um número inteiro, isto é*

$$x \sim y \text{ se e somente se } \ x - y \in \mathbb{Z}.$$

Vejamos que $\sim$ *é, de fato, uma relação de equivalência em* $\mathbb{R}$*, visto que*

1. *Dado* $x \in \mathbb{R}$, $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$*;*

2. *Dados* $x, y \in \mathbb{R}$ *com* $x \sim y$*, então* $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$*, logo* $y \sim x$*;*

3. *Dados* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *com* $x \sim y$ *e* $y \sim z$*, então* $x \sim z \in \mathbb{Z}$*, uma vez que* $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z}$.

Iremos representar o espaço quociente $\mathbb{R}/\sim$ *por* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *e denotar por* π *a projeção canônica*

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ x &\mapsto x \mod 1, \end{aligned}$$

onde $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *está munido da topologia quociente. A transformação logarítmica*

$$e^{2\pi i\theta} \mapsto \theta$$

estabelece um homeomorfismo entre S^1 e $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Desse modo, identificamos o círculo S^1 como o espaço quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$,

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Observação 1.1.3. *Na representação de S^1 como o espaço quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, intuitivamente estamos "enrolando"a reta infinitas vezes em torno do círculo, de forma que os números que estão na mesma classe de equivalência* $\mod 1$ *estão sobrepostos.*

Exemplo 1.1.3. *De maneira análoga podemos definir a relação de equivalência $\sim_n$ em $\mathbb{R}^n$ por: $v \sim_n w$ se e somente se $v - w \in \mathbb{Z}^n$. Logo, é possível mostrar que $\mathbb{T}^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n/\sim$.*

Observação 1.1.4. *Tanto o circulo S^1 como o toro $\mathbb{T}^n$ são espaços topológicos compactos, isto é, toda cobertura enumerável de abertos possui uma subcobertura finita.*

A seguir, apresentaremos algumas definições conhecidas da dinâmica topológica que iremos usar neste trabalho.

Definição 1.1.5. *Seja $C(X)$ o espaço das funções contínuas $f : X \to X$, com X é um espaço topológico compacto metrizável. A topologia uniforme em $C(X)$ é a topologia induzida pela métrica do* sup *que é dada por:*

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Definição 1.1.6. *Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua de um espaço topológico X em si mesmo.*

1. *Se $Y \subset X$, então Y é chamado de conjunto invariante por f, se $f(Y) \subset Y$. Quando $f(Y) = Y$, dizemos que Y é completamente invariante.*

2. *A órbita de um ponto $x \in X$ é $O(x) = \{f^n(x) : n > 0\}$. Claramente $O(x)$ é um conjunto invariante.*

3. *Um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$ é chamado ponto fixo de f. O conjunto dos pontos fixos para f é denotado por $Fix(f)$.*

4. *Um ponto $x \in X$ é periódico se existe $p > 0$ tal que $f^p(x) = x$. O menor p com esta propriedade é chamado de período de x.*

5. *Se X é um espaço métrico compacto, o conjunto ω-limite de um ponto $x \in X$ para f, $\omega_f(x)$, é o conjunto dos pontos limites da órbita de x, isto é, $y \in \omega_f(x)$ se, e só se, $f^{n_k}(x) \to y$ para alguma sequência de inteiros $n_k \to \infty$. Analogamente, se f é invertível, o conjunto α-limite de um ponto $x \in X$, $\alpha_f(x)$, é o conjunto dos pontos y tais que existe uma sequência m_j de modo que $f^{m_j}(x) \to y$ a medida que $m_j \to -\infty$.*

6. *Um ponto $x \in X$ é chamado recorrente para f, se para todo $\epsilon > 0$ existe $n > 0$ tal que $x \in \omega_f(x)$. Equivalentemente, Um ponto x é recorrente para f se para qualquer vizinhança V de x existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in V$. Em particular, todo ponto periódico é ponto recorrente.*

Definição 1.1.7. *Seja X um espaço métrico compacto e sem pontos isolados. Um homeomorfismo $f : X \to X$ é dito ser topologicamente transitivo se existir $x \in X$ tal que sua órbita $O_f(x) = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ seja densa em X.*

Definição 1.1.8. *Sejam X e Y dois espaços topológicos. Dizemos que $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Neste caso, iremos referir à transformação h, ou à sua existência, como conjugação.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Figura 1.1: $h(x)$ é uma conjugação topológica entre f e g.

Em outras palavras, uma conjugação topológica significa que f difere de g por uma mudança de coordenada. As conjugações são úteis pelo fato de preservarem propriedades dinâmicas tais como: invariância, transitividade, etc.

Definição 1.1.9. *Uma transformação $g : Y \to Y$ é um fator (ou fator topológico) de $f : X \to X$ se existir uma transformação contínua sobrejetora $h : X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$. A transformação h diz-se uma semi-conjugação.*

Agora iremos ver um resultado que usaremos na prova do nosso teorema principal. Antes, vejamos uma definição.

Definição 1.1.10. *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ representa o espaço das funções k-vezes continuamente diferenciáveis em $\overline{\Omega}$, isto é, o espaço das funções contínuas em*

$\overline{\Omega}$ que possuem todas as derivadas até ondem k, sendo restrições de funções contínuas definidas em Ω.

Proposição 1.1.2. *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Se b é um valor regular de f, então o conjunto $f^{-1}(\{b\})$ é finito.*

Demonstração. Se $x \in f^{-1}(\{b\})$, temos que $J_f \neq 0$, então pelo Teorema da Aplicação Inversa f é um difeomorfismo de uma vizinhança U de x sobre uma vizinhança de V de b, isto é, $f|_U : U \to f(U) = V$ é um difeomorfismo. Além disso, $f^{-1}(\{b\})$ é um fechado em $\overline{\Omega}$, consequentemente $f^{-1}(\{b\})$ é um fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$, pois $f^{-1}(\{b\}) \subset \overline{\Omega}$. Portanto, $f^{-1}(\{b\})$ é um compacto. Para cada $x \in f^{-1}(\{b\})$, considere a bola $B_{r_x}(x) \subset U_x$. Assim

$$f^{-1}(\{b\}) \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(\{b\})} B_r(x),$$

e desde que $\{B_r(x)\}$ é uma cobertura por abertos para o compacto $f^{-1}(\{b\})$, pelo teorema de Borel-Lebesgue podemos extrair uma subcobertura finita de maneira que

$$f^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_{r_j}(x_j).$$

Como $B_r(x) \subset U_x$ e $f : U_x \to f(U_x)$ é um difeomorfismo com $b \in f(U_x)$, temos que $f^{-1}(\{b\})$ é finito, ou seja, $f^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_k\}$ com $J_f(\xi_i) \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$. □

Nesse trabalho, estaremos interessados em trabalhar com espaços topológicos X e Y que sejam, de certa forma, "iguais". A noção de igualdade entre espaços topológicos é um conceito de topologia que estabeleceremos na próxima definição.

Definição 1.1.11. *Sejam X e Y espaços topológicos. Um homeomorfismo $f : X \to Y$ é uma bijeção contínua cuja função inversa f^{-1} seja contínua. Se f é um homeomorfismo entre os espaços X e Y, utilizamos a notação $X \cong Y$. A função f é um homeomorfismo local se para cada $x \in X$ existe um aberto $U \subset X$ contendo x tal que $V = f(U)$ é um aberto em Y e a restrição $f|_U$ é um homeomorfismo de U sobre V.*

Exemplo 1.1.4. *Sejam $\mathbb{R}^{2n}$ e $\mathbb{C}^n$ ambos com a topologia usual. Então $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ para todo $n \geq 1$. De fato, se $z \in \mathbb{C}$, então $z = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}$. Por outro lado, $\mathbb{C}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ $(2n)$-vezes. Definamos:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \\ (z_1, z_2, \ldots, z_n) &\to (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n). \end{aligned}$$

Claramente f é um homeomorfismo. Logo $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$.

No que segue, iremos considerar (X, d) um espaço métrico compacto, com a topologia induzida pela métrica d em X e $f : X \to X$ um homeomorfismo.

Definição 1.1.12. *Uma ϵ-cadeia de x_0 a x_n para f é uma sequência finita de pontos $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ em X, tal que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$ para $0 \leq i \leq n-1$. Quando $x_0 = x_n$, dizemos que a ϵ-cadeia é periódica. Um ponto x é dito recorrente por cadeia se para todo $\epsilon > 0$ existe uma ϵ-cadeia de x a x. Denotamos por $R(f)$ o conjunto dos pontos recorrentes por cadeia de f.*

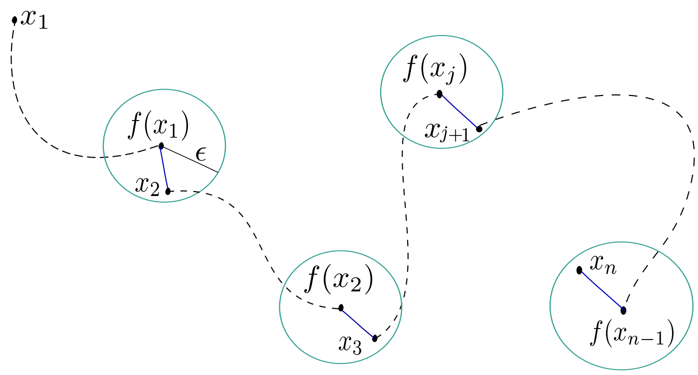


Figura 1.2: ϵ-cadeia.

Exemplo 1.1.5. *Dado $\epsilon > 0$, se x é um ponto recorrente para f, então existe um $n > 0$ de modo que $d(f^n(x), x) < \epsilon$. Então, $x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ é uma ϵ-cadeia de x a $f^{n-1}(x)$ para f. Em particular, se x é um ponto periódico de período n, então a ϵ-cadeia $x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ é uma ϵ-cadeia periódica, chamada ϵ-cadeia trivial. No caso em que $f = Id$, temos que $R(f) = X$.*

Proposição 1.1.3. *O conjunto $R(f)$ é compacto e completamente invariante por f.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que o conjunto $R(f)$ é fechado. De fato, seja $x_n \in R(f)$ com $x_n \to x$. Como f é contínua em x, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} \text{ se } d(x, y) < \delta_0.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_0, \epsilon/2\}$ podemos escolher $n > 0$ tal que $x_n \in B_\delta(x)$. Seja $x_n = y_1, \ldots, y_k = x_n$ uma $\epsilon/2$-cadeia de x_n a x_n. A sequência $x = z_1, \ldots, z_k = x$ onde $y_i = z_i$ para $2 \leq i \leq k-1$ e tal que

$$d(f(z_i), z_{i+1}) = d(f(y_i), y_{i+1}) < \epsilon \;\; \forall \;\; 2 \leq i \leq k-1,$$
$$d(f(z_1), z_2) = d(f(x), y_2) \leq d(f(x), f(x_n)) + d(f(x_n), y_2) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

e

$$d(f(z_{k-1}), z_k) = d(f(y_{k-1}), x) \leq d(f(y_{k-1}), f(y_k)) + d(f(y_k), x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Logo $x = z_1, \ldots, z_k = x$ é uma ϵ-cadeia de x a x, assim $x \in R(f)$. Portanto, $R(f)$ é fechado. Em particular, como X e compacto, temos que $R(f)$ é compacto.

Vejamos agora que $R(f)$ é invariante por f, isto é, $f(R(f)) = R(f)$. De fato, seja $x \in R(f)$, vamos mostrar que $f(x) \in R(f)$. Dado $\epsilon > 0$, como $R(f)$ é compacto, a função contínua f é uniformemente contínua em $R(f)$. Logo, existe δ_0 tal que

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon \quad \text{se} \quad d(x, y) < \delta_0, \quad \forall \;\; x, y \in R(f)$$

e considere $x = x_1, \ldots, x_n = x$ uma δ-cadeia de x a x com $\delta = \min\{\delta_0, \epsilon/2\}$. Afirmamos que $f(x) = y_1, \ldots, y_n = f(x)$ onde $y_k = x_{k+1}$ para $2 \leq k \leq n-1$, é uma δ-cadeia de $f(x)$ a $f(x)$. De fato, temos que

$$d(f(y_1), y_2) = d(f(f(x)), x_3) \leq d(f(f(x)), f(x_2)) + d(f(x_2), x_3) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$
$$d(f(y_k), y_{k+1}) = d(f(x_{k+1}), x_{k+2}) < \epsilon \;\; \forall \;\; 2 \leq k \leq n-2$$

e

$$d(f(y_{n-1}), y_n) = d(f(x), f(x)) = 0 < \epsilon.$$

Logo $f(x) \in R(f)$ e $f(R(f)) \subset R(f)$. De modo análogo prova-se que $f^{-1}(R(f)) \subset R(f)$ e assim, fica provado a igualdade $f(R(f)) = R(f)$. □

Outra propriedade importante do conjunto $R(f)$ é que podemos definir uma relação de equivalência em $R(f)$, como veremos nas definições 1.1.13 e 1.1.14.

Definição 1.1.13. *Para $\delta > 0$ fixo, dizemos que x e $y \in R(f)$ são δ-equivalentes se existe uma δ-cadeia de x para y e uma de δ-cadeia de y para x, neste caso usaremos a notação $x \sim_\delta y$. Um conjunto compacto $\Lambda \subset R(f)$, invariante por f, é δ-transitivo se para quaisquer $x, y \in \Lambda, x$ é δ-equivalente a y.*

A relação $x \sim_\delta y$ define uma relação de equivalência em $R(f)$. De fato, dados $x, y \in R(f)$ as propriedades de reflexividade e simetria são facilmente verificadas. Para verificar a propriedade de transitividade, basta ver que podemos conectar duas δ-cadeias para obter uma nova δ-cadeia.

Definição 1.1.14. *Dado $\delta > 0$ fixo, chamamos de componentes δ-transitivas de $R(f)$ as classes de equivalências resultantes ao quocientar $R(f)$ pela relação de equivalência $x \sim_\delta y$.*

Quando não exigimos que $\delta > 0$ seja fixo na Definição 1.1.14, podemos definir uma outra relação de equivalência $\sim$ em $R(f)$ por $x \sim y$ se para cada $\delta > 0$ existe uma δ-cadeia em $R(f)$ de x a y e também existe uma δ-cadeia de y a x.

Definição 1.1.15. *Chamamos componentes transitivas por cadeia as classes de equivalência em $R(f)$ obtidas pela relação de equivalência $\sim$ definida anteriormente.*

Lema 1.1.1. *Dado $\delta > 0$ e um homeomorfismo $f : X \to X$ de um espaço métrico compacto, então existe um número finito de componentes δ-transitivas.*

Demonstração. Uma componente δ-transitiva é a união de componentes transitivas por cadeia. Suponhamos que existam x e y em componentes δ-transitivas distintas satisfazendo $d(x, y) < \delta/4$. Como $x \in R(f)$, existe uma $\delta/4$-cadeia de x a x, $x = x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x$. Além disso,

$$d(f(x_{n-1}), y) \leq d(f(x_{n-1}), x_n) + d(x_n, y) \leq \delta,$$

ou seja, temos uma δ-cadeia de x à y. Analogamente podemos encontrar uma δ-cadeia de y à x. Portanto a distância entre duas componentes δ-transitivas distintas deve ser maior que $\delta/4$.

Portanto, se existisse um número infinito de componentes δ-transitivas, então existiria uma quantidade infinita de subconjuntos, cada um a uma distância pelo menos $\delta/4$ dos outros conjuntos. Isto é impossível visto que X é compacto. □

Corolário 1.1.1. *As componentes δ-transitivas de $R(f)$ são compactas e invariantes.*

Demonstração. Se Λ é uma componente δ-transitiva e $x \in \overline{\Lambda}$, então existe $x_k \in \Lambda$ tal que $d(x, x_k) < \delta/4$. Então, pelo lema que acabamos de ver, x_k e x estão em Λ. Portanto as componentes δ-transitivas são fechadas. Sendo $R(f)$ compacto, temos que as componentes também são compactas. Além disso, são invariantes visto que os pontos que podem ser conectados com x por uma δ-cadeia, também podem ser conectados com $f(x)$ pela definição de cadeia. □

A seguir, definiremos o conceito de função de Lyapounov completa para um homeomorfismo de um espaço métrico compacto. Usaremos o conceito de tal função na demonstração dos Teoremas 3.4.1 e 3.4.2. No Teorema 1.1.1 provaremos a existência desta função para homeomorfismo de um espaço métrico compacto.

Definição 1.1.16. *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo de um espaço métrico compacto. Uma função de Lyapounov completa para f é uma função contínua $g : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo:*

1. *Se* $x \notin R(f)$*, então* $g(f(x)) < g(x)$*.*

2. *Se* $x, y \in R(f)$*, então* $g(x) = g(y)$ *se, e somente se* $x \sim y$*, isto é,* x *e* y *estão na mesma componente transitiva por cadeia.*

3. $g(R(f))$ *é um subconjunto compacto nunca-denso de* $\mathbb{R}$*.*

Definição 1.1.17. *Se* $A \subset X$ *é um subconjunto compacto e existe uma vizinhança aberta* U *de* A *tal que* $f(\overline{U}) \subset U$ *e* $\bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U}) = A$*, então* A *é chamado um atrator de* f *e* U *uma vizinhança de isolamento de* A*.*

Se $V = X - \overline{U}$ e $A^* = \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(\overline{V})$, então A^* é um atrator para f^{-1} com vizinhança de isolamento V.

Definição 1.1.18. *Se* A *é um atrator, então o atrator* A^**, como nas considerações anteriores, é chamado o repulsor dual para* A*.*

Com o objetivo de provar o Teorema 1.1.1, que garante a existência de uma função de Lyapounov completa para qualquer homeomorfismo $f : X \to X$, com X um espaço métrico compacto, veremos alguns lemas auxiliares.

Lema 1.1.2. *Seja* $f : X \to X$ *um homeomorfismo com* X *um espaço métrico compacto. Valem as seguintes afirmações:*

(a) As vizinhanças de isolamento de atratores disjuntos são disjuntas.

(b) O conjunto dos atratores disjuntos de f *é enumerável.*

(c) Se $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *são os atratores de* f *e* $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ *são os respectivos repulsores duais, então*

$$R(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup A_n^*).$$

(d) Sejam x *e* $y \in R(f)$*. Então* x *e* y *estão na mesma componente transitiva por cadeia se, e somente se, não existe nenhum atrator que contenha a* x *cujo repulsor dual contenha a* y *e vice-versa.*

Demonstração. Considere em X a topologia induzida pela métrica de X.

(a) Sejam U e U' as vizinhanças de isolamento de atratores A e A' e suponhamos por absurdo que $U \cap U' \neq \emptyset$. Como U e U' são abertos, então $U \cap U'$ é aberto. Além disso, $\overline{U \cap U'}$ é compacto. Logo

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U \cap U'}) \subset \bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U}) = A$$

e

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U\cap U'}) \subset \bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U'}) = A'.$$

Contradizendo a hipótese de que $A\cap A^* = \emptyset$.

(b) Seja $B = \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base enumerável para a topologia de X. Dado qualquer atrator A com vizinhança de isolamento U, temos que U é a união enumerável de conjuntos da base B. Sendo A um compacto, existe uma quantidade finita de V_i, digamos $V_{i_1}\dots V_{i_k}$, de modo que $A\subset V_{i_1}\cup\ldots\cup V_{i_k}\subset U$. Então

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{U}) = A = \bigcap_{n\geq 0} f^n(V_{i_1}\cup\ldots\cup V_{i_k}) = A.$$

Além disso, como vizinhanças de isolamentos de atratores disjuntos são disjuntas por (a), não poderia existir uma quantidade maior de atratores disjuntos do que elementos em B.

(c) Provemos primeiro a inclusão $R(f)\subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup A_n^*)$. Para isto, mostremos que se $x\notin A\cup A^*$ para algum atrator A então $x\notin R(f)$. Se U é a vizinhança de isolamento para um atrator A e $x\notin A\cup A^*$ então $x\in U$ ou $x\in \overline{V}$. Suponhamos que $x\in U$ visto que o outro caso é análogo. Como $x\notin A$ então $x\notin f^n(U)$ para algum n. Seja m o menor dos n satisfazendo $x\notin f^n(U)$, então $x\in f^{m-1}(U)-f^m(U)$.

Escolha um ϵ_0 de modo que qualquer ϵ_0-cadeia começando em $x=x_1$ tenha $x_3\in f^{m+1}(U)$. Considerando

$$\epsilon_1 = d(f^{m-1}(U)-f^m(U), f^{m+1}(U)), \tag{1.1}$$

tomemos

$$\epsilon = \frac{1}{2}\min\{\epsilon_1,\epsilon_0\}. \tag{1.2}$$

Afirmamos que não existe uma ϵ-cadeia de x a x visto que uma tal cadeia não pode conectar um ponto de $f^{m+1}(U)$ com um ponto de $f^{m-1}(U)-f^m(U)$. Isto porque $f^{m+2}(U)\subset f^{m+1}(U)$ e como $x_3\in f^{m+1}(U)$ teremos que $f(x_3)\subset f^{m+1}(U)$. Além disso, por 1.1 e 1.2 teremos que $B(f(x_3),\epsilon)\cap\{f^{m-1}(U)-f^m(U)\}=\emptyset$. Então, se $x\notin A\cap A^*$, então $x\notin R(f)$.

Vamos agora provar a inclusão $\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup A_n^*)\subset R(f)$. Suponhamos por absurdo que exista $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup A_n^*)$ tal que $x\notin R(f)$, logo existe um ϵ_0 de tal modo que não existe uma ϵ_0 cadeia periódica para x. Representemos por $\Omega(x,\epsilon)$ o conjunto de todos os $y\in X$ tal que existe uma ϵ-cadeia de x para y e seja $V=\Omega(x,\epsilon)$. Este conjunto é aberto e $f(\overline{V})\subset V$ visto que se $z\in f(\overline{V})$, existe $z_0\in V$ tal que $d(f(z),f(z_0))<\epsilon_0$ e, portanto, uma ϵ_0-cadeia de x para z_0 produz uma ϵ_0-cadeia de x para $f(z)$. Teremos que

$$\bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{V}) = A$$

é um atrator com vizinhança de isolamento V.

Visto que estamos supondo como hipótese que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$, então $x \in A$ ou $x \in A^*$. Agora, como estamos assumindo que não existe uma ϵ_0-cadeia periódica para x, então $x \notin A$. Por outro lado,

$$\omega_f(x) = \{\text{pontos de acumulação de } \{f^n(x)\}_{n\geq 0}\} \tag{1.3}$$

deve está contido em V. Logo, se $x \in A_i^*$, como A_i^* é fechado e invariante, teríamos que $\omega_f(x) \subset A_i^*$, chegando em uma contradição.

(d) Suponhamos primeiro que $x, y \in R(f)$ estão na mesma componente transitiva por cadeias e suponhamos também que $x \in A$, com A um atrator. Mostremos que $y \in A$.

Inicialmente, pelo item (c), temos que $y \in A \cup A^*$. Por outro lado, se U é uma vizinhança de isolamento de A,

$$d(X - U, f(U)) > \epsilon, \tag{1.4}$$

para algum $\epsilon > 0$. Logo, não existe nenhuma $\epsilon/2$-cadeia de pontos de U para pontos de $X - U$. Desse modo, não pode existir nenhuma $\epsilon/2$-cadeia entre pontos de A e A^*, visto que $A \subset U$ e $A^* \subset X - U$. Logo $y \in A$.

Para provar a recíproca, suponhamos que existam dois pontos $x, y \in R(f)$ tais que $x \in A$, com A um atrator, se e somente, se $y \in A$. Dado um $\epsilon > 0$, seja $V = \Omega(x, \epsilon)$ o conjunto dos pontos que podem se conectar com x com uma ϵ-cadeia. Como $x \in R(f)$ então $x \in V$. Como em (b), V é uma vizinhança de isolamento de um atrator A_0 e como $x \in A_0 \cup A_0^*$, então $x \in A_0$. Por hipótese, $y \in A_0 \subset V$, ou seja, x pode-se conectar com y por uma ϵ-cadeia.

Analogamente, se prova que y pode conectar com x por uma ϵ-cadeia , e como isto vale para todo $\epsilon > 0$, x e y estão na mesma componente transitiva por cadeias. $\square$

Lema 1.1.3. *Existe uma função contínua $g : X \to [0, 1]$ tal que $g^{-1}(0) = A,\ g^{-1}(1) = A^*$ e seja estritamente decrescente nas órbitas dos pontos de $X - (A \cup A^*)$.*

Demonstração. Defina a função $g_0 : X \to [0, 1]$ como:

$$g_0(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, A^*)}.$$

Sendo $g_0(X) = [0, 1]$ garantimos que existe

$$g_1(x) = \sup\{g_0(f^n(x)) :\ n \geq 0\}.$$

Então $g_1 : X \to [0, 1]$ e $g_1(f(x)) \leq g_1(x)$ para todo x.

Vejamos que $g_1(x)$ é contínua. Seja $\lim x_i = x \in A$, então $\lim g_1(x_i) = 0$, e vale o análogo para A^*. Isto nos diz que g_1 é contínua nos pontos de $A \cup A^*$. Seja $N = U - f(\overline{U})$ e $r = \inf\{g_0(x); x \in N\}$, com U uma vizinhança de isolamento de A^*. Como $f^n(N) \subset f^n(\overline{N})$ e $\bigcap_{n\geq 0} f^n(\overline{N}) = A$ então existe um n_0 tal que $g_0(f^n(x)) \subset [0, r/2]$ para todo $x \in N$, quando $n > n_0$. Então, para todo $x \in N$, temos

$$g_1(x) = \max\{g_0(f^n(x)), 0 \leq n \leq n_0\}.$$

Então g_1 é contínua em N e em $X - (A \cup A^*)$, visto que

$$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n(N) = X - (A \cup A^*).$$

Finalmente, definamos

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_1(f^n(x))}{2^{n+1}}.$$

Esta função e decrescente ao longo das órbitas dos pontos de $X - (A \cup A^*)$ e contínua porque a série e uniformemente convergente e g_1 é contínua. Além disso, $g^{-1}(0) = A, g^{-1}(1) = A^*$. Logo g satisfaz as hipóteses do lema. $\square$

Teorema 1.1.1. *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo com X um espaço métrico compacto, então existe uma função de Lyapounov completa para f.*

Demonstração. Os Lemas 1.1.2 e 1.1.3 garantem que existem uma quantidade enumerável de atratores A_n e, para cada n, existe uma função contínua $g_n : X \to [0, 1]$ que satisfaz: $g_n^{-1}(0) = A_n, g_n^{-1}(1) = A_n^*$ e que seja estritamente decrescente nas órbitas dos pontos de $X - (A_n \cup A_n^*)$. Considere agora

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{3^n}. \tag{1.5}$$

Mostraremos que g é uma função de Lyapounov completa para f. Inicialmente, como a série (1.5) tem os termos positivos e podemos limitá-la superiormente por uma p-série convergente, então a série (1.5) converge uniformemente para g, logo g é contínua. Além disso, se $x \in R(f)$ então $x \in A_n \cup A_n^*$ para todo n e portanto, os valores de $g_n(x)$ só podem ser 0 ou 1, ou seja, a expressão ternária de $g(x)$ pode ser escrita unicamente com 0 ou 2. Logo $g(x) \in C$, onde C é conjunto de Cantor. Agora, veja que

1. Se $x \notin R(f)$ exite algum A_i tal que $x \notin A_i \cup A_i^*$ e $g(f(x)) \leq g(x)$.

2. Sejam x e $y \in R(f)$. Para que seja $g(x) = g(y)$ é necessário que $g_n(x) = g_n(y)$ para todo n. Por outro lado, como $g_n(x) \in \{0, 1\}$ e $g_n(y) \in \{0, 1\}$, então $g(x) = g(y)$ se, e somente se, não existe n tal que $x \in A_n$ e $y \in A_n^*$. Usando novamente o Lema 1.1.2, isto é equivalente a x e y estarem na mesma componente transitiva por cadeia.

3. Como g é contínua, $g(x) \geq 0$ para todo x e $R(f)$ é compacto, segue que $g(R(f))$ é compacto e $g(X)$ não é denso em $\mathbb{R}$.

Portanto, g é uma função de Lyapounov completa para f. $\square$

O próximo teorema fornece uma caracterização para a decomposição de $R(f)$ em componentes δ-transitivas via uma função de Lyapounov completa e será parte fundamental na demonstração do Teorema 3.4.1, o principal teorema deste trabalho.

Teorema 1.1.2. *Dado $\delta > 0$ e um homeomorfismo de um espaço compacto $f : X \to X$, existe uma função de Lyapounov completa $g : X \to \mathbb{R}$ para f e valores regulares para g, $c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ tal que se $\Lambda_i = R(f) \cap g^{-1}([c_{i-1}, c_1])$, então $\{\Lambda_i\}, 1 \leq i \leq n$, são as componentes δ-transitivas de f.*

Demonstração. Sejam $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ as componentes δ-transitivas para f. Vamos ordena-lás de tal forma que se $i < j$ então não existe δ-cadeia de Λ_i para Λ_j. Isto é possível porque não pode existir "ciclo"de Λ_i's com cada um possuindo uma δ-cadeia para o outro e o último tendo uma δ-cadeia com o primeiro.

Seja U_i o conjunto dos $z \in X$ tal que existe uma δ-cadeia de Λ_i para z. Temos que U_i é aberto. Além disso $f(\overline{U_i}) \subset U_i$, porque se $z \in \overline{U}_i$, então existe um $z_0 \in U_i$ tal que $d(f(z), f(z_0)) < \delta$ e, consequentemente, uma δ-cadeia de x para z_0 resulta em uma δ-cadeia $x = x_1, x_2, \ldots, x_k, z_0, f(z)$ de x para $f(z)$.

Consideremos

$$A_i = \bigcap_{n \geq 0} f^n(\overline{U}_i) \quad e \quad A_i^* = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(X - U_i).$$

Teremos que A_i e, A_i^* são um par de atrator repulsor e $\Lambda_i \subset A_i$. Usando o resultado do Lema 1.1.3, teremos que existe uma função contínua $g_i : X \to [0, 1]$ tal que $A_i = g_i^{-1}(0), A_i^* = g_i^{-1}(1)$ e $g_i(f(x)) < g_i(x)$ para todo $x \in X - (A_i \cup A_i^*)$. Se $i < j$, como não existe uma δ-cadeia de Λ_i a Λ_j, então $\Lambda_j \subset A_i^*$. Assim $g_i(\Lambda_j) = 1$.

Seja $h(x) = \sum_{i=1}^{n} 2^i g_i(x)$ e note que $h(f(x)) \leq h(x)$ para todo $x \in X$. Para $x \in R(f) = \bigcup \Lambda_i, h(x)$ é um número par inteiro entre 0 e 2^{n+1}. Também note que $h(x) = h(y)$ se, e somente se, $g_i(x) = g_i(y)$ para todo i. Então, se $x \in \Lambda_i, y \in \Lambda_j, i < j$, então $h(x) \neq h(y)$ pois $g_i(x) \neq g_j(y)$. Agora, se $g_0 : X \to [0,1]$ é uma função de Lyapounov completa para f, então $g(x) = g_0(x) + h(x)$ é a função desejada, visto que

1. Se $x \notin R(f)$ então $g(f(x)) < g(x)$ porque $h(f(x)) \leq h(x)$ e $g_0(f(x)) \leq g_0(x)$.

2. Se x e $y \in R(f)$ então $g(x) = g(y)$ se, e somente se, $x \sim y$. Porque se $x \sim y$ então x e y estão na mesma componente δ-transitiva, logo $g_0(x) = g_0(y)$ e $h(x) = h(y)$, portanto $g(x) = g(y)$. Por outro lado, se $x \nsim y$, podemos supor que $x \in \Lambda_i$ e $y \in \Lambda_j$ com $i < j$, então $|h(x) - h(y)| > 1$ e $|g_0(x) - g_0(y)| < 1$. Consequentemente, $g(x) \neq g(y)$.

3. $g(R(f))$ é um subconjunto compacto e nunca denso em $\mathbb{R}$, porque $g_0(x)$ cumpre esta condição e se $x \in R(f)$, $h(x)$ é um número par entre 0 e 2^{n+1}.

Seja $\{k_m 2^{l_m}, m = 1, ..., n\}$ o conjunto dos valores assumidos por $h(x)$ em $R(f)$, ordenados de modo crescente. Seja j tal que $\Lambda_i \subset h^{-1}(k_j 2^{l_j})$, como $g_0(R(f)) \subset [0,1]$ então

$$\Lambda_i = R(f) \cap g^{-1}([k_j 2^{l_j}, k_j 2^{l_j} + 1]).$$

$\square$

Observação 1.1.5. *Vejamos que, em $R(f)$, a função h definida no Teorema 1.1.2 assume um número inteiro entre 0 e 2^{n+1} com n correspondendo ao número de componentes δ-transitivas de $R(f)$. Se $R(f)$ tem n componentes δ-transitivas, veja que*

1. *Se $\Delta_1 \subset A_i$ para $1 \leq i \leq n$, então $g_i(\Delta_1) = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Logo $h(\Delta_1) = 0$.*

2. *Se $\Delta_1 \subset A_i^*$ para $2 \leq i \leq n$, então $g_1(\Delta_1) = 0$ e $g_i(\Delta_1) = 1$ para $2 \leq i \leq n$. Logo $h(\Delta_1) = 2^{n+1} - 4$.*

Ou seja, existem configurações em que h pode assumir 0 ou $2^{n+1} - 4$ em $R(f)$. Note que $2^{n+1} - 4$ é o valor máximo assumido por h em $R(f)$, uma vez que, se $x \in R(f)$, pelos menos um dos $g_i = 0$.

A última proposição desta seção terá uma grande importância na demonstração do Teorema 3.4.1, antes desta proposição, necessitamos da próxima definição.

Definição 1.1.19. *Dado um espaço topológico X e uma função contínua $f : X \to X$, dizemos que um ponto x_0 é não-errante se, para qualquer vizinhança V de x_0, tivermos $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$ para algum $n \geq 1$. Caso contrário chamaremos x_0 de ponto errante. Denotaremos o conjunto de todos os pontos não-errantes por $\Omega(f)$.*

Proposição 1.1.4. *Seja X um espaço topológico e $f : X \to X$ uma função contínua. Então, temos que $\Omega(f) \subset R(f)$.*

Demonstração. Seja $x \in \Omega(f)$ e $\epsilon > 0$. Observe que podemos, por continuidade, escolher uma vizinhança $N \subset B_\epsilon(x)$ de x tal que $f(N) \subset B_\delta(f(x))$. Como x é não-errante, existe $k > 0$ tal que $N \cap F^k(N) \neq \emptyset$. Seja $y \in N \cap f^k(N)$ e considere $y, y_1, y_2, \ldots$ sua órbita. Como $y_1 \in f(N) \subset B_\epsilon(f(x))$ e $y_k \in B_\epsilon(x)$, então

$$d(f(x), y_1) < \epsilon \text{ e } d(f(y_{k-1}), x) = d(y_k, x) < \epsilon.$$

Logo $x, y_1, \ldots, y_{k-1}, x$ é uma ϵ-cadeia recorrente para x, ou seja, $x \in R(f)$. $\square$

O Teorema 1.1.3 devido a J. Oxtoby e o Teorema 1.1.4 devido a J. von Nagy, que enunciaremos a seguir, podem ser encontrados em [20] e [18], respectivamente.

Teorema 1.1.3. *Seja U um aberto do plano, sejam $F_1, \ldots, F_n$ subconjuntos disjuntos e finitos de U e sejam $D_1, \ldots D_n$ discos abertos e disjuntos. Então existem arcos poligonais disjuntos $A_1, \ldots A_n$ tais que $F_j \subset A_j \subset D_j \cap U$ com $j = 1, \ldots n$ se, e somente se, cada F_j está completamente contido em apenas uma componente conexa de $D_j \cap U$.*

Teorema 1.1.4. *Seja F um subconjunto limitado e fechado do plano com diâmetro $d > 0$. Existe um disco D de diâmetro mínimo que contem F, e este diâmetro é no máximo $2d/\sqrt{3}$.*

Encerraremos esta seção enunciando alguns resultados clássicos que utilizaremos neste trabalho, sem demonstrá-los, pois as demonstrações fogem do objetivo do trabalho.

Teorema 1.1.5 (Teorema do ponto fixo de Brouwer)**.** *Seja D a bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$ e $f : D \to D$ uma função contínua com $f(D) \subset D$. Então existe um ponto fixo x, fixo f, em D.*

Observação 1.1.6. *O conjunto D pode ser substituído por qualquer outro conjunto fechado, limitado, convexo e homeomorfo ao disco.*

O Proposição 1.1.5 obtida por Brouwer será utilizado na demonstração do Teorema Principal e pode ser encontrada nos trabalhos de Brown em [3] e Fathi em [4].

Proposição 1.1.5 (Brouwer)**.** *Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um homeomorfismo que preserva orientação e possui um ponto periódico, então f tem um ponto fixo.*

Os Teoremas 1.1.6 e 1.1.7 podem ser encontrados em diversos livros como por exemplo em [11] e [21], respectivamente.

Teorema 1.1.6 (Teorema Ergódico de Birkhoff)**.** *Seja* $(X, \Re, \mu)$ *um espaço de medida e* $T : X \to X$ *uma transformação que preserva medida* μ, *com* $\mu(X) < \infty$. *Seja* $f \in L^1(\mu)$, *então o seguinte limite existe:*

$$\widehat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)),$$

para μ *quase todo ponto em* X. *Se além disso* μ *for ergódica para* T,

$$\frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu = \widehat{f},$$

para μ *quase todo ponto em* X.

Definição 1.1.20. *Sejam* $(X, \Re, \mu)$ *um espaço de medida e* $T : X \to X$ *uma transformação contínua. Uma medida* μ *é invariante por* T *se*

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) \ \ \textit{para todo conjunto mensurável} \ \ E \subset M.$$

Teorema 1.1.7. *Seja* $T : X \to X$ *é uma transformação contínua em um espaço métrico compacto* X. *Então, para cada* $\mu \in M(T)$ *temos* $\mu(\Omega(T)) = 1$, *onde* $M(T)$ *o conjunto das medidas invariantes sobre* T.

1.2 HOMOTOPIA E GRUPO FUNDAMENTAL

Definição 1.2.1. *Sejam* $f, g : X \to Y$ *duas aplicações contínuas entre espaços topológicos* X *e* Y. *Dizemos que* f *e* g *são homotópicas se existe uma aplicação contínua* $F : X \times I \to Y$, *onde* $I = [0, 1]$, *tal que* $F(x, 0) = f(x)$ *e* $F(x, 1) = g(x)$, *para todo* $x \in X$. *A aplicação* F *é chamada de homotopia entre* f *e* g.

Uma homotopia entre f e g é uma família a um parâmetro de funções contínuas entre Xe Y, isto é, para cada $t \in I$ a função $f_t : X \to Y$ é contínua, onde $f_t(x) = H(x, t)$. Intuitivamente, a homotopia deforma continuamente f em g. Usaremos a notação $f \simeq g$ para simplificar que f é homotópica a g.

Exemplo 1.2.1. *Seja* $Y \subset E$, *onde* E *é um espaço vetorial normado. Dadas a funções contínuas* $f, g : X \to Y$, *suponha que para todo* $x \in X$, *o segmento de reta* $[f(x), g(x)] = \{tf(x) + (1 - t)g(x) : t \in [0, 1]\}$, *está contido em* Y. *Então* $f \simeq g$. *De fato, basta definir* $F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ *para obter uma homotopia* $F : X \times I \to Y$ *entre* f *e* g, *chamada homotopia linear. Em particular, cada função contínua* $f : X \to E$ *é homotópica a função constante* 0, *pela homotopia* $F(x, t) = (1 - t)f(x)$.

Exemplo 1.2.2. *Dados duas funções contínuas $f, g : X \to S^1$, se $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in X$, então $f \simeq g$. De fato, pelas condições tem-se que $(1-t)f(x) + tg(x) \neq 0$ para todo $t \in I$ e para todo $x \in X$. Então obtemos uma homotopia $F : X \times I \to S^1$, entre f e g, tomando*

$$F(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{|(1-t)f(x) + tg(x)|}.$$

Em particular, se $f : S^1 \to S^1$ satisfaz $f(x) \neq -x$ para todo $x \in S^1$, então f é homotópico a função identidade $Id : S^1 \to S^1$.

Vamos, a partir de agora, considerar um caso particular do conceito geral de homotopia. Estudaremos homotopias de caminhos. Dedicaremos atenção especial aos caminhos fechados.

Definição 1.2.2. *Um caminho num espaço topológico X é uma aplicação contínua $\alpha : I = [0,1] \to X$. Dizemos que dois caminhos $\alpha, \beta : I \to X$ com extremos fixos, isto é, com $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$, são homotópicos se existe uma homotopia $F : I \times I \to X$ tal que dados quaisquer $s, t \in I$, então $F(s,0) = \alpha(s), F(s,1) = \beta(s)$, $F(0,t) = \alpha(0) = \beta(0)$ e $F(1,t) = \alpha(1) = \beta(1)$. No caso em que α e β são curvas fechadas, ou seja, quando $\alpha(a) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = x_0$, usamos a notação $\alpha \simeq \beta$.*

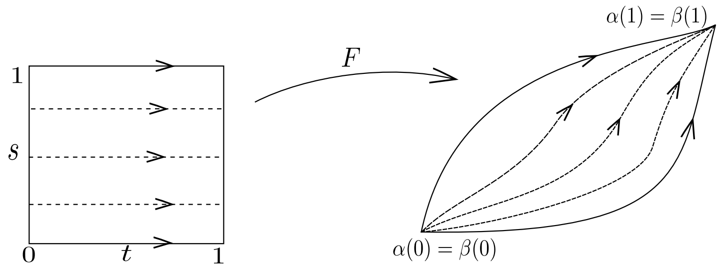


Figura 1.3: Caminhos homotópicos.

Exemplo 1.2.3. *Seja X um subconjunto convexo de uma espaço vetorial normado. Se $\alpha, \beta : I \to Y$ são caminhos fechados com mesmas extremidades, então $\alpha \simeq \beta$. Com efeito, basta definir $H : I \times I \to X$ ponto $F(s,t) = (1-t)\alpha(s) + t\beta(s)$. Vê-se que F é um homotopia entre α e β. Essa homotopia é dita homotopia linear.*

Sejam $\alpha, \beta : I \to X$ caminhos tais que o fim de α coincide com a origem de β, ou seja, $\alpha(1) = \beta(0)$, $I = [0,1]$. Definimos o produto $\alpha * \beta : I \to X$, também conhecido como justaposição de caminhos, como sendo o caminho que consiste em percorrer primeiro α e depois β, isto é,

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1), & \text{se} \quad 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

O *caminho inverso* de $\alpha : I \to X$ é, por definição, o caminho $\alpha^{-1} : I \to X$, dado por $\alpha^{-1} = \alpha(1-s), 0 \leq s \leq 1$.

Podemos verificar, a partir das definições acima e usando (1.6), que tanto a homotopia quanto a homotopia com extremos fixos são relações de equivalência, isto é, satisfazem as propriedades de reflexão, simetria e transitividade.

Lema 1.2.1. *Seja X um espaço topológico. Se $f : X \to X$ é homotópico à identidade $Id : X \to X$, então a composição $f^k : X \to X$ é homotópico à identidade, $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $F : X \times [0,1] \to X$ uma homotopia entre f e $Id(x)$ tal que $F(x,0) = Id(x)$ e $F(x,1) = f(x)$, então a composição $H = f \circ F : X \times [0,1] \to X$ é uma aplicação contínua satisfazendo $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = f^2(x)$, ou seja, $H(x,t)$ é uma homotopia entre f e f^2. Então, por transitividade, f^2 é homotópico à Id. Procedendo de modo análogo, f^k é homotópico à Id. $\square$

Usamos a notação $[\alpha]$ para designar a classe de homotopia do caminho α e a notação $\pi_1(X, x_0)$ para designar o conjunto das classes de homotopias de caminhos fechados $\alpha : I \to X$ tais que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. O ponto x_0 é chamado de ponto base de $\pi_1(X, x_0)$.

Dados $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ temos que $(\alpha * \beta)(0) = (\alpha * \beta)(1) = x_0$. Logo $\alpha * \beta$ é um caminho em X, fechado em x_0. Então $[\alpha * \beta] \in \pi_1(X, x_0)$.

Definição 1.2.3. *Em $\pi_1(X, x_0)$ denotemos e definamos o seguinte produto por:*

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_0) \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]. \end{aligned}$$

Para uma demonstração do próximo teorema, consultar o Livro *Introdução à Topologia Algébrica*, em [23].

Teorema 1.2.1. *$\pi_1(X, x_0)$, com o produto definido na Definição 1.2.3, é um grupo, chamado grupo fundamental com ponto base x_0.*

Uma questão natural que surge na definição de grupo fundamental é a seguinte: dados $x_0, x_1 \in X$ que relação existe entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$? Quando o espaço X é conexo por caminhos, pode-se provar que $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$, isto é, os grupos $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos. Mas precisamente, cada classe de homotopia $[\beta]$ de caminhos $\beta : I \to X$ com $\beta(0) = x_0$ e $\beta(1) = x_1$ induz um isomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi_\beta : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_1) \\ [\alpha] &\mapsto \left[\beta \alpha \beta^{-1}\right]. \end{aligned}$$

Neste caso diremos que a definição de grupo fundamental não depende do ponto base escolhido e usamos a notação $\pi_1(X)$. Quando, além disso, o grupo fundamental do espaço X é trivial, isto é, $\pi_1(X) = 0$, temos a definição:

Definição 1.2.4. *Um espaço topológico X diz-se simplesmente conexo quando é conexo por caminhos e $\pi_1(X) = 0$, ou seja, quando seu grupo fundamental for trivial.*

Exemplo 1.2.4. *Todo conjunto convexo, por exemplo os conjuntos $\mathbb{R}^n$, são simplesmente conexos. De fato, em $\mathbb{R}^n$, todos os caminhos são homotópicos, basta considerar homotopias lineares. Em particular, todos os caminhos fechados são homotópicos ao caminho constante $\alpha(x) = x_0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, logo*

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{[e_{x_0}]\} \cong \{0\},$$

com $e_{x_0} : I \to X, e_{x_0}(x) = x_0$.

Observação 1.2.1. *Um espaço topológico X é contrátil se a função identidade $Id : X \to X$ é homotópica a uma função contante $c(x) = x_0$. Se X é contrátil, então é simplesmente conexo. Se X é Y são simplesmente conexos, então $X \times Y$ é simplesmente conexo.*

1.3 ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO E RECOBRIMENTO UNIVERSAL

Sejam $X, \widetilde{X}$ espaços topológicos e $\pi : \widetilde{X} \to X$ uma função contínua. Um aberto $V \subset X$ é dito *vizinhança distinguida* se

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_\alpha,$$

onde $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ é uma reunião de abertos dois a dois disjuntos de $\widetilde{X}$, cada um dos quais se aplica por π homeomorficamente sobre V.

Definição 1.3.1. *Uma aplicação de recobrimento (ou simplesmente um recobrimento) é uma função $\pi : \widetilde{X} \to X$ contínua, sobrejetora e tal que todo $x \in X$ possui uma vizinhança distinguida. O par $(\widetilde{X}, \pi)$ é chamado espaço de recobrimento do espaço X e, para cada $x \in X$, o conjunto $\pi^{-1}(x)$ chama-se fibra sobre x.*

Da definição acima, temos que uma aplicação de recobrimento $p : \widetilde{X} \to X$ é um homeomorfismo local de $\widetilde{X}$ sobre X.

Exemplo 1.3.1. *Seja $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $\pi(x) = e^{2\pi ix} = (cos(2\pi ix), sen(2\pi ix)), x \in \mathbb{R}$. Assim, $(\mathbb{R}, \pi)$ é um recobrimento de S^1. Além disso, todo subintervalo aberto de S^1 pode ser visto como uma vizinhança distingida.*

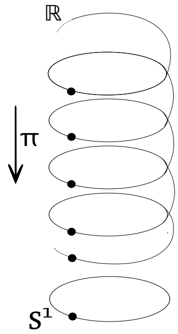


Figura 1.4: $(\mathbb{R}, \pi)$ é um espaço de recobrimento de S^1.

Observação 1.3.1. *Sejam* $(\widetilde{X}, \pi_1)$ *e* $(\widetilde{Y}, \pi_2)$ *recobrimentos de* X *e* Y*, respectivamente. Então* $(\widetilde{X} \times \widetilde{Y}, \pi_1 \times \pi_2)$ *é um espaço de recobrimento de* $X \times Y$*, sendo a aplicação* $\pi_1 \times \pi_2$ *definida como* $(\pi_1 \times \pi_2)(x, y) = (\pi_1(x), \pi_2(y))$ *a aplicação de recobrimento. Agora, se* U *e* V *são vizinhanças distinguidas de* $x \in X$ *e* $y \in Y$*, então* $U \times V$ *é uma vizinhança distinguida de* $(x, y) \in X \times Y$*.*

Exemplo 1.3.2. *Como o toro* $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$*, temos que um recobrimento é* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$*. Em geral* $\mathbb{R}^n$ *é um recobrimento do toro* $\mathbb{T}^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$*.*

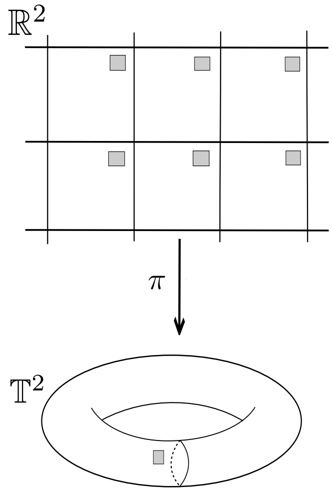


Figura 1.5: $(\mathbb{R}^2, \pi)$ é um espaço de recobrimento de $\mathbb{T}^2$.

Teorema 1.3.1. *Seja* X *um espaço topológico e* $(\widetilde{X}, \pi)$ *um espaço de recobrimento de* X*. Então* X *tem a topologia quociente em relação a* π*.*

Demonstração. Podemos verificar facilmente que π é uma aplicação aberta. Além disso, π é uma aplicação contínua, logo $U \subset X$ é aberto se, e somente se π^{-1} é aberto em $\widetilde{X}$. $\square$

Definição 1.3.2. *Seja $\pi : \widetilde{X} \to X$ um recobrimento e $f : Y \to X$uma aplicação contínua. Dizemos que $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ é um levantamento de f se $\pi \circ \widetilde{f} = f$.*

Consideremos agora um espaço de recobrimento $\pi : (\widetilde{X}, e_0) \to (X, x_0)$ com $\pi(e_0) = x_0$ e uma aplicação contínua $f : Y \to X$ e $f(y_0) = x_0$. Veremos no próximo teorema uma condição para que f posso ser levantada.

Para uma demonstração do Teorema 1.3.2 e do Corolário 1.3.1, ver os Lemas 3.1 e 3.2, encontrados no livro *Algebraic Topology: An Introduction*, [15].

Teorema 1.3.2. *Seja uma aplicação de recobrimento $\pi : (\widetilde{X}, e_0) \to (X, x_0)$ com $\pi(e_0) = x_0$ e uma aplicação contínua $f : (Y, y_o) \to (X, x_0)$. Suponhamos que Y é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos. Então existe um único levantamento $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ de f tal que $\widetilde{f}(y_0) = e_0$.*

Corolário 1.3.1. *Sejam $\pi : (\widetilde{X}, e_0) \to (X, x_0)$ e $\pi' : (\widetilde{X}', e_0') \to (X, x_0)$ dois recobrimentos de X tais que $\widetilde{X}$ e $\widetilde{X}'$ são simplesmente conexos e localmente conexos por caminhos. Então existe um único homeomorfismo $h : (\widetilde{X}, e_0) \to (\widetilde{X}', e_0')$ tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd}
(X, e_0) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\tilde{X}', e_0') \arrow[dl, "\pi'"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Com esses resultados, podemos definir o recobrimento universal de um espaço.

Definição 1.3.3. *Dizemos que o recobrimento $\pi : \widetilde{X} \to X$ é um recobrimento universal se $\widetilde{X}$ for simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos.*

Observação 1.3.2. *O corolário acima, nos diz que dois recobrimentos universais de um mesmo espaço são homeomorfos. Por este motivo, sempre que um espaço X possuir um recobrimento universal, nos referimos a ele como o recobrimento universal de X.*

Observação 1.3.3. *Sejam $(\widetilde{X}, \pi_1)$ e $(\widetilde{Y}, \pi_2)$ recobrimentos universais de X e Y respectivamente. Então $\widetilde{X} \times \widetilde{Y}$ é um espaço de recobrimento universal de $X \times Y$, sendo a aplicação $\pi_1 \times \pi_2$, como definida na observação 1.1.5, a aplicação de recobrimento.*

Exemplo 1.3.3. *Se X é simplesmente conexo, então qualquer recobrimento universal de X é homeomorfo a X.*

Exemplo 1.3.4. *O recobrimento $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ dado por $\pi(x) = e^{2\pi i}$ é um recobrimento universal de S^1. Pela Observação 1.3.3 o recobrimento $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{T}^2$ é um recobrimento universal de $\mathbb{T}^2$.*

1.4 NÚMERO E CLASSE DE NIELSEN

Ao longo desta seção X denotará uma subvariedade de dimensão m compacta de $\mathbb{R}^n$ e $U \subset X$ denotará um aberto em X. Seja $f : U \to X$ uma aplicação, lembremos que $Fix(f) = \{x \in U | f(x) = x\}$ denota o conjunto dos pontos fixos que é um conjunto fechado em X.

Se $f : X \to X$ é uma função contínua com finitos pontos fixos, podemos dar uma definição de índice de um ponto fixo e índice de um aberto da seguinte maneira.

Definição 1.4.1. *Seja x_0 um ponto fixo e U um aberto homeomorfo a uma bola B tal que x_0 é o único ponto fixo em $\overline{U}$. Para todo $x \in \partial B, f(x) \neq x$ e podemos definir*

$$v(x) = \frac{f(x) - x}{\|f(x) - x\|}.$$

Temos que $v : \partial B \to S^{m-1}$ é uma função contínua. Então, o índice de um ponto fixo, $I(f, x_0)$, de f em x_0 como

$$I(f, x_0) = \deg(v),$$

onde $\deg(v) := v_{*n}(1)$, *com $v_{*n} : H_n(X, \mathbb{Z}) \to H_n(X, \mathbb{Z})$ o homomorfismo induzido em $\mathbb{Z}$.*

Definição 1.4.2. *Seja U um aberto sem pontos fixos em seu bordo e $x_1, \ldots, x_h$ os pontos fixos no interior de U. Definimos o índice de um aberto U como*

$$I(f, U) = \sum_{i=1}^{h} I(f, x_i).$$

Uma demonstração para o próximo Lema pode ser obtida em [9].

Lema 1.4.1. *Seja $B = B(x_0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^2$ a bola unitária no espaço euclidiano e seja $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua satisfazendo $f(\overline{B}) \subset B$. Então $I(f, B) = 1$. Em particular, f tem um ponto fixo.*

Daremos uma definição de índice que estende a definição anterior no sentido de que não necessita que a quantidade de pontos fixos seja finita. No entanto, daremos esta definição de forma axiomática, ou seja, o índice será uma função que satisfaz uma série de propriedade. Podemos usar esta definição visto que R. Brown prova a existência de uma tal função em [2].

Definição 1.4.3. *Chamaremos de C' ao conjunto de todos os pares (f, U) com $f : X \to X$ uma função contínua e $U \subset X$ aberto que não contém pontos fixos de f em seu bordo.*

Definição 1.4.4. *Definimos o índice como uma função $i : C' \to \mathbb{Q}$ que satisfaz as seguintes propriedade:*

- *Axioma 1 (Local): Se $(f, U) \in C'$ e existe g tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \overline{U}$, então*

$$I(f, U) = I(g, U).$$

- *Axioma 2 (Homotopia): Se $F : X \times I \to X$ é um homotopia e definirmos $f_t(x) = H(x, t)$. Se $(f_t, U) \in C'$ para todo t, então*

$$I(f_0, U) = I(f_1, U).$$

- *Axioma 3 (Aditividade): Seja $(f, U) \in C'$ e sejam $U_1, \ldots, U_s$ uma família de subconjuntos abertos e disjuntos de U e tal que $f(x) \neq x$ para todo x em $[U - \bigcup_{j=1}^{s} U_j]$, então*

$$I(f, U) = \sum_{j=1}^{s} I(f, U_j).$$

- *Axioma 4 (Normalização): Para toda função contínua $f : X \to X$ temos que*

$$I(f, X) = L(f)$$

Onde $L(f)$ é o número de Lefschetz, definido em [2].

Observação 1.4.1. *Se $f : X \to X$ é uma aplicação contínua e $\alpha : I \to X$ é um caminho em X, vemos que a composta $f \circ \alpha : I \to X$ também é um caminho em X.*

Definição 1.4.5. *Dada uma aplicação $f : X \to X$ tal que $Fix(f) \neq \emptyset$. Dois pontos fixos $x, y \in Fix(f)$ são Nielsen equivalentes (como pontos fixos de f) se existe uma curva $C : [0, 1] \to X, C(0) = x, C(1) = y$ tal que $f \circ C \sim C$ relativamente aos pontos extremos.*

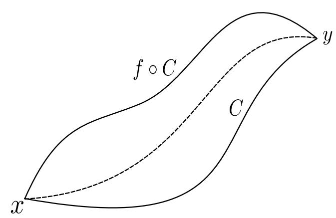


Figura 1.6: Homotopia entre as curvas $f \circ C$ e C.

Observação 1.4.2. *Isto produz uma relação de equivalência em $Fix(f)$ e as classes de equivalências são chamadas classes (de pontos fixos) de Nielsen de f.*

Encerraremos esta seção apresentando algumas definições e resultados importantes para o capítulo 3, mais especificamente, importantes para a demonstração to Teorema 3.4.1.

Definição 1.4.6. *Seja $f : X \to X$ uma função contínua. Para cada classe de Nielsen Γ da função f, definimos o índice de Γ, $I(f,\Gamma)$, como $I(f,\Gamma) := I(f,U)$ onde U é um aberto de X tal que $\Gamma \subset U$ e $\overline{U} \cap Fix(f) = \Gamma$,*

A próxima proposição diz que o índice de uma classe de Nielsen está bem definido

Proposição 1.4.1. *Seja Γ uma classe de Nielsen de f. A definição de $I(f,\Gamma)$ não depende da escolha do aberto U.*

Demonstração. Sejam U e V como na Definição 1.4.6. Como $U \cap Fix(f) = V \cap Fix(f) = \Gamma$, então $f(x) \neq x$ para $x \in U - (U \cap V)$. Portanto, pelo axioma da aditividade na Definição 1.4.4, teremos que $I(f,U) = I(f,U \cap V)$. Um raciocínio análogo nos permite provar que $I(f,U) = I(f,U \cap V)$. □

Definição 1.4.7. *Uma classe de Nielsen é dita essencial se seu índice é não nulo, isto é, Γ é essencial se $I(f,\Gamma) \neq 0$.*

Para X uma subvariedade compacta de $\mathbb{R}^n$ e $f : X \to X$ uma função contínua, a próxima definição nos fornece um inteiro não negativo $N(f)$ que chamaremos de número de Nielsen de f. O número de Nielsen será uma cota inferior para a quantidade de pontos fixos de f.

Definição 1.4.8. *O número de Nielsen de f é definido como*

$$N(f) := \#\{\Gamma |\ I(f,\Gamma) \neq 0\}.$$

Ou seja, o número de Nielsen é, simplesmente, o número de classes de Nielsen essenciais.

Observação 1.4.3. *Por definição, $N(f)$ é um inteiro não negativo. Como cada classe de Nielsen contém pelo menos um ponto fixo para f, temos que existe pelo menos $N(f)$ pontos fixos de f em X.*

Exemplo 1.4.1. *A função identidade $Id : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ satisfaz $Fix(Id) = \mathbb{T}^2$, logo existe apenas uma classe de Nielsen. Neste caso $I(Id,\Gamma) = I(Id,\mathbb{T}^2)$. Pelo axioma da normalização na Definição 1.4.4 temos que $I(Id,\mathbb{T}^2) = L(Id)$. Logo, pelo Exemplo 4.1.3 em [9], $N(Id) = L(Id) = \chi(\mathbb{T}^2) = 0$, onde $\chi(\mathbb{T}^2)$ é a característica de Euler de $\mathbb{T}^2$.*

Teorema 1.4.1. *Sejam $f,g : X \to X$ duas funções contínuas e homotópicas, então*

$$N(f) = N(g).$$

2 HOMEOMORFISMOS DA CIRCUNFERÊNCIA UNITÁRIA

Neste capítulo, estudaremos alguns resultados sobre homeomorfismos do círculo que são homotópicos à identidade. Para isso, precisamos de alguns resultados sobre os levantamentos ao recobrimento universal desses homeomorfismos. Um conceito de grande importância é o número de rotação, o qual serve de critério para a existência de pontos periódicos das aplicações do círculo.

2.1 ROTAÇÕES NO CÍRCULO

Definição 2.1.1. *Seja $\alpha \in [0,1]$, uma rotação de ângulo $2\pi\alpha$ é a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} R_\alpha : & S^1 & \to & S^1 \\ & e^{2\pi it} & \mapsto & R_\alpha(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i(t+\alpha)}. \end{array}$$

Em notação aditiva, temos que $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1$. Então, as iteradas de uma rotação são respectivamente

$$R_\alpha^n(x) = R_{n\alpha}(x) \quad \textit{ou} \quad R_\alpha^n(x) = x + n\alpha \pmod 1.$$

Proposição 2.1.1. *Se α é um número racional, então a órbita de qualquer ponto $x \in S^1$, pela aplicação R_α é periódica.*

Demonstração. Suponha que $\alpha = p/q$, onde q e p são primos relativos. Seja $O^+(x) = \{R_\alpha^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ a órbita positiva de x. Mostremos que o conjunto $O^+(x)$ é finito e $O^+(x) = \{x, R_\alpha(x), R_\alpha^2(x), ..., R_\alpha^{q-1}(x)\}$. De fato, como

$$R_\alpha^q(x) = R_{q\alpha}(x) = e^{2\pi i(t+q\alpha)} = e^{2\pi i(t+q\frac{p}{q})} = e^{2\pi i(t+p)} = e^{2\pi it} = x,$$

temos que a afirmação segue. De modo análogo, a órbita negativa $O^-(x) = \{R_\alpha^{-n}(x), n \in \mathbb{N}\}$ é finita. Consequentemente, $O(x) = O^+(x) \cup O^-(x)$ é finita. $\square$

Proposição 2.1.2. *Se α é irracional, então não existe uma órbita periódica para R_α.*

Demonstração. Pode-se mostrar isto por contradição supondo que existe uma órbita periódica. Se existe órbita periódica, então existe $x \in S^1$ e $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = e^{2\pi it} = e^{2\pi i(t+k\alpha)}$, o que implica $k\alpha = k^*$, onde $k^* \in \mathbb{Z}$, daí $\alpha = \dfrac{k^*}{k}$, logo α é racional. Isto é um absurdo visto que, por definição, α é irracional. $\square$

Definição 2.1.2. *Uma aplicação $f : X \to X$ diz-se minimal se a órbita $O_f(x) = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de qualquer ponto $x \in X$ é densa em X ou ainda se não contém subconjuntos invariantes próprios.*

Proposição 2.1.3. *Se α é irracional então a rotação R_α é minimal.*

Demonstração. Seja $A \subset S^1$ o fecho de uma órbita de $x \in S^1$. Se a órbita não é densa, o complementar $S^1 \backslash A$ é um conjunto aberto e não vazio, constituído por intervalos disjuntos. Seja I o maior desses intervalos (ou um dos maiores, se existir mais de um com o mesmo comprimento). Como as rotações preservam o comprimento de qualquer intervalo, as iteradas $R_\alpha^n(I)$ não se intersectam, pois caso contrário $S^1 \backslash A$ teria um intervalo maior. Como α é irracional, nenhum iterado de I pode coincidir, caso contrário um extremo x de uma iterada de I repetir-se-ia e teríamos

$$x + k\alpha = x \pmod 1,$$

com $k\alpha = l$ inteiro e $\alpha = l/k$ seria racional. Sendo assim os intervalos de $R_\alpha^n(I)$ são todos disjuntos e de igual comprimento, mas isso é impossível por que a circunferência tem comprimento finito e a soma dos comprimentos de intervalos disjuntos não pode exceder o comprimento da circunferência. $\square$

Corolário 2.1.1. *Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então os únicos conjuntos compactos invariantes de R_α são os triviais, isto é, S^1 e $\emptyset$.*

Demonstração. Sejam Λ um conjunto R_α-invariante e $x \in \Lambda$. Como $O_{R_\alpha}(x) \subset \Lambda$ temos que $\overline{O_{R_\alpha}(x)} \subset \overline{\Lambda}$. Como $\overline{O_{R_\alpha}(x)} = S^1$, temos que $S^1 \subset \overline{\Lambda} = \Lambda$, visto que Λ é fechado. Logo, $S^1 = \Lambda$ pois a inclusão contrária é óbvia. $\square$

2.2 NÚMERO DE ROTAÇÃO

Nesta seção iremos tratar de um conceito de extrema importância à teoria subsequente, que é o conceito de número de rotação para homeomorfismos em $S^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ que sejam homotópicos à identidade. Tal conceito foi apresentado primeiramente por Poincaré em [22].

Mostraremos nas proposições 2.2.4 e 2.2.5, entre outras propriedades, que o número de rotação independe do ponto $x \in S^1$ e que as propriedades dos homeomorfismos variam de acordo com sua racionalidade ou não.

O número de rotação mede o deslocamento médio de pontos no recobrimento. Este deslocamento médio é feito considerando-se partes finitas da órbita de um determinado ponto no recobrimento e depois tomando-se o limite.

Definição 2.2.1. *Seja $f : S^1 \to S^1$ uma aplicação contínua e seja $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ a aplicação de recobrimento. Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f \circ \pi = \pi \circ F$ é dita um levantamento de f, isto é, o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ S^1 \arrow[r, "f"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Observe que a aplicação π não é um conjugação topológica entre F e f visto que π não é injetiva. Entretanto podemos afirmar que F e f são semi-conjugadas.

Como exemplo importante no estudo dos homeomorfismos de S^1 temos as rotações $R_\alpha, \alpha \in [0, 1]$, que podem ser pensadas como os "rebaixamentos"das translações

$$\begin{aligned} T_\alpha : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \alpha, \end{aligned}$$

isto é, $R_\alpha \circ \pi = \pi \circ T_\alpha$. A próxima proposição mostra que dado uma aplicação contínua em S^1 existe um levantamento para f.

Proposição 2.2.1. *Seja $f : S^1 \to S^1$ uma aplicação contínua e seja $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ a aplicação de recobrimento. Então existe uma aplicação contínua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f \circ \pi = \pi \circ F$.*

Demonstração. Sejam p e $q \in S^1$, com $f(p) = q$. Então $p = \pi(x_0)$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$ e $q = f(p) = \pi(y_0)$ para algum $y_0 \in \mathbb{R}$. Tomemos $F(x_0) = y_0$. Como a função f é contínua, dado um $0 < \epsilon < 1/2$, existe $0 < \delta < 1/2$ tal que se $|x - x_0| = |\pi(x) - \pi(x_0)| \leq \delta \leq 1/2$, então $|f(\pi(x)) - f(\pi(x_0))| = |f(\pi(x)) - \pi(y_0)| \leq \epsilon \leq 1/2$. Portanto para cada $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ existe um único $y \in [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ tal que $\pi(y) = f(\pi(x_0))$. Definimos então $F(x) = y$ para todo $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ que é contínua por construção. Utilizamos os mesmos argumentos para $p = [x_0 + \delta]$ e para $p = [x_0 - \delta]$ estendemos a função para $[x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta]$, uma vez que f é uniformemente contínua, pois S^1 é compacto e f é contínua. Assim, repetindo o processo, estendemos a função F para toda a reta. $\square$

Lema 2.2.1. *Seja $f : S^1 \to S^1$ uma aplicação contínua, se F é um levantamento de f, então $F(x+1) - F(x)$ é um inteiro que independe de x e do levantamento.*

Demonstração. Temos $\pi(F(x+1)) = f(\pi(x+1)) = f(\pi(x)) = \pi(F(x))$. Logo $F(x+1) - F(x) \in \mathbb{Z}$ e consequentemente, por continuidade, é independente de x. Se F_0 for outro levantamento de f então $\pi(F_0(x)) = f(\pi(x)) = \pi(F(x))$. Desse modo, $F_0 - F$ é uma função contínua com valores inteiros, ou seja, $F_0 - F$ é constante, pois caso contrário existiriam x e $y \in \mathbb{R}$ tais que $(F_0 - F)(x) \neq (F_0 - F)(y)$. Logo, pelo teorema do valor intermediário, existiria um $z \in \mathbb{R}$ tal que $(F_0 - F)(z) \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, o que contradiz o fato de $(F_0 - F)(x) \in \mathbb{Z}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Concluímos que $F_0(x+1) - F_0(x) = F(x+1) - F(x)$. $\square$

Como consequência deste lema, um levantamento para f é único a menos da adição de uma constante inteira e podemos encontrar todos os levantamentos de f a partir de um levantamento fixo, isto é, dado um levantamento F para f, os infinitos levantamentos de f são da forma $G = F + k$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.2.2. *Se $f : S^1 \to S^1$ é uma aplicação contínua e F é um levantamento de f, então $F(x+1) - F(x)$ é chamado de grau de f. Denotaremos o grau de f por $deg(f)$.*

Observação 2.2.1. *Pelo Lema 2.2.1 temos que o $deg(f)$ não depende do levantamento e também não depende do ponto x, por isso, o $deg(f)$ é uma propriedade da aplicação f.*

Observação 2.2.2. *Se $deg(f) = 1$, então $F(x+k) - F(x) = k$ para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. De fato, dado $k \in \mathbb{Z}_+$.*

$$\begin{aligned} F(x+k) &= F(x + (k-1)) + 1 \\ &= F(x + (k-2)) + 2 \\ &\vdots \\ &= F(x) + k, \end{aligned}$$

No caso em que $k \in \mathbb{Z}_-$ basta verificar que $F(x-1) - F(x) = -1$ e chegamos a $F(x+k) - F(x) = k$ de maneira análoga. Vamos mostrar agora que também vale $G^n(x) = F^n(x) + nk$ para n

inteiro positivo, com $G = F + k$ outro levantamento de f. Com efeito, supondo que isso seja verdade para todo inteiro maior ou igual a 1 e menor do que n, então

$$\begin{aligned} G^n(x) &= G^{n-1}(G(x)) \\ &= F^{n-1}(G(x)) + (n-1)k \\ &= F^{n-1}(F(x)+k) + (n-1)k \\ &= F^{n-1}(F(x)) + k + (n-1)k \\ &= F^n + nk, \end{aligned}$$

o que prova nossa afirmação.

Lembremos que na Definição 1.1.5 a topologia uniforme em $C(S^1)$ é a topologia induzida pela métrica do sup que é dada por:

$$d(f,g) = \sup_{x \in S^1} |f(x) - g(x)|.$$

Com a topologia uniforme em $C(S^1)$, vejamos no próximo lema uma importante propriedade do grau.

Lema 2.2.2. *O grau é contínuo e, consequentemente, localmente constante na topologia uniforme.*

Demonstração. Seja $g : S^1 \to S^1$ uma função contínua e de modo que $d(g,f) < 1/4$ na topologia uniforme. Considere os levantamentos F, G de f, g respectivamente. Seja $\varphi(x) = G(x) - F(x)$. Para $x \in [0,1]$ tem-se

$$G(x+1) - \varphi(x+1) = F(x+1) = F(x) + deg(f) = G(x) + deg(f) - \varphi(x).$$

Logo

$$|G(x+1) - G(x) - deg(f)| < \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

Como g é uma função na circunferência, $G(x+1) - G(x)$ é um inteiro e consequentemente, pela equação 2.7, tem que ser igual a $deg(f)$. □

Proposição 2.2.2. *Sejam $f, g : S^1 \to S^1$ aplicações contínuas. Se f e g são homotópicas, então $deg(f) = deg(g)$.*

Demonstração. Seja $F(x,t) : S^1 \times I \to S^1$ uma homotopia entre f e g com $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$. Como $S^1 \times I$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, então F é uniformemente contínua. Logo, dado $\epsilon = 1/4$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$|F(x,t) - F(x,t_0)| < \frac{1}{4}$$

com t, t_0 quaisquer em [0,1] satisfazendo $|t - t_0| < \delta$, .

Finalmente, usando o Lema 2.2.2, $f_t(x) = F(x, t)$ e $f_{t_0}(x) = F(x, t_0)$ tem o mesmo grau. Usando isto, podemos decompor o intervalo $[0, 1]$ em uma quantidade finita de subintervalos de comprimento $\delta/2$ e usar a transitividade da homotopia para concluir que f e g tem o mesmo grau. □

Corolário 2.2.1. *Seja $f : S^1 \to S^1$ contínua. Se f é homotópica à identidade então $deg(f) = 1$.*

Demonstração. Basta ver que a identidade tem grau 1 e usar a proposição anterior. □

Corolário 2.2.2. *Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo. Então, $f^n \circ \pi = \pi \circ F^n$, ou seja, F^n é um levantamento de f^n para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se f é homotópico à identidade, então f^n é homotópico à identidade.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} f^n \circ \pi &= f^{n-1} \circ f \circ \pi \\ &= f^{n-1} \circ \pi \circ F \\ &= f^{n-2} \circ f \circ \pi \circ F \\ &= f^{n-2} \circ \pi \circ F^2 \\ &\vdots \\ &= \pi \circ F^n. \end{aligned}$$

Como f é homotópico à identidade, temos que $F(x + 1) = F(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Suponhamos, como hipótese de indução, que $F^m(x+1) = F^m(x)+1$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Então

$$F^{m+1}(x + 1) = F(F^m(x + 1)) = F(F^m(x) + 1) = F^{m+1}(x) + 1.$$

Assim, por indução, $F^n(x + 1) = F^n(x) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo o grau de f^n é 1. Consequentemente, f^n é homotópico à identidade. □

Proposição 2.2.3. *Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo homotópico à identidade, então todo levantamento F de f é estritamente crescente.*

Demonstração. Sendo f homotópico à identidade, $deg(f) = 1$. Como $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um homeomorfismo, F é crescente ou decrescente. Escolhamos um levantamento F de modo que

$F(1) \in [0,1)$. Como $deg(f) = 1$, então $F(x+1) - F(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em particular, para $x = 0$ e $x = -1$ temos

$$F(1) - F(0) = 1 \ \text{ e } \ F(0) - F(-1) = 1.$$

Portanto, $F(1) - F(-1) = 2$, ou seja, $F(-1) = F(1) - 2$. Como $0 \leq F(1) < 1$, segue que $F(-1) \leq -1$. Daí, $F(-1) < F(1)$, e deste modo F não pode ser decrescente, pois é um homeomorfismo de $\mathbb{R}$. Portanto F é crescente. Como qualquer levantamento de f difere de F apenas pela soma de um inteiro, concluímos que todo levantamento de f é uma função crescente. $\square$

Corolário 2.2.3. *Seja $f : S^1 \to S^1$ é um homeomorfismo homotópico à identidade, então para todo levantamento F de f vale que $|F^n(x) - F^n(y)| < 1$, sempre que $|x - y| < 1$.*

Demonstração. Vejamos que

$$y < x+1 \Rightarrow F^n(y) < F^n(x+1) = F^n(x) + 1 \Rightarrow F^n(y) - F^n(x) < 1$$
$$\text{e}$$
$$x < y+1 \Rightarrow F^n(x) < F^n(y+1) = F^n(y) + 1 \Rightarrow F^n(x) - F^n(y) < 1.$$

Portanto, $|F^n(x) - F^n(y)| < 1$, para todo $x \in \mathbb{N}$. $\square$

A próxima proposição irá mostrar que existe um número de rotação para qualquer levantamento de um homeomorfismo do círculo que preserva orientação e que este independe do ponto inicial. Antes disso, consideremos o seguinte lema.

Lema 2.2.3. *Se uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz $a_{m+n} \leq a_n + a_{m+k} + L$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$ e algum k e $L \in \mathbb{Z}$, então existe o limite*

$$\lim \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R} \cup -\infty.$$

Demonstração. Comecemos por observar que $a_{n+k} \leq a_n + a_{2k} + L$ e portanto

$$a_{n+m} \leq a_n + a_{m+k} + L \leq a_n + a_m + a_{2k} + 2L = a_n + a_m + L'$$

Então, $a_2 \leq a_1 + a_1 + L'$ e $a_3 \leq a_2 + a_1 + L' \leq 3a + 1 + 2L'$. Consequentemente, por indução, $a_n \leq na_1 + (n-1)L'$. Logo

$$\frac{a_n}{n} \leq a_1 + \frac{(n-1)}{n} L' \leq a_1 + L'.$$

Isto mostra que a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente e mostra também que

$$a = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R} \cup -\infty.$$

Tomando agora $b, c \in \mathbb{R}$ que satisfaçam $a < b < c$, então existe n tal que $a_n/n < b$ e $n > 2L'/(c-b)$. Se $l > n$ e satisfaz $l(c-b) > 2\max_{r\leq a_n} a_r$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{a_l}{l} &= \frac{a_{nk+r}}{l} \leq \frac{a_{nk} + a_r + L'}{l} \leq \frac{ka_n + a_r + kL'}{l} \leq \frac{k}{l}a_n + \frac{a_r}{l} + \frac{kL'}{l} \\
&\leq \frac{a_n}{n} + \frac{a_r}{l} + \frac{L'}{n} < b + \frac{c-b}{2} + \frac{L'}{n} < b + \frac{c-b}{2} + \frac{c-b}{2} = c
\end{aligned}$$

Desse modo, o $\limsup a_n$ é menor que c. Como tomamos c arbitrário satisfazendo $a < c$, temos que $\liminf a_n = \limsup a_n$. Isto conclui a demonstração. □

Proposição 2.2.4. *Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um levantamento de f. Então o limite*

$$\tau(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x)$$

existe para todo $x \in \mathbb{R}$, é independente de x e está definido a menos de um inteiro, isto é, se F e G forem levantamentos de f então $\tau(F) - \tau(G) \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Provemos primeiro a independência de x. Como f é um homeomorfismo homotópico à identidade, então $F(x+1) = F(x) + 1$ e dados $x, y \in [0,1)$, usamos o Corolário 2.2.3 para obter $|F(x) - F(y)| < 1$. Consequentemente,

$$\left|\frac{1}{n}(F^n(x) - x) - \frac{1}{n}(F^n(y) - y)\right| \leq \frac{1}{n}\left(|F^n(x) - F^n(y)| + |x-y|\right) < \frac{2}{n}.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(y) - y}{n}.$$

Desse modo, quando os limites existirem serão iguais.

Para provar a existência, tomemos $x \in \mathbb{R}$ e sejam $x_n = F^n(x)$, $a_n := x_n - x$ e $k := [a_n] = a_n \pmod 1$. Então

$$\begin{aligned}
a_{m+n} &= F^{m+n}(x) - x \\
&= F^m(x_n) + F^m(x+k) - F^m(x+k) + x - x + k - k + x_n - x_n - x \\
&= (F^m(x+k) - (x+k)) + (x_n - x) + (F^m(x_n) - F^m(x+k)) - (x_n - x - k) \\
&\leq a_m + a_n + 1.
\end{aligned}$$

Pois $F^m(y) - F^m(z) \leq 1$ quando $y - z \leq 1$ e $x_n - x - k = a_n - [a_n] \geq 0$. Agora, como

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_n}{n} = \frac{F^n(x) - x}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(F^{i+1}(x) - F^i(x)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(F(x_i) - x_i) \\ &\geq \min_{0\leq y\leq 1} F(y) - y, \end{aligned}$$

a sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente e portanto o Lema 2.2.3 mostra que existe o limite de b_n.

Finalmente, se F e G são levantamentos distintos do mesmo $f : S^1 \to S^1$, então $\tau(F) - \tau(G) \in \mathbb{Z}$. De fato, pela Observação 2.2.2, $G^n(x) = F^n(x) + nk$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \tau(G) &= \lim_{n\to\infty} \frac{G^n(x) - x}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) + nk - x}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{nk}{n} \\ &= \tau(F) + k. \end{aligned}$$

Logo, $\tau(F) - \tau(G) = k \in \mathbb{Z}$ □

Definição 2.2.3. *Seja f um homeomorfismo do círculo homotópico à identidade e seja F um levantamento de f. O número $\tau(f) = \pi(\tau(F))$ diz-se o número de rotação de f.*

Observe que a Proposição 2.2.4 garante que o número $\tau(f)$ existe e está bem definido. Além disso, segue da mesma proposição que o $\tau(f)$ independe de x.

Exemplo 2.2.1. *Entre os tipos mais simples de homeomorfismos de S^1 que são homotópicos à identidade podemos citar as rotações. Seja $\alpha \in [0, 1)$ e considere a rotação R_α em S^1. Lembremos que a órbita de um ponto $x \in S_1$ pela rotação R_α é*

$$O_{R_\alpha}(x) = \{x + n\alpha \pmod 1 : n \geq 0\}.$$

Considere um levantamento $\tilde{R}_\alpha(x) = x + \alpha + k$. Se α é um número racional, $\alpha = p/q$ com p e q primos entre si, então $q\alpha = p \in \mathbb{Z}$, e neste caso a órbita $O_{R_\alpha}(x)$ é periódica com período q. Quando α é irracional, já mostramos que não existem órbitas periódicas e mostramos que a *órbita de qualquer ponto é densa em S^1. Em ambos os casos,*

$$\begin{aligned}\tau(R_\alpha) &= \lim_{n\to\infty} \frac{R_\alpha^n(x)-x}{n} \pmod 1\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x+\alpha n+kn-x}{n} \pmod 1\\ &= \alpha+k \pmod 1\\ &= \alpha.\end{aligned}$$

A próxima proposição mostra como o conceito de número de rotação serve de critério para a existência de pontos periódicos para um homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ homotópico à identidade. Saberemos se f possui pontos fixos e se f possui ou não possui pontos periódicos via o número de rotação de f.

Proposição 2.2.5 (Poincaré)**.** *Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo de S^1 homotópico à identidade. Então $\tau(f) \in \mathbb{Q}$ se, e somente se, f tem um ponto periódico.*

Demonstração. Seja F um levantamento de f e suponha que $\tau(f) = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com p e q primos entre si. Mostraremos que f tem um ponto periódico de período q. A definição de τ implica que

$$\begin{aligned}\tau(f^m) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(F^m)^n(x)-x}{n} \pmod 1\\ &= m\lim_{n\to\infty} \frac{F^{mn}(x)-x}{mn} \pmod 1\\ &= m\tau(f) \pmod 1,\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo

$$\tau(f^q) = p \pmod 1 = 0,$$

visto que o número de rotação está definido a menos de inteiro. Assim, é suficiente mostrar que se $\tau(f^q) = 0$ então f^q tem um ponto fixo.

Suponhamos por absurdo que f^q não tem ponto fixo, consequentemente, $F^q(x) - x \notin \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, uma vez que $F^q(x) - x \in \mathbb{Z}$ implica que

$$f^q(\pi(x)) = \pi \circ F^q(x) = \pi(n+x) = \pi(x),$$

ou seja, $\pi(x)$ é um ponto fixo de f^q. Escolhemos o levantamento F de maneira que $F^q(0) \in [0, 1)$. Assim, pelo teorema do valor intermediário $0 < F^q(x) - x < 1$. Como a função $F^q - Id$ é contínua em $[0, 1]$, os seus mínimos e máximos são atingidos e portanto existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < \delta \leqslant F^q(x) - x \leqslant 1 - \delta < 1. \tag{2.8}$$

Pela periodicidade de $F^q - Id$, esta estimativa verifica-se para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular podemos tomar $x = F^i(0)$ na equação 2.8 para obter

$$\delta \leq F^{q+i}(0) - F^i(0) \leq 1 - \delta.$$

Tomando $i = 0, q, \ldots, (n-1)q$ para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{gathered} \delta \leq F^q(0) \leq 1 - \delta \\ \delta \leq F^{2q}(0) - F^q(0) \leq 1 - \delta \\ \vdots \\ \delta \leq F^{nq}(0) - F^{(n-1)q}(0) \leq 1 - \delta. \end{gathered}$$

Agora, somamos todos os termos para obter

$$n\delta \leqslant F^{qn}(0) \leqslant (1-\delta)n,$$

ou

$$\delta \leqslant \frac{(F^q)^n(0)}{n} \leqslant 1 - \delta.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos $\tau(f^q) > 0$, o que é um contradição. Portanto, f^q tem um ponto fixo, donde f tem um ponto periódico de período q.

Reciprocamente, se f tiver um ponto periódico $\pi(x)$ de período q, então $\pi(x) = f^q(\pi(x)) = \pi(F^q(x))$. Logo $F^q(x) - x = p \in \mathbb{Z}$. Assim, para $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\frac{F^{nq}(x) - x}{nq} = \frac{1}{nq}\sum_{i=0}^{n-1}(F^q(F^{iq}(x)) - F^{iq}(x)) = \frac{np}{nq} = \frac{p}{q}.$$

Logo, fazendo $n \to \infty$ temos que $\tau(f) \in \mathbb{Q}$. □

Corolário 2.2.4. *Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo de S^1 homotópico à identidade. Então $\tau(f) \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ se, e somente se f não tem um ponto periódico.*

Corolário 2.2.5. *Se f é um homeomorfismo do círculo que é homotópico à identidade, então $\rho(f) = 0$ se, e somente se, f tem um ponto fixo.*

Embora já conseguirmos dizer se um homeomorfismo homotópico à identidade $f : S^1 \to S^1$ possui uma órbita periódica, não podemos afirmar que todas as órbitas de f são periódicas, como acontece com as rotações quando existe uma órbita periódica. Mas, como um resultado interessante nesse caminho, temos a proposição:

Proposição 2.2.6. *Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo que homotópico à identidade com número de rotação racional. Então todas as órbitas que são periódicas tem o mesmo período.*

Demonstração. Se $\tau(f) = p/q$, onde p e q são primos entre si, necessitamos de mostrar que para qualquer ponto periódico $\pi(x)$ existe um levantamento F de f para o qual $F^q(x) = x + p$, donde teremos $f^q(\pi(x)) = \pi(F^q(x)) = \pi(x+p) = \pi(x)$. Se $\pi(x)$ for periódico e F for um levantamento, então $F^r(x) = x + s$ com $r, s \in \mathbb{Z}$ e

$$k + \frac{p}{q} = \tau(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nr}(x) - x}{nr} = \lim_{n\to\infty} \frac{ns}{nr} = \frac{s}{r}.$$

Podemos tomar F tal que $k = 0$, de forma que $s = mp$ e $r = mq$. Agora, se $F^q(x) - p > x$, então pela monotonia de F

$$F^{2q}(x) - 2p = F^q(F^q(x) - p) - p \geq F^q(x) - p > x$$

e, por indução, $F^r(x) - s = F^{mq}(x) - mp > x$, contradizendo o fato de que $F^r(x) = x + s$. Logo, $F^{mq}(x) - mp \leq x$.

De forma análoga, podemos mostrar que $F^r(x) - s < x$ quando $F^q(x) - p < x$. Portanto $F^q(x) = x + p$, ou seja, $\pi(x)$ é um ponto periódico de período q. □

O próximo resultado examina a dependência do número de rotação relativamente à transformação quando esta varia na topologia uniforme.

Proposição 2.2.7. *O número de rotação é contínuo na topologia uniforme, ou seja, é contínua na topologia uniforme a aplicação $f \mapsto \tau(f)$.*

Demonstração. Sejam $\tau(f) = \tau$ e $p'/q', p/q \in \mathbb{Q}$ tais que $p'/q' < \tau < p/q$. Escolhermos um levantamento F de f que satisfaz $\tau(F) = \tau(f) = \tau$. Veja que vale $F^q(x) - x < p$ para todo x. De fato, caso contrário teríamos $F^q(x) - x \geq p$ para algum $x \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $F^{2q}(x) \geq F^q(x) + p \geq x + 2p$. Por indução, podemos ver que $F^{nq} - x \geq np$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas isto contradiz nossa escolha de p/q, pois teríamos

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(x) - x}{nq} \geq \frac{p}{q}.$$

A função $F^q - Id$ é periódica e contínua, logo atinge o seu máximo e mínimo. Assim, existe $\delta > 0$ tal que $F^q(x) < x + p - \delta$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Desse modo, todo homeomorfismo $\overline{F}$ suficientemente próximo de F na topologia uniforme satisfaz $\overline{F}^q(x) - x < p$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $\tau(\overline{f}) < p/q$, onde $\overline{f}$ é o homeomorfismo da circunferência que se levanta a $\overline{F}$.

Um argumento análogo envolvendo p'/q' mostra que $\tau(\overline{f}) > p'/q'$ para $\overline{f}$ um homeomorfismo suficientemente próximo de f na topologia uniforme. Isto completa a demonstração. □

2.3 A CLASSIFICAÇÃO DE POINCARÉ

Nesta seção teremos como objetivo estudar o comportamento possível das órbitas de homeomorfismos da circunferência. Mais especificamente, dados um homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ e $x \in S^1$, estudaremos a órbita de x quando $\tau(f) \in \mathbb{Q}$ ou $\tau(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Isto permite uma descrição dos homeomorfismos da circunferência a menos de uma semi-conjugação monótona.

Definição 2.3.1. *Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo. Dizemos que f preserva a orientação quando dados $x, y \in S^1$ com $x < y$ tivermos $f(x) < f(y)$, com a ordem natural do círculo no sentido anti-horário.*

Dado qualquer homeomorfismo f do círculo, devemos ter que $deg(f) = \pm 1$. Assim, se o homeomorfismo f é crescente, isto é, preserva orientação, seu grau deve ser 1. No que segue neste capítulo, por comodidade, consideraremos homeomorfismos $f : S^1 \to S^1$ que preservam orientação.

A próxima proposição diz que as órbitas periódicas de um homeomorfismo f da circunferência que preserva orientação se comportam como as da rotação da circunferência com o mesmo número de rotação, isto é, se o número de rotação de f for τ e, considerando a rotação R_τ, tivermos $x_0 = y_0$, $x_n = f^n(x_0)$, $y_n = R_\tau^n(y_0)$ e os índices i, j e k são tais que

$$y_i < y_j < y_k,$$

então também temos

$$x_i < x_j < x_k.$$

Proposição 2.3.1. *Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo que preserva orientação, com número de rotação racional $\tau(f) = p/q$, onde p e q primos entre si. Então, para qualquer ponto periódico $x \in S^1$, a ordem de $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{q-1}(x)\}$ é a mesma ordem do conjunto $\{0, p/q, 2p/q, \ldots (q-1)p/q\}$, o qual é a órbita de 0 pela rotação R_τ.*

Demonstração. Considere $x \in S^1$ um ponto periódico para f e $i \in \{0, 1, \ldots q-1\}$ o primeiro número de modo que $f^i(x)$ seja o primeiro ponto a direita de x na órbita de x. Agora, se existisse $f^l(x) \in (f^i(x), f^{2i}(x))$, então $l > i$ e $f^{l-i}(x) \in (x, f^i(x))$ contradizendo a escolha de i. Então $f^{2i}(x)$ deve ser o primeiro ponto a direita de $f^i(x)$. Desse modo, os pontos da órbita de x estão ordenados da seguinte forma: $x, f^i(x), f^{2i}(x), \ldots, f^{(q-1)i}(x)$.

Temos que $f^i(x)$ transforma cada intervalo da forma $[f^{ki}(x), f^{(k+1)i}(x)]$ no seu sucessor e existem exatamente q destes subintervalos, então podemos tomar um levantamento $\tilde{F}$ de f^i

satisfazendo $\tilde{F}^q(\tilde{x}) = \tilde{x} + 1$, com $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. Como $f^q(x) = x$, existe um levantamento $F(x)$ de $f(x)$ com $F^q(\tilde{x}) = \tilde{x} + p$. Como F^i é um levantamento de f^i, existe algum $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F^i(x) = \tilde{F}(x) + k$. Assim,

$$\tilde{x} + ip = F^{qi}(\tilde{x}) = (\tilde{F} + k)^q(\tilde{x}) = \tilde{F}^q(\tilde{x}) + qk = \tilde{x} + 1 + qk.$$

Portanto, $ip = 1 + qk$. Logo, i é o único número entre 0 e q tal que $ip \equiv 1(\text{mod } q)$. Como os pontos do conjunto

$$\left\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \ldots, \frac{(q-1)p}{q}\right\}$$

estão ordenados como os pontos do conjunto

$$\left\{0, \frac{ip}{q}, \frac{2ip}{q}, \ldots, \frac{(q-1)ip}{q}\right\},$$

então o teorema está demonstrado. □

Consideraremos agora o caso em que o número de rotação de um homeomorfismo em S^1 é irracional. O primeiro passo no sentido de obtermos uma classificação neste caso consiste em mostrar que as órbitas de uma transformação da circunferência f com número de rotação $\tau(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ estão ordenadas como as da rotação $R_{\tau(f)}$ por $\tau(f)$. A proposição que segue apresenta alguma semelhança ao resultado anterior no caso das rotações racionais em que as órbitas periódicas estão ordenadas como as órbitas da rotação correspondente.

Proposição 2.3.2. *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um levantamento de um homeomorfismo que preserva orientação $f : S^1 \to S^1$ com número de rotação $\tau = \tau(F) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ então para $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$*

$$n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2 \quad \textit{se e só se} \quad F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2.$$

Demonstração. Comecemos por observar que dados $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, a expressão $p(x) = F^{n_1}(x) + m_1 - F^{n_2}(z) - m_2$ nunca muda de sinal. De fato, por continuidade de p, uma mudança de sinal implica a existência de $z \in \mathbb{R}$ tal que $F^{n_1}(z) + m_1 - F^{n_2}(z) - m_2 = 0$ e, portanto,

$$\pi(F^{n_1}(z)) = \pi(F^{n_2}(z)) \Leftrightarrow f^{n_1}(\pi(z)) = f^{n_2}(\pi(z)). \tag{2.9}$$

Agora, se $n_2 > n_1$ então $f^{n_2 - n_1}(f^{n_1}(\pi(z))) = f^{n_1}(\pi(z))$. Logo $f^{n_1}(\pi(z))$ seria um ponto periódico para f, mas isto contradiz o fato de f não ter pontos periódicos. De forma análoga obtemos uma contradição quando $n_1 > n_2$. Em particular o sinal de $p(x)$ é independente de x.

Suponhamos agora que $F^{n_1}(0) + m_1 < F^{n_2}(0) + m_2$. Com $y := F^{n_2}(0)$ tal é equivalente a $F^{n_1 - n_2}(y) - y < m_2 - m_1$. Tal como antes, esta desigualdade verifica-se para todo y, em particular para $y = 0$ temos que $F^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1$. Por outro lado, para $y = F^{n_1-n_2}(0)$, temos

$$\begin{aligned} F^{2(n_1-n_2)}(0) &< (m_2 - m_1) + F^{n_1-n_2}(0) \\ &< 2(m_2 - m_1). \end{aligned}$$

Pelo princípio de indução, concluímos que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale

$$F^{n(n_1-n_2)}(0) < n(m_2 - m_1).$$

Se $n_1 - n_2 > 0$, então

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{n(n_1-n_2)}(0)}{n(n_1 - n_2)} < \lim_{n\to\infty} \frac{n(m_2 - m_1)}{n(n_1 - n_2)} = \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2},$$

com a desigualdade estrita, visto que $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Portanto

$$n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2.$$

Verifica-se facilmente que o mesmo resultado ocorre para o caso em em $n_2 - n_1 > 0$.

Provemos agora a implicação no sentido contrário. De modo idêntico, $F^{n_1}(0) + m_1 > F^{n_2}(0) + m_2$ implica que $n_1\tau + m_1 > n_2\tau + m_2$ e a desigualdade nunca ocorre em qualquer dos lados, visto que $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $f(x)$ não tem órbitas periódicas. Fica assim provada a proposição. $\square$

Neste ponto, temos a seguinte pergunta: quando é que uma transformação da circunferência é conjugada a uma rotação? No caso de um número de rotação racional, tal é raramente o caso: como todas as órbitas de uma rotação racional são periódicas com o mesmo período, qualquer mudança de coordenadas irá produzir novamente uma transformação apenas com órbitas periódicas, uma transformação f, de fato, tal que $f^q = Id$. Logo, o fato de que f possui número de rotação racional não implica que todas as órbitas sejam periódicas, embora as que sejam periódicas tenham o mesmo período.

Essa restrição não está presente no caso de um número de rotação irracional e existe uma íntima relação com as rotações irracionais, como veremos no Teorema 2.3.1.

Se f e g são topologicamente conjugadas e a órbita de algum x por f não visita um certo aberto, então a órbita do ponto correspondente por g também não irá visitar o aberto correspondente. Em outras palavras, cada órbita densa de um sistema corresponde a uma órbita densa do outro sistema.

Como sabemos, rotações irracionais possuem todas as órbitas densas. Desse modo, podemos concluir que sistemas topologicamente conjugados a rotações irracionais precisam ter todas as suas órbitas densas. Um exemplo, devido a Denjoy, mostra a existência de difeomorfismos $f : S^1 \to S^1$ com número de rotação irracional arbitrário e sem órbitas densas, o que mostra que nem todo homeomorfismo com número de rotação irracional tem que ser conjugado a uma rotação irracional.

Teorema 2.3.1 (Classificação de Poincaré)**.** *Seja $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo que preserva orientação com número de rotação irracional.*

(1) Se f é teologicamente transitivo, então f é topologicamente conjugada à rotação $R_{\tau(f)}$.

(2) Se f não é topologicamente transitivo, então f tem a rotação $R_{\tau(f)}$ como um fator topológico, via uma aplicação $h : S^1 \to S^1$, não-invertível, contínua e monótona.

Demonstração. Escolhermos um levantamento $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f e sejam $\tau = \tau(f)$, $x \in \mathbb{R}$ fixo e $B := \{F^n(x) + m\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$ o levantamento total da órbita de $\pi(x) \in S^1$. Definamos

$$\begin{aligned} H : B &\to \mathbb{R} \\ F^n(x) + m &\mapsto n\tau + m. \end{aligned}$$

A Proposição 2.3.2 implica que esta transformação é monótona. Notemos que $H(B)$ é denso em $\mathbb{R}$, uma vez que τ é irracional e assim, pela Proposição 2.1.3, a função $n \mapsto n\tau + m (\text{mod } 1)$ $n \in \mathbb{N}$ é densa em $[0, 1]$.

Escreva $\tilde{R}_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \tau$, onde $\tilde{R}_\tau$ é um levantamento de R_τ, então $H \circ F = \tilde{R}_\tau \circ H$ em B, visto que

$$H \circ F(F^n(x) + m) = H(F^{n+1}(x) + m) = (n + 1)\tau + m$$

e

$$\tilde{R}_\tau \circ H(F^n(x) + m) = \tilde{R}_\tau(n\tau + m) = (n + 1)\tau + m.$$

Afirmação. H tem uma extensão contínua para o fecho $\overline{B}$ de B. De fato, se $y \in \overline{B}$ então existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que $y = \lim_{n\to\infty} x_n$. Queremos, portanto, definir $H(y) := \lim_{n\to\infty} H(x_n)$. Para mostrar que $\lim_{n\to\infty} H(x_n)$ existe e não depende da escolha de uma sequência aproximando y, observemos primeiro que os limites

$$\liminf_{n\to\infty} H(x_n), \ \limsup_{n\to\infty} H(x_n)$$

existem e são independentes da sequência, pois H é monótona. Por outro lado, se estes limites forem diferentes, então $\mathbb{R} \setminus H(B)$ contém um intervalo o que contradiz a densidade de $H(B)$. Portanto, se $y \in \overline{B}$ e $x_n \to y$, com $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, então

$$H(y) := \lim_{n\to\infty} H(x_n)$$

define uma extensão contínua de H em $\overline{B}$. Isto termina a prova da afirmação.

Finalmente, podemos facilmente estender H para $\mathbb{R}$. Primeiro, note que $H : \overline{B} \to \mathbb{R}$ é monótona e sobrejetora. De fato, seja $y \in \mathbb{R}$. Como $H(B)$ é denso em $\mathbb{R}$, existe uma sequência $\{H(x_n)\}$ com $\{x_n\} \subset B$ limitada (pela monotonicidade de H), tal que $\lim H(x_n) = y$. Logo existe $\{x_{n_k}\}$ convergente, e como o $\overline{B}$ é fechado, $\lim x_{n_k} = x \in \overline{B}$. Assim $H(x) = \lim H(x_{n_k}) = y$. Consequentemente, $H(\overline{B}) = \mathbb{R}$.

Assim, a única opção para definir H nos intervalos complementares a $\overline{B}$ é fazer H constante nesses intervalos, escolhendo a constante igual aos valores nos extremos do intervalo. Temos então uma função $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não decrescente tal que $H \circ F = R_\tau \circ H$ e, para $z \in B$, vale

$$H(z+1) = H(F^n(x) + m + 1) = n\tau + m + 1 = H(z) + 1.$$

Veja que esta propriedade continua válida para $z \in \mathbb{R}$. Por isso, garantimos a existência de uma semi-conjugação $h : S^1 \to S^1$ de modo que

$$h \circ f = R_\tau \circ h.$$

Para concluir o teorema, observamos que no caso transitivo nós começamos com uma órbita densa, logo $\overline{B} = \mathbb{R}$ e $h : S^1 \to S^1$ é um homeomorfismo. $\square$

2.4 TEOREMA DE DENJOY

O teorema de Denjoy dá uma condição suficiente para que um homeomorfismo do círculo seja conjugado a uma rotação.

Definição 2.4.1. *Diz-se que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tem uma variação limitada se sua variação total for finita, isto é, se*

$$Var(f) = \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty \tag{2.10}$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Exemplo 2.4.1. *Toda função lipschitziana é de variação limitada. Qualquer função* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(f \in C^1)$ *tem variação limitada. De fato, como* $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é contínua, existe* $k > 0$ *tal que* $|f'(x)| \leq k$ *para todo* $x \in [a,b]$*, assim,* $|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq k|x_k - x_{k-1}|$.

Observação 2.4.1. *Se uma função contínua* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tem variação limitada e* $\inf |f| > 0$*, então a função* $\log |f| : [0,1] \to \mathbb{R}$ *também tem variação limitada. De fato,*

$$\begin{aligned}
Var(\log|f|) &= \sup \sum_{i=1}^{n} |\log|f(x_i)| - \log|f(x_{i-1})|| \\
&= \sup \sum_{i=1}^{n} \left|\log \frac{|f(x_i)|}{|f(x_{i-1})|}\right| \\
&= \sup \sum_{i=1}^{n} \left|\log\left(1 + \frac{|f(x_i)| - |f(x_{i-1})|}{|f(x_{i-1})|}\right)\right| \\
&\leq \sup \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{|f(x_i)| - |f(x_{i-1})|}{|f(x_{i-1})|}\right| \\
&\leq \frac{1}{\inf|f|} \sup \sum_{i=1}^{n} ||f(x_1)| - |f(x_{i-1})|| \\
&\leq \frac{1}{\inf|f|} \sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_1) - f(x_{i-1})| \\
&\leq \frac{1}{\inf|f|} Var(f).
\end{aligned}$$

Teorema 2.4.1 (Denjoy)**.** *Se* $f : S^1 \to S^1$*, de classe* C^1*, é um homeomorfismo que preserva orientação com número de rotação* $\tau = \tau(f)$ *irracional e derivada de variação limitada, então* f *é transitivo e portanto topologicamente conjugada à rotação* R_τ

A ideia da prova desse resultado consiste em admitir que f não seja transitivo e assim encontrar uma família I_n de uma infinidade de intervalos disjuntos em S^1, de modo que, pelo fato de $Var(f') < \infty$, existam subcoleções de tais intervalos para os quais vale a seguinte estimativa:

$$l(I_{n_k}) \geq K,$$

onde K é uma constante maior que zero e $l(I_n)$ é o comprimento de um intervalo qualquer desta família. É óbvio que

$$\sum_n l(I_n) \leq 1.$$

Então teremos uma contradição e f deverá ser transitivo.

Lema 2.4.1. *Se* $f : S^1 \to S^1$ *for um homeomorfismo com número de rotação irracional, então para* $x_0 \in S^1$ *existem infinitos* $n \in \mathbb{N}$ *tais que os intervalos* $f^k((x_0, f^{-1}(x_0)))$ *são disjuntos para* $0 \leq k < n$.

Demonstração. Escrevamos $x_k = f^k(x_0), I = (x_0, x_{-n})$. A afirmação envolve apenas a ordenação da órbita de x_0. Visto que f ou é conjugada ou semi-conjugada a uma rotação irracional, podemos assumir que f é uma rotação irracional. Neste caso é claro que a afirmação se verifica para todos os $n \in \mathbb{N}$ tais que para $a < k < n$ nenhum x_k pertence a I. Mas como a órbita de x_0 é densa e portanto tem uma subsequência que converge para x_0, existem infinitos n nas condições desejadas. □

Lema 2.4.2. *Seja $X = S^1$ e $Y \subset X$. Suponhamos que $f : X \to X$ e tal que $f|_Y$ é de classe C^1 com f' de variação limitada e $\inf |f'| > 0$ em Y. Seja $V < \infty$ a variação de $\varphi : x \mapsto \log |f'(x)|$. Se $I \subset Y$ for um intervalo tal que $I, f(I), \dots, f^n(I)$ são intervalos disjuntos dois a dois em Y e $x, y \in I$ então*

$$\exp(-V) \leq \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq \exp(V).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} V = Var(\log |f'|) &\geq \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y))| \\ &\geq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(y)) \right| \\ &= \left| \log \left(\prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(x))| \cdot \prod_{k=0}^{n-1} |f'^{-1}(f^k(y))| \right) \right| \\ &= \left| \log \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(x)|} \right|. \end{aligned}$$

A afirmação obtém-se aplicando exponenciais. □

Lema 2.4.3. *Se f não é conjugada a uma rotação, I é um intervalo no complementar de $E = \omega(x)$ e n é como no Lema 2.4.1 então, para todo $x \in I$*

$$\exp(-V) \leq (f^n)'(x).(f^{-n})'(x) \leq \exp(V).$$

Demonstração. O conjunto $E = \omega_f(x)$ não é denso em S^1. Logo o complementar de E em S^1 é a união disjunta de intervalos abertos. Se $I = (a, b)$ é um desses intervalos, então o conjunto $\{f^n(I)\}$ está em E^c e vale que $f^n(I) \cap f^m(I) = \emptyset$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$, com $n \neq m$. De fato, se tivéssemos $f^n(I) \cap f^m(I) \neq \emptyset$ para $n, m \in \mathbb{Z}$, então o intervalo $B = f^n(I) \cap f^m(I)$ satisfaz $f^{n-m}(B) = B$. Logo a continuidade de f implica que a função $f^{n-m} : \overline{B} \to \overline{B}$ teria um ponto fixo, contradizendo a hipótese de τ ser irracional. Então, dado n como no Lema 2.4.1, podemos aplicar o Lema 2.4.2, com $y = f^{-n}(x)$, observando que, pela regra da cadeia,

$$(f^{-n} \circ f^n)'(y) = 1 \Rightarrow (f^{-n})'(x) \cdot (f^n)'(y) = 1.$$

□

Demonstração. (Do Teorema 2.4.1). Suponhamos que f não seja conjugado a uma rotação. Tomemos um intervalo $I \subset E^c$, $E = \omega_f(x_0)$ com $x_0 \in S^1$. Então, dado $x \in I$, a definição de comprimento e o Lema 2.4.3 implicam que

$$\begin{aligned}
l(f^n(I)) + l(f^{-n}(I)) &= \int_I |(f^n)'(x)| dx + \int_I |(f^{-n})'(x)|\ dx \\
&= \int_I (|(f^n)'(x)| + |(f^{-n})'(x)|)\ dx \\
&\geq \int_I \sqrt{|(f^n)'(x)||(f^{-n})'(x)|}\ dx \\
&\geq \int_I \sqrt{exp(-V)}\ dx \\
&= l(I) \cdot e^{-V/2}
\end{aligned}$$

para infinitos $n \in \mathbb{N}$. Mas isto contradiz $\sum l(f^n(I)) \leq 1$. Portanto, f é transitivo e, pelo Teorema 2.3.1, f é conjugada à rotação R_τ. □

3 HOMEOMORFISMOS NO TORO $\mathbb{T}^2$

Este capítulo é dedicado à prova do Teorema Principal desta dissertação, o qual foi obtido por John Franks em [5] e estabelece o seguinte.

Teorema Principal. Sejam $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento de f. Suponha que v_1, v_2, v_3 e v_4 são pontos extremais do conjunto convexo $\rho(F)$ (com pelo menos três deles distintos), e que 0 está no interior da do envoltório convexo desses vetores. Então F possui um ponto fixo.

Na Seção 3.2.1, provaremos uma versão mais simples deste Teorema, onde o conjunto de rotação $\rho(F)$ é substituído por um conjunto compacto, invariante por f e δ-transitivo, $\Lambda \subset R(f)$. Os conceitos de levantamento e conjunto de rotação serão apresentados na Seção 3.1. Finalmente, na seção 3.2.2, apresentaremos a prova do resultado acima.

3.1 CONJUNTO DE ROTAÇÃO

Nesta seção estudaremos um conceito que generaliza o número de rotação de um homeomorfismo homotópico à identidade do S^1 para homeomorfismo homotópico à identidade do toro $\mathbb{T}^2$. O conjunto obtido é um subconjunto do plano com a propriedade de ser convexo, conexo e fechado, chamado de conjunto de rotação.

No capítulo 2 vimos que o número de rotação para homeomorfismos homotópicos à identidade do S^1 serve de critério para decidir se um homeomorfismo possui ou não um ponto periódico. Vimos também que se este número é 0, então o homeomorfismo possui ponto fixo. Demonstraremos na seção 3.4 um teorema similar devido a John Franks para homeomorfismos homotópicos à identidade no $\mathbb{T}^2$, no caso em que o vetor 0 pertence ao interior do conjunto de rotação a ser definido.

A princípio, iremos apresentar algumas propriedades para homeomorfismos $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ homotópicos à identidade, mas iremos priorizar o nosso trabalho para o caso em que $n = 2$. O motivo se deve ao fato de que a teoria de pontos fixos é muito desenvolvida para homeomorfismos do plano (que serão os levantamentos dos homeomorfismos do toro que iremos estudar). Além disso,existem propriedades para o conjunto de rotação, como por exemplo convexidade, que podem não ser válidas quando $n > 2$.

Lembremos que um levantamento de um homeomorfismo $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ ao recobrimento universal $\mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f \circ \pi = \pi \circ F$ com, $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ a projeção canônica. Se F_1 é um levantamento de f, então $F_2 = F_1 - z$ com $z \in \mathbb{Z}^n$ é um outro levantamento de f. De fato, basta ver que

$$\pi(F_2(x)) = \pi(F_1(x) + z) = \pi(F_1(x)) = f(\pi(x)).$$

Além disso, como F_1 e F_2 são funções contínuas, então $F_1 - F_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{Z}^n$ é uma função contínua e, portanto, é uma função constante. Desse modo, todos os levantamentos de f são da forma $F + z$ com $z \in \mathbb{Z}^n$ e F um levantamento de f.

Se $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é um homeomorfismo homotópico à identidade, provaremos na proposição 3.1.1 que todo levantamento $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ comuta com uma translação. Antes, lembremos que pelo Exemplo 1.2.1, quaisquer duas funções contínuas no $\mathbb{R}^n$ são homotópicas. Em particular, qualquer levantamento de f é homotópico a função Id.

Proposição 3.1.1. *Sejam $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um levantamento ao recobrimento universal. Então, para todo $k \in \mathbb{Z}^n$,*

$$F(x + k) = F(x) + k.$$

Demonstração. Observemos primeiro que sendo F um levantamento de f, então para todo $x \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever $F(x + v) = F(x) + k(x, v), \ \forall \ v \in \mathbb{Z}^n$ e $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$, pois pela definição de levantamento, temos que,

$$\pi(F(x)) = f(\pi(x)) = f(\pi(x + v)) = \pi(F(x + v)).$$

Então k é uma função contínua que assume valores em $\mathbb{Z}^n$. Além disso, fixado v e variando x, k é uma função constante: $k(x, v) = k(y, v)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{Z}^n$.

Como f é homotópico à identidade, existem $f_t : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ que variam continuamente com $t \in [0, 1]$, tal que $f_0 = Id$, $f_1 = f$ e para cada t consideramos um levantamento F_t. Então, podemos escrever

$$F_t(x + v) = F_t(x) + k(t, x, v).$$

Tal como antes, k é uma função contínua com respeito a t e assume valores em $\mathbb{Z}^n$, desso modo, temos que k só depende de v. Então, escreveremos apenas $k(v)$. Logo, para todo $t \in [0, 1]$,

$$F_t(x + v) = F_t(x) + k(v).$$

Finalmente, considere a função identidade $Id = F_0$ em $\mathbb{R}^n$, que é um levantamento da função identidade do toro. Desse modo,

$$x + v = Id(x + v) = F_0(x + v) = F_0(x) + k(v) = Id(x) + k(v) = x + k(v),$$

ou seja, $v = k(v)$ para qualquer t uma vez que é constante com respeito a t. Se tomarmos outro levantamento G de f, teremos que $G(x) = F(x) + c$ para algum $c \in \mathbb{Z}^n$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso,

$$G(x + v) = F(x + v) + c = F(x) + v + c = G(x) + v.$$

Logo, $F(x + k) = F(x) + k$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$ e para todo levantamento de f. □

Corolário 3.1.1. *Sejam $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um levantamento ao recobrimento universal. Então, para todo $k \in \mathbb{Z}^n$,*

$$F^n(x + k) = F^n(x) + k.$$

Demonstração. Iremos provar por indução. Para $n = 1$ o resultado segue pela Proposição 3.1.1. Assumindo como hipótese de indução que o resultado vale para $n > 1$, ou seja, que $F^n(x+k) = F^n(x)+k$, veja que $F^{n+1}(x+k) = F^n \circ F(x+k) = F^n(F(x)+k) = F^n(F(x))+k = F^{n+1}(x) + k$. Logo, por indução, $F^n(x + k) = F^n(x) + k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Com o intuito de tentarmos generalizar a noção de número de rotação definido no capítulo 2, surgiram as definições de *conjunto de rotação*, *conjunto de rotação baseado em pontos* e *conjunto de rotação médio* para homeomorfismo no toro $\mathbb{T}^n$ que sejam homotópicos à identidade. A ideia principal para estudar e definir os conjuntos de rotação é considerar um levantamento $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ao recobrimento universal e usar este levantamento para analisar o deslocamento de um ponto $x \in \mathbb{T}^n$ no recobrimento.

A primeira generalização do número de rotação é a definição 3.1.1. No entanto, vamos usar principalmente a definição 3.1.2.

Definição 3.1.1. *Seja $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um levantamento. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, seja $\rho(F, x)$ o conjuntos de todos os pontos de acumulação de*

$$\left\{ \frac{F^n(x) - x}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

O conjunto de rotação baseado em pontos de F, denotado por $\rho_p(F)$, é definido como

$$\rho_p(F) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(F, x).$$

Observação 3.1.1. *Quando $n = 1$ o conjunto $\rho_p(F)$ coincide com o número de rotação. Como vimos na Proposição 2.2.4, o número de rotação para homeomorfismos do círculo que sejam homotópicos à identidade não dependo do $x \in S^1$. Contudo, para $n \geq 2$, $\rho(F, x)$ pode depender de x, ver exemplo 3.1.3.*

Definição 3.1.2. *Seja $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um levantamento. O conjunto de rotação de F, $\rho(F)$, é o conjunto de todos os pontos de acumulação do subconjunto de $\mathbb{R}^n$:*

$$\left\{ \frac{F^n(x_i) - x_i}{n} \mid x_i \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{Z}^+ \right\},$$

ou seja, $v \in \rho(F)$ se existe uma sequência $x_i \in \mathbb{R}^n$ e $n_i \in \mathbb{Z}^+$ com $\lim n_i = \infty$ tal que

$$\lim_{i \to \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} = v.$$

Sejam $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um levantamento de f. Para definirmos o conjunto de rotação médio de F iremos utilizar a função auxiliar $\phi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(x) = F(y) - y$, onde $y \in \pi^{-1}(x)$. Veja que ϕ está bem definida, isto é, não depende de $y \in \pi^{-1}(x)$ pois F comuta com as translações por vetores de $\mathbb{Z}^n$ e, portanto, $F(y+z) = F(y)+z$ com $z \in \mathbb{Z}^n$. Logo $F(y+z)-(y+z) = F(y)+z-(y+z) = F(y)-y$ com $z \in \mathbb{Z}^n$, ou seja, como os vetores de $\pi^{-1}(x)$ diferem por um vetor de $\mathbb{Z}^n$, a função ϕ não depende de $y \in \pi^{-1}(x)$.

Denotamos por $M(f)$ o espaço da medidas de probabilidades f-invariantes em $\mathbb{T}^n$ e denotemos por $M_E(f)$ o subespaço das medidas ergódicas por f. Se $\mu \in M_E(f)$ então, como μ é f-invariante e ergódica para f, o teorema ergódico de Birkhoff, assegura que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(x)) \to \int \phi d\mu, \ \mu - \text{qtp}. \tag{3.11}$$

Por outro lado, para $\pi(y) = x$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(f^k(x)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (F^{k+1}(y) - F^k(y)) = \frac{F^n(y) - y}{n}. \tag{3.12}$$

Portanto, por (3.11) e (3.12), para μ-quase todo $x \in \mathbb{T}^n$, se $y \in \pi^{-1}(x)$ concluímos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F^n(y) - y}{n} \to \int \phi d\mu,$$

ou seja, $\int \phi d\mu \in \rho_p(F)$ para todo $\mu \in M_E(f)$.

Definição 3.1.3. *Seja $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um levantamento. O conjunto de rotação médio de F é o conjunto*

$$\rho_m(F) = \left(\int \phi d\mu : \mu \in M_E(f) \right).$$

Observação 3.1.2. *Segue diretamente das definições 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3 que para homeomorfismo homotópicos à identidade no toro $\mathbb{T}^n$ valem as inclusões*

$$\rho_m(F) \subset \rho_p(F) \subset \rho(F).$$

Em [16], M. Misiurewich e K. Ziemian mostram um resultado interessante relacionando as definições 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3 quando $n = 2$. Este resultado será enunciado na Proposição 3.1.2. Antes, vejamos a definição de envoltório convexo e vértice de um conjunto.

Definição 3.1.4. *Dado um conjunto C qualquer, o menor conjunto convexo que contém C é denominado envoltório convexo. Em outras palavras, o envoltório convexo de C é a intersecção de todos os conjuntos convexos que contém C. Denotaremos o envoltório convexo de C por $Conv(C)$. Todo ponto $p \in C$ tal que não existem $p_1, p_2 \in C, p_1 \neq p_2$, que satisfaçam $p = \alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2, \alpha \in (0, 1)$ é denominado ponto extremo ou vértice.*

Uma propriedade interessante sobre o conjunto de rotação $\rho(F)$, com F um levantamento de um homeomorfismo homotópico à identidade $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, é a convexidade de tal conjunto, ou seja, para todo x e y em $\rho(F)$ e $0 \leq t \leq 1$, temos $tx + (1 - t)y \in \rho(F)$. Para a demonstração deste resultado consultar [16].

A prova da seguinte proposição pode ser achada em [16].

Proposição 3.1.2. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento de um homeomorfismo homotópico à identidade em $\mathbb{T}^2$, então*

$$Conv(\rho_p(F)) = \rho(F) = Conv(\rho_m(F)).$$

Observação 3.1.3. *J. Llibre e R. Mackay mostraram em [14] um exemplo para o toro $\mathbb{T}^3$ em que $Conv(\rho_p(F)) \neq \rho(F)$. Este é mais um dos motivos pelo qual estudaremos apenas o toro $\mathbb{T}^2$. Em [16], para qualquer levantamento F de um homeomorfismo homotópico à identidade, vale que*

$$Conv(\rho(F)) = Conv(\rho_m(F)).$$

Logo, com a Observação 3.1.2, tem-se

$$Conv(\rho_p(F)) = Conv(\rho(F)).$$

No que segue, apresentaremos apenas resultados para homeomorfismos homotópicos à identidade no toro $\mathbb{T}^2$, embora alguns desses resultados, como por exemplo o Lema 3.1.2 e a Proposição 3.1.3, possam ser generalizados para homeomorfismos homotópicos à identidade no toro $\mathbb{T}^n$.

Lema 3.1.1. *Seja F um levantamento de um homeomorfismo homotópico à identidade $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, então os pontos extremais de $\rho(F)$ pertencem a $\rho(F,x)$, com $x \in \pi^{-1}(\Omega(f))$.*

Demonstração. O Teorema 1.1.7 afirma que para cada $\mu \in M(f)$ temos que $\mu(\Omega(f)) = 1$, isto é, μ-quase todo ponto de $\mathbb{T}^2$ é não-errante, então

$$\int \phi d\mu \in \bigcup \rho(F,x), \ \ x \in \pi^{-1}(\Omega(f)).$$

Usando isto e a proposição 3.1.2,

$$\rho(F) = Conv\left(\left\{\bigcup \rho(F,x), \ \ x \in \pi^{-1}(\Omega(f))\right\}\right).$$

Por outro lado, como $\rho(F,x) \subset \rho(F)$ para todo $x \in \mathbb{T}^2$, segue o resultado desejado. $\square$

A próxima proposição mostra que o $\rho(F)$ é fechado e nos fornece uma caracterização para este conjunto.

Proposição 3.1.3. *Temos que $\rho(F) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{k \geq n} K_k(F)}$, onde $K_k(F) = \left\{\dfrac{F^k(x) - x}{k} \mid x \in \mathbb{R}^2\right\}$. Em particular, $\rho(F)$ é fechado.*

Demonstração. Devemos mostrar duas inclusões:

1. $\rho(F) \subset \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{k\geq n} K_k(F)}$.
   Seja $v \in \rho(F)$. Precisamos mostrar que $v \in \overline{\bigcup_{k\geq i} K_k(F)}$ para todo $i \geq 1$. Fixemos $i \geq 1$. Como $v \in \rho(F)$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_i > i$ e $x_i \in \mathbb{R}^2$ tal que
   $$\|v - w_i\| < \epsilon, \text{ onde } w_i = \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}.$$
   Mas por definição de $K_k(F), w_i \in K_{n_i}(F)$ e portanto $w_i \in \bigcup_{k\geq i} K_k(F)$. Logo $v \in \overline{\bigcup_{k\geq i} K_k(F)}$.

2. $\bigcap_{i\geq 1} \overline{\bigcup_{k\geq i} K_k(F)} \subset \rho(F)$.
   Seja $v \in \bigcap_{i\geq 1} \overline{\bigcup_{k\geq i} K_k(F)}$. Então para todo $i \geq 1, v \in \overline{\bigcup_{k\geq i} K_k(F)}$ e portanto existe
   $$v_i \in \bigcup_{k\geq i} K_k(F) \text{ tal que } \|v - v_i\| < \frac{1}{i}.$$

Como $v_i \in \bigcup_{k\geq i} K_k(F)$, existe $x_i \in \mathbb{R}^2$ e $n_i \geq i$ tais que $v_i = \frac{F^{n_i}(x_i)-(x_i)}{n_i}$. Porém $v_i \to v$ quando $i \to \infty$. Logo $v \in \rho(F)$.

Como $\rho(F)$ é a intersecção de conjuntos fechados, então $\rho(F)$ é fechado. $\square$

Observação 3.1.4. *O fato de $(F^k - Id)$ ser uma função $\mathbb{Z}^2$-periódica implica que $\rho(F)$ pode ser obtido a partir das médias feitas com pontos $x \in I^2$, onde $I = [0,1]$. Isto segue do seguinte lema:*

Lema 3.1.2. *Temos que $K_k(F) = \left\{\dfrac{F^k(x)-x}{k}, x \in I^2\right\}$, onde $I = [0,1]$. Em particular, os conjuntos $K_k(F)$ e $\rho(F)$ são compactos.*

Demonstração. Como $f(x)$ é homotópico à identidade, podemos fazer uso do Corolário 3.1.1 e ver que

$$F^k(x+l) - (x+l) = F^k(x) + l - x - l = F^k(x) - x, \ \forall\ l \in \mathbb{Z}^2.$$

Então, dados x e k escolhemos $l \in \mathbb{Z}^2$ de forma que $y := x + l \in I^2$ e consequentemente

$$\frac{F^k(x)-x}{k} = \frac{F^k(y)-y}{k}.$$

Segue então que o conjunto $K_k(F)$ e compacto para todo k. Portanto, como a intersecção de compactos é compacto, $\rho(F)$ é compacto. $\square$

A Proposição 3.1.4 esclarece a relação existente entre os conjunto de rotação de levantamentos de f e mostra a relação que existe entre $\rho(F^n)$ e $\rho(F)$.

Proposição 3.1.4. *Dados um levantamento F de um homeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ homotópico à identidade, $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}^2$. Temos*

(a) $\rho(F+p) = \rho(F) + p$.

(b) $\rho(F^m) = m\rho(F)$.

Demonstração. Prova de (a). Consideremos $\{z_k\} \subset \mathbb{R}^2$ e $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$ com $m_k \to \infty$ quando $k \to \infty$. Então

$$\begin{aligned} v = \lim_{k\to\infty} \frac{F^{m_k}(z_k)-z_k}{m_k} \quad &\Leftrightarrow \quad v + p = \lim_{k\to\infty} \frac{F^{m_k}(z_k)-z_k}{m_k} + p \\ &\Leftrightarrow \quad v + p = \lim_{k\to\infty} \frac{F^{m_k}(z_k)+m_k p - z_k}{m_k} \\ &\Leftrightarrow \quad v + p = \lim_{k\to\infty} \frac{(F+p)^{m_k}(z_k)-z_k}{m_k}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$v \in \rho(F) \Leftrightarrow v + p \in \rho(F + p).$$

Prova de (b). Mostremos as duas inclusões $\rho(F^m) \subset m\rho(F)$ e $m\rho(F) \subset \rho(F^m)$.

1. $\rho(F^m) \subset m\rho(F)$. Seja $v \in \rho(F^m)$. Queremos ver que $v/m \in \rho(F)$. Como $v \in \rho(F^m)$, existem n_k e z_k com tais que

$$v = \lim_{k\to\infty} \frac{(F^m)^{n_k}(z_k) - z_k}{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{F^{mn_k}(z_k) - z_k}{n_k},$$

isto implica que

$$\frac{v}{m} = \lim_{k\to\infty} \frac{(F^m)^{n_k}(z_k) - z_k}{mn_k}.$$

Consequentemente, $v/m \in \rho(F)$.

2. $m\rho(F) \subset \rho(F^m)$. Se $v \in \rho(F)$, então existem z_k e n_k tais que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{n_k} \to v.$$

Para cada n_k, existem l_k e r_k com $0 \leq r_k < m$, de modo que podemos escrever $n_k = ml_k + r_k$, e concluir que $l_k \to \infty$ quando $n_k \to \infty$. Provaremos que

$$\left\| \frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{n_k} - \frac{F^{ml_k}(z_k) - z_k}{ml_k} \right\| \to 0, \;\; k \to \infty.$$

De fato, como

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{n_k} - \frac{F^{ml_k}(z_k) - z_k}{ml_k} \right\| \leq \\
&\left\| \frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{n_k} - \frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{ml_k} \right\| + \left\| \frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{ml_k} - \frac{F^{ml_k}(z_k) - z_k}{ml_k} \right\| = \\
&\|F^{n_k}(z_k) - z_k\| \left\| \frac{1}{(n_k)} - \frac{1}{(ml_k)} \right\| + \left\| \frac{F^{r_k}(F^{ml_k}(z_k)) - F^{ml_k}(z_k)}{ml_k} \right\| = \\
&\left\| \frac{F^{n_k}(z_k) - z_k}{n_k} \right\| \left| \frac{r_k}{(ml_k)} \right| + \left\| \frac{r_k}{(ml_k)} \frac{F^{r_k}(F^{ml_k}(z_k)) - F^{ml_k} z_k)}{r_k} \right\|,
\end{aligned}$$

e $|\frac{r_k}{(ml_k)}| \to 0$, basta observamos pelo Lema 3.1.2 que

$$\frac{F^{r_k}(F^{ml_k}(z_k)) - F^{ml_k}(z_k)}{r_k}$$

está limitado. Desse modo, teremos que

$$\frac{(F^m)^{l_k}(z_k) - z_k}{l_k} \to mv.$$

Logo $m\rho(F) \subset \rho(F^m)$.

□

Apesar de simples, as propriedades na Proposição 3.1.4 são úteis e serão usadas no restante da dissertação, por exemplo, na demonstração do Teorema 3.4.2.

Teorema 3.1.1. *Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um levantamento de $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, então o conjunto de rotação $\rho(F)$ é conexo.*

Demonstração. Suponhamos que $\rho(F)$ não é conexo. Como $\rho(F)$ é compacto, existem A e B compactos com $A \cap B = \emptyset$ e $\rho(F) = A \cup B$. Logo existem vizinhanças abertas U, V de A, B respectivamente tais que $\overline{U}$ e $\overline{V}$ são compactos, disjuntos e $\rho(F) \subset U \cup V$. Em particular $\delta = d(\overline{U}, \overline{V}) > 0$.

Tomemos v e w elementos de A e B respectivamente. Segue da definição de $\rho(F)$ que existem sequências de inteiros n_i, k_j e sequências de pontos x_i, y_j tais que

$$v = \lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \quad \text{e} \quad w = \lim_{j\to\infty} \frac{F^{k_j}(y_i) - y_i}{k_i}.$$

Seja $z \in \mathbb{R}^2$. Como $K_1(F)$ é compacto, existe M tal que $\|F(t) - t\| \leq M$, para todo $t \in \mathbb{R}^2$. Então, fazendo $t = F^n(z)$ temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{F^{n+1}(z) - z}{n+1} - \frac{F^n(z) - z}{n} \right\| &\leq \left\| \frac{F(t) - z}{n+1} - \frac{F(t) - z}{n} \right\| + \left\| \frac{F(t) - z}{n} - \frac{t - z}{n} \right\| \\
&\leq \left\| (F(t) - z) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \right\| + \left\| \frac{F(t) - t}{n} \right\| \\
&\leq \|F(t) - z\| \left\| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right\| + \|F(t) - t\| \left(\frac{1}{n} \right) \\
&\leq \|F(t) - z\| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{M}{n} \\
&\leq \frac{1}{n(n+1)} \|F(t) - z\| + \frac{M}{n} \\
&\leq \frac{1}{n} \left(\left\| \frac{F(t) - z}{n+1} \right\| + M \right).
\end{aligned}$$

Como $\|F^{n+1}(z) - z\| \leq \|F^n(z) - F^{n-1}(z)\| + \cdots + \|F(z) - (z)\| \leq (n+1)M$, então voltando novamente para $t = F^n(z)$, temos que, para quaisquer $n \geq 1$ e $z \in \mathbb{R}^2$:

$$\left\| \frac{F^{n+1}(z) - z}{n+1} - \frac{F^n(z) - z}{n} \right\| \leq \frac{1}{n} \left(\left\| \frac{F^{n+1}(z) - z}{n+1} \right\| + M \right) \leq \frac{2M}{n}.$$

Provaremos agora que existe N tal que $\frac{F^n(z) - z}{n} \in U \cup V$, para todo $n \geq N$ e $z \in \mathbb{R}^2$. De fato, como $\rho(F) \subset U \cup V$, existe N tal que $n \geq N$ temos $\overline{\bigcup_{k \geq n} K_n} \subset U \cup V$. Assim,

$\forall\, n \geq N, \quad K_n \subset U \cup V$, e portanto

$$\left\{ \frac{F^n(z) - z}{n} : z \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset U \cup V, \forall n \geq N.$$

Fixemos i satisfazendo as seguintes condições:

$$\frac{2M}{n_i} < \delta, n_i \geq N \quad e \quad \left\{ \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \right\} \in U. \tag{3.13}$$

Seja j tal que

$$k_j \geq n_i \quad e \quad \left\{ \frac{F^{k_j}(y_j) - y_j}{k_j} \right\} \in V. \tag{3.14}$$

Uma vez que i satisfaz 3.13, temos que, para todo $n \geq n_i$

$$\left\| \frac{F^{n+1}(x_i) - x_i}{n+1} - \frac{F^n(x_i) - x_i}{n} \right\| \leq \frac{2M}{n} \leq \frac{2M}{n_i} < \delta = d(\overline{U}, \overline{V}).$$

Então, $\frac{F^n(x_i)-(x_i)}{n} \in U$ para todo $n \geq n_i$. Em particular, como $k_j \geq n_i$, $u_i = \frac{F^{k_j}(x_i)-x_i}{k_j} \in U$ e usando 3.14, temos que $v_j = \frac{F^{k_j}(y_j)-y_j}{k_j} \in V$.

Se C é um caminho que liga x_i e y_j então $\overline{C} = \left(\frac{1}{k_j}(F^{k_j} - Id) \right)(C)$ é um caminho que liga u_i a v_j. Assim, como $k_j \geq N$, por $K_k \subset U \cup V$, teríamos $\overline{C} \subset U \cup V$. Dessa forma $\overline{C} \cap U$ e $\overline{C} \cap V$ formariam uma cisão de $\overline{C}$, o que contraria o fato de $\overline{C}$ ser conexo. Logo $\rho(F)$ é conexo. $\square$

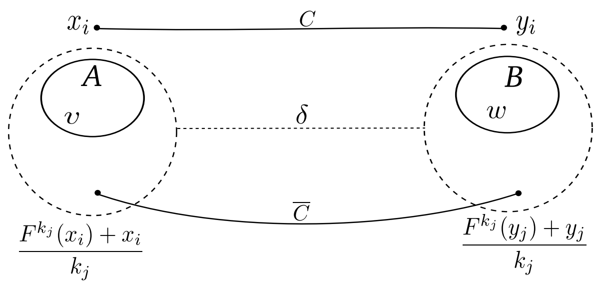


Figura 3.7: Caminho C que une x_i com y_j e caminho $\overline{C}$ que une $u_i = \frac{F^{k_j}(x_i)-x_i}{k_j}$ com $v_j = \frac{F^{k_j}(y_i)-y_1}{k_j}$, contrariando o fato de que $\overline{C}$ é conexo.

Observação 3.1.5. *Como os subconjuntos convexos e conexos de $\mathbb{R}^2$ são pontos, retas ou conjuntos com interior não vazio, $\rho(F)$ só pode ser um ponto, um segmento de reta ou possuir interior não vazio.*

Observação 3.1.6. *O exemplo citado na Observação 3.1.3 também mostra que $\rho(F)$ pode não ser convexo para F um levantamento de um homeomorfismos homotópico à identidade $f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$.*

3.1.1 EXEMPLOS

A seguir, apresentaremos exemplos de homeomorfismos que têm como conjunto de rotação, respectivamente, um ponto, um segmento de reta ou possuir interior não vazio. No primeiro exemplo, trabalharemos com as translações em $\mathbb{R}^2$ e iremos mostrar que o conjunto de rotação é um único ponto de $\mathbb{R}^2$. No segundo exemplo, veremos um homeomorfismo cujo conjunto de rotação é um segmento de reta. No terceiro exemplo, construiremos um homeomorfismo F de modo que $\rho(F)$ tenha interior não vazio.

Exemplo 3.1.1. *Considere a translação $F(x) = x+v$ em $\mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}^2$. Veja que $F^n(x) = x+nv$ e, calculando o quociente $\frac{F^n - Id}{n}$, teremos que*

$$\frac{F^n(x) - x}{n} = v, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, $\rho(F, x) = \{v\}$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Como $\rho_p(F) = \cup_x \rho(F, x)$, segue que

$$\rho_p(F) = \cup_x \{v\} = v.$$

Para calcularmos $\rho(F)$, observe que $K_k(F) = \{v\}$ e, usando o Proposição 3.1.3, temos

$$\begin{aligned} \rho(F) &= \cap_{n\geq 1} \overline{\cup_{k\geq n} K_k(F)} \\ &= \cap_{n\geq 1} \{v\} \\ &= \{v\}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.2. *Vejamos um homeomorfismo cujo conjunto de rotação seja um segmento de reta. Considere o homeomorfismo $F(x, y) = (x + \cos(2\pi y), y)$. Dado $z = (x, t) \in \mathbb{R} \times \{t\}$, veja que*

$$\begin{aligned} \frac{F^n(x,t) - (x,t)}{n} &= \frac{(x + n\cos(2\pi t), t) - (x, t)}{n} \\ &= (\cos(2\pi t), 0). \end{aligned}$$

Logo $\rho(F, z) = \{\cos(2\pi t), 0\}$. Desse modo, $\rho_p(F) = [-1, 1] \times \{0\}$. Consequentemente,

$$\rho(F) = conv(\rho_p(F)) = conv([-1, 1] \times \{0\}) = [-1, 1] \times \{0\}.$$

Este exemplo é devido a Françoes Béguin e pode ser encontrado em [1].

Exemplo 3.1.3. *Vamos construir um homeomorfismo para o qual $\rho(F) = [0, 1]^2$. Considere*

$$G(x, y) = (x + \phi(y), y), \quad H(x, y) = (x, y + \varphi(x)),$$

onde $\phi, \varphi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ são funções contínuas e periódicas com período 1 satisfazendo $\phi(t) = \varphi(t) = 0$ em $t \in \mathbb{Z}$ e $\phi(t) = \varphi(t) = 1$ se $t \in 1/2 + \mathbb{Z}$. Para $F = H \circ G$, vejamos que

$$F((0,0)) = (0,0), F\left(\left(\tfrac{1}{2},0\right)\right) = \left(\tfrac{1}{2},1\right), F\left(\left(0,\tfrac{1}{2}\right)\right) = \left(1,\tfrac{1}{2}\right)$$

$$e$$

$$F\left(\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\right) = \left(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\right).$$

Vamos calcular o quociente $\frac{F^k - Id}{k}$ *para cada* (x,y) *anterior. Para* $(0,0)$ *temos que*

$$\frac{F^k(0,0)-(0,0)}{k} = (0,0).$$

Portanto, $\rho(F,(0,0)) = (0,0)$*. Agora, observe que* $F^2\left(\left(\frac{1}{2},0\right)\right) = \left(\frac{1}{2},2\right)$*,* $F^3\left(\left(\frac{1}{2},0\right)\right) = \left(\frac{1}{2},3\right)$ *e, usando indução,* $F^k\left(\left(\frac{1}{2},0\right)\right) = \left(\frac{1}{2},k\right)$*, de modo que*

$$\frac{F^k\left(\frac{1}{2},0\right)-\left(\frac{1}{2},0\right)}{k} = (0,1).$$

Logo $\rho\left(F,\left(\frac{1}{2},0\right)\right) = (0,1)$*. Procedendo da mesma maneira, obtemos* $\rho\left(F,\left(0,\frac{1}{2}\right)\right) = (1,0)$ *e* $\rho\left(F,\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right) = (1,1)$*. Desta forma,*

$$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \subset \rho_p(F).$$

Como $\rho(F)$ *é convexo, segue que* $[0,1]^2 \subset \rho(F)$*. Por outro lado, se* $F(x_1,x_2) = (y_1,y_2)$ *então* $0 \leq x_1 - y_1 \leq 1$ *e* $0 \leq x_2 - y_2 \leq 1$*. Consequentemente,* $\rho(F) \subset [0,1]^2$*. Isto completa a demonstração de que*

$$\rho(F) = [0,1]^2.$$

Este exemplo também é devido a Françoes Béguin e pode ser encontrado em [1].

Observação 3.1.7. *Em [12], J. Kwapisz provou que qualquer polígono convexo* D *de extremos racionais é conjunto de rotação para um levantamento* F *de um homeomorfismos homotópico à identidade* $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$*.*

3.2 TEOREMA PRINCIPAL

A prova do Teorema Principal será feita em duas etapas. Na primeira etapa, provaremos o Teorema para o caso δ-transitivo, ou seja, provaremos uma versão mais forte do Teorema. Na segunda etapa, provaremos o caso geral usando o caso δ-transitivo.

3.3 O CASO δ-TRANSITIVO

Nesta seção, iremos apresentar resultados que permitam demonstrar o Teorema 3.3.1. Assumiremos que $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ é um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um levantamento de f. Lembremos que $R(f)$ denota o conjunto dos pontos recorrentes por cadeia para f, conforme a Definição 1.1.12 do capítulo 1.

Definição 3.3.1. *Seja $\Lambda \subset \mathbb{T}^2$ um subconjunto compacto invariante de $R(f)$ e seja F um levantamento de f. Denotamos por $\rho(F, \Lambda)$ os pontos de acumulação do conjunto*

$$\left\{ \frac{F^n(x) - x}{n}, \pi(x) \in \Lambda \text{ e } n > 0 \right\}.$$

Teorema 3.3.1. *Se para todo $\delta > 0$ podemos encontrar um subconjunto compacto, invariante e δ-transitivo, $\Lambda \subset R(f)$, tal que 0 pertence ao interior do envoltório convexo de $\rho(F, \Lambda)$, então existe um ponto fixo para F.*

Queremos demonstrar o Teorema 3.3.1 a partir dos lemas que iremos apresentar a seguir. A demonstração deste Teorema será apresentada no Corolário 3.3.1. O Lema 3.3.1 será usado na demonstração do Lema 3.3.2 e o Lema 3.3.3 será usado na demonstração do Lema 3.3.4.

Lema 3.3.1. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^2$. Se U é um aberto que contém o segmento $\overline{xy} = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$, então existe $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo homotópico à identidade tal que $h(x) = y$ e $h|_{U^c} \equiv Id$.*

Demonstração. Seja $\phi_t(p) = p + t(y - x)$ o fluxo associado ao campo de vetores constante $v(p) = y - x$ em $\mathbb{R}^2$. Como U é aberto e $\overline{xy} \subset U$, considere V um aberto que satisfaz $\overline{xy} \subset V \subset \overline{V} \subset U$ e tome, pela partição da unidade, uma função $\gamma : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ que seja diferenciável, $\gamma|_V = 1$ e $\gamma|_{U^c} = 0$. Definamos o campo de vetores

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto \gamma(p)v(p) \end{aligned}$$

e tomemos o fluxo φ_t associado a este campo. Definamos $h = \varphi_1$. Temos que h é uma função contínua, logo é homotópico à identidade pelo Exemplo 1.2.1 , $h(x) = \varphi_1(x) = \phi_1(x) = y$ e $h|_{U^c} = \varphi_1|_{U^c} = Id$ visto que o campo u é identicamente nulo em U^c. □

Lema 3.3.2. *Se F não tem pontos fixos, então existe um $\epsilon > 0$ tal que não existe ϵ-cadeia periódica para F.*

Demonstração. Seja

$$\delta = \min_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - x|.$$

Note que este mínimo é assumido visto que, pelo Lema 3.1.2, podemos considerá-lo sobre os x que estejam no domínio fundamental compacto $[0,1] \times [0,1]$ para π. Além disso, como F

não tem pontos fixos, este mínimo é maior que 0. Vamos supor por absurdo que para todo $\epsilon > 0$ exista uma ϵ-cadeia periódica para F. Consideremos então $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = z$ uma ϵ-cadeia periódica com $\epsilon = \delta/8$.

Agora, unimos os pontos de x_i para $F(x_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, com arcos poligonais α_i de modo que estes não se intersectam e de modo que o diâmetro de cada um destes arcos seja menor que $\delta/4$, ver Teoremas 1.1.3 e 1.1.4. Nestas condições, podemos considerar pequenos discos de modo que $\alpha_i \subset D_i$ e $D_i \cap D_j = \emptyset$ quando $i \neq j$.

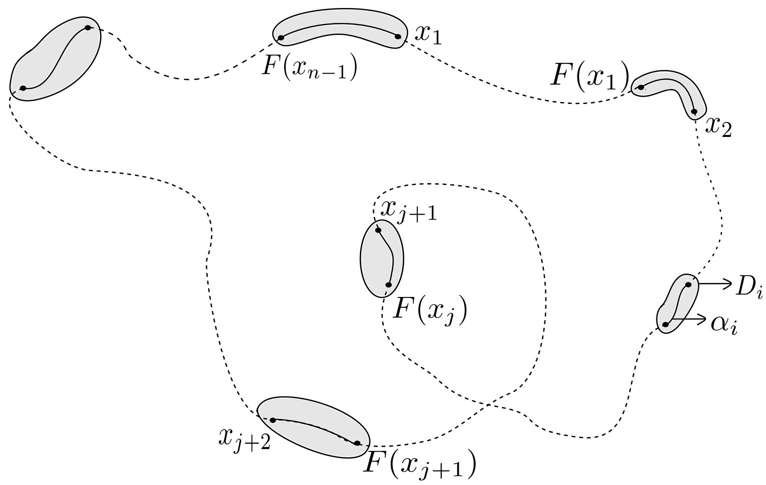


Figura 3.8: Arcos poligonais α_i e discos D_i.

Usando o Lema 3.3.1 em cada segmento das poligonais e compondo os homeomorfismos nas vizinhanças D_i conseguimos uma pertubação G de F que satisfaz:

1. $F(x) = G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2 - \bigcup_i D_i$;

2. $\|F(x) - G(x)\| \leq \delta/4, \ \forall x \in \mathbb{R}^2$;

3. $G(x_{i-1}) = x_i$.

Agora, G tem um ponto periódico, a saber o ponto z. Logo pela Proposição 1.1.5 temos que G te um ponto fixo p. Então

$$\|F(p) - p\| \leq \|F(p) - G(p)\| + \|G(p) - p\| < \delta.$$

Que é impossível, pela forma como definimos δ. $\square$

Observação 3.3.1. *Nos Teoremas 3.3.1 e 3.4.1 usaremos a seguinte versão do Lema 3.3.2: se para todo $\epsilon > 0$ existe ϵ-cadeia periódica para F, então F tem ponto fixo.*

Nos Lemas 3.3.3 e 3.3.4 a seguinte observação será útil.

Observação 3.3.2. *Qualquer translação de uma δ-cadeia por um vetor de coordenadas inteiras resulta em uma outra δ-cadeia. De fato, como $(F - Id)(x)$ é $\mathbb{Z}^2$-periódica, se $z = z_1, \ldots, z_n = w$ é uma δ-cadeia para F e $r \in \mathbb{Z}^2$, então $z + r = z_1 + r, \ldots, z_n + r = w + r$ é uma δ-cadeia de $z + r$ a $w + r$ para F pois $\|F(z_i + r) - (z_{i+1} + r)\| = \|F(z_i) - z_{i+1}\| < \delta$. Ou seja, podemos transladar uma δ-cadeia por um vetor de coordenadas inteiras de modo a obter uma nova δ-cadeia.*

Lema 3.3.3. *Suponha que Λ é um subconjunto compacto invariante e δ-transitivo de $R(f)$ e seja F um levantamento de f. Então existe uma constante $K > 0$ tal que para qualquer $x_0, y_0 \in \Lambda$, $x \in \pi^{-1}(x_0)$ existe uma δ-cadeia para F de x para algum ponto $y \in \pi^{-1}(y_0)$ com $\|x - y\| < K$.*

Demonstração. Fixemos $\omega \in \pi^{-1}(\Lambda)$ e seja Q_n o conjunto dos $z \in \Lambda$ tal que existe uma δ-cadeia para f de $\pi(\omega)$ para z com tamanho no máximo n. Temos que Q_n é aberto, visto que, se $\pi(\omega) = x_1, x_2 \ldots, x_n = z$ é uma δ-cadeia, então

$$d(F(x_{n-1}), z) = \delta_1 < \delta.$$

Desse modo, se tomarmos $\epsilon = (\delta - \delta_1)/2$, teremos que

$$d(F(x_{n-1}), x) \leq d(F(x_{n-1}), z) + d(x, z) < \delta_1 + \epsilon < \delta,$$

para todo $x \in B(z, \epsilon)$ e, portanto, Q_n é aberto. Também temos que

$$\Lambda = \bigcup_{n \geq 1} Q_n$$

e pela compacidade de Λ, existe N de modo que $Q_N = \Lambda$. Isto implica que para todo $y_0 \in \Lambda$ existe uma δ-cadeia de $\pi(\omega)$ para y_0 de comprimento inferior a N. Levantando isto a $\mathbb{R}^2$, começando em ω, obtemos uma δ-cadeia de ω para algum $y' \in \pi^{-1}(y_0)$. Seja $P = \sup_{\mathbb{R}^2} \|F(v) - v\|$. Como uma δ-cadeia de w para y' tem tamanho no máximo N, segue-se que

$$\|y' - \omega\| < C_1 = N(P + \delta). \tag{3.15}$$

Um argumento similar mostra que dado $x_0 \in \Lambda$ existe um $x' \in \pi^{-1}(x_0)$ com uma δ-cadeia de x' para ω e $\|x' - \omega\| < C_2$ para alguma constante independente de x_0. Juntando isto, obtemos uma δ-cadeia de x' para y' com $\|y' - x'\| < K = C_1 + C_2$.

Finalmente, seja $x \in \pi^{-1}(x_0)$ qualquer, teremos que $x - x'$ é um vetor de coordenadas inteiras. Transladando a δ-cadeia pelo vetor $x - x'$, obtemos uma δ-cadeia de x a um ponto y, onde $y = y' + (x - x')$ satisfaz $\pi(y) = y_0$ e $\|y - x\| = \|y' - x'\| < K$. □

Lema 3.3.4. *Seja $\Lambda \subset R(f)$ um subconjunto compacto, invariante e δ-transitivo para algum $\delta > 0$. Se 0 pertence ao interior do envoltório convexo de $\rho(F, \Lambda)$, então existe uma δ-cadeia periódica para F.*

Demonstração. Como por hipótese 0 pertence ao envoltório convexo de $\rho(f, \Lambda)$, então existem $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \rho(f, \Lambda)$ (ver Teorema 11 em [8]), com pelo menos três deles distintos, de modo que 0 pertence ao interior do envoltório convexo gerado por esses vetores. Escolha vizinhanças U_i de v_i em $\mathbb{R}^2$ tão pequenas de modo que se $v_i' \in U_i$, 0 é também um ponto interior do envoltório convexo de v_1', v_2', v_3' e v_4'.

Fixe $z_0 \in \Lambda$ e $z \in \pi^{-1}(z_0)$. Agora, pelo Lema 3.3.3 e pelo fato de $v_1 \in \rho(f, \Lambda)$ nos podemos achar $x \in \mathbb{R}^2$ e $n_i > i$ satisfazendo:

1. $\lim_{i\to\infty} \frac{F^{n_i}(x)-x}{n_i} = v_1$;

2. Existe uma δ-cadeia de z para x e $\|x - z\| < K$;

3. Existe uma δ-cadeia de $F^{n_i}(x)$ para $z_i' \in \pi^{-1}(z_0)$ e $\|F^{n_i}(x) - z_i'\| < K$.

Observamos que se juntarmos a δ-cadeia de z a x, com o segmento de órbita de x a $F^{n_i}(x)$ e a δ-cadeia de $F^{n_i}(x)$ a z_i' teremos uma δ-cadeia de z para z_i'. Além disso, usando desigualdade triangular, (1), (2) e (3) implicam que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_i' - z}{n_i} = v_1.$$

Escolha i suficientemente grande tal que

$$\frac{z_i' - z}{n_i} \in U_1$$

e, para esse i, chamemos $w_1 = z_i' - z$ e $m_1 = n_i$, de modo que existe uma δ-cadeia de z para $z + w_1$ e $w_1/m_1 \in U_1$. Por construção, note que $\pi(z_i') = \pi(z) = z_0$, logo w_1 é um vetor de coordenadas inteiras.

Com um processo similar podemos construir w_2, m_2, w_3, m_3 e w_4, m_4 com propriedades análogas.

Como 0 pertence ao envoltório convexo de $w_1/m_1, w_2/m_2, w_3/m_3, w_4/m_4$ e os vetores w_1, w_2, w_3 e w_4 são inteiros, é possível resolver

$$Aw_1 + Bw_2 + Cw_3 + Dw_4 = 0$$

com A, B, C e D inteiros positivos.

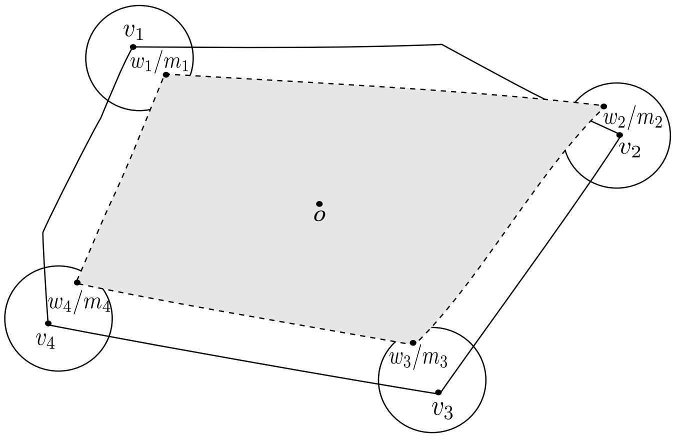


Figura 3.9: O vetor 0 pertence ao envoltório convexo dos vetores w_i/m_i sempre que $w_i/m_i \in U_i$ com $i = 1, 2, 3, 4$.

Usando a Observação 3.3.2, transladamos a δ-cadeia que vai de z para $z+w_1$ com o vetor de coordenadas inteiras w_1 para obtermos uma δ-cadeia de $z+w_1$ para $z+2w_1$. Isto nos fornece uma δ-cadeia de z até $z+2w_1$. Repetindo esse procedimento A vezes, obtemos uma δ-cadeia de z para $z+Aw_1$. Com o mesmo raciocínio, obtemos uma δ-cadeia de z para $z+Bw_2$. Nesta última cadeia, nos transladamos pelo vetor de coordenadas inteiras Aw_1 e conectamos com a cadeia de z a $z+Aw_1$ obtendo então uma δ-cadeia de z para $z+Aw_1+Bw_2$.

De modo análogo, podemos obter uma δ-cadeia de z para $z+Aw_1+Bw_2+Cw_3+Dw_4$. Como $z+Aw_1+Bw_2+Cw_3+Dw_4 = z$, temos uma δ-cadeia periódica de z para z, como queríamos demonstrar. □

Finalmente, demonstraremos o Teorema 3.3.1 com o próximo corolário.

Corolário 3.3.1 (Prova do Teorema 3.3.1)**.**

Demonstração. Pelo Lema 3.3.4, veja que dado $\delta > 0$, o homeomorfismo f possui uma δ-cadeia periódica. No entanto, como isto vale para qualquer δ, a Observação 3.3.1 que segue do Lema 3.3.2 garante que F tem um ponto fixo. Portanto, isto conclui a demonstrado o Teorema 3.3.1. □

3.4 O CASO GERAL

Como antes, iremos assumir que $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ é um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento de f. Teremos como objetivo provar que se 0 pertence ao interior do conjunto de rotação $\rho(F)$ então F tem um ponto fixo. Como corolário, obteremos que se v pertencem ao interior de $\rho(F)$ e tem as coordenadas racionais então existe um ponto periódico $x \in \mathbb{T}^2$ com a propriedade de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^q(x_0) - x_0}{q} = v,$$

onde x_0 é algum ponto tal que $\pi(x_0) = x$ e q é o menor período de x. Estes resultados são devidos a John Franks em [5].

Teorema 3.4.1. *Suponha que v_1, v_2, v_3 e v_4 são pontos extremais do conjunto convexo $\rho(F)$ (com pelo menos três deles distintos), e que 0 está no interior do envoltório convexo desses vetores. Então F possui um ponto fixo.*

Demonstração. Como cada v_i é um ponto extremal de $\rho(F)$, com $i = 1, \ldots 4$, usamos o Lema 3.1.1 para garantir a existência de um ponto não-errante para f, $x_i \in \mathbb{T}^2$ tal que, se $x \in \pi^{-1}(x_i)$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = v_i.$$

Para provarmos que F tem um ponto fixo é suficiente, pela Obervação 3.3.1 mostrar que, para cada $\delta > 0$, existe uma δ-cadeia periódica pra F.

Dado $\delta > 0$, para mostrarmos que existe uma δ-cadeia periódica pra F, consideremos a decomposição em partes δ-transitivas de $R(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots \cup \Lambda_n$, que é uma decomposição finita pelo Lema 1.1.1 e mostraremos que existe um Λ_j da descomposição e pontos $y_i \in \Lambda_j$ tais que se $y \in \pi^{-1}(y_i)$ temos que

$$v_i = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(y) - y}{n}.$$

Então, lembrando que as partes da decomposição de $R(f)$ são compactas e invariantes devido o corolário 1.1.1, teremos, via Lema 3.3.4, que F tem uma δ-cadeia periódica. Como isto vale para todo δ, chegaremos ao resultado desejado.

Dado $\delta > 0$, considere $g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de Lyapounov completa garantida pelo Teorema 1.1.2. Escolhemos uma aproximação diferenciável $g_0 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ de g com valores regulares $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ tal que, a variedade com bordo $M_i = g_0^{-1}((-\infty, c_1])$ satisfaz

(1) $f(M_i) \subset \text{int } M_i$;

(2) $\Lambda_i \subset M_i - M_{i-1}$.

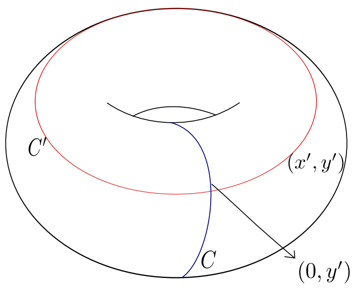
Seja N_i a variedade $\overline{M_i - M_{i-1}}$. Então $\mathbb{T}^2 = \bigcup N_i$ e $N_i \cap N_j$ é um conjunto finito de círculos se $j = i + 1$ ou $j = i - 1$ e vazio caso contrário. Estes círculos são as componentes de $\bigcup_i g_0^{-1}(c_i)$.

Lembremos que um círculo no toro $\mathbb{T}^2$ é dito essencial quando não é homotópico a um ponto. Pela definição de M_j, se houver um círculo essencial em $\bigcup_i g_0^{-1}(c_i)$ este deve estar no bordo de uma variedade M_j para algum j.

Provaremos agora que nenhum dos círculos de $\bigcup_i g_0^{-1}(c_i)$ é essencial. Isto resulta das Afirmações 1 e 2 que seguem.

Afirmação 1. Se C é um círculo essencial no bordo de uma variedade do toro, M_j, então deve haver outro círculo essencial no bordo de M_j que seja homotópico à C. De fato, se houvesse só um círculo essencial em M_j, poderíamos considerar M_j' como sendo a união de M_j com os discos interiores dos círculos não essenciais, de modo que o único bordo de M_j' é o circulo essencial C.

Se escrevermos o toro como $S^1 \times S^1$, então podemos pensar em C como os pontos $\{(0, x) : x \in S^1\}$. Seja $(x', y') \in {M_j'}^c$ e consideremos os conjuntos:



- $C' = \{(x, y') \mid x \in S^1\}$;
- $C_1' = C' \cap {M_j'}^c$;
- $C_2' = C' \cap (M_j' - C)$.

Como M_j' é fechado então C_1' é um aberto em C' e como C é o bordo de M_j', C_2' também é um aberto relativo de C. Modificando um pouco C' de modo que asseguremos que C_2' e C_1' sejam não vazios e que $C' \cap C = (0, y')$ (isto é possível porque em qualquer vizinhança de $(0, y')$ existem pontos de $M_j' - C$), teremos que os pontos de C' que não estão em C formam um conjunto desconexo, implicando que $C' \cap C$ seria mais de um ponto. Chegamos a uma contradição.

Afirmação 2. Cada componente conexa de $\bigcup_i g_0^{-1}(c_i)$ é bordo de um único disco em $\mathbb{T}^2$. Se um desses círculos é essencial, então para algum j com $1 \leq j \leq n$, M_j é um anel essencial em $\mathbb{T}^2$ (possivelmente com buracos). Seja $\widetilde{M_j}$ uma componente conexa de $\pi^{-1}(M_j)$. Usando que $f(M_i) \subset \operatorname{int} M_i$ consideremos um levantamento F_0 de f que satisfaça $F_0(\widetilde{M_j}) \subset \widetilde{M_j}$.

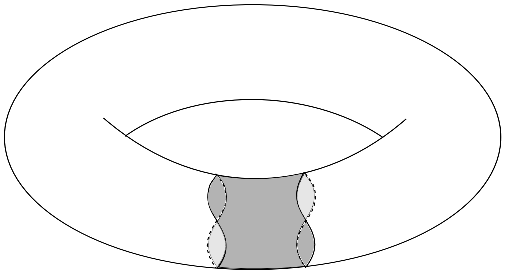


Figura 3.10: Anel essencial no toro $\mathbb{T}^2$.

Observemos que $\widetilde{M}_j$ é um tira infinita em $\mathbb{R}^2$, talvez com buracos, e podemos considerar que $\widetilde{M}_j$ está contida entre duas restas k e l com inclinação p/q. Seja v um extremo de $\rho(F_0)$, pelo Lema 3.1.1, existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$v = \lim_{n\to\infty} \frac{F_0^n(x) - x}{n}.$$

Podemos supor que $v \neq 0$, caso contrário, não estaríamos nas hipóteses do teorema. Como $v \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \|F_0^n(x) - x\| = +\infty. \tag{3.16}$$

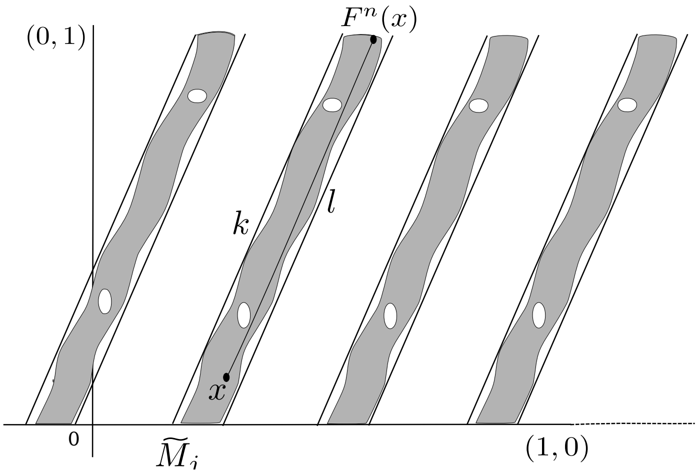


Figura 3.11: $\pi^{-1}(M_j)$ e as retas paralelas com a mesma inclinação de $\widetilde{M}_j$.

Se $x \in R(f)$ e $x \in \widetilde{M}_j$, então $F_0^n(x) \in \widetilde{M}_j$ para todo $n > 0$. Provaremos que v tem inclinação p/q, isto é, tem a mesma inclinação que $\widetilde{M}_j$. De fato, se v não tem inclinação p/q, então $v \cdot k^{\perp} \neq 0$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$,

$$(F_0^n(x) - x) \cdot k^{\perp} \neq 0,$$

ou seja, $F_0^n(x) - x$ não é paralelo a reta k para $n \geq n_0$. Por outro lado, por 3.16, existe $n > 0$ tal que $F_0^n(x)$ não pertence à faixa delimitada pelas retas k e l. Isto contradiz ao fato de $F_0^n(\widetilde{M}_j) \subset \widetilde{M}_j$. Portanto, v é está contido em uma reta de inclinação p/q.

Se $x \in R(f)$ e $x \notin \widetilde{M_j}$, teremos que $x \in \Lambda_i$ para algum $i > j$. Como os Λ_i são invariantes, podemos tomar uma componente de π^{-1} $(\widetilde{\Lambda_j})$, que estará contida entre translações paralelas de $\widetilde{M_j}$. Seja F um levantamento de f tal que $F(\widetilde{\Lambda_j}) \subset \widetilde{\Lambda_j}$. Podemos repetir o raciocínio que fizemos em $\widetilde{M_j}$ e obter que todo vetor de $\rho_p(F_0)$ dos pontos de $R(f)$ estão em retas com inclinação p/q.

Recordando que qualquer outro levantamento de f é da forma $F = F_0 + w$ com $w \in \mathbb{Z}^2$, também podemos concluir que todo vetor de $\rho_p(F)$ dos pontos de $R(f)$ estão em retas com inclinação p/q. Usando novamente o Lema 3.1.1, os pontos extremais de $\rho(F)$ estão em retas com inclinação p/q, contradizendo a hipótese de 0 pertencer ao interior do envoltório convexo de $\rho(F)$. Isto completa a prova da Afirmação 2.

Continuando com a prova do teorema, como cada círculo de $\bigcup_i g_0^{-1}(c_i)$ é não essencial, temos que cada um deles limita um único disco. O complementar da união desses discos é o interior de um único dos N_i, digamos que seja N_j. Enumeraremos os discos limitados pelos círculos de $\bigcup_i g_0^{-1}(c_i)$ da seguinte forma.

$$D_i \subset M_{j-1} \quad \forall\, i \mid 1 \leq i \leq s$$

e

$$D_i \not\subseteq M_j \quad \forall\, i \mid s < i \leq r.$$

Então

$$f(D_i) \subset \bigcup_{k=1}^{s} D_k \quad \forall\, i \mid 1 \leq i \leq s$$

e

$$f^{-1}(D_i) \subset \bigcup_{k=s+1}^{r} D_k \quad \forall\, i \mid s < i \leq r.$$

Consideraremos agora um ponto $x \in \pi^{-1}(x_1)$ tal que

$$v_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}.$$

Nós iremos mostrar que se x_1 não está em Λ_j, então existe outro ponto $y_1 \in \Lambda_j$ de modo que, quando $y \in \pi^{-1}(y_1)$,

$$v_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(y) - y}{n}.$$

Como podemos provar o mesmo para v_2, v_3 e v_4, teremos completado a prova do teorema.

Se $x_1 \in N_j$, então $x_1 \in \Lambda_j$. De fato, sendo x_1 um ponto não-errante temos pela Proposição 1.1.4 que $x_1 \in R(f)$. Consequentemente $x_1 \in \Lambda_j$ visto que $\Lambda_j \subset N_j$ e $\Lambda_j \subset R(f)$.

Afirmação 3. Se $x_1 \notin N_j$, então $x_1 \in D_p$ para $1 \leq p \leq r$ e existem $q \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{Z}^2$ e F um levantamento de f tais que $G := F^q - w$ possui um ponto fixo z_0 e

$$v_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(z_0) - z_0}{nq} = \frac{w}{q}. \tag{3.17}$$

De fato, se $x_1 \in D_p$ para $1 \leq p \leq s$, então existe $q > 0$ tal que $f^q(D_p) \subset D_p$ (x_1 é recorrente e $f(D_i) \subset \bigcup_{n=1}^{s} D_n$). Se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um levantamento de D_p e contém a x, então $F^q(D) \subset D + w$ para algum vetor de coordenadas inteiras w. Se definirmos $G = F^q - w$ então $G(D) \subset D$ e, pelo Teorema do ponto fixo de Brouwer, G tem um ponto fixo z_0. Além disso, por indução,

$$G^n(x) = F^{nq}(x) - nw \tag{3.18}$$

e

$$F^{nq}(x) - x = G^n(x) - x + nw.$$

Desse modo, como $G(D) \subset D$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(x) - x}{nq} = \lim_{n\to\infty} \frac{G^n(x) - x}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{nw}{nq} = \frac{w}{q}.$$

Por outro lado, como z_0 é um ponto fixo para G, a equação 3.18 implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(z_0) - z_0}{nq} = \frac{w}{q}.$$

Portanto

$$v_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(x) - x}{nq} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq}(z_0) - z_0}{nq} = \frac{w}{q}. \tag{3.19}$$

Se $x_1 \in D_p$ e $s < p \leq r$, então um argumento similar aplicado a f^{-1} fornece um ponto z_0 de G com as mesmas propriedades, completando a prova da afirmação 3.

Finalmente, queremos achar um ponto fixo y_1 para f^q que esteja em N_j e que satisfaça

$$v_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(y) - y}{n} \tag{3.20}$$

para $y \in \pi^{-1}(y_1)$. Então para este ponto fixo, teremos que a δ-cadeia periódica

$$y_1, f(y_1), \ldots, f^q(y_1) = y_1$$

mostra que $y_1 \in \Lambda_j$ e satisfaz a igualdade em 3.20. A existência deste ponto y_1 segue das Afirmações 4 e 5 que seguem.

Afirmação 4. Se $x_i \notin N_j$, então f^q tem um porto fixo em (N_j). Inicialmente, veja que a soma dos índices do pontos fixos de f^q em qualquer classe de Nielsen é 0, isto é, $N(f^q) = 0$. Isto segue do fato de f^q é homotópico à identidade Id pelo Lema 1.2.1. Então, como a função

$Id : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ tem número de Nielsen $N(Id) = 0$ pelo Exemplo 1.4.1, o Teorema 1.4.1 garante que $N(f^q) = 0$, ou seja, a soma dos índices do pontos fixos de f^q em qualquer classe de Nielsen é 0.

Como estamos supondo que $x_i \notin N_j$ então $x \in D_p$ para $1 \leq p \leq r$, iremos considerar pontos na classe de Nielsen do ponto $\pi(z_0)$ onde z_0 é um ponto fixo de G mencionado anteriormente. Qualquer ponto na classe de Nielsen de $\pi(z_0)$ que não está em N_j, está em algum D_i, com um levantamento $\widetilde{D_i}$ tal que, ou $G(\widetilde{D_i}) \subset \widetilde{D_i}$, ou $G^{-1}(\widetilde{D_i}) \subset \widetilde{D_i}$. Logo, o Lema 1.4.1 assegura que o índice de cada um desses pontos fixos em D_i será 1. Assim, o índice do conjunto de pontos fixos na classe de Nielsen de $\pi(z_0)$ que não estão em N_j é positivo (o disco D_k contribui com pelo menos $+1$). Isto implica que deve haver um ponto fixo $y_1 \in N_j$ para f^q na mesma classe de Nielsen que $\pi(z_0)$, concluindo a Afirmação 4

Afirmação 5. Se f^q tem um ponto fixo $y_1 \in N_j$, então $y \in \pi^{-1}(y_1)$ é ponto fixo para G e

$$v_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(y) - y}{n}. \tag{3.21}$$

Considere os pontos $\pi(z_0)$ e y_1 que estão na mesma classe de Nielsen de f^q. Veja que dois pontos p_1 e p_2 estão na mesma classe de pontos fixos de Nielsen se qualquer levantamento que deixe fixo as pré imagens por π de um, também deixa fixo as pre imagens por π do outro. De fato, como dois pontos fixos p_1 e p_2 de f^q são Nielsen equivalentes se existe uma curva $C : [0,1] \to \mathbb{T}^2, C(0) = p_1, C(1) = p_2$ tal que $f^q \circ C \sim C$. Isto implica, em particular, que $f^q(p_1) = p_1$ e $f^q(p_2) = p_2$. Logo, se F é um levantamento de f^q que fixa as pré-imagens por π de p_1, então F também deixa fixo as pré-imagens por π de p_2.

Então, como $\pi(z_0)$ e y_1 estão na mesma classe de Nielsen de f^q. Logo, como G fixa as pré-imagens por π de $\pi(z_0)$, então G fixa também as pré-imagens de $\pi^{-1}(y_1)$ por π, ou seja, $G(y) = y$ para $y \in \pi^{-1}(y_1)$. Além disso, a igualdade 3.21 em segue da Afirmação 3.

□

Teorema 3.4.2. *Se v é um vetor de coordenadas racionais no interior de $\rho(f)$, então existe um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\pi(p) \in \mathbb{T}^2$ é um ponto periódico para f e*

$$v = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(p) - p}{p}.$$

Demonstração. Suponha $v = (r/q, s/q)$ com o máximo divisor comum entre r, s e q igual a 1. Se definirmos $G(x) = F^q(x) - (r, s)$, a ideia é mostra que um ponto fixo p de $G(x)$ satisfaz $F^q(x) = p + (r, s)$ e teremos o resultado desejado.

Temos que $\rho(G) = q\rho(F) - (r,s)$ e portanto 0 está no interior de $\rho(G)$, visto que $(r/q, s/q)$ está no interior de $\rho(F)$. Como $\rho(F)$ é fechado e convexo, existem pontos extremais $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \rho(G)$ tais que 0 está no interior do envoltório convexo desses vetores. Segue da Teorema 3.4.1 que G possui um ponto fixo p. Portanto,

$$f^q(\pi(p)) = \pi(F^q(p)) = \pi(p + (r,s)) = \pi(p).$$

□

Encerraremos esta dissertação apresentando alguns dos principais resultados posteriores ao Teorema 3.4.2 que garantem a existência de pontos periódicos para homeomorfismo homotópicos à identidade no toro $\mathbb{T}^2$ via o conjunto de rotação.

O próximo teorema, obtido em [17], é divido a M. Misiurewicz e K. Ziemian e generaliza o Teorema 3.4.2 no caso em que um ponto em $int(\rho(F))$ não possui ao menos uma das coordenadas racional.

Teorema 3.4.3. *Suponha que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um levantamento do homeomorfismo homotópico à identidade $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ e suponha que $(a,b) \in int(\rho(F))$. Então exite um conjunto compacto $X \subset \mathbb{T}^2$, invariante por f, de modo que, para todo $x \in X$,*

$$\rho(x, F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(y) - y}{n} = (a,b),\ \forall\ y \in \pi^{-1}(x).$$

Se $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, então X pode ser escolhido com uma órbita periódica.

Em [17], também é provado o seguinte teorema.

Teorema 3.4.4. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento de um homeomorfismo homotópico à identidade no toro $\mathbb{T}^2$. A função $\rho : F \mapsto \{$espaço de todos os conjuntos compactos de $\mathbb{R}^2\}$ com a métrica de Hausdorff é contínua para todo F com $int(\rho(F)) \neq \emptyset$.*

O Teorema 3.4.4 e a Observação 3.1.7 implicam que existem conjuntos convexos com os pontos extremos que não sejam racionais e que sejam conjuntos de rotação de F, com $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento de um homeomorfismo homotópico à identidade no toro $\mathbb{T}^2$.

Com respeito a existência de pontos periódicos, quando o conjunto de rotação tem interior vazio, temos o próximo teorema devido a Franks em [6].

Teorema 3.4.5. *Seja um homeomorfismo que preserva área $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ homotópico à identidade e seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um levantamento de f. Se $\rho(F)$ for um segmento de reta* *e* $v \in \rho(F)$ *é um vetor com coordenadas racionais, então existe um ponto* $p \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $\pi(p) \in \mathbb{T}^2$ *é um ponto periódico para* f *e*

$$v = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(p) - p}{n}. \tag{3.22}$$

Quando assumirmos que o conjunto de rotação $\rho(F)$ é um segmento de reta e falarmos que ele tem inclinação irracional, estaremos nos referindo ao coeficiente angular da reta que contém $\rho(F)$.

Ainda sobre a existência de pontos periódicos para homeomorfismos homotópicos à identidade, quando o conjunto de rotação é um segmento de reta com inclinação irracional, podemos citar o próximo teorema de L. Jonker e L. Zhang em [10].

Teorema 3.4.6. *Suponha que* $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ *é um homeomorfismo do toro homotópico à identidade e* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *um levantamento de* f*. Suponha que* $\rho(F)$ *é um segmento de reta com inclinação irracional e contém um ponto com coordenadas racionais* $v = (r/q, s/q)$*. Então* f *tem um ponto periódico cujo período é* q*.*

Referências Bibliográficas

[1] F. Beguin. *Ensembles de rotation des homéomorphismes du tore* $\mathbb{T}^2$. Notas de Aula, 2007.

[2] R. F. Brown, *The Lefschetz Fixed Point Theorem*, Scott Foresman and Co., Glenview. I11 1978.

[3] M. Brown, *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*. Houston Journal of Mathematics, v.10, n. 1, pp. 35-41, 1984.

[4] A. Fathi, *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*. L'Enseignement Mathématique, v. 33 n. 3-4, pp 315-322, 1987.

[5] J. Franks, *Realizing rotation vectors for Torus Homeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc., vol 311 No 1 (Jan 1989), 107-115.

[6] J. Franks, *The Rotation Set and Periodic Points for Torus Homeomorphisms*, Dynamical systems and Chaos, Vol. 1, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995, p. 41-48.

[7] D. L. Gonçalves, J. C de Souza Kiihl, *Teoria do Índice*. 14º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janiero: IMPA, 1983.

[8] H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee, *Combinatorial geometry in the plane*. J. London Math. Soc., (2) 40 (1989), No 3 490-506.

[9] J. Jezierski, W. Marzantowicz, *Homotopy Methods in Topological Fixed and Periodic Points Theorey*. Vol. 3. Netherlands: Springer-Verlag, 2006.

[10] L. Jonker, L. Zhang, *Torus homeomorphisms whose rotation sets have empty interior*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, Vol. 18, pp 1173-1185, 1998.

[11] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical*. Cambridge University Press, 1999.

[12] J. Kwapisz. *Every convex polygon with rational vertices is a rotation set.* Ergodic Theory and Dynamical Systems, 12(02):333-339, 1992.

[13] E. L. Lima, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

[14] J. Llibre, R. Mackay. *Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus isotopic to the identity.* Engodic Theory Dynam. Systems, 11(1): 115-128,1991.

[15] W.S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction.* New York: Springer, 1967.

[16] M. Misiurewicz, K. Ziemian. *Rotation sets for maps of tori.* J. London Math. Soc. 2(40): 490-506,1989.

[17] M. Misiurewicz, K. Ziemian. *Rotation sets and ergodic measures for torus homeomorphisms.* Fund. Math. 137(1): 45-52, 1991.

[18] J.von Nagy. *Uber einen Satz von H. Jung, Jber.,* Deutsch, Math.-Verim. 24 (1915) 390-392.

[19] K. Oliveira, M. Viana, *Introdução à Teoria Ergódica*, Notas de aula. Math. Soc., Vol., 357, No. 6(Jun., 1995), 2111-2126.

[20] J. Oxtoby, *Diameters oj arcs and the gerrymandering problem*, Amer. Math. Monthly 84 (1977) 155-162.

[21] M. J. Panik, *Fundamentals of Convex Analysis*. Kluwer Academic Publishers, 1993.

[22] H. Poincaré, *Ouevres Complètes.* Tome I, Gauthier - Villars, Paris, (1952), 137-1

[23] M. Vilches, *Introdução à Topologia Algébrica.* Rio de Janeiro: IME-UERJ.

[24] M. A. Vilches, *Topologia Geral.* Rio de Janeiro: IME-UERJ.

[25] S. A. Zanata, *Instability for the Rotation Sef of Homeomorphisms of the Torus Homotopic to the Identity.* Ergodic Theory and Dynamical Systems 24(2), pp 319-328, 2004.