Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Dissertação de Mestrado

Marcos Ranieri da Silva

O Teorema da Massa Positiva e a Desigualdade de Penrose para gráficos

Maceió, Brasil
Março de 2013

Marcos Ranieri da Silva

O Teorema da Massa Positiva e a Desigualdade de Penrose para gráficos

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 25 de Março de 2013 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório

Maceió, Brasil
Março de 2013

O Teorema da Massa Positiva para gráficos e a Desigualdade de Penrose

Marcos Ranieri da Silva

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 25 de Março de 2013 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório (Orientador)

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

Resumo

Nesta dissertação trataremos de variedades Riemannianas completas, assintoticamente planas, que são gráficos suaves sobre $\mathbb{R}^n$. Neste caso, apresentaremos uma prova elegante e direta para o Teorema da Massa Positiva. Expressando sua curvatura escalar como um campo divergente, mostraremos que a massa ADM da variedade pode ser expressa como uma integral sobre a variedade do produto da curvatura escalar e uma função potencial não-negativa. Como aplicação, provaremos também a desigualdade de Penrose dando um limite inferior para a integral sobre o bordo usando a desigualdade de Aleksandrov-Fenchel.

Palavras chave: teorema da massa positiva, desigualdade de Penrose, desigualdade de Aleksandrov-Fenchel.

Abstract

In this paper we will work with complete Riemannian manifolds, asymptotically flat, that are smooth graphics over $\mathbb{R}^n$. In this case, we present an elegant and direct proof for the Positive Mass Theorem. Expressing its scalar curvature as a divergent field, we will show that the ADM mass of the manifold can be expressed as an integral over the manifold of the product of scalar curvature and a nonnegative potential function. As an application, we will prove also the Penrose inequality giving a lower bound for the boundary integral using the Aleksandrov-Fenchel inequality.

Keywords: Positive Mass Theorem, Penrose inequality, Aleksandrov-Fenchel inequality.

Sumário

Introdução **vi**

1 Preliminares **8**
1.1 Variedades Assintoticamente planas e a massa ADM 8
1.2 Exemplos de Variedades Assintoticamente planas 9

2 Gráficos sobre o espaço euclidiano **12**
2.1 Variedade de Schwarzschild como um gráfico 12
2.2 Gráficos sobre o espaço euclidiano 13

3 Teoremas Principais **16**
3.1 O Teorema da massa positiva 16
3.2 A Desigualdade de Penrose 18

4 Apêndice **23**

Referências Bibliográficas **27**

Introdução

A formulação de Newton da gravitação foi, e continua sendo, uma teoria bem sucedida em física, devido à sua habilidade para determinar a força exercida por um corpo em outro através da elegante equação $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$. Apesar do sucesso desta fórmula, surge uma questão que não foi resolvida por Newton e ficou bastante tempo sem uma resposta satisfatória: Como é transferida a força de gravidade de um objeto para outro? A teoria geral da relatividade, formulada por Einstein em 1915, respondeu esta questão. A solução vem de um conjunto de equações que são quase tão elegantes como a equação de Newton. A hipótese básica é que o espaço-tempo é uma variedade Lorentziana de dimensão 4 (N^4, g), sendo uma dimensão para o tempo e três para o espaço. Se denotarmos por Ric o tensor curvatura de Ricci e R a curvatura escalar de g então (N^4, g) satisfaz a equação de Einstein,

$$Ric - \frac{1}{2}R \cdot g = 8\pi T,$$

onde T é chamado o tensor momento-energia do espaço-tempo. Esta equação mostra explicitamente que a gravidade é obtida da geometria do espaço-tempo. Em particular, a presença de massa influência diretamente a geometria do espaço-tempo curvando-o. Podemos fazer uma analogia pensando uma folha infinita de borracha, a qual se distorce quando uma bola de boliche é colocada sobre ela, onde a folha representa o ambiente do espaço-tempo e a bola de boliche representa um objeto massivo. Se uma bola de golf é colocada na vizinhança da bola de boliche, a bola de golf tende a gravitar ao redor da bola de boliche devido a curvatura da folha de borracha. Isto é a gravitação é um efeito da geometria do espaço-tempo. E a geometria do espaço-tempo é influenciada diretamente na presença de um objeto massivo.

A teoria da relatividade geral, também tem alguns pontos delicados, um deles é definir a noção de *energia*, pois no espaço-tempo vácuo ela pode ser não-trivial. Um palpite é adotar que sobre tais circunstâncias a massa do universo está contida inteiramente em um domínio compacto. Isto implicaria que os efeitos da gravidade tendem a decair próximo do infinito e assim a geometria do espaço-tempo torna-se mais plana (ou seja, a métrica é assintoticamente plana). Na teoria de relatividade geral, a curvatura escalar da métrica $R(g)$ representa uma densidade de energia. Inspirados por argumentos variacionais, os físicos Arnowitt, Deser e Misner propuseram em [1], a seguinte definição para a massa, conhecida como a massa ADM

$$m_{ADM} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} \sum_{i,j} (g_{ij,i} - g_{ii,j})\nu_j dS_r. \tag{1}$$

Sob certas hipóteses do comportamento assintótico da métrica, pode-se mostrar que este limite existe e, além disso, é um invariante geométrico [2]. A fim de que essa definição de massa seja conveniente, devemos mostrar que se o espaço-tempo contém densidade de energia não-negativa, então a massa do espaço tempo deveria ser também não-negativa. De fato, isto é o que diz exatamente o Teorema da Massa Positiva. Em [11] Shoen e Yau demonstraram-o através de um belo argumento usando técnicas variacionais e a teoria de superfícies mínimas. A prova do Teorema da Massa Positiva foi objeto de estudo de matemáticos e físicos modernos e teve bastante influência em geometria.

Várias extensões e aplicações do Teorema da Massa Positiva foram obtidas desde a publicação da prova de Schoen e Yau. Mais tarde, Witten [14] conseguiu uma simples prova do Teorema da massa positiva em dimensão três usando spinors, enquanto Bartnik [2] extendeu este resultado para variedades spin de dimensão arbitrária. Miao [8] provou o Teorema da massa positiva para o caso onde a métrica torna-se C^1 através de uma hipersuperfície. Já Wang [13] considerou variedades assintoticamente hiperbólicas e mostrou a positividade de um invariente que pode ser interpretrado como a massa total. Em 2011, Lam [7] obteve uma prova elegante e direta para variedades do tipo gráficos, a qual apresentaremos neste trabalho. O Teorema da Massa Positiva também tem sido muito usado para estabelecer outros resultados paralelos em geometria. Por exemplo, Shoen usou o Teorema da Massa Positiva extensivamente no seu trabalho o qual completou a prova do problema de Yamabe [10], onde ele tentou encontrar uma métrica $\bar{g}$ de curvatura escalar constante na classe conforme de uma métrica dada g em uma variedade fechada M. Recentemente, Bray [3] usou o Teorema da massa positiva para provar a desigualdade Riemanniana de Penrose, que afirma que uma variedade Riemanniana (M^3, g) com curvatura escalar não-negativa, massa m e $|\Sigma|$ denotando a área da superfície mínima exterior, então $m \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}}$, valendo a igualdade se (M, g) é isométrica ao fim exterior da variedade de Schwarzchild exterior a superfície mínima.

Neste trabalho apresentaremos a solução de Lam do Teorema da Massa Positiva Riemanniana para variedades do tipo gráficos em dimensão n bem como uma demonstração da desigualdade Riemanniana de Penrose neste caso.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedades Assintoticamente planas e a massa ADM

O objetivo principal desta dissertação é estudar a massa total (massa ADM) de uma variedade assintoticamente plana que é um gráfico sobre o espaço euclidiano. Nesta seção, iremos definir claramente estes conceitos. Grosseiramente falando, uma variedade Riemanniana n-dimensional (M^n, g) é dita assintoticamente plana se fora de um conjunto compacto $K \subset M^n$, M^n é difeomorfa ao complementar da bola unitária fechada $\bar{B}$ e que sua métrica g decai suficientemente rápido para a métrica euclidiana plana no infinito. Mais precisamente:

Definição 1.1.1 *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita assintoticamente plana se ela satisfaz as seguintes condições:*

1. *existe um conjunto compacto $K \subset M^n$ e um difeomorfismo $\Phi : E = M^n \backslash K \to \mathbb{R}^n \backslash \bar{B}$. Em particular, $E = M^n \backslash K$ é um conjunto conexo.*

2. *a métrica $g = g_{ij}(x)dx^i dx^j$ na carta coordenada $(x^1, x^2, ..., x^n)$ em E definida por Φ, satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \delta_{ij} + O(|x|^{-p}) && (1.1) \\ |x||g_{ij,k}(x)| + |x|^2 g_{ij,kl}(x)| &= O(|x|^{-p}) && (1.2) \\ |R(x)| &= O(|x|^{-q}), && (1.3) \end{aligned}$$

para todo $i, j, k, l = 1, 2, ..., n$. Onde $g_{ij,k} = \partial_k g_{ij}$ e $g_{ij,kl} = \partial_k \partial_l g_{ij}$ são as derivadas coordenadas da ij-componente da métrica, $q > n$ e $p > (n-2)/2$ são constantes e $R(x)$ é a curvatura escalar de g no ponto x.

O conjunto $E = M^n \backslash K$ é chamado o *fim* da variedade assintoticamente plana. Analogamente, dizemos que (M^n, g) tem um número finito l de fins, se $M^n \backslash K$ é a união disjunta de componentes conexas (fins) $N_1, ..., N_k$, onde cada N_i é difeomorfo a $\mathbb{R}^n \backslash \bar{B}$, e em cada fim N_i e difeomorfismo $\Phi_i : \mathbb{R}^n \to \bar{B}$, a métrica g definida na carta coordenada dada por Φ_i satisfaz as condições acima. A menos de menção contrária, trataremos apenas de variedades assintoticamente planas com um único fim. Para uma variedade assintoticamente plana podemos definir sua massa ADM por:

Definição 1.1.2 *A **massa ADM** de uma variedade completa assintoticamente plana (M^n, g) é definida por*

$$m_{ADM} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \sum_{i,j}^{n} (g_{ij,i} - g_{ii,j})\nu_j dS_r, \tag{1.4}$$

onde ω_{n-1} é o volume da esfera unitária de dimensão $n-1$, S_r é a esfera de raio r, ν é o vetor normal exterior a S_r e dS_r é o elemento de área de S_r na carta coordenada.

Os físicos Arnowitt, Deser e Misner [1] foram os primeiros a propor esta definição em $n = 3$ para descrever a massa total em um sistema gravitacional isolado. Generalizamos suas definições de massa ADM para qualquer dimensão $n \geq 3$ escolhendo a constante correta em frente a integral. Destacamos também que a massa ADM independe da escolha das coordenadas assintoticamente planas [2]. Nós frequentemente escreveremos $m_{ADM}(M^n, g) = m_{ADM} = m$ se a variedade e sua métrica correspondente, estiverem bem entendidas. Além disso, iremos utilizar no trabalho a convenção do somatório de Einstein para somar sobre índices repetidos. Portanto iremos escrever

$$m = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j})\nu_j dS_r. \tag{1.5}$$

1.2 Exemplos de Variedades Assintoticamente planas

1. O exemplo mais simples de variedade assintoticamente plana é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com a métrica canônica $g = \delta$. Como $\delta_{ij,k} = 0$ para todo i, j e k, sua massa ADM $m_{ADM} = 0$. Iremos ver mais tarde que o espaço euclidiano está ligado ao caso rígido do Teorema da Massa Positiva.

2. Seja (M^n, g), com $n \geq 3$, uma variedade assintoticamente plana, então conseguimos construir uma classe de variedades assintoticamente planas usando uma mudança conforme de métricas. Dizemos que uma métrica $\bar{g}$ é conforme a métrica g se

$$\bar{g} = u(x)^{\frac{4}{n-2}} g, \tag{1.6}$$

para alguma $u(x) \in C^\infty(M^n)$ positiva. Note que a escolha do expoente é conveniente uma vez que ela simplifica a transformação da curvatura escalar. De fato, se $R(g)$ e $R(\bar{g})$ são as curvaturas escalares de g e $\bar{g}$ respectivamente. Então através de um cálculo direto obtemos

$$R(\bar{g}) = u^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(-\frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_g u + R(g)u \right). \tag{1.7}$$

Se (M^n, g) é assintoticamente plana, então $(M^n, \bar{g})$ também será uma variedade assintoticamente plana quando $u(x)$ satisfizer condições adequadas de decaimento. Em particular, $(M^n, \bar{g})$ é assintoticamente plana se

$$\begin{aligned} u(x) &\to 1 \text{ quando } x \to \infty \\ u_i &= O(|x|^{-p-1}) \\ u_{jk} &= O(|x|^{-p-2}) \\ \Delta_g u &= O(|x|^{-q}) \end{aligned}$$

para alguma constante $p > \frac{1}{2}$ e $q > 3$.

3. Como um caso particular do exemplo 2, seja $(M^3, g) = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, u^4\delta)$ com $u = 1 + \frac{m}{2r}$, onde m é uma constante positiva e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância euclidiana do ponto (x, y, z) à origem. Então a variedade resultante,

$$(M^3, g) = \left(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta\right), \tag{1.8}$$

é uma variedade assintoticamente plana. Ela é chamada a *variedade de Schwarzschild* tridimensional. Nós mostraremos no capítulo 2 que ela pode ser isometricamente mergulhada em uma parábola de rotação no $\mathbb{R}^4$.

Como $R = 0$ para a métrica euclidiana e $\Delta u = 0$, a equação (1.7) implica que a variedade de Schwarzschild tem curvatura escalar identicamente nula. Além disso, a esfera $S_{m/2} = \{x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}; |x| = m/2\}$ é uma superfície mínima em (M^3, g). De fato, como $g = u(x)^4\delta$ então a curvatura média H da esfera em relação a g satisfaz

$$H = \frac{1}{u^2}\left(\frac{2}{r} + \frac{4}{u}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{1.9}$$

Com efeito, o vetor normal à esfera em relação a métrica g é

$$N(x) = \frac{x}{|x|_g} = \frac{x_i}{u^2(x)|x|} = \frac{x_i}{u_2(x)r}\partial_i, \tag{1.10}$$

pois $|x|_g^2 = u(x)^4|x|^2$. Como a curvatura média H é dada pelo divergente do campo normal, se denotarmos por $g = \det(g_{ij})$ podemos encontrar H usando

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{u^2 r}\sqrt{g}\right) \\
&= \frac{1}{u^6}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}u^4\right) \\
&= \frac{1}{u^6}\left[u^4\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right) + \frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial x_i}(u^4)\right] \\
&= \frac{1}{u^6}\left[u^4\left(\frac{r - \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)x_i}{r^2}\right) + \frac{x_i}{r}\frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial r}(u^4)\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[u^4\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) + \frac{x_i^2}{r^2}4u^3\frac{\partial u}{\partial r}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[u^4\left(\frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3}\right) + 4u^3\frac{\partial u}{\partial r}\right] \\
&= \frac{1}{u^2}\left(\frac{2}{r} + \frac{4}{u}\frac{\partial u}{\partial r}\right),
\end{aligned} \tag{1.11}$$

onde usamos que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \partial x_i r \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Em particular, se tomarmos $r = m/2$ teremos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{m}{2r^2} \text{ e } ru = (1 + \frac{m}{2r})r = m.$$

Substituindo na equação 1.11 encontramos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{u^2}\left(\frac{2}{r} - \frac{4}{u}\frac{m}{2r^2}\right) \\ &= \frac{1}{u^2}\left(\frac{2}{r} - \frac{2m}{r.ru}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $H = 0$ se $r = m/2$. Além disso, a variedade de Schwarzschild tem dois fins, com uma reflexão simétrica em relação a esfera mínima $\Sigma = S_{m/2}$. Iremos de agora em diante nos referir ao fim exterior da variedade Scharzschild, dado por

$$\left(\mathbb{R}^3 \backslash B_{m/2}, \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta\right), \tag{1.12}$$

como a variedade exterior de Schwarzschild. Esta é agora uma variedade completa assintoticamente plana com um fim que tem um bordo mínimo.

Usando a definição, calcularemos a massa ADM da variedade exterior de Schwarzschild $(M^3, g) = (\mathbb{R}^3 \backslash B_{m/2}, (1 + \frac{m}{2r})^4 \delta)$:

$$\begin{aligned} m_{ADM}(g) &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j})\nu_j dS_r. \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} 4\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \left(-\frac{m}{2r^2}\right)\left(\frac{x_i}{r}\delta_{ij} - \frac{x_j}{r}\right)\frac{x^j}{r} dS_r \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_r} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \left(-\frac{m}{2r^2}\right)(-2) dS_r \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3 \left(\frac{m}{r^2}\right) 4\pi r^2 \\ &= m. \end{aligned}$$

Ou seja, a massa ADM da variedade exterior de Schwarzschild é precisamente a constante positiva m.

Capítulo 2

Gráficos sobre o espaço euclidiano

Neste capítulo, iremos estudar variedades assintoticamente planas que são gráficos suaves sobre $\mathbb{R}^n$. Começaremos discutindo o fato que a variedade de Schwarzschild pode ser isometricamente mergulhada no $\mathbb{R}^4$ como uma parábola rotacional, e que seu fim exterior pode ser expresso como um gráfico de uma função suave. Continuaremos o estudo de variedades que são gráficos de funções no $\mathbb{R}^n$ em geral e obteremos uma fórmula que expressa a curvatura escalar de tais variedades como o divergente de um campo de vetores.

2.1 Variedade de Schwarzschild como um gráfico

Já mostramos que a variedade tridimensional de Schwarzchild é uma variedade assintoticamente plana, além disso, ela é conforme ao $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ e pode ser expressa por

$$\left(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, \left(1+\frac{m}{2r}\right)^4\delta\right), \tag{2.1}$$

onde m é uma constante positiva (vimos que m é de fato a massa ADM da variedade), $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ é a distância do ponto (x,y,z) à origem em $\mathbb{R}^3$ e δ é a métrica canônica do espaço euclidiano. Mostraremos que a variedade de Schwarzschild pode ser isometricamente mergulhada em uma parábola rotacional em $\mathbb{R}^4$ como o conjunto dos pontos $D = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4; r = w^2/8m + 2m\}$. Explicitamente, a inversa do mergulho isométrico acima é dado por

$$\begin{aligned} \phi : \{r = \frac{w^2}{8m} + 2m\} \subset \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \\ \phi(x,y,z,w) &= \left(1+\frac{m}{2r}\right)^{-2}(x,y,z). \end{aligned}$$

Note que a imagem da superfície mínima $S_{m/2} = \{x \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}; |x| = m/2\}$, pelo mergulho isométrico, é $S_{2m} = \{(x,y,z,0) \in \mathbb{R}^4; \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2m\}$. Além disso, a variedade exterior de Schwarzschild corresponde aos pontos tal que $w \geq 0$. Logo, resolvendo para w, vemos que a variedade exterior tridimensional de Schwarzschild é o gráfico de uma função esfericamente simétrica $f : \mathbb{R}^3\backslash\bar{B}_{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(r) = \sqrt{8m(r-2m)}$.

2.2 Gráficos sobre o espaço euclidiano

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então o gráfico de f é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso temos o seguinte resultado

Proposição 2.2.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave e seja*

$$M^n = \{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

o gráfico de f. Se M^n está munida com a métrica g induzida da métrica plana do $\mathbb{R}^{n+1}$ então (M^n, g) é isométrico a $(\mathbb{R}^n, \delta + df \otimes df)$, onde δ é a métrica plana do $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Sejam $x = (x_1, ..., x_n)$ um ponto em $\mathbb{R}^n$ e $(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Mostraremos que a aplicação

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^n, \delta + df \otimes df) &\to (M^n, g) && (2.2)\\ x &\mapsto (x, f(x)) && (2.3) \end{aligned}$$

é uma isometria. Como f é suave por hipótese, F é claramente uma função suave. Além disso, F é um difeomorfismo cuja inversa é a projeção canônica $\pi : (M^n, g) \to (\mathbb{R}^n, \delta + df \otimes df)$ definida por $\pi(x, f(x)) = x$. Vamos verificar agora que o difeomorfismo F é uma isometria, ou seja, $F^*g = \delta + df \otimes df$. Por definição do pullback F^*,

$$(F^*g)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g\left(F_*\frac{\partial}{\partial x^i}, F_*\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

para todo $i, j = 1, ..., n$. Se $\phi \in C^\infty(M^n, g)$ então

$$\begin{aligned} (F_*\frac{\partial}{\partial x^i})\phi &= \frac{\partial}{\partial x^i}(\phi \circ F) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\phi(x, f(x))) && (2.4)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^i}\right) && (2.5)\\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x^{n+1}}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^i}\right) && (2.6)\\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x^{n+1}}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\delta_{ki}\right) && (2.7)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right)\phi. && (2.8) \end{aligned}$$

Disto,

$$F_*\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + f_i\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}, \tag{2.9}$$

onde $f_i = \partial_i f$. Como g é a métrica induzida do $\mathbb{R}^{n+1}$, temos

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta_{ij} \text{ para } 1\leq i,j\leq n+1$$

e

$$\begin{aligned} g &= \left(F_*\frac{\partial}{\partial x^i},F_*\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}+f_i\frac{\partial}{\partial x^{n+1}},\frac{\partial}{\partial x^j}+f_j\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right)\\ &= \delta_{ij}+f_if_j. \end{aligned} \tag{2.10}$$

■

Observação: 2.2.1 *Pela proposição 2.2.1, de agora em diante iremos nos referir a*

$$(M^n,g)=(\mathbb{R}^n,\delta+df\otimes df)$$

como o gráfico da função f. Mais geralmente, se $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com bordo suave $\Sigma=\partial\Omega$, então o gráfico de uma função f, definida em $\mathbb{R}^n\backslash\Sigma$, munido com a métrica induzida g do $\mathbb{R}^{n+1}$ é uma variedade completa com bordo $f(\Sigma)$ e isométrica à $(\mathbb{R}^n\backslash\Omega,\delta+df\otimes df)$. Estudaremos tais variedades na última seção.

A seguir, calcularemos a curvatura escalar de um gráfico e o expressaremos como o divergente de um campo de vetores.

Proposição 2.2.2 *Seja $(M^n,g)=(\mathbb{R}^n,\delta+df\otimes df)$ o gráfico de uma função suave $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Então a curvatura escalar de (M^n,g) pode ser expressa por*

$$R=\operatorname{div}\left(\frac{f_{ii}f_j-f_{ij}f_i}{1+|\nabla f|^2}\right), \tag{2.11}$$

onde a norma de ∇f é tomado em relação a métrica canônica do $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. De fato, pela equação de Gauss e usando o fato da curvatura escalar do espaço euclidiano é nula, temos que

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle=\langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle-\langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle, \tag{2.12}$$

onde α é a segunda forma do gráfico. Aplicando a equação acima em um referencial ortonormal, encontramos

$$\langle R(e_i,e_j)e_i,e_j\rangle=\langle\alpha(e_i,e_i),\alpha(e_j,e_j)\rangle-\langle\alpha(e_i,e_j),\alpha(e_i,e_j)\rangle. \tag{2.13}$$

Logo, a curvatura escalar do gráfico será

$$R=\sum_{i,j}(A_i^iA_j^j-A_i^jA_j^i), \tag{2.14}$$

onde $A=(A_j^i)$ é o operador forma do gráfico. Mas $A_i^j=\langle A\partial_i,\partial_j\rangle=-\langle dN(\partial_i),\partial j\rangle$. Como o campo normal ao longo do gráfico é:

$$N=-\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}(\nabla f,-1). \tag{2.15}$$

Obtemos

$$A^i_j = \partial_j\left(\frac{f_i}{w}\right) = \left(\frac{f_i}{w}\right)_j, \quad \text{onde } w = \sqrt{1+|\nabla f|^2}.$$

Mas

$$A^i_i A^j_j = \left(\frac{f_i}{w}\right)_i\left(\frac{f_j}{w}\right)_j = \partial_j\left[\left(\frac{f_i}{w}\right)_i\frac{f_j}{w}\right] - \frac{f_j}{w}\left(\frac{f_i}{w}\right)_{ij}. \tag{2.16}$$

Analogamente

$$A^j_i A^i_j = \partial_i\left[\left(\frac{f_i}{w}\right)_j\frac{f_j}{w}\right] - \frac{f_j}{w}\left(\frac{f_i}{w}\right)_{ij}. \tag{2.17}$$

Logo, substituindo essas expressões em 2.14 temos

$$\begin{aligned} R &= \sum_{ij}\partial_j\left[\left(\frac{f_i}{w}\right)_i\frac{f_j}{w}\right] - \frac{f_j}{w}\left(\frac{f_i}{w}\right)_{ij} - \left\{\partial_i\left[\left(\frac{f_i}{w}\right)_j\frac{f_j}{w}\right] - \frac{f_j}{w}\left(\frac{f_i}{w}\right)_{ij}\right\} \\ &= \sum_j\partial_j\sum_i\left[\left(\frac{f_i}{w}\right)_i\frac{f_j}{w} - \left(\frac{f_j}{w}\right)_i\frac{f_i}{w}\right] \\ &= \sum_j\partial_j\sum_i\left(\frac{f_{ii}f_j - f_{ij}f_i}{w^2}\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

■

Definição 2.2.1 *Dizemos que uma função suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é **assintoticamente plana** quando seu gráfico é assintoticamente plano. De acordo com a definição 1.1.1, se denotarmos por f_i a i-ésima derivada parcial de f, então f será assintotocamente plana quando*

$$f_i(x) = O(|x|^{-p/2}) \tag{2.19}$$

$$|x||f_{ij}(x)| + |x|^2|f_{ijk}(x)| = O(|x|^{-p/2}), \tag{2.20}$$

no infinito para algum $p > (n-2)/2$.

Capítulo 3

Teoremas Principais

Neste capítulo expressaremos a massa ADM de um gráfico $(M^n, g) = (R^n, \delta + df \otimes df)$ de uma função suave assintoticamente plana $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como a integral sobre a variedade do produto de sua curvatura escalar R por uma função potencial positiva, obtendo assim, o Teorema da massa positiva.

3.1 O Teorema da massa positiva

Teorema 3.1.1 (O teorema da massa positiva para gráficos) *Seja $(M^n, g) = (\mathbb{R}^n, \delta + df \otimes df)$ o gráfico de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ assintoticamente plana com curvatura escalar $R \geq 0$. Então a massa ADM de (M^n, g) é*

$$m = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} dV_g, \tag{3.1}$$

onde ∇f denota o gradiente de f na métrica plana, $|\nabla f|$ sua norma com respeito a métrica plana e dV_g é o elemento de volume em (M^n, g). Em particular, $R \geq 0$ implica $m \geq 0$. Além disso, a massa $m = 0$ se e somente se (M^n, g) é isométrico ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Por definição, a massa ADM de $(M^n, g) = (\mathbb{R}^n, \delta + df \otimes df)$ é

$$\begin{aligned} m &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j})\nu_j dS_r \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} (f_{ii}f_j + f_{ij}f_i - 2f_{ij}f_i)\nu_j dS_r \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu_j dS_r. \end{aligned}$$

Usando a hipótese do gráfico ser assintoticamente plano, a função $1/(1 + |\nabla f|^2)$ tende a 1 quando $r \to \infty$. Portanto, nós podemos reescrever a massa como

$$m = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu_j dS_r. \tag{3.2}$$

Agora, aplicando o teorema de Gauss-Green na integral acima e usando a proposição 4.0.1, temos

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{B_r} \operatorname{div}\left(\frac{f_{ii}f_k - f_{ik}f_i}{1+|\nabla f|^2}\right) dV_\delta \\
&= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\left(\frac{f_{ii}f_k - f_{ik}f_i}{1+|\nabla f|^2}\right) dV_\delta \\
&= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} R dV_\delta \\
&= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{1+|\nabla f|^2} dV_g,
\end{aligned}$$

pois

$$dV_g = \sqrt{\det g} dV_\delta = \sqrt{1+|\nabla f|^2} dV_\delta.$$

Além disso, se (M^n, g) é isométrico ao espaço euclidiano, então R é identicamente nula e pela expressão acima a massa m também será. Reciprocamente, se a massa $m = 0$ então como $R \geq 0$, temos que obrigatoriamente R é nula. Portanto, como o gráfico é assintoticamente plano, a função f tende a uma constante C no infinito, ou seja, o gráfico de f tende a um hiperplano. Além disso, f satisfaz a EDP elíptica $R = 0$ usando o príncipio do máximo [5], podemos tomar uma bola $B \subset \mathbb{R}^n$ suficientemente grande tal que $|f(x) - C| < \epsilon$, conclui-se que f é constante e (M^n, g) é isométrico ao $\mathbb{R}^n$ com a métrica canônica plana.

■

Proposição 3.1.1 *Se (M^n, g) é o gráfico de uma função suave esfericamente simétrica $f = f(r)$ em $\mathbb{R}^n$, então a massa ADM de (M^n, g) é não-negativa mesmo sem a hipótese da curvatura escalar não-negativa.*

Demonstração. Seja $f_r = \partial f/\partial r$ a derivada radial de f. Usando a regra da cadeia, as derivadas coordenadas de f satisfazem:

$$\begin{aligned}
f_i &= f_r \frac{x_i}{r} \\
f_{ij} &= f_{rr} \frac{x_i x_j}{r^2} + f_r \left(\frac{\delta_i j}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3}\right).
\end{aligned}$$

Como o vetor normal exterior é $\nu_j = x_j/r$, temos

$$\begin{aligned}
f_{ii} f_j \nu_j &= \left[f_{rr}\frac{x_i^2}{r^2} + f_r\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)\right] f_r \frac{x_j}{r}\frac{x_j}{r} \\
&= f_{rr} f_r \frac{x_i^2 x_j^2}{r^4} + f_r^2 \left(\frac{x_j^2}{r^3} - \frac{x_i^2 x_j^2}{r^5}\right) \\
&= f_{rr} f_r,
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
f_{ij}f_i\nu_j &= \left[f_{rr}\frac{x_ix_j}{r^2}+f_r\left(\frac{\delta_{ij}}{r}-\frac{x_ix_j}{r^3}\right)\right]f_r\frac{x_i}{r}\frac{x_j}{r}\\
&= f_{rr}f_r\frac{x_i^2x_j^2}{r^4}+f_r^2\left(\frac{\delta_{ij}x_ix_j}{r^3}-\frac{x_i^2x_j^2}{r^5}\right)\\
&= f_{rr}f_r-\frac{2f_r^2}{r}.
\end{aligned}
$$

Usando este fato junto com a definição de massa ADM de (M^n,g) temos

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\int_{S_r}(g_{ij,i}-g_{ii,j})\nu_j dS_r\\
&= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\int_{S_r}(f_{ii}f_j+f_{ij}f_i-2f_{ij}f_i)\nu_j dS_r\\
&= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\int_{S_r}(f_{ii}f_j-f_{ij}f_i)\nu_j dS_r\\
&= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\int_{S_r}\frac{2f_r^2}{r}dS_r\geq 0.
\end{aligned}
$$

■

Uma consequência deste fato e do Teorema da massa positiva é que não existem funções suaves assintoticamente planas e esfericamente simétricas em $\mathbb{R}^n$ cujos gráficos tem curvatura escalar negativa em todo ponto.

3.2 A Desigualdade de Penrose

A desigualdade de Penrose Riemanniana pode ser vista como uma generalização do Teorema da Massa Positiva. Se (M^n,g) é um gráfico de uma função assintoticamente plana com curvatura escalar não-negativa que tem bordo mínimo Σ então

$$m\geq\frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}},$$

onde $|\Sigma|$ é o $n-1$ volume de Σ e ω_{n-1} é o volume da esfera unitária.

Para provar tal desigualdade, mostraremos alguns resultados auxiliares e faremos algumas considerações:

Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado (mas não necessariamente convexo), com bordo suave $\Sigma=\partial\Omega$. Se $f:\mathbb{R}^n\backslash\Omega\to\mathbb{R}$ é uma função suave assintoticamente plana, então o gráfico de f (M^n,g) é uma variedade assintoticamente plana com bordo $f(\Sigma)$ suporemos também que cada componente conexa $f(\Sigma)$ está em um conjunto de nível de f. Pela proposição (2.2.1) e observação (2.2.1), nos referiremos a $(M^n,g)=(\mathbb{R}^n\backslash\Omega,\delta+df\otimes df)$ como o gráfico de f.

Se denotarmos por H e H_0 as curvaturas médias de $f(\Sigma)$ em (M^n,g) e em $\mathbb{R}^n$, respectivamente, podemos relacioná-las por

$$H = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} H_0. \tag{3.3}$$

Note que H_0 é também a curvatura média de Σ. A equação (3.3) implica que se $|\nabla f(x)| \to \infty$ quando $x \to \Sigma$, então $f(\Sigma)$ é uma superfície mínima exterior de (M^n, g), pois $H \equiv 0$ em Σ. Graficamente, isto significa que f é *vertical* ao longo do bordo.

Com tais considerações, veremos que a prova do teorema a seguir é muito similar a do Teorema da Massa Positiva, a diferença é que quando aplicamos o teorema da divergência conseguimos um termo extra referente ao bordo.

Teorema 3.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado (não necessariamente conexo) e $\Sigma = \partial\Omega$. Se $f : \mathbb{R}^n \backslash \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função suave assintoticamente plana tal que cada componente conexa de $f(\Sigma)$ está em um conjunto de nível de f e $|\nabla f(x)| \to \infty$ quando $x \to \Sigma$. Então a massa ADM do gráfico de f é*

$$m = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} H_0 d\Sigma, \tag{3.4}$$

onde H_0 é a curvatura média de Σ em $(\mathbb{R}^n \backslash \Omega, \delta)$

Demonstração. Podemos escrever a massa de (M^n, g) por

$$m = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu_j dS_r.$$

A diferença aqui é quando aplicamos o teorema de Stokes, obtemos a integral extra do bordo.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu_j dS_r \\ &= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n \backslash \Omega} \operatorname{div}\left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i) \right) dV_\delta \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu_j d\Sigma, \end{aligned}$$

onde tecnicamente nós não poderíamos usar o Teorema de Stokes em todo $\mathbb{R}^n$ pois $|\nabla f(x)| \to \infty$ quando $x \to \partial\Omega = \Sigma$. Porém, faremos um leve abuso de notação e mostraremos que as integrais impróprias convergem. Disto

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g \\ &\quad - \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu_j d\Sigma. \end{aligned}$$

O vetor normal exterior a Σ é $\nu = \nabla f / |\nabla f|$. Considerando Σ como uma superfície fechada em $(\mathbb{R}^n, \delta)$ denotaremos Δf o Laplaciano de f em com respeito a métrica plana e $\Delta_\Sigma f$ o Laplaciano de f restrito a Σ. Seja H^f o hessiano de f e H_0 a curvatura média de Σ com respeito a métrica plana. Iremos usar a seguinte fórmula bem conhecida que relaciona os dois laplacianos:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \Delta_\Sigma f + H^f(\nu,\nu) + H_0(\nu \cdot \nabla f) \\
&= \frac{1}{|\nabla f|} H^f\left(\nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right) + H_0 |\nabla f|,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $\Delta_\Sigma f = 0$ pois f é constante em Σ ($f(\Sigma)$ está em um conjunto de nível de f). Além disso

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{1+|\nabla f|^2}(f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu_j \\
&= \frac{1}{1+|\nabla f|^2}\left[(\Delta f)|\nabla f| - H^f\left(\nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)\right] \\
&= \frac{1}{1+|\nabla f|^2}\left[\left(\frac{1}{|\nabla f|}H^f\left(\nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right) + H_0|\nabla f|\right)|\nabla f| - H^f\left(\nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)\right] \\
&= \frac{|\nabla f|^2}{1+|\nabla f|^2} H_0,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

onde substituímos a equação 3.5 em 3.6. Portanto,

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g \\
&\quad - \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_\Sigma \frac{1}{1+|\nabla f|^2}(f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu_j d\Sigma \\
&= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g \\
&\quad + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_\Sigma \frac{|\nabla f|^2}{1+|\nabla f|^2} H_0 d\Sigma \\
&= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_\Sigma H_0 d\Sigma.
\end{aligned}$$

■

Observação: 3.2.1 *Como $f(\Sigma)$ está em um conjunto de nível de f, ela é a mesma superfície Σ transladada verticalmente, Logo, podemos expressar a massa ADM como*

$$m = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{f(\Sigma)} H_0 d\Sigma.$$

Denotaremos por Ω_i, $i = 1, ..., k$ as componentes conexas do conjunto aberto limitado Ω. No caso em que cada Ω_i é convexo, podemos obter um limite inferior para a integral do bordo no teorema 3.2.1. Para fazer isto, precisaremos do seguinte lema, que faz uso de um caso especial da desigualdade de Aleksandrov-Fenchel [9].

Lema 3.2.1 *Se Σ é uma superfície convexa em $\mathbb{R}^n$ com curvatura média H_0 e área $|\Sigma|$, então*

$$\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_\Sigma H_0 d\Sigma \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \tag{3.7}$$

Demonstração. Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície convexa com curvaturas principais $\kappa_1, ..., \kappa_{n-1}$. Definimos

$$\sigma_j(\kappa_1, ..., \kappa_{n-1}) = \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_j} \tag{3.8}$$

a j-ésima função simétrica normalizada em $\kappa_1, ..., \kappa_{n-1}$ para $j = 1, ..., n-1$. Em particular,

$$\begin{aligned} \sigma_0(\kappa_1, ..., \kappa_{n-1}) &= 1 \\ \sigma_1(\kappa_1, ..., \kappa_{n-1}) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i = \frac{1}{n-1} H_0 \\ \sigma_{n-1}(\kappa_1, ..., \kappa_{n-1}) &= \prod_{i=1}^{n-1} \kappa_i. \end{aligned}$$

A k-ésima quermassintegral V_k de Σ é definida por

$$V_k = \int_\Sigma \sigma_k(\kappa_1, ..., \kappa_{n-1}). \tag{3.9}$$

Um caso especial da desigualdade de Aleksandrov-Fenchel diz que, para $0 \leq i < j < k \leq n-1$,

$$V_j^k \geq V_i^{k-j} V_k^{j-i}. \tag{3.10}$$

Em particular, tomando $i = 0, j = 1, k = n-1$,

$$V_1^{n-1} \geq V_0^{n-2} V_{n-1}^1. \tag{3.11}$$

Mas,

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_\Sigma \sigma_0(\kappa_1, ..., \kappa_{n-1}) = |\Sigma| \\ V_1 &= \int_\Sigma \sigma_1(\kappa_1, ..., \kappa_{n-1}) = \frac{1}{n-1} \int_\Sigma H_0 \\ V_{n-1} &= \int_\Sigma \sigma_{n-1}(\kappa_1, ..., \kappa_{n-1}) = \omega_{n-1}, \end{aligned}$$

onde na última igualdade temos que o produtório das curvaturas principais é o determinante da diferencial da aplicação de Gauss e assim a integral sobre Σ dá exatamente a área algébrica da aplicação de Gauss na esfera, para o nosso caso, como a aplicação cobre a esfera uma vez, obtemos a área da esfera ω_{n-1}. De (3.11) temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{n-1}\int_\Sigma H_0\right)^{n-1} &\geq |\Sigma|^{n-2}\omega_{n-1} \\
\frac{1}{n-1}\int_\Sigma H_0 &\geq |\Sigma|^{\frac{n-2}{n-1}}\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \\
\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\int_\Sigma H_0 &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}},
\end{aligned}$$

pois

$$\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} = \omega_{n-1}\omega^{-\frac{n-2}{n-1}} = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-1}^{\frac{n-2}{n-1}}}.$$

■

A seguir, mostraremos a desigualdade de Penrose para gráficos em $\mathbb{R}^n$ com bordo convexo.

Teorema 3.2.2 (Desigualdade de Penrose para gráficos com bordo convexo) *Com as mesmas hipóteses do Teorema 3.2.1 junto com a hipótese adicional que cada componente conexa Ω_i de Ω é convexa e $\Sigma_i = \partial\Omega_i$, então*

$$m \geq \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma_i|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\int_{M^n} R\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}dV_g.$$

Em particular,

$$R \geq 0 \textit{ implica } m \geq \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma_i|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Demonstração. Com efeito, usando o teorema (3.2.1) e o lema (3.2.1), temos que

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\int_{S_r}\frac{1}{1+|\nabla f|^2}(f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu_j dS_r \\
&= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\int_{\Sigma_i} H_0 d\Sigma + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\int_{M^n} R\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}dV_g \\
&\geq \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma_i|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}}\int_{M^n} R\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}dV_g.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 4

Apêndice

Uma outra forma de calcular a curvatura escalar de um gráfico é:

Proposição 4.0.1 *Seja $(M^n, g) = (\mathbb{R}^n, \delta + df \otimes df)$ o gráfico de uma função suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Então a curvatura escalar de (M^n, g) pode ser expressa por*

$$R = \operatorname{div}\left(\frac{f_{ii}f_j - f_{ij}f_i}{1 + |\nabla f|^2}\right), \tag{4.1}$$

onde a norma de ∇f é tomado em relação a métrica canônica do $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Como a métrica $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$ é uma perturbação da identidade, é natural pensarmos que a sua inversa também seja. De fato, multiplicando a expressão da métrica por g^{jk} e somando em j temos

$$\delta_{ik} = g_{ij}g^{jk} = \delta_{ij}g^{jk} + g^{jk}f_j f_i \tag{4.2}$$

$$\delta_{ik} = g^{ik} + g^{jk}f_j f_i, \tag{4.3}$$

logo,

$$g^{ik} = \delta_{ik} - g^{jk}f_j f_i. \tag{4.4}$$

Agora multiplicando a última expressão por f_i e somando em i temos

$$g^{ik}f_i = f_k - g^{jk}f_j|\nabla f|^2.$$

Como i e j são indíces de soma então

$$(1 + |\nabla f|^2)g^{jk}f_j = f_k \tag{4.5}$$

$$g^{jk}f_j = \frac{f_k}{1 + |\nabla f|^2}. \tag{4.6}$$

Substituindo (4.6) em (4.4), encontramos uma expressão para a inversa g^{ij}:

$$g^{ij} = \delta^{ij} - \frac{f_i f_j}{1 + |\nabla f|^2}. \tag{4.7}$$

Em posse de (4.7), vamos calcular a curvatura escalar R de (M^n, g) usando sua expressão em coordenadas locais:

$$R = g^{ij}(\Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^k_{ik,j} + \Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{kl} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl}). \tag{4.8}$$

Por outro lado, sabemos que os símbolos de Christofell de (M^n, g) são:

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}g^{km}(g_{jm,i} + g_{im,j} - g_{ij,m}) \\
&= \frac{1}{2}g^{km}(f_{ji}f_m + f_j f_{mi} + f_{ij}f_m + f_i f_{mj} - f_{im}f_j - f_i f_{jm}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\delta_{km} - \frac{f_k f_m}{1+|\nabla f|^2}\right)2f_{ij}f_m \\
&= f_{ij}f_k - \frac{f_{ij}f_k|\nabla f|^2}{1+|\nabla f|^2} \\
&= \frac{f_{ij}f_k}{1+|\nabla f|^2}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Logo, temos:

$$\Gamma^k_{ij,k} = \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right)_k f_{ij}f_k + \frac{1}{1+|\nabla f|^2}(f_{ijk}f_k + f_{ij}f_{kk}),$$

$$\Gamma^k_{ik,j} = \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right)_j f_{ik}f_k + \frac{1}{1+|\nabla f|^2}(f_{ikj}f_k + f_{ik}f_{kj}),$$

$$\Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{kl} = \left(\frac{f_{ij}f_l}{1+|\nabla f|^2}\right)\left(\frac{f_{kl}f_k}{1+|\nabla f|^2}\right) = \frac{f_{ij}f_{lk}f_k f_l}{(1+|\nabla f|^2)^2},$$

$$\Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl} = \left(\frac{f_{ik}f_l}{1+|\nabla f|^2}\right)\left(\frac{f_{jl}f_k}{1+|\nabla f|^2}\right) = \frac{f_{ik}f_{jl}f_k f_l}{(1+|\nabla f|^2)^2},$$

Subtraindo a segunda expressão da primeira,

$$\Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^k_{ik,j} = \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right)_k f_{ij}f_k - \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right)_j f_{ik}f_k + \frac{1}{1+|\nabla f|^2}(f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj}) \tag{4.10}$$

Além disso, usando o fato que $(1+|\nabla f|^2)_j = (1+f_l^2)_j = 2f_l f_{lj}$, então

$$\left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right)_j = -\frac{(1+|\nabla f|^2)_j}{(1+|\nabla f|^2)^2} = -\frac{2f_l f_{lj}}{(1+|\nabla f|^2)^2}.$$

Analogamente,

$$\left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right)_k = -\frac{2f_k f_{lk}}{(1+|\nabla f|^2)^2}.$$

Logo podemos expressar 4.10 por

$$\Gamma_{ij,k}^{k} - \Gamma_{ik,j}^{k} = -\frac{2f_{ij}f_{lk}f_k f_l}{(1+|\nabla f|^2)^2} + \frac{2f_{ik}f_{jl}f_k f_l}{(1+|\nabla f|^2)^2} + \frac{f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj}}{1+|\nabla f|^2}. \tag{4.11}$$

Usando 4.11 em 4.8, obtemos

$$\begin{aligned} R &= g^{ij}\left(-\frac{f_{ij}f_{lk}f_k f_l}{(1+|\nabla f|^2)^2} + \frac{f_{ik}f_{jl}f_k f_l}{(1+|\nabla f|^2)^2} + \frac{f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj}}{1+|\nabla f|^2}\right) \\ &= -g^{ij}\frac{(f_{ij}f_{lk} - f_{ik}f_{jl})}{(1+|\nabla f|^2)^2}f_k f_l + g^{ij}\frac{(f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj})}{1+|\nabla f|^2}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Analisaremos cada parcela da equação 4.12 separadamente, na última parcela temos que

$$\begin{aligned} g^{ij}(f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj}) &= \left(\delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{1+|\nabla f|^2}\right)(f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj}) \\ &= (f_{ii}f_{kk} - f_{ik}^2) - \frac{f_i f_j}{1+|\nabla f|^2}(f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj}). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Já a primeira parcela de 4.12,

$$\begin{aligned} g^{ij}(f_{ij}f_{lk} - f_{ik}f_{jl})f_k f_l &= \left(\delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{1+|\nabla f|^2}\right)(f_{ij}f_{lk} - f_{ik}f_{jl})f_k f_l \\ &= (f_{ii}f_{lk} - f_{ik}f_{il})f_k f_l - \frac{f_i f_j f_k f_l}{1+|\nabla f|^2}(f_{ij}f_{lk} - f_{ik}f_{jl}) \qquad (4.14) \\ &= (f_{kk}f_{ji} - f_{ki}f_k j)f_i f_j. \qquad (4.15) \end{aligned}$$

Onde no primeiro termo da equação 4.14 trocamos i por k, k por i e l por j. Já o segundo termo é simétrico quando somamos sobre i, j, k e l, logo se anula. Logo substituindo 4.13 e 4.15 em 4.12 obtemos uma interessante fórmula para a curvatura escalar de (M^n, g), a saber,

$$R = \frac{f_{ii}f_{kk} - f_{ik}f_{ik}}{1+|\nabla f|^2} - \frac{2f_i f_j}{(1+|\nabla f|^2)^2}(f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj}). \tag{4.16}$$

Agora vamos tentar escrever a curvatura escalar R como um campo divergente de vetores. Primeiro perceba que

$$-\frac{(2f_{ij}f_j)}{(1+|\nabla f|^2)^2}f_{kk}f_i = \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right)_i f_{kk}f_i = \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right)_k f_{ii}f_k. \tag{4.17}$$

Analogamente,

$$\frac{(2f_{kj}f_j)}{(1+|\nabla f|^2)^2}f_{ki}f_i = -\left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right)_k f_{ki}f_i. \tag{4.18}$$

Logo, a expressão para a curvatura escalar em 4.16, transforma-se em

$$R = \frac{f_{ii}f_{kk} - f_{ik}f_{ik}}{1+|\nabla f|^2} + \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right)_k (f_{ii}f_k - f_{ik}f_i). \tag{4.19}$$

Por outro lado,

$$(f_{ii}f_k - f_{ik}f_i)_k = f_{iik}f_k + f_{ii}f_{kk} - f_{ikk}f_i - f_{ik}f_{ik} = f_{ii}f_{kk} - f_{ik}f_{ik}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} R &= \frac{(f_{ii}f_k - f_{ik}f_i)_k}{1+|\nabla f|^2} + \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2}\right)_k (f_{ii}f_k - f_{ik}f_i) \\ &= \left(\frac{f_{ii}f_k - f_{ik}f_i}{1+|\nabla f|^2}\right)_k \\ &= \operatorname{div}\left(\frac{f_{ii}f_k - f_{ik}f_i}{1+|\nabla f|^2}\right). \end{aligned}$$

■

Referências Bibliográficas

[1] Arnowitt, R. Deser, S. Misner, C.; *Coordinate Invariance and Energy Expressions in General Relativity.* Physical Review Letters; Vol. 122, 997 - 1006, (1961).

[2] Bartnik, R.; *The Mass of an Asymptotically Flat Manifold.* Communications on Pure and Applied Mathematics; Vol. 39, No. 5, 661 - 693, (1986).

[3] Bray, H. L.; *Proof of the Riemannian Penrose Inequality using the Positive Mass Theorem.* Journal of Differential Geometry; Vol. 59, 177 - 267, (2001).

[4] Do Carmo, M. P.;*Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 4ª edição, 2008.

[5] Evans, L. C.; *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[6] Huang, L-H., Wu, D. *Hypersurfaces with nonnegative scalar Curvature.* arXiv: 1102.5749v2.

[7] Lam, M.-K. G: *The Graphs Cases of the Riemannian Positive Mass Theorem and Penrose Inequalities in All Dimensions.* arXiv:1010.4256v1.

[8] Miao, P.; *Positive Mass Theorem on Manifolds admitting Corners along a Hypersurface.* Advances in Theoretical and Mathematical Physics; Vol. 6, 1163 - 1182, (2002).

[9] Schneider, R.; *Convex Bodies: the Brumm-Minkowski theory.* Cambridge University Press, 1993.

[10] Schoen, R. M.; *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature.* Journal of Differential Geometry; Vol. 20, 479 - 495, (1984).

[11] Schoen, R. M., Yau S.-T.; *On the Proof of the Positive Mass Conjecture in General Relativity.* Communications in Mathematical Physics; Vol. 65, 45 - 76, (1979).

[12] Spivak, M.: *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol.4, 2nd Edition, Publish or Perish Inc, Houston, 1979.

[13] Wang, X.; *The Mass of Asymptotically Hyperbolic Manifolds.* Journal of Differential Geometry; Vol. 57, 273 - 299, (2001).

[14] Witten, E.; *A New Proof of the Positive Energy Theorem.* Communications in Mathematical Physics; Vol. 80, 381 - 402, (1981).