UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CARLOS GONÇALVES DO REI FILHO

SOBRE IMERSÕES ISOMÉTRICAS EM PRODUTOS WARPED

Maceió,

2012

CARLOS GONÇALVES DO REI FILHO

SOBRE IMERSÕES ISOMÉTRICAS EM PRODUTOS WARPED

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 09 de Março de 2012 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório

Maceió,

2012

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

R347s Rei Filho, Carlos Gonçalves do.
Sobre imersões isométricas em produtos warped / Carlos Gonçalves do Rei Filho. – 2012.
63 f.

Orientador: Feliciano Marcílio Aguiar Vitório.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2012.

Bibliografia: f. 62-63.

1. Imersão isométrica. 2. Produto warped. 3. Campo conforme fechado. I. Título.

CDU: 514.76

Sobre Imersões Isométricas em Produtos Warped

Carlos Gonçalves do Rei Filho

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 09 de Março de 2012 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório (Orientador)

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante

Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Júnior

Dedico a minha mãe
Maria Cicera Ferreira Costa
e ao meu pai
Carlos Gonçalves do Rei (in memoriam).

Agradecimentos

A minha mãe por seu amor. Sempre esteve ao meu lado, me apoiou e esteve à disposição. A ela, pelo excelente papel de mãe e amiga. As minhas irmãs Ana Carla e Tamiri e ao meu irmão Lucas pela amizade e união que temos. Aos meus dois sobrinhos Grazy e Guto por estarem sempre presentes nas horas em que precisei me distrair.

De forma muito carinhosa, agradeço a atuação de minha noiva, namorada e amiga, Kellyane Pereira, na construção deste trabalho. Suas palavras de apoio e incentivos, durante esse periodo, foram muito significativas. Nas minhas ausências, procurava se aproximar de mim através da própria dissertação. A ela sou grato.

Ao prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório por toda paciência, dedicação e conhecimento, matemático e não matemático, compartilhado desde quando nos conhecemos (no último ano da graduação) e por ter confiado no meu potencial desde o início. Por ter proposto o desafio de resolver meu primeiro problema matemático (meu primeiro teorema) e por ter estado sempre por perto. Espero um dia poder retribuir.

Ao prof. Dr. Marcos Petrucio por ter aceito o convite de participar da banca. Pelas críticas, sugestões e conselhos dados durante o mestrado e neste trabalho. Pelas conversas matemáticas e não matemáticas, e pelos cursos ministrados, os quais foram muito úteis para o desenvolvimento desta dissertação.

Ao prof. Dr. Ruy Tojeiro por ter aceito o convite de participar da banca e por contribuir, de forma significativa, para a melhoria deste trabalho com suas valiosas sugestões e correções.

Aos professores do Instituto de Matemática - UFAL, especialmente aos Professores Antônio Carlos, Krerley Oliveira, Adán Corcho, Márcio Batista, José Carlos, Adonai e Andre Flores.

Aos amigos que fiz na graduação e no mestrado. Na graduação, especialmente ao José Aparecido e ao Rodrigo (Lages). No mestrado, especialmente ao Marcio Cavalcante, Ivan, Karla, Adriano, Lucyan, Nicholas, Marcio Silva, Isnaldo, Davi, Rafael, Wagner, Abraão, Adna, Alan, Felipe, Marcos, Kenerson, Rodrigo, Diogo . . ..

A todos que de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuiram para a obtenção deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

A Deus por tudo.

A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu,
mas pensar o que ninguém ainda pensou
sobre aquilo que todo mundo vê.
(Arthur Schopenhauer)

Resumo

Este trabalho trata da geometria das subvariedades em uma variedade produto warped $\mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$. Essa é uma larga família de variedades, incluindo as formas espaciais $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$, e os espaços $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, estudados recentemente por Benoît Daniel. Estabelecemos condições necessárias e suficientes para uma variedade Riemanniana $k-$dimensional M^k ser imersa isometricamente em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$, em termos da primeira e segunda forma fundamental e de um campo de vetores vertical. Esse teorema generaliza resultado devido a Benoît Daniel para o caso de produtos Riemannianos da forma $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, (veja [Da1]) em várias direções.

Palavras-chave: Imersão isométrica. Produto warped. Campo conforme fechado.

Abstract

This work contains the submanifold geometry in the warped product manifolds $\mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$. This is a large family of manifolds including the space forms $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^{n+1}$ and $\mathbb{H}^{n+1}$, and the space $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, recently studied by Daniel Benoît. We establish necessary and sufficient conditions for a $k-$dimensional Riemannian manifold M^k be isometrically immersed into a manifold $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$ in terms of its first and second fundamental forms and of the vertical vector fields. This theorem generalizes a result due to B. Daniel in the case of Riemannian products $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ (see [Da1]) in several directions.

Keywords: Isometric immersion. Warped product. Closed conformal field.

Sumário

Agradecimentos **iii**

Introdução **10**

1 Preliminares **13**

1.1 Fibrados Vetoriais 13

1.2 Fibrados Riemannianos 15

1.3 Imersões Isométricas 17

1.4 Variedade Produto Warped 25

1.5 Folheações e Distribuições Tangentes 29

2 Equações de Estrutura em uma Variedade **32**

2.1 Equações de Estrutura em uma Variedade do Tipo $(\overline{M}, \langle , \rangle, \overline{\nabla}, \tilde{X})$. 32

2.2 As Equações de Estrutura em um Produto Warped 43

3 Um Teorema de Bonnet **49**

3.1 Um Teorema de Bonnet Para Produtos Warped 49

Referências **61**

Introdução

Estabelecer condições necessárias e suficientes, para que uma variedade Riemanniana $k-$dimensional M^k possa ser imersa isometricamente em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^n$, é um antigo problema matemático. O. Bonnet, em 1867 (ver [OB]), provou que as equações de Gauss e Codazzi-Mainard são condições necessárias e suficientes para a existência de uma imersão isométrica local do disco plano, com uma métrica e uma aplicação na esfera unitária, em $\mathbb{R}^3$, tal que a métrica induzida coincide com a métrica original e a aplicação na esfera coincide com a aplicação de Gauss. Desde então, uma larga literatura sobre o assunto vem sendo construída.

Em 2002, P.G. Ciarlet, F. Larsonneur (ver [CL]), proporcionaram uma nova abordagem provando que novas equações de compatibilidades, as quais são equivalentes as equações de Gauss e Codazzi, também são necessárias e suficientes para a existência de uma imersão isométrica em $\mathbb{R}^3$. Para dimensão e codimensão arbitrária, em 1971, K. Tenenblat (ver [Te]), apresentou uma prova elementar do teorema fundamental para imersões isométricas em $\mathbb{R}^n$. Em 2005, Ch. Bar, P. Gauduchon e A. Moroianu (ver [BGM]), apresentou uma prova para hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$ a qual pode ser diretamente estendida à variedades semi-Riemannianas.

Quando M^{n+1} é uma forma espacial, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci podem ser definidas intrinsicamente em subvariedades, e são condições suficientes para uma variedade Riemanniana $k-$dimensional simplesmente conexa ser imersa isometricamente em M^{n+1} (ver [Sp], cap. 7.C.). No entanto, se M não é uma forma espacial, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, em geral, não são definidas intrinsicamente e envolvem alguns outros fatores relacionados ao espaço ambiente.

Recentemente, com a mesma técnica usada por Tenenblat em [Te], Benoit, em [Da1], obteve condições necessárias e suficientes para uma variedade n-dimensional ser imersa isometricamente em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ em termos da primeira e segunda forma fundamental e da projeção de um campo de vetores vertical. Então, para $n = 2$, ele estendeu esse resultado para o caso em que o espaço ambiente são as variedades homogêneas $3-$dimensional $(\mathbb{S}^3, g_{berger})$, $Nil_3, \widetilde{PSL_2}(\mathbb{R})$ com grupo de isometrias $4-$dimensionais (ver [Da2]). No caso de codimensão arbitrária, em 2010, J. H.

Lira, R. Tojeiro e F. Vitório, em [LTV], provaram um teorema de Bonnet para imersões isométricas em produtos de formas espaciais. Esse teorema estende o teorema de Daniel's em várias direções.

Em 2010, C. Chen e C. R. Xiang, contribuiram com uma nova classe de variedades. Eles deram condições suficientes para que uma variedade Riemanniana simplesmente conexa, $n-$dimensional, possa ser imersa isometricamente na variedade produto warped $\mathbb{R}^n \times_f \mathbb{R}$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é suave (ver [CX]).

Neste trabalho, com a intensão de contribuir com a literatura (ampliar o conjunto das variedades para as quais existe um teorema de Bonnet), estabelecemos condições necessárias e suficientes para uma variedade Riemanniana, $k-$dimensional, M^k ser imersa isometricamente em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$, em termos da primeira e segunda forma fundamental e de um campo de vetores vertical (ver teorema 3.1.1). Esse teorema generaliza resultado devido a B. Daniel para o caso de produtos Riemannianos da forma $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ (veja [Da1]) em várias direções. A estrutura deste trabalho é a seguinte: o capítulo 1 contém, exclusivamente, um material de apoio essencial para o entendimento dos capítulos subsequentes. O material presente no referido capítulo é básico e o leitor interessado em detalhes sobre o assunto deve procurar as referências citadas. No capítulo 2 começamos, de fato, a desenvolver o trabalho. Na primeira seção, determinamos as equações necessárias presentes em uma imersão isométrica $x : (M^k, \langle\, , \rangle, \nabla) \to (\overline{M}^n, \langle\, , \rangle, \overline{\nabla}, \tilde{X})$, onde $(M^k, \langle\, , \rangle, \nabla)$ é uma variedade Riemanniana $k-$dimensional e $(\overline{M}^n, \langle\, , \rangle, \overline{\nabla}, \tilde{X})$ é uma variedade Riemanniana $n-$dimensional, dotada de um campo de vetores conforme fechado $\tilde{X}$, que não se anula em $\overline{M}$. Na segunda seção mostramos que o produto warped $\mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$, onde $\mathbf{F}^n$ é uma variedade Riemanniana $n-$dimensional, possui um campo de vetores conforme fechado, o qual não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$. Assim, como aplicação da seção anterior, obtemos as equações de compatibilidade de um produto warped, quando $\mathbf{F}$ é uma forma espacial. Finalmente, no capítulo 3, mostramos que as equações encontradas na seção (2.2) são suficientes para a existência de uma imersão isométrica local, desde que $\mathbf{F}^n = \mathbb{S}^n$ e $-1 < f' < 1$. Fixamos uma variedade Riemanniana M^k, com métrica $\langle\, , \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇. Sobre M, consideramos um fibrado vetorial Riemanniano E de posto $l = n - k$ com conexão compatível ∇'. Além disso fixamos $h \in C^\infty(M)$, $\varrho \in \Gamma(E)$, e consideramos uma seção simétrica α' no fibrado $Hom(TM \times TM, E)$. Por fim, para cada seção local ξ de E, definimos a aplicação $A'_\xi : TM \to TM$ dada por

$$\langle A'_\xi U, V \rangle = \langle \alpha'(U, V), \xi \rangle,$$

para todo $U, V \in TM$. Em termos desses dados, é possível escrever formalmente as equações obtidas nas proposições 2.2.2 e 2.2.3. Mais precisamente, é possível escrever formalmente as equações (3.2)-

(3.7). Então, usando o teorema fundamental das subvariedades, equivalente a proposição 1.3.2, mostramos que existe uma imersão isométrica de M em $\mathbb{R}^{n+2}$. Em seguida, mostramos que existe uma imersão isométrica de M no produto warped $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$, desde que $-1 < f' < 1$.

O principal resultado contido neste trabalho é o seguinte teorema:

Teorema 0.0.1 *Seja* $(M^k, \langle\ ,\ \rangle, \nabla)$ *uma variedade Riemanniana simplesmente conexa* $k-$*dimensional,* $\langle\ ,\ \rangle$ *sua métrica e* ∇ *sua conexão de Levi-Civita. Assuma que* $(\langle , \rangle, \nabla, \nabla', \alpha', \varrho, h)$ *satisfaz as equações de compatibilidade para* $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$*, com* $-1 < f' < 1$*. Então, existe uma imersão isométrica* $g : M^k \to \mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$ *e um isomorfismo de fibrados vetoriais* $\tilde{g} : E \to TM^{\perp}$ *ao longo de* g*, tal que para todo* $U, V \in TM$ *e toda seção local* $\xi, \eta \in E$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{g}(\xi), \tilde{g}(\eta) \rangle &= \langle \xi, \eta \rangle \\ \tilde{g}\alpha'(U, V) &= \alpha(U, V) \\ \tilde{g}\nabla'_U \xi &= \nabla^{\perp}_U \xi, \end{aligned}$$

onde $\nabla^{\perp}$ *e* α *são a conexão normal e a segunda forma fundamental de* $g(M) \subset \mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$*, respectivamente. Além disso, a imersão é única, a menos de isometrias globais na variedade* $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$*.*

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo contém um material de apoio, essencial para o entendimento dos capítulos subsequentes. O material presente no referido capítulo é básico e o leitor interessado em detalhes sobre o assunto deve procurar as referências citadas.

1.1 Fibrados Vetoriais

Nesta seção, definimos um dos objetos essenciais para o desenvolvimento deste trabalho, os fibrados vetoriais. Um fibrado vetorial é, de certa forma, uma generalização de fibrado tangente e fibrado normal (de uma imersão isométrica) sobre uma variedade diferenciável. O conteúdo desta seção foi baseado em [Le] e [Dj].

Definição 1.1.1 *Dada uma variedade diferenciável M, um* ***fibrado vetorial*** *real C^∞ sobre M é uma variedade diferenciável E, juntamente com uma aplicação diferenciável e sobrejetiva $\pi : E \to M$ satisfazendo as seguintes condições:*

(a) Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que , para todo $p \in M$, o conjunto $E_p = \pi^{-1}(p)$ possui uma estrutura de espaço vetorial real k dimensional.

(b) Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p em M e uma aplicação diferenciável $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ tal que:

i. Para cada $q \in U$, a restrição de Φ à E_q é um isomorfismo linear entre E_q e $\{q\} \times \mathbb{R}^k$, munido com a estrutura canônica de espaço vetorial.

ii. Se $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \to U$ denota a projeção sobre o primeiro fator, então $\pi = \pi_U \circ \Phi : \pi^{-1}(U) \to U$.

Nas notações acima, dizemos que M é a **base** e E é o **espaço total** do fibrado; E_p $(p \in M)$ é a **fibra** de E sobre p. O natural k é o **posto** de E (ou de π); se $k = 1$, dizemos que E é um **fibrado de linhas**. Por fim, Φ é uma **trivialização local**, ou carta de fibrado de E sobre U.

Sempre que não houver perigo de confusão, diremos simplesmente que E (resp. π) é um fibrado sobre M, deixando implícita a projeção π (resp. o espaço total E) e o posto k.

Se $\pi : E \to M$ é um fibrado vetorial sobre M e $U \subset M$, é um aberto de M, uma **seção local** de E (ou de π) é uma aplicação diferenciável $\eta : U \to E$ tal que $\pi \circ \eta = Id_U$, a aplicação identidade de U; nesse caso, dizemos que η é uma seção em U para π. Se $U = M$, dizemos apenas que η é uma seção em E. Doravante, salvo menção em contrário, denotamos por $\Gamma(E)$ o espaço vetorial das seções de E. Dado $U \subset M$ aberto, um referencial (local) em U para π é um conjunto $\{\eta_1, ..., \eta_k\}$ de seções em U para π, tal que $\{\eta_1(p), ..., \eta_k(p)\}$ é uma base de $\pi^{-1}(p)$, para todo $p \in U$; o referencial é global se $U = M$.

Sempre existe um referencial local. Em outras palavras, vale o

Lema 1.1.1 *Se $\pi : E \to M$ é um fibrado vetorial sobre M e $U \subset M$ é domínio de uma trivialização local para π, então existe em U um referencial para π.*

Demonstração. Sejam $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ uma trivialização local para π e $\{e_1, ...e_k\}$ o referencial canônico em $\mathbb{R}^k$; defina $\iota_j : U \to U \times \mathbb{R}^k$ por $\iota_j(p) = (p, e_j)$. Se $\eta_j : U \to E$ é dada por

$$\eta_j = \Phi^{-1} \circ \iota_j,$$

é imediato verificar que se trata de um referencial em U para π. ■

Se M é uma variedade diferenciável, $E = M \times \mathbb{R}^k$ e $\pi_M : E \to M$ é a projeção sobre o primeiro fator, então é imediato verificar que E é um fibrado vetorial de posto k sobre M, denominado o **fibrado trivial** de posto k sobre M (para $p \in M$, a estrutura de espaço vetorial k-dimensional em $E_p = \{p\} \times \mathbb{R}^k$ é novamente a canônica). Temos claramente $\Gamma(E) = C^\infty(M; \mathbb{R}^k)$.

O fibrado tangente TM de uma variedade diferenciável n-dimensional M é um fibrado vetorial de posto n sobre M. Denotaremos, no decorrer do texto, $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$. E usaremos a notação $X \in TM$ ou $X \in \mathfrak{X}(M)$ para dizer que X é um campo de vetores em M ou uma seção em TM.

Um fato importante é que podemos construir fibrados vetoriais a partir de outros já dados. Não iremos nos aprofundar nesse assunto, o leitor interessado deve procurar as referência citadas. Precisaremos apenas da soma de Whitney e do fibrado dos homomorfismos os quais definiremos em seguida. Não provaremos as próximas afirmações, mas em caso de dúvidas ver, por exemplo, [Dj] ou [Sp].

Exemplo 1.1.1 *Sejam $\pi_E : E \to M$ e $\pi_F : F \to M$ fibrados vetoriais de postos k e l, respectivamente. A **soma de Whitney** de E e F é o espaço topológico de dimensão kl*

$$E \oplus_W F = \coprod_{p \in M} (E_p \oplus F_p),$$

munido da estrutura de fibrado vetorial sobre M induzida a partir daquelas de E e F. As seções de $E \oplus_W F$ são da forma $\eta = \xi \oplus \zeta$, onde $\xi \in \Gamma(E)$ e $\zeta \in \Gamma(F)$.

Exemplo 1.1.2 *Sejam $\pi_E : E \to M$ e $\pi_F : F \to M$ fibrados vetoriais de postos k e l, respectivamente. Definamos a projeção $\pi : Hom(E, F) \to M$ por $\pi^{-1}(x) = Hom(E_x, F_x)$, de sorte que $Hom(E, F)$ é a união disjunta dos espaços das aplicações lineares de E_x em F_x, $x \in M$. $Hom(E, F)$ dotado da estrutura diferenciável natural induzida pela projeção é um fibrado vetorial de posto kl, chamado **fibrado dos homomorfismos.** Uma seção em $Hom(E, F)$ é simplesmente um homomorfismo $\xi : E \to F$.*

Dados dois fibrados vetoriais $\pi_E : E \to M_1$ e $\pi_F : F \to M_2$, e um difeomorfismo $\phi : M_1 \to M_2$, dizemos que uma aplicação diferenciável $\tilde{\phi} : E \to F$ é um **isomorfismo de fibrados** ao longo de ϕ se, para todo $x \in M_1$, temos

(i) $\pi_F \circ \tilde{\phi} = \phi \circ \pi_E$ e $\tilde{\phi}(\pi_E^{-1}(x)) = \pi_F^{-1}(\phi(x))$,

(ii) A restrição $\tilde{\phi}_x : \pi_E^{-1}(x) \to \pi_F^{-1}(\phi(x))$ de $\tilde{\phi}$ a fibra $\pi_E^{-1}(x)$ é um isomorfismo de espaço vetorial.

1.2 Fibrados Riemannianos

O objetivo desta seção é apenas relembrar alguns fatos, a respeito de fibrados Riemannianos, os quais iremos usar frequentemente ao longo do texto.

Definição 1.2.1 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma **métrica Riemanniana** em um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ é uma aplicação $C^\infty(M)-$bilinear, simétrica e positiva definida*

$$\langle , \rangle : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to C^\infty(M).$$

O fato é que todo fibrado vetorial, $\pi : E \to M$, admite uma métrica Riemanniana.

Uma métrica Riemanniana, em uma variedade diferenciável M, é uma métrica Riemanniana no fibrado tangente TM de M. Lembre-se que denotamos $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$. Em particular, toda variedade diferenciável possui uma métrica Riemanniana.

Definição 1.2.2 *Uma* ***conexão (linear)*** *em um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ é uma aplicação $\mathbb{R}-$bilinear*

$$\begin{aligned} \nabla : \quad \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E) && (1.1)\\ (X, \eta) &\mapsto \nabla_X \eta && (1.2) \end{aligned}$$

satisfazendo, para $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \Gamma(E)$, as seguintes condições:

(a) $\nabla_{(fX)}\eta = f\nabla_X \eta$.

(b) $\nabla_X(f\eta) = f\nabla_X\eta + X(f)\eta$.

Fixada uma métrica $\langle , \rangle$ em E, dizemos que a conexão ∇ é ***compatível com a métrica*** *se, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta, \xi \in \Gamma(E)$, tivermos*

$$X\langle \eta, \xi \rangle = \langle \nabla_X \eta, \xi \rangle + \langle \eta, \nabla_X \xi \rangle.$$

Em geral, fixada uma métrica em um fibrado vetorial, pode existir mais de uma conexão compatível com tal métrica. Porém, a conexão de Levi-Civita ∇ de uma variedade Riemanniana M é a única conexão compatível com a métrica de M e tal que

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Um **fibrado vetorial Riemanniano** é um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ munido de uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$ e de uma conexão compatível com $\langle , \rangle$.

Sejam $(E, \nabla^E, \langle , \rangle)$ e $(F, \nabla^F, \langle , \rangle)$ fibrados vetoriais Riemannianos dados. A soma de Whitney $E \oplus_W F$ é um fibrado Riemanniano com a métrica $\langle , \rangle$ e conexão ∇, tais que

$$\begin{aligned} \langle \eta_1 \oplus \xi_1, \eta_2 \oplus \xi_2 \rangle &= \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_E + \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_F && (1.3)\\ \nabla_X(\eta \oplus \xi) &= \nabla^E_X \eta \oplus \nabla^F_X \xi, \end{aligned}$$

onde $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta, \eta_1, \eta_2 \in \Gamma(E)$, $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \Gamma(F)$.

É simples verificar que $\langle , \rangle$ e ∇ definem, respectivamente, uma métrica e uma conexão em $E \oplus_W F$. Mostremos a compatibilidade entre ambas: as compatibilidades entre $\langle , \rangle_E$ e ∇^E, $\langle , \rangle_F$ e ∇^F nos dão

$$\begin{aligned}
X\langle \eta_1 \oplus \xi_1, \eta_2 \oplus \xi_2 \rangle &= X\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_E + X\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_F \\
&= \langle \nabla^E_X \eta_1, \eta_2 \rangle_E + \langle \eta_1, \nabla^E_X \eta_2 \rangle_E + \langle \nabla^F_X \xi_1, \xi_2 \rangle_F + \langle \xi_1, \nabla^F_X \xi_2 \rangle_F \\
&= \langle \nabla^E_X \eta_1 \oplus \nabla^F_X \xi_1, \eta_2 \oplus \xi_2 \rangle + \langle \eta_1 \oplus \xi_1, \nabla^E_X \eta_2 \oplus \nabla^F_X \xi_2 \rangle \\
&= \langle \nabla_X(\eta_1 \oplus \xi_1), \eta_2 \oplus \xi_2 \rangle + \langle \eta_1 \oplus \xi_1, \nabla_X(\eta_2 \oplus \xi_2) \rangle,
\end{aligned}$$

o que mostra a compatibilidade de ∇.

Definição 1.2.3 *Se ∇ é uma conexão no fibrado vetorial $\pi : E \to M$, o* ***operador de curvatura****, ou simplesmente a curvatura de E é a aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ dada por*

$$R(X,Y)\eta = \nabla_X \nabla_Y \eta - \nabla_Y \nabla_X \eta - \nabla_{[X,Y]}\eta. \tag{1.4}$$

Se $E = TM$, dizemos que R é o operador de curvatura da variedade M.

Analogamente ao caso de uma variedade Riemanniana (veja o capítulo 4 de [dC]), é imediato verificar que o operador de curvatura de um fibrado Riemanniano E sobre M é $C^\infty(M)-$linear em cada entrada.

Em um fibrado vetorial Riemanniano $\pi : E \to M$, com operador de curvatura R, valem as seguintes propriedades: para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \Gamma(E)$,

(i) $\langle R(X,Y)\xi, \eta \rangle = -\langle R(Y,X)\xi, \eta \rangle$

(ii) $\langle R(X,Y)\xi, \eta \rangle = -\langle R(X,Y)\eta, \xi \rangle$.

Se $E = TM$, o operador R satisfaz várias outras propriedades (Ver [dC], cap. 4).

1.3 Imersões Isométricas

Nesta seção apresentamos as equações básicas que aparecem naturalmente quando se estuda imersões isométricas entre variedades Riemannianas. Conhecidas na literatura como "as equações fundamentais " ou "equações de estrutura" de uma imersão isométrica. Em seguida, exibimos uma demonstração do teorema fundamental das subvariedades. O conteúdo desta seção foi baseado em [Dj].

Dadas as variedades Riemannianas M^n e $\overline{M}^m$, com métricas Riemannianas, respectivamente, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$, dizemos que uma aplicação $\varphi : M \to \overline{M}$ é uma **imersão isométrica** se

$$\langle\!\langle \varphi_* X_p, \varphi_* Y_p \rangle\!\rangle_{\varphi(p)} = \langle X_p, Y_p \rangle_p,$$

para todos $p \in M$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. O número $k = m - n$ é chamado a codimensão de φ. Em particular, toda imersão isométrica é uma imersão e, como tal, localmente um mergulho. Portanto, sempre que não houver perigo de confusão, identificaremos $p \in M$ com $\varphi(p) \in \overline{M}$ e denotaremos as métricas de M e $\overline{M}$ simplesmente por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, omitindo o ponto p. Seja agora $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ com métrica $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$. Definindo, para todo ponto $p \in M$ e todo par de vetores X_p, $Y_p \in T_pM$,

$$\langle X_p, Y_p \rangle_p = \langle\!\langle \varphi_* X_p, \varphi_* Y_p \rangle\!\rangle_{\varphi(p)}, \tag{1.5}$$

obtemos uma métrica Riemanniana em M^n, denominada a **métrica induzida** pela imersão φ. Munindo M^n com tal métrica tornamos φ automaticamente uma imersão isométrica.

Para cada $p \in M$, o produto interno de $T_p\overline{M}$ induz uma decomposição de $T_p\overline{M}$ na soma direta ortogonal

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp.$$

Verifica-se que a união disjunta $\coprod_{p\in M} T_pM^\perp$ admite uma estrutura de fibrado vetorial, denominado o **fibrado normal** $TM^\perp$ de M em $\overline{M}$, de tal sorte que

$$T\overline{M}\,|_M \simeq TM \oplus_W TM^\perp.$$

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ o espaço das seções em $TM^\perp$.

Seja $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$ e X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se X_1, X_2 são extensões locais de X e Y_1, Y_2 são extensões locais de Y a $\overline{M}$, segue que

$$\overline{\nabla}_{X_1} Y_1 = \overline{\nabla}_{X_2} Y_2.$$

Portanto, escrevendo $\overline{\nabla}_X Y$ para denotar $\overline{\nabla}_{X_1} Y_1$, onde X_1 e Y_1 denotam extensões quaisquer de X e Y a $\overline{M}$, obtemos um campo vetorial bem definido $\overline{\nabla}_X Y \in T\overline{M}\,|_M$.

Sejam

$$\begin{aligned} (\ )^\top : T\overline{M}\,|_M &\longrightarrow TM \\ (\ )^\perp : T\overline{M}\,|_M &\longrightarrow TM^\perp, \end{aligned}$$

as projeções tangente e normal.

Sejam $(\overline{M}^{n+k}, \langle , \rangle, \overline{\nabla})$ variedade Riemanniana e $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ imersão isométrica. Dados X, $Y \in TM$, temos que

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp.$$

É simples verificar, usando a unicidade da conexão de Levi-Civita, que $(\overline{\nabla})^\top$ é a conexão de Levi-Civita de M, que denotaremos por ∇.

Assim, obtemos a **fórmula de Gauss**

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad \forall\, X, Y \in TM. \tag{1.6}$$

A fórmula de Gauss define a aplicação $\alpha : TM \times TM \longrightarrow TM^\perp$ chamada a **segunda forma fundamental** de φ. Verifica-se diretamente das propriedades das conexões $\overline{\nabla}$ e ∇ que α é bilinear simétrica sobre o anel $C^\infty(M)$.

Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Denote por $A_\xi X$ a componente tangente de $-\overline{\nabla}_X \xi$, isto é,

$$A_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top.$$

Desde que para todo $Y \in TM$ temos

$$0 = X\langle \xi, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\rangle,$$

a fórmula de Gauss nos dá

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi\rangle.$$

Em particular, a aplicação $A : TM \times TM^\perp \longrightarrow TM$ dada por $A(X, \xi) = A_\xi X$ é bilinear no anel $C^\infty(M)$. Assim, a aplicação $A_\xi : TM \longrightarrow TM$ é linear no anel $C^\infty(M)$ e simétrica, isto é, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle X, A_\xi Y\rangle$, para todo $X, Y \in TM$. A_ξ é conhecido na literatura por **operador de forma**, **endomorfismo de Weingarten** associado a α ou, por abuso de linguagem, a segunda forma fundamental na direção normal ξ.

A componente normal de $\overline{\nabla}_X \xi$, denotada por $\nabla^\perp_X \xi$, define uma conexão compatível no fibrado normal $TM^\perp$, uma vez que se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e η, $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, então

$$X\langle \eta, \xi\rangle = \langle \overline{\nabla}_X \eta, \xi\rangle + \langle \eta, \overline{\nabla}_X \xi\rangle = \langle \nabla^\perp_X \eta, \xi\rangle + \langle \eta, \nabla^\perp_X \xi\rangle.$$

Dizemos que $\nabla^\perp$ é a conexão normal de φ, e obtemos a **fórmula de Weingarten**

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi, \quad X \in TM \;\; e \;\; \xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp. \tag{1.7}$$

Agora, usando as fórmulas de Gauss e Weingarten derivamos as equações de estrutura de uma imersão isométrica, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Para esse fim, fixaremos mais algumas notações.

Seja

$$(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X\alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Observe que $\nabla^{\perp}\alpha$ é $C^{\infty}(M)-$multilinear e que podemos ver $\nabla^{\perp}$ como uma conexão no fibrado vetorial $Hom(TM \times TM, TM^{\perp})$.

Seja $R^{\perp}$ o operador de curvatura do fibrado normal $TM^{\perp}$, ou seja,

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi$$

para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^{\perp}$.

A proposição a seguir, apresenta as equações de estrutura de uma imersão isométrica. Sua demonstração é simples, mas em caso de dúvidas, o leitor pode encontrar uma demonstração em [Dj], ou [dC], por exemplo.

Proposição 1.3.1 *Sejam* $(M^n, \langle,\rangle, \nabla)$ *e* $(\overline{M}^{n+k}, \langle,\rangle, \overline{\nabla})$ *variedades Riemannianas. Seja* $\varphi : M \longrightarrow \overline{M}$ *uma imersão isométrica. Para todo campo de vetores* X, Y, Z, W *em* TM *e toda seção* ξ, η *de* $TM^{\perp}$ *valem as seguintes equações, conhecidas como as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, respectivamente:*

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle \\ &\quad + \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle,\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,\xi\rangle = \langle (\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z),\xi\rangle, \tag{1.9}$$

e

$$\langle \overline{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle, \tag{1.10}$$

onde $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi \circ A_\eta - A_\eta \circ A_\xi$.

Se a variedade ambiente tiver curvatura seccional constante, obtemos o

Corolário 1.3.1 *Sejam* $(M^n, \langle,\rangle, \nabla)$ *e* $(\overline{M}^{n+k}, \langle,\rangle, \overline{\nabla})$ *variedades Riemannianas. Seja* $\varphi : M \longrightarrow \overline{M}$ *uma imersão isométrica. Suponha que* $\overline{M}$ *tem curvatura seccional constante igual a* c. *Então,* *dados X, Y, Z, $W \in TM$ e ξ, $\eta \in TM^{\perp}$ valem as seguintes equações, conhecidas como as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, para o caso de curvatura seccional constante, respectivamente:*

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z,W\rangle &= c(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) \\ &\quad + \langle \alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle, \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z), \tag{1.12}$$

e

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle [A_{\xi},A_{\eta}]X,Y\rangle. \tag{1.13}$$

Assim, sob as condições do corolário acima, temos que

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X,Y)Z,W\rangle &= c(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle) \\ \langle \overline{R}(X,Y)Z,\xi\rangle &= 0 \\ \langle \overline{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Note que se a imersão tiver codimensão um, sendo N o campo normal unitário a M, temos que $X\langle N,N\rangle = 0$, $X \in TM$. Assim, como $\nabla^{\perp}_{X}N \in \mathfrak{X}(M)$, segue derivando $\langle N,N\rangle = 1$ que $\nabla^{\perp}_{X}N = 0$. Logo, se $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, então

$$\nabla^{\perp}_{X}\xi = X\langle \xi,N\rangle N.$$

Agora, podemos enuciar o teorema fundamental das subvariedades. Daremos uma demonstração no caso particular em que o espaço ambiente tem curvatura seccional nula (tal demonstração pode ser encontrada em [Dj], pg. 17). Esse teorema é fundamental para obtermos o resultado principal deste trabalho.

Proposição 1.3.2 *(Teorema Fundamental das Subvariedades) Sejam M^n uma variedade Riemanniana, $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial de posto p com conexão ∇' compatível com a métrica, e seja α uma seção simétrica no fibrado dos homomorfismos $Hom(TM \times TM, E)$. Defina, para cada seção local ξ de E, a aplicação $A_{\xi} : TM \to TM$ por*

$$\langle A_{\xi}X,Y\rangle = \langle \alpha(X,Y),\xi\rangle, \quad \forall\ X,Y \in TM. \tag{1.14}$$

Se α e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional constante c, então existe uma imersão isométrica, $f : M^n \looparrowright Q^{n+p}_c$, e um isomorfismo de fibrados *vetoriais* $\tilde{f}: E \to TM^{\perp}$ *ao longo de* f, *tal que* $\forall\, X, Y \in TM$ *e* $\forall\, \xi, \eta$, *seções locais de* E,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta) \rangle &= \langle \xi, \eta \rangle \\ \tilde{f}\alpha(X,Y) &= \tilde{\alpha}(X,Y) \\ \tilde{f}\nabla'_X \xi &= \nabla^{\perp}_X \tilde{f}(\xi), \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde $\tilde{\alpha}$ *e* $\nabla^{\perp}$ *são a segunda forma fundamental e a conexão normal da imersão* f, *respectivamente.*

Demonstração. Seja ∇ a conexão de Levi-Civita em TM. Considere a soma de Whitney $\tilde{E} = TM \oplus_W E$ munida com a soma ortogonal das métricas em TM e E e a conexão compatível ∇'' dadas por

$$\langle Y_1 \oplus \xi_1, Y_2 \oplus \xi_2 \rangle = \langle Y_1, Y_2 \rangle_{M} + \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{E} \quad Y_1, Y_2, \in \mathfrak{X}(M) \ e \ \xi_1, \xi_2 \in \Gamma(E) \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} \nabla''_X Y &= \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \quad X, Y \in TM \\ \nabla''_X \xi &= -A_{\xi} X + \nabla'_X \xi, \quad X \in TM \ e \ \xi \in \Gamma(E). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Note que

$$\nabla''_X (Y \oplus \xi) = [\nabla_X Y - A_{\xi} X] \oplus [\nabla'_X \xi + \alpha(X,Y)]$$

É claro que ∇'' define uma conexão em $\tilde{E}$. Mostraremos apenas que ∇'' é compatível com a métrica. De fato, seja $Y_i \oplus \xi_i \in \Gamma(TM \oplus_W E), i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} X\langle Y_1 \oplus \xi_1, Y_2 \oplus \xi_2 \rangle &= X\langle Y_1, Y_2 \rangle_{M} + X\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{E} \\ &= \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle_{M} + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 \rangle_{M} + \langle \nabla'_X \xi_1, \xi_2 \rangle_{E} + \langle \xi_1, \nabla'_X \xi_2 \rangle_{E} \\ &\quad + \langle -A_{\xi_1} X, Y_2 \rangle_{M} + \langle \alpha(X, Y_2), \xi_1 \rangle_{E} + \langle Y_1, -A_{\xi_2} X \rangle_{M} + \langle \xi_2, \alpha(X, Y_1) \rangle_{E} \\ &= \langle \nabla_X Y_1 - A_{\xi_1} X, Y_2 \rangle_{M} + \langle \nabla'_X \xi_1 + \alpha(X, Y_1), \xi_2 \rangle_{E} \\ &\quad + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 - A_{\xi_2} X \rangle_{M} + \langle \xi_1, \nabla'_X \xi_2 + \alpha(X, Y_2) \rangle_{E} \\ &= \langle \nabla''_X (Y_1 \oplus \xi_1), Y_2 \oplus \xi_2 \rangle + \langle Y_1 \oplus \xi_1, \nabla''_X (Y_2 \oplus \xi_2) \rangle. \end{aligned}$$

Isso mostra a compatibilidade de ∇''.

Portanto, usando o fato de que α e ∇' satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, para $c = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z, W \rangle_{M} &= \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z) \rangle_{E} - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W) \rangle_{E}, \\ (\nabla'_X \alpha)(Y,Z) &= (\nabla'_Y \alpha)(X,Z) \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad (\nabla_X A)(Y,\eta) = (\nabla_Y A)(X,\eta) \\ \langle [A_{\xi}, A_{\eta}] X, Y \rangle_{M} &= \langle R'(X,Y)\xi, \eta \rangle_{E}, \quad \forall X, Y, Z, W \in TM \ e \ \xi, \eta \in \Gamma(E), \end{aligned} \tag{1.18}$$

onde R é o operador de curvatura de M e R' o operador de curvatura de E, segue que o operador curvatura $\tilde{R}$ do fibrado $\tilde{E}$ é identicamente nulo.

De fato, como

$$\begin{aligned}
\nabla''_X\nabla''_Y(Z\oplus\xi) &= \nabla''_X([\nabla_Y Z - A_\xi Y]\oplus[\nabla'_Y\xi+\alpha(Y,Z)]) \\
&= [\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_X A_\xi Y - A_{\nabla'_Y\xi}X - A_{\alpha(Y,Z)}X]\oplus[\nabla'_X\nabla'_Y\xi + \nabla'_X\alpha(Y,Z) \\
&\quad +\alpha(X,\nabla_Y Z)-\alpha(X,A_\xi Y)]
\end{aligned}$$

e

$$\nabla''_{[X,Y]}(Z\oplus\xi) = [\nabla_{[X,Y]}Z - A_\xi[X,Y]]\oplus[\nabla'_{[X,Y]}\xi+\alpha([X,Y],Z)]$$

segue que

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{R}(X,Y)(Z\oplus\xi),(W\oplus\eta)\rangle &= \langle\nabla''_X\nabla''_Y(Z\oplus\xi)-\nabla''_Y\nabla''_X(Z\oplus\xi)-\nabla''_{[X,Y]}(Z\oplus\xi),(W\oplus\eta)\rangle \\
&= \Big\langle\big[\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_X A_\xi Y - A_{\nabla'_Y\xi}X - A_{\alpha(Y,Z)}X \\
&\quad -\nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_Y A_\xi X + A_{\nabla'_X\xi}Y + A_{\alpha(X,Z)}Y \\
&\quad -\nabla_{[X,Y]}Z + A_\xi[X,Y]\big]\oplus \\
&\quad [\nabla'_X\nabla'_Y\xi+\nabla'_X\alpha(Y,Z)+\alpha(X,\nabla_Y Z)-\alpha(X,A_\xi Y) \\
&\quad -\nabla'_Y\nabla'_X\xi-\nabla'_Y\alpha(X,Z)-\alpha(Y,\nabla_X Z)+\alpha(Y,A_\xi X) \\
&\quad -\nabla'_{[X,Y]}\xi-\alpha([X,Y],Z)],(W\oplus\eta)\Big\rangle \\
&= \big\langle R(X,Y)Z,W\big\rangle_M - \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle_E + \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle_E \\
&\quad +\langle(\nabla_Y A)(X,\xi)-(\nabla_X A)(Y,\xi),W\rangle_M \\
&\quad +\langle R'(X,Y)\xi,\eta\rangle_E - \langle[A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle_M \\
&\quad +\langle(\nabla'_X\alpha)(Y,Z)-(\nabla'_Y\alpha)(X,Z),\eta\rangle_E \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A última igualdade é devido as equações de compatibilibade (1.18).

Escolha um ponto $x\in M$, e vetores ortonormais $\xi_1,...,\xi_{n+p}\in\tilde{E}_x=\pi^{-1}(x)$. Desde que M é simplesmente conexa e o operador de curvatura de $\tilde{E}$ é identicamente nulo, ou seja, o fibrado é trivial, existe uma única extensão global $\xi_1,...,\xi_{n+p}$ paralela com respeito a ∇'', na qual $\xi_1(q),...,\xi_{n+p}(q)$ são ortonormais para $q\in M$. Escolha coordenadas locais $(x_1,...,x_n)$ em uma vizinhança simplesmente conexa U de M. Então existem funções $a_{i\nu}$ definidas em U, tais que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{\nu=1}^{n+p}a_{i\nu}\xi_\nu,\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{1.19}$$

Assim, os coeficientes da métrica de M são dados por

$$g_{ij} = \langle \partial_{x_i}, \partial_{x_j} \rangle = \sum_{\nu=1}^{n+p} a_{i\nu} a_{j\nu}, \tag{1.20}$$

onde estamos fazendo $\frac{\partial}{\partial_{x_i}} = \partial_{x_i}$ por acomodação.

Desde que as seções ξ_i são paralelas, usando a equação (1.19)

$$\begin{aligned} \nabla''_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} &= \sum_{\nu=1}^{n+p} a_{j\nu} \nabla''_{\partial_{x_i}} \xi_\nu + \sum_{\nu=1}^{n+p} \partial_{x_i}(a_{j\nu}) \xi_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{n+p} \partial_{x_i}(a_{j\nu}) \xi_\nu. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Usando o fato de α ser simétrico, ∇ ser a conexão de Levi-Civita em TM e $[\partial_{x_i}, \partial_{x_j}] = 0$, temos que

$$\nabla''_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} + \alpha(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) = \nabla_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i} + [\partial_{x_i}, \partial_{x_j}] + \alpha(\partial_{x_j}, \partial_{x_i}) = \nabla''_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i}.$$

Desde que $\{\xi_1, ..., \xi_{n+p}\}$ é uma base ortonormal, segue (da última igualdade e de (1.21)) que

$$\partial_{x_i}(a_{j\nu}) = \partial_{x_j}(a_{i\nu}),$$

ou seja, as $1 - formas$ ∂_{x_i} são fechadas, logo (U é simplesmente conexo) exatas em U. Então, existem funções f_ν satisfazendo $\partial_{x_i}(f_\nu) = a_{i\nu}$. Defina $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ por $f = (f_1, ..., f_{n+p})$. Assim,

$$f_*(\partial_{x_i}) = (\partial_{x_i}(f_1), ..., \partial_{x_i}(f_{n+p})) = (a_{i1}, ..., a_{i(n+p)}),$$

e para todo $i, j = 1, ..., n$, temos

$$\langle f_*(\partial_{x_i}), f_*(\partial_{x_j}) \rangle = \sum_{\nu=1}^{n+p} a_{i\nu} a_{j\nu} = g_{ij} = \langle \partial_{x_i}, \partial_{x_j} \rangle.$$

Em outras palavras, f é uma imersão isométrica. Defina um isomorfismo $\tilde{\phi}$ entre os fibrados $TU \oplus_W E$ e $T\mathbb{R}^{n+p} |_{f(U)} = Tf(U) \oplus_W Tf(U)^\perp$ por $\tilde{\phi}(\xi_\nu) = e_\nu$, onde e_ν, $\nu = 1, ..., n+p$ é o referencial canônico de $T\mathbb{R}^{n+p}$ restrito a $f(U)$.

Para os vetores tangentes $\partial_{x_i} = \sum_{\nu=1}^{n+p} a_{i\nu} \xi_\nu$, temos

$$\tilde{\phi}(\partial_{x_i}) = \sum_{\nu=1}^{n+p} a_{i\nu} \tilde{\phi}(\xi_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n+p} a_{i\nu} e_\nu = (a_{i1}, ..., a_{i(n+p)}) = f_*(\partial_{x_i}).$$

Isso mostra que $\tilde{\phi}$ leva $TM\mid_U$ isomorficamente em $Tf(U)$. Sendo $\tilde{\phi}$ uma isometria nas fibras, ele leva E isomorficamente em $Tf(U)^\perp$. Além disso, desde que $\tilde{\phi}$ transforma o referencial paralelo $\xi_1,...,\xi_{n+p}$ no referencial paralelo $e_1,...,e_{n+p}$, $\tilde{\phi}$ satisfaz para todo $X,Y\in TM$, e $\xi\in E$

$$\tilde{\phi}(\nabla''_X Y) = D_{f_*X}\tilde{\phi}(Y), \quad \tilde{\phi}(\nabla''_X\xi) = D_{f_*X}\tilde{\phi}(\xi), \tag{1.22}$$

onde D é a conexão do $\mathbb{R}^{n+p}$. Para verificar isso, basta escrever $Y = \sum_i b_i\xi_i$ e usar o fato de $\xi_1,...,\xi_{n+p}$ ser paralelo em relação a conexão ∇'', e $e_1,...,e_{n+p}$, ser paralelo no $\mathbb{R}^{n+p}$

$$\tilde{\phi}(\nabla''_X Y) = \tilde{\phi}(\sum_i X(b_i)\xi_i) = \sum_i \tilde{\phi}(X(b_i))\tilde{\phi}(\xi_i) = \sum_i f_*X(b_i)e_i = D_{f_*X}\tilde{\phi}(Y).$$

Analogamente, verifica-se que $\tilde{\phi}(\nabla''_X\xi) = D_{f_*X}\tilde{\phi}(\xi)$.

Tomando componentes normais nas equações (1.22), e fazendo $\tilde{f} = \tilde{\phi}\mid_E$, obtemos

$$\tilde{f}\alpha(X,Y) = \tilde{\alpha}(X,Y), \quad \tilde{f}\nabla'_X\xi = \nabla^\perp_X\xi. \tag{1.23}$$

Se tivessemos escolhido coordenadas locais diferentes $(y_1,...,y_n)$, ainda teriamos as equações $\partial_{y_i}(f_\nu) = a_{i\nu}$. Uma vez que essas equações determinam f a menos de constante, a imersão é determinada a menos de translação. Se tivessemos escolhido um outro referencial inicial, as isometrias seriam diferentes apenas por uma rotação. Assim, f é determinada a menos de movimentos rígidos. Agora, basta usar o fato de M ser simplesmente conexa, para obter o resultado global (ver [Sp], cap. 7.C). ∎

Podemos encontrar uma demonstração alternativa, do teorema fundamental das subvariedades, em [LTV], no apêndice.

1.4 Variedade Produto Warped

Na presente seção, definimos um produto warped e listamos algumas propriedades. Para isso, usamos fortemente o teorema das submersões. O material aqui contido foi baseado em [ON] e [Le].

Proposição 1.4.1 *(Teorema das Submersões). Sejam M e N variedades diferenciáveis. Se $\pi : M\to N$ é uma submersão então, para todo $p\in M$, $\mathcal{F} = \pi^{-1}(\pi(p))$ é uma subvariedade diferenciável* *mergulhada fechada com codimensão igual a dimensão de N, ou seja, $dim\, M = dim\, N + dim\, \mathcal{F}$. Além disso, $T_P\mathcal{F} = ker((\pi_*)_p)$ e a restrição de π ao subespaço $T_P\mathcal{F}^{\perp}$ induz um isomorfismo linear*

$$(\pi_*)_p : \mathcal{F}^{\perp} \longrightarrow T_{\pi(p)}N.$$

Sejam $\mathbf{F}^n$ uma variedade Riemanniana n-dimensional e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função positiva suave. Então, $\mathbb{R} \times \mathbf{F}^n$ é uma variedade diferenciável $(n+1)$-dimensional. Definamos em $\mathbb{R} \times \mathbf{F}^n$ a métrica Riemanniana

$$\langle , \rangle = \sigma^*(dt^2) + (f \circ \sigma)^2 \pi^* \langle\!\langle , \rangle\!\rangle, \tag{1.24}$$

onde $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbf{F}^n \to \mathbb{R}$ e $\pi : \mathbb{R} \times \mathbf{F}^n \to \mathbf{F}^n$ são as projeções canônicas de $\mathbb{R} \times \mathbf{F}^n$ em cada fator e $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ é a métrica em $\mathbf{F}^n$. Podemos escrever por simplicidade,

$$\langle , \rangle = dt^2 + f^2 \langle\!\langle , \rangle\!\rangle. \tag{1.25}$$

De outro modo, dados $(t, p) \in \mathbb{R} \times \mathbf{F}^n$ e $U, V \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\langle U, V \rangle_{(t,p)} = dt^2(\sigma_* U, \sigma_* V)_t + f^2(t) \langle\!\langle \pi_* U, \pi_* V \rangle\!\rangle_p, \tag{1.26}$$

onde σ_* e π_* são simplesmente as diferenciais de σ e π.

Munida com tal métrica, $(\mathbb{R} \times \mathbf{F}^n, \langle , \rangle)$ é uma variedade Riemanniana denominada **produto warped** de $\mathbf{F}^n$ e $\mathbb{R}$ com **função warped** f. Denotamos por $M = \mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$.

Como σ e π são submersões, tem-se que, dado $q = (t, p) \in M$, $\sigma^{-1}(t)$ e $\pi^{-1}(p)$ são subvariedades de M de dimensões n e 1, respectivamente. Por exemplo, a subvariedade $\sigma^{-1}(t)$ é a variedade $\{t\} \times \mathbf{F}^n$ com a métrica

$$\langle , \rangle = (f(t))^2 \pi^* \langle\!\langle , \rangle\!\rangle. \tag{1.27}$$

Nas notações acima, M é chamado **espaço total**, $\mathbb{R}$ a **fibra** e $\mathbf{F}^n$ a **base** de $M = \mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$. Dizemos, também, que $\sigma^{-1}(t) = \{t\} \times \mathbf{F}^n$ é uma **folha** de M e que $\pi^{-1}(p) = \mathbb{R} \times \{p\}$ é uma **fibra** de M.

Observações:

(1) Para cada $p \in \mathbf{F}^n$, a aplicação $\sigma \mid (\mathbb{R} \times \{p\})$ é uma isometria em $\mathbb{R}$;

(2) Para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\pi \mid (\{t\} \times \mathbf{F}^n)$ é uma homotetia em $\mathbf{F}^n$;

(3) Para cada $q = (t, p) \in M$, a fibra $\mathbb{R} \times \{p\}$ e a folha $\{t\} \times \mathbf{F}^n$ são ortogonais em q.

Os itens (1), (2) *e* (3) *seguem diretamente da definição de métrica warped e a particular observação, para o item* (3), *que se* $V \in T_q(\pi^{-1}(p)) \subset T_qM$ *e* $U \in T_q(\sigma^{-1}(t)) \subset T_qM$, *tem-se que* $\pi_*V = 0$ *e* $\sigma_*U = 0$ *(teorema das submersões).*

Um vetor tangente a M será chamado **vertical** se ele for tangente a uma fibra, e um campo de vetores será vertical se for inteiramente composto de vetores verticais. Analogamente, um vetor tangente a M e normal a uma fibra será chamado vetor **horizontal**, e um campo será horizontal se for composto somente por vetores horizontais. Note que, em cada ponto $q = (t, p) \in M$, vetor horizontal em q é tangente a folha $\sigma^{-1}(t)$, e vetor vertical em q é tangente a fibra $\pi^{-1}(p)$.

Segue do teorema das submersões que $V \in TM$ é vertical se, e somente se, $\pi_*V = 0$ e $U \in TM$ é horizontal se, e somente se, $\sigma_*U = 0$.

Definição 1.4.1 *Dizemos que um campo* $E \in M$ *é* π*-relacionado a um campo* E_* *em* $\mathbf{F}^n$, *ou* E *e* E_* *são* π*-relacionados, se*

$$(\pi_*)qE_q = (E_*)_{\pi(q)}, \quad \forall\, q \in M.$$

Analogamente, dizemos que um campo $E \in M$ *é* σ*-relacionado a um campo* E_* *em* $\mathbb{R}$, *ou* E *e* E_* *são* σ*-relacionados, se*

$$(\sigma_*)qE_q = (E_*)_{\sigma(q)}, \quad \forall\, q \in M.$$

Em particular, um campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ é dito básico vertical se V é vertical e σ-relacionado a um campo em $\mathbb{R}$. De outra forma, se V for básico vertical, diremos que V é o **levantamento vertical** de um campo em $\mathbb{R}$.

Da mesma maneira, um campo $U \in \mathfrak{X}(M)$ é dito básico horizontal se U é horizontal e π-relacionado a um campo em $\mathbf{F}^n$. De outra forma, se U for básico horizontal, diremos que U é o **levantamento horizontal** de um campo em $\mathbf{F}^n$.

Lema 1.4.1 *Se* V *é um campo vertical e* X_* *é um campo em* $\mathbb{R}$, *então:*

(a) Existe um único campo básico vertical X, $\sigma-$*relacionado a* X_*.

(b) O campo $[X, V]$ *é vertical.*

Demonstração. Ver [Le]. ■

Esse lema diz que o levantamento vertical é único. É claro que vale um lema análogo para vetores básicos horizontais.

Como consequência do lema 1.4.1, podemos definir em M o campo ∂_t como o único campo básico vertical $\sigma-$relacionado a 1, ou seja, $\sigma_*\partial_t \equiv 1$. Assim, todo campo básico vertical é da forma $(g \circ \sigma)\partial_t$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável. O campo ∂_t é claramente unitário e normal as folhas $\sigma^{-1}(t),\ t \in \mathbb{R}$.

Lema 1.4.2 *No produto warped $M = \mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$, se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então o gradiente de $h \circ \sigma$ coincide com o levantamento vertical do gradiente de h em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Denotando por $\operatorname{grad} h$ e $\nabla(h \circ \sigma)$ respectivamente o gradiente de h em $\mathbb{R}$ e o gradiente de $h \circ \sigma$ em M, temos de mostrar que $\nabla(h \circ \sigma)$ é vertical e $\sigma-$relacionado com $\operatorname{grad} h$.

Para tanto, tomando um campo horizontal $U \in \mathfrak{X}(M)$, lembrando que $\sigma_* U = 0$, temos pela definição de gradiente que

$$\langle \nabla(h \circ \sigma), U \rangle = U(h \circ \sigma) = (\sigma_* U)h = 0,$$

e segue daí que $\nabla(h \circ \sigma)$ é vertical. Por outro lado, sendo $X \in \mathfrak{X}(M)$ básico vertical, $\pi_* X = 0$, temos pela definição de métrica warped

$$dt^2(\sigma_*\nabla(h \circ \sigma), \sigma_* X) = \langle \nabla(h \circ \sigma), X \rangle = X(h \circ \sigma) = (\sigma_* X)h = dt^2(\operatorname{grad} h, \sigma_* X),$$

e segue daí que $\sigma_*\nabla(h \circ \sigma) = \operatorname{grad} h$, conforme desejado. ■

Devido ao lema 1.4.2, denotaremos o gradiente de $h \circ \sigma$ simplesmente por ∇h; o contexto dirimirá potenciais confusões.

Lema 1.4.3 *No produto warped $(M = \mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n, \langle , \rangle, \nabla)$, se X é um levantamento vertical e U é um levantamento horizontal, então*

$$\nabla_X U = \nabla_U X = \frac{X(f)}{f} U.$$

Demonstração. Ver [ON]. ■

Segue do último lema que, se U é campo básico horizontal, ou seja, $\langle U, \partial_t \rangle = 0$ então

$$[U, \partial_t] = 0 \quad e \quad \nabla_{\partial_t} U = \nabla_U \partial_t = \frac{f'}{f} U,$$

onde estamos usando o lema 1.4.2 para identificar $f \circ \sigma$ e $f' \circ \sigma$ com f e f', respectivamente. Assim, passamos a ver as funções $f \circ \sigma$ e $f' \circ \sigma$ como funções reais, de sorte que podemos identificar $\partial_t(f \circ \sigma)$ com f'.

1.5 Folheações e Distribuições Tangentes

Nesta seção, enuciamos uma versão do teorema de Frobenius que diz: *se M é uma variedade diferenciável e Δ é uma distribuição involutiva em M, então existe uma folheação $\mathcal{F}$ de M tal que* $T\mathcal{F} = \Delta$. O conteúdo desta seção foi baseado em [Ca] e [Le].

A idéia intuitiva de folheação corresponde a decomposição de uma variedade numa união de subvariedades conexas e disjuntas, chamadas folhas, as quais se acumulam localmente como as folhas de um livro. Passemos a formalizar essa idéia.

Seja U um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Uma fatia de U (de dimensão k) é qualquer subconjunto da forma

$$S = \{(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n) \subset U; x_{k+1} = c_{k+1}, ..., x_n = c_n, \textit{ onde } c_{k+1}, ..., c_n \in \mathbb{R} \text{ são constantes}\}.$$

Assim, dada uma variedade diferenciável $n-$dimensional M e uma carta diferenciável (U, φ) em M, dizemos que um subconjunto S de U é uma fatia $k-$dimensional de U se $\varphi(S)$ é uma fatia $k-$dimensional de $\varphi(U)$.

Definição 1.5.1 *Uma folheação (de dimensão k) de uma variedade $n-$dimensional M é uma coleção de subvariedades (de dimensão k), disjuntas, conexas e imersas de M (chamadas de folhas da folheação) cuja união é M e tais que, em uma vizinhança de cada ponto $p \in M$, existe uma carta (U, φ) com a propriedade que $\varphi(U)$ é o produto de dois abertos conexos $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e cada folha da folheação intercepta U ou em um conjunto vazio ou em uma coleção enumerável de fatias de dimensão k da forma $x_{k+1} = c_{k+1}$, ..., $x_n = c_n$ (tal carta é chamada de carta plana da folheação).*

A folheação é de classe C^r, se as subvariedades são todas de classe C^r. O número $n-k$ é dito a codimensão da folheação.

Uma folheação de dimensão k de uma variedade diferenciável M^n é, a grosso modo, uma decomposição de M^n em subvariedades de dimensão k, disjuntas, conexas chamadas folhas, as quais se aglomeram localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ com segunda coordenada constante.

Exemplo 1.5.1 *Seja $f : M \to N$ uma submersão, onde M, N são variedades diferenciáveis de dimensão m, n respectivamente. Pelo teorema da forma local das submersões, dado $p \in M$ e $q = f(p) \in N$ existem cartas locais (U, φ) em M, (V, ψ) em N tais que $p \in U$, $q \in V$, $\varphi(U) =$*

$U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ e $\psi(V) = V_2 \supset U_2$, e, além disso, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \to U_2$ coincide com a segunda projeção $(x, y) \longmapsto y$ (para detalhes ver as referências acima citadas).

As cartas locais (U, φ) definem uma estrutura de variedade folheada de classe C^r onde as folhas são as componentes conexas das superfícies de nível $f^{-1}(c)$, $c \in N$.

Assim, dado o produto warped $M^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$, onde $\mathbf{F}^n$ é uma variedade Riemanniana, como a projeção canônica $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbf{F}^n \to \mathbb{R}$ é uma submersão, segue que a coleção $\mathcal{F} = \{\sigma^{-1}(t) = \{t\} \times \mathbf{F}^n; t \in \mathbb{R}\}$, é uma folheação de dimensão n de M. Note que o campo ∂_t é normal as folhas.

Seja M uma variedade diferenciável. Escolha para cada $p \in M$ um subespaço linear $k-$dimensional $\Delta_p \subset T_pM$. Diremos que $\Delta = \coprod_{p \in M} \Delta_p \subset TM$ é uma **distribuição tangente** (ou simplesmente, uma distribuição) em M, se a seguinte condição é satisfeita: *Cada ponto $p \in M$ tem uma vizinhança U na qual existem campos de vetores diferenciáveis $Y_1, ..., Y_k : U \to TM$ tal que $Y_1 \mid_p, ..., Y_k \mid_p$ formam uma base para Δ_p em cada $p \in U$.*

Um dos exemplos mais simples de distribuição é a dada na seguinte

Proposição 1.5.1 *Seja M uma variedade diferenciável. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, não se anula em M, então $\Delta = \{v \in TM; \langle v, X \rangle = 0\}$ é uma distribuição em M.*

Seja Δ uma distribuição em M. Uma subvariedade imersa $N \subset M$ é dita uma **variedade integral** de Δ se $T_pN = \Delta_p$ para cada ponto $p \in N$. Δ é dita **integrável** se cada ponto de M está contido em uma variedade integral de Δ. Δ é dita **involutiva** se dados campos diferenciáveis X e Y em um aberto U de M tais que X_p, $Y_p \in \Delta_p$ para todo $p \in U$, então o colchete de Lie $[X, Y]$ é tal que $[X, Y]_p \in \Delta_p$, para todo $p \in U$.

Proposição 1.5.2 *Toda distribuição integrável é involutiva.*

Demonstração. Seja $\Delta \subset TM$ uma distribuição integrável. Suponha que X e Y são seções locais de Δ definidas em algum aberto U de M. Sejam $p \in U$ qualquer e N uma variedade integral de Δ contendo p. Como X e Y são seções de Δ, segue-se que X e Y são tangentes à N e, consequentemente, $[X, Y]$ também o é. Já que $p \in U$ é qualquer, Δ é involutiva. ■

Uma distribuição Δ em M é dita ser **completamente integrável** se existe uma folheação $\mathcal{F}$ sobre M tal que $T\mathcal{F} = \Delta$, onde $T\mathcal{F} = \coprod_{\mathcal{S} \in \mathcal{F}} T\mathcal{S}$. Estamos preparados para enunciar o resultado principal desta seção.

Proposição 1.5.3 *(Teorema de Frobenius) Toda distribuição involutiva é completamente integável.*

Demonstração. Ver [Ca] (apêndice 2), ou [Le] (cap. 14) ■

Capítulo 2

Equações de Estrutura em uma Variedade

Neste capítulo, estabelecemos condições necessárias para a existência de imersões isométricas em ambientes que possuem um campo de vetores conforme fechado. Na seção 2, mostramos que os produtos warped possuem esses campos e determinamos as equações de estrutura dos produtos warped. Observamos que as variedades Riemannianas, que possuem um campo de vetores conforme fechado, são localmente isométricas a um produto warped, e globalmente se a variedade for completa (ver [Mo]).

2.1 Equações de Estrutura em uma Variedade do Tipo $(\overline{M}, \langle , \rangle, \overline{\nabla}, \tilde{X})$.

Os principais resultados obtidos nesta seção são as proposições 2.1.1 e 2.1.2, pois contém equações importantíssimas para o propósito deste trabalho. Para provar a proposição 2.1.1, decompomos o campo $\tilde{X}$ nas componentes tangente e normal, e em seguida derivamos. Por outro lado, a presente seção foi dedicada, quase exclusivamente, a provar a proposição 2.1.2. A ideia é expressar o operador de curvatura da variedade $\overline{M}$ em função do campo $\tilde{X}$. Para esse fim, usaremos o lema 2.1.1 abaixo, equivalente à proposição 1 de [Mo]:

Definição 2.1.1 *Seja* $\left(\overline{M}, \langle , \rangle, \overline{\nabla}\right)$ *uma variedade Riemanniana e* $\phi : \overline{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave* *e positiva. Um campo de vetores conforme fechado $\tilde{X}$, sobre $\overline{M}$, é um campo de vetores que satisfaz*

$$\overline{\nabla}_V \tilde{X} = \phi V \tag{2.1}$$

para todo $V \in T\overline{M}$. Dizemos que ϕ é o fator de conformidade de $\tilde{X}$.

Durante toda esta seção, $\overline{M}^n$ será uma variedade Riemanniana n-dimensional, com conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$, operador de curvatura $\overline{R}$ e $\tilde{X}$ um campo de vetores conforme fechado, sem singularidades, sobre $\overline{M}$. Veremos, na próxima seção, que tais variedades existem.

Seja $\mathbf{x} : M^k \to \overline{M}^n$ uma imersão isométrica de uma variedade k-dimensional M^k em $\overline{M}^n$. Seja ϱ uma seção em $TM^{\perp}$ e denotemos por X a projeção canônica de $\tilde{X}$ em TM, de sorte que

$$\tilde{X} = X + \varrho. \tag{2.2}$$

Com essas condições, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 2.1.1 *Para todo $v \in TM$, temos*

$$\alpha(v, X) + \nabla_v^{\perp} \varrho = 0 \tag{2.3}$$

$$\nabla_v X - A_{\varrho} v = \phi v, \tag{2.4}$$

onde ∇, $\nabla^{\perp}$, α e A_{ϱ}, denotam a conexão de Levi-Civita em M, a conexão normal induzida em M, a segunda forma fundamental da imersão $\boldsymbol{x}(M)$ e o endomorfismo de Weingarten associado a α, respectivamente.

Demonstração. Derivando a equação (2.2) com respeito a $v \in TM$ e usando a equação (2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\phi v &= \overline{\nabla}_v \tilde{X} \\
&= \overline{\nabla}_v \big(X + \varrho\big) \\
&= \overline{\nabla}_v X + \overline{\nabla}_v \varrho \\
&= \nabla_v X + \alpha(v, X) - A_{\varrho} v + \nabla_v^{\perp} \varrho.
\end{aligned}$$

Basta tomarmos agora as componentes tangente e normal da expressão acima para obtermos o resultado desejado. ■

Lema 2.1.1 *Seja $(\overline{M}^n, \langle , \rangle, \overline{\nabla})$, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana dotada de um campo de vetores $\tilde{X}$, sem singularidades, conforme fechado. Então, temos que:*

(a) O campo unitário $\mathcal{N} = \tilde{X}/|\tilde{X}|$ satisfaz

$$\overline{\nabla}_{\mathcal{N}}\mathcal{N} = 0, \quad \overline{\nabla}_V \mathcal{N} = \frac{\phi}{|\tilde{X}|}V \ \ \textit{se} \ \langle V, \tilde{X}\rangle = 0.$$

Em particular, o fluxo de $\mathcal{N}$ é um fluxo geodésico unitário.

(b) A distribuição $(n-1)-$dimensional Δ definida por

$$p \in \overline{M}^n \longmapsto \Delta = \{v \in T_p\overline{M}^n; \langle \tilde{X}_p, v\rangle = 0\}$$

determina uma folheação Riemanniana umbílica de codimensão 1, $\mathcal{F}(\tilde{X})$, orientada por $\mathcal{N}$. Além disso, as funções $|\tilde{X}|$, $\operatorname{div}\tilde{X}$ e $\tilde{X}(\phi)$ são constantes em folhas conexas de $\mathcal{F}(\tilde{X})$ e cada folha tem curvatura média constante igual a $\mathcal{H} = -\phi/|\tilde{X}|$.

Demonstração. (a) Seja $V \in T\overline{M}$. Temos que

$$\phi V = \overline{\nabla}_V \tilde{X} = \overline{\nabla}_V |\tilde{X}|\mathcal{N} = V(|\tilde{X}|)\mathcal{N} + |\tilde{X}|\overline{\nabla}_V\mathcal{N},$$

ou seja,

$$\overline{\nabla}_V\mathcal{N} = \frac{\phi}{|\tilde{X}|}V - \frac{V(|\tilde{X}|)}{|\tilde{X}|}\mathcal{N}. \tag{2.5}$$

Como

$$2|\tilde{X}|V(|\tilde{X}|) = V(|\tilde{X}|^2) = 2\langle\overline{\nabla}_V\tilde{X}, \tilde{X}\rangle = 2\phi\langle V, \tilde{X}\rangle,$$

ou melhor,

$$V(|\tilde{X}|) = \frac{\phi}{|\tilde{X}|}\langle V, \tilde{X}\rangle, \tag{2.6}$$

as equações (2.5) e (2.6) nos dá

$$\overline{\nabla}_V\mathcal{N} = \frac{\phi}{|\tilde{X}|}V - \frac{\phi}{|\tilde{X}|^2}\langle V, \tilde{X}\rangle\mathcal{N}. \tag{2.7}$$

Em particular,

$$\overline{\nabla}_{\mathcal{N}}\mathcal{N} = 0, \quad \overline{\nabla}_V \mathcal{N} = \frac{\phi}{|\tilde{X}|}V \ \ \textit{se} \ \langle V, \tilde{X}\rangle = 0$$

e o fluxo de $\mathcal{N}$ é um fluxo geodésico unitário.

(b) Usaremos a notação $U \in \Delta$, para dizer que $U_p \in \Delta,\ \forall\, p \in \overline{M}$.

Dados $U, V \in \Delta$, derivando $\langle \tilde{X}, U \rangle = 0$ em relação a V, e usando a compatibilidade da conexão, obtemos $\langle \overline{\nabla}_V \tilde{X}, U \rangle + \langle \tilde{X}, \overline{\nabla}_V U \rangle = 0$. Usando a equação (2.1), obtemos

$$\langle \tilde{X}, \overline{\nabla}_V U \rangle = -\phi \langle V, U \rangle.$$

Analogamente, como $\langle \tilde{X}, V \rangle = 0$,

$$\langle \tilde{X}, \overline{\nabla}_U V \rangle = -\phi \langle U, V \rangle.$$

Usando as duas últimas equações acima, concluimos que

$$\langle \tilde{X}, [U,V] \rangle = \langle \tilde{X}, \overline{\nabla}_U V - \overline{\nabla}_V U \rangle = \langle \tilde{X}, \overline{\nabla}_U V \rangle - \langle \tilde{X}, \overline{\nabla}_V U \rangle = -\phi \langle U, V \rangle - (-\phi \langle V, U \rangle) = 0.$$

Ou seja, $[U, V] \in \Delta$. Por definição, Δ é involutiva. Logo, pelo teorema de Frobenius, a distribuição Δ é completamente integrável. Ou seja, Δ determina uma folheação Riemanniana de codimensão 1, $\mathcal{F}(X)$, orientada por $\mathcal{N}$.

Seja $\mathcal{S}$ uma folha da folheação $\mathcal{F}(X)$, $\alpha_{\mathcal{S}}$ sua segunda forma fundamental e $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ seu vetor curvatura média. Dados $U, V \in T\mathcal{S}$, como $\langle U, \mathcal{N} \rangle = \langle V, \mathcal{N} \rangle = 0$ obtemos, usando o item (a) do lema, que

$$\langle \alpha_{\mathcal{S}}(U, V), \mathcal{N} \rangle = \langle \overline{\nabla}_U V, \mathcal{N} \rangle = -\langle V, \overline{\nabla}_U \mathcal{N} \rangle = -\frac{\phi}{|\tilde{X}|} \langle U, V \rangle.$$

Seguue da última equação que a folha $\mathcal{S}$ é umbílica e tem cuvatura média constante $-\frac{\phi}{|\tilde{X}|}$.

Seja $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $\Omega \subset \overline{M}$. Escrevendo $\tilde{X} = \sum_i \langle \tilde{X}, E_i \rangle E_i$, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{X} &= \sum_i E_i(\langle \tilde{X}, E_i \rangle) - \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, \tilde{X} \rangle \\ &= \sum_i \langle \overline{\nabla}_{E_i} \tilde{X}, E_i \rangle \\ &= n\phi, \end{aligned}$$

em todo ponto de Ω. Como a vizinhança foi arbitrária em $\overline{M}$,

$$\phi = \frac{1}{n} \operatorname{div} \tilde{X}. \tag{2.8}$$

Da mesma forma

$$\nabla|\tilde{X}|^2 = \sum_i E_i(\langle \tilde{X}, \tilde{X}\rangle)E_i = 2\sum_i \langle \overline{\nabla}_{E_i}\tilde{X}, \tilde{X}\rangle E_i = 2\phi\tilde{X},$$

donde,

$$\phi\tilde{X} = \frac{1}{2}\nabla|\tilde{X}|^2, \tag{2.9}$$

ou melhor,

$$\nabla|\tilde{X}|^2 = 2\phi\tilde{X} = \frac{2}{n}(\operatorname{div}\tilde{X})\tilde{X}. \tag{2.10}$$

Dados campos $U, V \in T\overline{M}$, a forma Hessiana da função $|\tilde{X}|^2$ é dada por

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Hess}|\tilde{X}|^2)(U,V) &= \langle \operatorname{Hess}|\tilde{X}|^2(U), V\rangle \\
&= \langle \nabla_U(\nabla|\tilde{X}|^2), V\rangle \\
&= \langle \nabla_U(2\phi\tilde{X}), V\rangle \\
&= 2\langle U(\phi)\tilde{X} + \phi^2 U, V\rangle \\
&= 2\phi^2\langle U, V\rangle + 2U(\phi)\langle \tilde{X}, V\rangle.
\end{aligned}$$

Pela simetria da forma Hessiana e da métrica, temos que

$$U(\phi)\langle \tilde{X}, V\rangle = V(\phi)\langle \tilde{X}, U\rangle, \quad \forall\, U, V \in T\overline{M}. \tag{2.11}$$

Em particular, tomando $U, V \in T\overline{M}$ tal que $\langle U, \tilde{X}\rangle = 0$ e $V = \tilde{X}$, obtemos

$$U(\phi) = 0. \tag{2.12}$$

Segue disso que $\operatorname{div}\tilde{X} = n\phi$ é contante em folhas conexas da folheação. Além disso, como $\nabla\phi \in T\overline{M}$ e $U(\phi) = 0,\ \forall\, U \in T\overline{M}$ com $\langle U, \tilde{X}\rangle = 0$, concluimos que o campo $\nabla\phi$ tá na mesma direção do campo $\tilde{X}$. Segue daí que

$$\nabla\phi = \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^2}\tilde{X}. \tag{2.13}$$

Isso conclui a demonstração. ■

Denotemos por Δ, a distribuição $(n-1)-$dimensional dada por

$$\Delta = \{U \in T\overline{M}; \langle \tilde{X}, U\rangle = 0\}.$$

Pelo lema 2.1.1, Δ é completamente integrável.

Sejam $\mathcal{F}(\tilde{X})$ a folheação determinada por Δ, $\mathcal{S}$ uma folha de $\mathcal{F}(\tilde{X})$ e $U \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Denotemos por $U^{\mathcal{S}}$ a projeção de U na folha $\mathcal{S}$ e por $\tilde{U}$ a projeção canônica em $\tilde{X}$. Ou seja,

$$\tilde{U} = \frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\tilde{X} \qquad e \qquad U^{\mathcal{S}} = U - \tilde{U}. \tag{2.14}$$

A equação (2.12) diz que a função ϕ é constante em $\mathcal{S}$, ou seja, $U^{\mathcal{S}}(\phi) = 0$, $\forall\, U \in \mathfrak{X}(M)$. Além disso, como o campo $\tilde{U}$ tá na direção de $\tilde{X}$, $\tilde{U}$ é ortogonal a folha $\mathcal{S}$. Em particular, $\langle \tilde{U}, V^{\mathcal{S}}\rangle = 0 \quad \forall\, U, V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Dados $U, V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, por definição de $\overline{R}$ temos que

$$\begin{aligned}
\overline{R}(U,V)\tilde{X} &= \overline{\nabla}_U\overline{\nabla}_V\tilde{X} - \overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_U\tilde{X} - \overline{\nabla}_{[U,V]}\tilde{X}\\
&= \overline{\nabla}_U\phi V - \overline{\nabla}_V\phi U - \phi[U,V]\\
&= U(\phi)V + \phi\overline{\nabla}_U V - V(\phi)U - \phi\overline{\nabla}_V U - \phi[U,V]\\
&= U(\phi)V - V(\phi)U + \phi[U,V] - \phi[U,V]\\
&= U(\phi)V - V(\phi)U,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{R}(U,V)\tilde{X} = U(\phi)V - V(\phi)U. \tag{2.15}$$

Assim, estamos preparados para começar expressar o operador curvatura $\overline{R}$, em função do campo $\tilde{X}$.

Sejam $U, V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

$$\overline{R}(U,V)W = \overline{R}(U,V)W^{\mathcal{S}} + \overline{R}(U,V)\tilde{W} = \overline{R}(U,V)W^{\mathcal{S}} + \frac{\langle W, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\overline{R}(U,V)\tilde{X}. \tag{2.16}$$

$$\overline{R}(U,V)W^{\mathcal{S}} = \overline{R}(U^{\mathcal{S}},V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}} + \overline{R}(\tilde{U},V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}} + \overline{R}(U^{\mathcal{S}},\tilde{V})W^{\mathcal{S}} + \overline{R}(\tilde{U},\tilde{V})W^{\mathcal{S}}. \tag{2.17}$$

Dado $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, lembrando que $U^{\mathcal{S}}(\phi) = 0 \quad \forall U \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, obtemos, usando as propriedades do operador de curvatura e a equação (2.15), que

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overline{R}(\tilde{U}, V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}}, Y \right\rangle &= \left\langle \overline{R}(W^{\mathcal{S}}, Y)\tilde{U}, V^{\mathcal{S}} \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{R}(W^{\mathcal{S}}, Y)\frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\tilde{X}, V^{\mathcal{S}} \right\rangle \\
&= \frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\left\langle \overline{R}(W^{\mathcal{S}}, Y)\tilde{X}, V^{\mathcal{S}} \right\rangle \\
&= \frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\left\langle W^{\mathcal{S}}(\phi)Y - Y(\phi)W^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}} \right\rangle \\
&= -\frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\left\langle W^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}} \right\rangle Y(\phi) \\
&= -\frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\left\langle W^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}} \right\rangle \langle \nabla\phi, Y\rangle \\
&= \left\langle -\frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\left\langle W^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}} \right\rangle \nabla\phi, Y \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Desde que $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ foi tomado arbitrário,

$$
\overline{R}(\tilde{U}, V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}} = -\frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\langle W^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}}\rangle\nabla\phi. \tag{2.18}
$$

Como $\overline{R}(U^{\mathcal{S}}, \tilde{V})W^{\mathcal{S}} = -\overline{R}(\tilde{V}, U^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}}$, segue que

$$
\overline{R}(U^{\mathcal{S}}, \tilde{V})W^{\mathcal{S}} = \frac{\langle V, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\langle W^{\mathcal{S}}, U^{\mathcal{S}}\rangle\nabla\phi. \tag{2.19}
$$

Dado $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ arbitrário,

$$
\left\langle \overline{R}(\tilde{U}, \tilde{V})W^{\mathcal{S}}, Y \right\rangle = \left\langle \overline{R}(W^{\mathcal{S}}, Y)\tilde{U}, \tilde{V} \right\rangle = \frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\left\langle W^{\mathcal{S}}(\phi)Y - Y(\phi)W^{\mathcal{S}}, \tilde{V} \right\rangle = 0.
$$

A última igualdade é devido ao fato de ϕ ser constante nas folhas e $\langle W^{\mathcal{S}}, \tilde{V}\rangle = 0$. Assim,

$$
\overline{R}(\tilde{U}, \tilde{V})W^{\mathcal{S}} = 0. \tag{2.20}
$$

Segue das equações (2.16), (2.17), (2.18), (2.19), (2.20) e (2.15), que

$$
\begin{aligned}
\overline{R}(U, V)W &= \overline{R}(U^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}} - \frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\langle W^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}}\rangle\nabla\phi \\
&\quad + \frac{\langle V, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\langle W^{\mathcal{S}}, U^{\mathcal{S}}\rangle\nabla\phi + \frac{\langle W, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\Big(\tilde{U}(\phi)V - \tilde{V}(\phi)U\Big).
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Vamos manipular as três últimos termos do segundo membro da igualdade anterior.

Desde que $\tilde{V} = \frac{\langle V,\tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\tilde{X}$, temos que

$$\langle W^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}}\rangle = \langle W, V^{\mathcal{S}}\rangle = \langle W, V\rangle - \langle W, \tilde{V}\rangle = \langle W, V\rangle - \frac{\langle V, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\langle \tilde{X}, W\rangle.$$

Assim, como $\nabla\phi = \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^2}\tilde{X}$, usando a equação anterior,

$$\begin{aligned}\frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\langle W^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}}\rangle\nabla\phi &= \frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\langle W, V\rangle\frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^2}\tilde{X} - \frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\frac{\langle V, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\langle \tilde{X}, W\rangle\nabla\phi \\ &= \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle U, \tilde{X}\rangle\langle W, V\rangle\tilde{X} - \frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\frac{\langle V, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\langle \tilde{X}, W\rangle\nabla\phi.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Analogamente,

$$\frac{\langle V, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\langle W^{\mathcal{S}}, U^{\mathcal{S}}\rangle\nabla\phi = \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle V, \tilde{X}\rangle\langle W, U\rangle\tilde{X} - \frac{\langle V, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\frac{\langle U, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\langle \tilde{X}, W\rangle\nabla\phi. \tag{2.23}$$

Por outro lado,

$$\frac{\langle W, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\tilde{U}(\phi)V = \frac{\langle W, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^2}\langle U, \tilde{X}\rangle V = \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle U, \tilde{X}\rangle\langle W, \tilde{X}\rangle V. \tag{2.24}$$

e

$$\frac{\langle W, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\tilde{V}(\phi)U = \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle V, \tilde{X}\rangle\langle W, \tilde{X}\rangle U. \tag{2.25}$$

Assim, devido as quatro últimas equações, a equação (2.21) fica

$$\begin{aligned}\overline{R}(U, V)W &= \overline{R}(U^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}} \\ &- \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle W, \tilde{X}\rangle\langle V, \tilde{X}\rangle U + \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle W, \tilde{X}\rangle\langle U, \tilde{X}\rangle V \\ &- \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\Big[\langle W, V\rangle\langle U, \tilde{X}\rangle - \langle W, U\rangle\langle V, \tilde{X}\rangle\Big]\tilde{X}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Agora, vamos desenvolver o termo $\overline{R}(U^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}}$.

Uma vez que ϕ é constante nas folhas, temos que $\overline{R}(U^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}})\tilde{X} = U^{\mathcal{S}}(\phi)V^{\mathcal{S}} - V^{\mathcal{S}}(\phi)U^{\mathcal{S}} = 0$, donde

$$\begin{aligned}\big\langle\overline{R}(U^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}}, Z\big\rangle &= \big\langle\overline{R}(U^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}}, Z^{\mathcal{S}}\big\rangle + \frac{\langle\tilde{Z}, \tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\big\langle\overline{R}(U^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}}, \tilde{X}\big\rangle \\ &= \big\langle\overline{R}(U^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}}, Z^{\mathcal{S}}\big\rangle - \frac{\langle\tilde{X}, \tilde{Z}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\big\langle\overline{R}(U^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}})\tilde{X}, W^{\mathcal{S}}\big\rangle \\ &= \big\langle\overline{R}(U^{\mathcal{S}}, V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}}, Z^{\mathcal{S}}\big\rangle.\end{aligned}$$

Agora, usando a equação de Gauss e o fato de que as folhas são totalmente umbílicas (ver lema 2.1.1), ou seja, $\alpha_{\mathcal{S}}(U,V) = \langle U,V\rangle \mathbf{H}_{\mathcal{S}}$, onde $\mathbf{H}_{\mathcal{S}}$ é o vetor curvatura média e $\alpha_{\mathcal{S}}$ é a segunda forma fundamental da folha $\mathcal{S}$, temos que

$$\begin{aligned}
\big\langle \overline{R}(U^{\mathcal{S}},V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}},Z\big\rangle &= \big\langle \overline{R}(U^{\mathcal{S}},V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}},Z^{\mathcal{S}}\big\rangle \\
&= \big\langle \mathcal{R}^{\mathcal{S}}(U^{\mathcal{S}},V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}},Z^{\mathcal{S}}\big\rangle - \big\langle \alpha_{\mathcal{S}}(U^{\mathcal{S}},Z^{\mathcal{S}}),\alpha_{\mathcal{S}}(V^{\mathcal{S}},W^{\mathcal{S}})\big\rangle \\
&\quad + \big\langle \alpha_{\mathcal{S}}(V^{\mathcal{S}},Z^{\mathcal{S}}),\alpha_{\mathcal{S}}(U^{\mathcal{S}},W^{\mathcal{S}})\big\rangle \\
&= \big\langle \mathcal{R}^{\mathcal{S}}(U^{\mathcal{S}},V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}},Z^{\mathcal{S}}\big\rangle - \mathbf{h}^2\Big(\big\langle U^{\mathcal{S}},Z^{\mathcal{S}}\big\rangle\big\langle V^{\mathcal{S}},W^{\mathcal{S}}\big\rangle - \big\langle V^{\mathcal{S}},Z^{\mathcal{S}}\big\rangle\big\langle U^{\mathcal{S}},W^{\mathcal{S}}\big\rangle\Big)
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{h} = |\mathbf{H}_{\mathcal{S}}|$ e $\mathcal{R}^{\mathcal{S}}$ denota o operador de curvatura da folha $\mathcal{S}$.

Supondo que a folha $\mathcal{S}$ tem curvatura seccional constante igual a $c = c(\mathcal{S})$, temos que

$$\big\langle \mathcal{R}^{\mathcal{S}}(U^{\mathcal{S}},V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}},Z^{\mathcal{S}}\big\rangle = c\big(\big\langle U^{\mathcal{S}},Z^{\mathcal{S}}\big\rangle\big\langle V^{\mathcal{S}},W^{\mathcal{S}}\big\rangle - \big\langle V^{\mathcal{S}},Z^{\mathcal{S}}\big\rangle\big\langle U^{\mathcal{S}},W^{\mathcal{S}}\big\rangle\big),$$

donde,

$$\begin{aligned}
\big\langle \overline{R}(U^{\mathcal{S}},V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}},Z\big\rangle &= (c-\mathbf{h}^2)\big(\big\langle U^{\mathcal{S}},Z^{\mathcal{S}}\big\rangle\big\langle V^{\mathcal{S}},W^{\mathcal{S}}\big\rangle - \big\langle V^{\mathcal{S}},Z^{\mathcal{S}}\big\rangle\big\langle U^{\mathcal{S}},W^{\mathcal{S}}\big\rangle\big) \\
&= (c-\mathbf{h}^2)\big(\big\langle U^{\mathcal{S}},Z\big\rangle\big\langle V^{\mathcal{S}},W^{\mathcal{S}}\big\rangle - \big\langle V^{\mathcal{S}},Z\big\rangle\big\langle U^{\mathcal{S}},W^{\mathcal{S}}\big\rangle\big).
\end{aligned}$$

Como $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ foi tomado arbitrário, concluimos que

$$\overline{R}(U^{\mathcal{S}},V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}} = (c-\mathbf{h}^2)\big(\big\langle V^{\mathcal{S}},W^{\mathcal{S}}\big\rangle U^{\mathcal{S}} - \big\langle U^{\mathcal{S}},W^{\mathcal{S}}\big\rangle V^{\mathcal{S}}\big). \tag{2.27}$$

Usando as equações $U^{\mathcal{S}} = U - \tilde{U}$ onde $\tilde{U} = \frac{\langle U,\tilde{X}\rangle}{|\tilde{X}|^2}\tilde{X}$,

$$\begin{aligned}
\big\langle W^{\mathcal{S}},U^{\mathcal{S}}\big\rangle V^{\mathcal{S}} &= \big\langle W^{\mathcal{S}},U\big\rangle V^{\mathcal{S}} \\
&= \langle W,U\rangle V^{\mathcal{S}} - \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle \tilde{X},U\rangle V^{\mathcal{S}} \\
&= \langle W,U\rangle V - \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\langle V,\tilde{X}\rangle\langle W,U\rangle\tilde{X} \\
&\quad - \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle V + \frac{1}{|\tilde{X}|^4}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle\tilde{X}.
\end{aligned}$$

Considerando a equação análoga, trocando U por V, obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{R}(U^{\mathcal{S}},V^{\mathcal{S}})W^{\mathcal{S}} &= (c-\mathbf{h}^2)\Bigg[\Big(\langle W,V\rangle - \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle\Big)U \\
&\quad - \Big(\langle W,U\rangle - \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle\Big)V \\
&\quad + \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\Big(\langle V,\tilde{X}\rangle\langle W,U\rangle - \langle U,\tilde{X}\rangle\langle W,V\rangle\Big)\tilde{X}\Bigg]
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Assim, usando a equação anterior e a equação (2.26), obtemos o que queríamos, ou seja, a expresão de $\overline{R}$ em função do campo $\tilde{X}$.

$$\begin{aligned}
\overline{R}(U,V)W \;&=\; (c-\mathbf{h}^2)\Bigg[\Big(\langle W,V\rangle - \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle\Big)U \\
&- \Big(\langle W,U\rangle - \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle\Big)V \\
&+ \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\Big(\langle V,\tilde{X}\rangle\langle W,U\rangle - \langle U,\tilde{X}\rangle\langle W,V\rangle\Big)\tilde{X}\Bigg] \\
&- \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle U + \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle V \\
&- \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\Big[\langle W,V\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle - \langle W,U\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle\Big]\tilde{X},
\end{aligned} \tag{2.29}$$

para todo $U,V,W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

De posse da equação (2.29), podemos determinar as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para uma subvariedade. Seja $\mathbf{x} : M^k \to \overline{M}^n$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana k-dimensional M^k em $\overline{M}^n$ e sejam $U,V,W \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vetores tangentes em M. Então, tomando a componente tangente da equação (2.29) temos que

$$\begin{aligned}
(\overline{R}(U,V)W)^\top \;&=\; (c-\mathbf{h}^2)\Bigg[\Big(\langle W,V\rangle - \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle\Big)U \\
&- \Big(\langle W,U\rangle - \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle\Big)V \\
&+ \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\Big(\langle V,\tilde{X}\rangle\langle W,U\rangle - \langle U,\tilde{X}\rangle\langle W,V\rangle\Big)(\tilde{X})\top\Bigg] \\
&- \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle U + \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle V \\
&- \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\Big[\langle W,V\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle - \langle W,U\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle\Big](\tilde{X})^\top,
\end{aligned}$$

para todo $U,V,W \in \mathfrak{X}(M)$, onde $(\tilde{X})^\top$ denota a projeção ortogonal do campo $\tilde{X}$ em TM.

De maneira análoga, tomando a componente normal da equação (2.29), obtemos

$$\begin{aligned}
(\overline{R}(U,V)W)^\perp \;&=\; \frac{(c-\mathbf{h}^2)}{|\tilde{X}|^2}\Big(\langle V,\tilde{X}\rangle\langle W,U\rangle - \langle U,\tilde{X}\rangle\langle W,V\rangle\Big)(\tilde{X})^\perp \\
&- \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\Big[\langle W,V\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle - \langle W,U\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle\Big](\tilde{X})^\perp,
\end{aligned}$$

para todo $U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$, onde $(\tilde{X})^{\perp}$ denota a projeção ortogonal do campo $\tilde{X}$ em $TM^{\perp}$.

Agora, seja $\xi \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ um campo normal em M. Então, se $U, V \in \mathfrak{X}(M)$, segue da equação (2.29) e do fato de $\langle \xi, U\rangle = \langle \xi, V\rangle = 0$ que

$$\begin{aligned}
\overline{R}(U,V)\xi &= -\frac{(c-\mathbf{h}^2)}{|\tilde{X}|^2}\Big(\langle \xi,\tilde{X}\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle U - \langle \xi,\tilde{X}\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle V\Big)\\
&\quad - \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle \xi,\tilde{X}\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle U + \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle \xi,\tilde{X}\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle V\\
&= -\Big(\frac{(c-\mathbf{h}^2)}{|\tilde{X}|^2} + \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\Big)\langle \xi,\tilde{X}\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle U\\
&\quad + \Big(\frac{(c-\mathbf{h}^2)}{|\tilde{X}|^2} + \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\Big)\langle \xi,\tilde{X}\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle V.
\end{aligned}$$

Em particular,

$$(\overline{R}(U,V)\xi)^{\perp} \equiv 0. \tag{2.30}$$

Podemos resumir todo esse cálculo na seguinte proposição:

Proposição 2.1.2 *Seja $\boldsymbol{x} : M^k \to \overline{M}^n$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana k-dimensional M^k em $\overline{M}^n$. Suponhamos que cada folha, da folheação determinada pela distribuição $\Delta = \{U \in T\overline{M}; \langle \tilde{X}, U\rangle = 0\}$, tenha curvatura seccional constante c. Sejam $U, V, W, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in TM^{\perp}$. Então, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, para a imersão $\boldsymbol{x}$, são as seguintes:*

$$\begin{aligned}
\langle R(U,V)W,Z\rangle &= (c-\mathbf{h}^2)\Bigg[\Big(\langle W,V\rangle - \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle\Big)\langle U,Z\rangle\\
&\quad - \Big(\langle W,U\rangle - \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle\Big)\langle V,Z\rangle\\
&\quad + \frac{1}{|\tilde{X}|^2}\Big(\langle V,\tilde{X}\rangle\langle W,U\rangle - \langle U,\tilde{X}\rangle\langle W,V\rangle\Big)\langle \tilde{X},Z\rangle\Bigg]\\
&\quad - \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle\langle U,Z\rangle + \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\langle W,\tilde{X}\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle\langle V,Z\rangle\\
&\quad - \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\Big[\langle W,V\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle - \langle W,U\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle\Big]\langle \tilde{X},Z\rangle\\
&\quad - \langle \alpha(U,W),\alpha(V,Z)\rangle + \langle \alpha(U,Z),\alpha(V,W)\rangle
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla^{\perp}_U\alpha)(V,W) - (\nabla^{\perp}_V\alpha)(U,W) &= \frac{(c-\mathbf{h}^2)}{|\tilde{X}|^2}\Big(\langle V,\tilde{X}\rangle\langle W,U\rangle - \langle U,\tilde{X}\rangle\langle W,V\rangle\Big)(\tilde{X})^{\perp}\\
&\quad - \frac{\tilde{X}(\phi)}{|\tilde{X}|^4}\Big[\langle W,V\rangle\langle U,\tilde{X}\rangle - \langle W,U\rangle\langle V,\tilde{X}\rangle\Big](\tilde{X})^{\perp}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\langle R^{\perp}(U,V)\xi,\eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]U, V\rangle. \tag{2.33}$$

É importante observar que nas hipóteses da proposição 2.1.2, ou seja, $\overline{M}$ admite um campo conforme fechado, sem singularidades, e que cada folha, da folheação determinada pela distribuição $\Delta = \{u \in T\overline{M}; \langle \tilde{X}, u\rangle = 0\}$, tenha curvatura seccional constante, $\overline{M}$ é localmente isométrica ao produto warped $\mathbb{R} \times_f \mathbf{F}$, onde $\mathbf{F}$ tem curvatura seccional constante. Mais que isso, se $\overline{M}$ for completa e simplesmente conexa, $\overline{M}$ será isométrica ao produto warped $\mathbb{R}\times_f \mathbf{F}$, onde $\mathbf{F}$ é completa, simplesmente conexa e tem curvatura seccional constante. Para detalhes, ver [Mo] proposição 3 e observação.

2.2 As Equações de Estrutura em um Produto Warped

Nesta seção, mostramos que o produto warped $\mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$ admite um campo conforme fechado, estudamos a geometria de suas subvariedades e obtemos suas equações de compatibilidade (ou equações de estrutura), desde que $\mathbf{F}^n$ tenha curvatura seccional constante.

Seja $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$ um produto warped, com a métrica warped $\langle\, ,\, \rangle = dt^2 + f^2 \langle\!\langle\, ,\, \rangle\!\rangle$ e função warped f. Sejam $\overline{\nabla}$ e $\overline{R}$ a conexão de Levi-Civita e o operador de curvatura de $\overline{M}$, respectivamente.

Proposição 2.2.1 *No produto warped $\overline{M} = \mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$, o campo $\widehat{X} = (f \circ \sigma)\partial_t$ é conforme fechado com fator conforme $\phi_X = f' \circ \sigma$.*

Demonstração. Como ∂_t é um campo unitário, segue que $\langle \partial_t, \partial_t\rangle = 1$, ou seja, $\partial_t\langle \partial_t, \partial_t\rangle = 0$, ou melhor, $\langle \nabla_{\partial_t}\partial_t, \partial_t\rangle = 0$.

Seja U um campo básico horizontal, então $\langle U, \partial_t\rangle = 0$. Como $\nabla_{\partial_t} U = \frac{f'}{f}U$, (lema 1.4.3) obtemos que

$$0 = \partial_t\langle U, \partial_t\rangle = \langle \nabla_{\partial_t} U, \partial_t\rangle + \langle \nabla_{\partial_t}\partial_t, U\rangle = \langle \nabla_{\partial_t}\partial_t, U\rangle.$$

Logo, vale $\nabla_{\partial_t}\partial_t = 0$.

Assim, por um lado,

$$\overline{\nabla}_{\partial_t}\widehat{X} = \overline{\nabla}_{\partial_t}(f\partial_t) = \partial_t(f)\partial_t + f\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = f'\partial_t.$$

Por outro lado, pelo lema 1.4.3, sendo U um campo básico vertical,

$$\overline{\nabla}_U \widehat{X} = \frac{\widehat{X}(f)}{f}U = \frac{f\partial_t(f)}{f}U = f'U.$$

Em geral, dado $E \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, como $E = aU + b\partial_t$, onde a, b são funções diferenciáveis em $\overline{M}$ e U é um vetor básico vertical, temos que

$$\overline{\nabla}_E \widehat{X} = \overline{\nabla}_{aU+b\partial_t} \widehat{X} = a\overline{\nabla}_U \widehat{X} + b\overline{\nabla}_{\partial_t} \widehat{X} = af'U + bf'\partial_t = f'E.$$

Isso conclui a demonstração. ■

Assim, considerando o que foi feito na seção anterior, para $\overline{M} = \mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$, temos que $\tilde{X} = f\partial_t$ e

$$\overline{\nabla}_E \tilde{X} = f'E, \ \forall\, E \in T\overline{M},$$

ou seja, $\phi = f'$. Com isso, $|\tilde{X}| = f$, $\frac{\tilde{X}}{|\tilde{X}|} = \partial_t$ e $\tilde{X}(\phi) = f\partial_t(f') = ff''$.

Além disso, como $U(f) = 0$, se $\langle U, \partial_t \rangle = 0$, temos que $V(f) = f'\langle V, \partial_t\rangle \partial_t$ para todo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Daí, dado $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$,

$$f'V = \overline{\nabla}_V f\partial_t = f\overline{\nabla}_V \partial_t + V(f)\partial_t = f\overline{\nabla}_V \partial_t + f'\langle V, \partial_t\rangle \partial_t,$$

ou seja,

$$\overline{\nabla}_V \partial_t = \frac{f'}{f}(V - \langle V, \partial_t\rangle \partial_t), \ \forall\, V \in \mathfrak{X}(\overline{M}). \tag{2.34}$$

Recordemos que o campo $\nabla(f' \circ \sigma)$ está na direção do campo ∂_t (ver equação (2.13)). Assim, como $\nabla(f' \circ \sigma) = f''(\sigma)\nabla\sigma$, podemos concluir que o campo $\nabla\sigma$ está na direção do campo ∂_t. Melhor ainda, como $\partial_t(\sigma) = 1$, (ver comentário após o lema 1.4.1) então

$$\nabla\sigma = \partial_t. \tag{2.35}$$

Seja $\mathbf{x} : M^k \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica da variedade Riemanniana k-dimensional M^k em $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$. Seja ϱ uma seção de $TM^\perp$ e denotemos por X a projeção canônica de ∂_t em TM, tal que

$$\partial_t = X + \varrho. \tag{2.36}$$

Denotemos a imersão $\mathbf{x}$ por $\mathbf{x} = (x_\mathbb{R}, x_\mathbf{F})$, e defina uma função $h : M \to \mathbb{R}$ por $h(p) = x_\mathbb{R}(p)$. Chamamos h de *uma função altura em M*. Note que $\sigma(\mathbf{x}(p)) = h(p)$, ou seja, h é a restrição de σ à M ($h = \sigma\,|_M$). Como $(\nabla\sigma)^\top = \nabla^M h$, onde $(\ )^\top$ denota a projeção em TM e ∇^M denota o gradiente em M, obtemos que

$$X = (\partial_t)^\top = (\nabla\sigma)^\top = \nabla^M h,$$

ou seja,

$$X = \nabla^M h. \tag{2.37}$$

Derivando a equação (2.36), e em seguida tomando as componentes tangente e normal, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 2.2.2 *Para todo $v \in TM$, temos*

$$\alpha(v, X) + \nabla_v^{\perp} \varrho = -\frac{f'(h)}{f(h)} \langle v, X \rangle \varrho \tag{2.38}$$

$$\nabla_v X - A_{\varrho} v = \frac{f'(h)}{f(h)} (v - \langle v, X \rangle X). \tag{2.39}$$

onde ∇, $\nabla^{\perp}$, α e A_{ϱ}, denotam a conexão de Levi-Civita em M, a conexão normal induzida em M, a segunda forma fundamental da imersão $\boldsymbol{x}(M)$ e o endomorfismo de Weingarten associado a α, respectivamente.

Demonstração. Por um lado, como $\partial_t = X + \varrho$, a equção (2.34) nos dá

$$\overline{\nabla}_v \partial_t = \frac{f'}{f}(v - \langle v, \partial_t \rangle \partial_t) = \frac{f'}{f}(v - \langle v, X \rangle (X + \varrho)) = \frac{f'}{f} v - \frac{f'}{f} \langle v, X \rangle X - \frac{f'}{f} \langle v, X \rangle \varrho \tag{2.40}$$

Por outro lado, usando as fórmulas de Gauss e Weingarten,

$$\overline{\nabla}_v \partial_t = \overline{\nabla}_v (X + \varrho) = \overline{\nabla}_v X + \overline{\nabla}_v \varrho = \nabla_v X + \alpha(v, X) - A_{\varrho} v + \nabla_v^{\perp} \varrho. \tag{2.41}$$

Assim,

$$\nabla_v X + \alpha(v, X) - A_{\varrho} v + \nabla_v^{\perp} \varrho = \frac{f'}{f} v - \frac{f'}{f} \langle v, X \rangle X - \frac{f'}{f} \langle v, X \rangle \varrho. \tag{2.42}$$

Agora, basta tomar as componentes tangente e normal. ■

Observações:

1. *Suponha a imersão de codimensão um. Sejam N o campo normal unitário em M e ν_1 tal que $\partial_t = X + \nu_1 N$. Então, as equações (2.38) e (2.39) se resumem a*

$$\begin{aligned} \langle \alpha(v, X), N \rangle + v(\nu_1) &= -\frac{f'(h)}{f(h)} \langle v, X \rangle \nu_1 \\ \nabla_v X - \nu_1 A v &= \frac{f'(h)}{f(h)} \big(v - \langle v, X \rangle X\big). \end{aligned}$$

2. *Se, além disso, supusermos que $f \equiv 1$, obtemos*

$$\begin{aligned} v(\nu_1) &= -\langle \alpha(v, X), N \rangle \\ \nabla_v X &= \nu_1 A v. \end{aligned}$$

Assim, podemos recuperar as proposições 3.1 de [CX] e 2.2 de [Da1], respectivamente.

A distribuição $n-$dimensional dada por

$$\Delta = \{U \in T\overline{M}; \langle \tilde{X}, U \rangle = 0\}$$

é involutiva, logo completamente integrável pelo teorema de Frobenius. As folhas da folheação são as hipersurperfícies de nível da submersão σ (ver exemplo 1.5.1). Além disso, se a variedade $\mathbf{F}$ tiver curvatura seccional constante igual a c, então, na folheação $\mathcal{F}(\partial_t)$ determinada por Δ, a folha $\sigma^{-1}(\sigma(q))$ terá curvatura seccional constante igual a $c/[f(\sigma(q))]^2$, e curvatura média $-f'(\sigma(q))/f(\sigma(q))$, $\forall\, q \in M$. De fato, sendo $\langle\, , \rangle^{\mathcal{S}}$ a restrição da métrica de $\overline{M}$ à $\mathcal{S} = \sigma^{-1}(\sigma(q))$, segue da definição da métrica warped que $\langle\, , \rangle^{\mathcal{S}} = (f(q))^2 \langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle$. Agora, basta ver que para todo $U, V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, $\nabla^{\mathcal{S}}_U V = \nabla^{\mathbf{F}}_U V$, onde $\nabla^{\mathcal{S}}$ é a conexão de $\mathcal{S}$ e $\nabla^{\mathbf{F}}$ é a conexão de $\mathbf{F}$, para concluir que

$$K_{\mathcal{S}}(U, V) = (1/f(q))^2 K_{\mathbf{F}}(U, V).$$

A segunda afirmação está contida no lema 2.1.1. Então, dados $U, V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, pela equação (2.29) e as observações feitas desde o início desta seção,

$$\begin{aligned} \overline{R}(U,V)W &= \Big(\frac{c}{f(\sigma)^2} - \Big(\frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)}\Big)^2\Big)\Big[\Big(\langle W, V\rangle - \langle W, \partial_t\rangle\langle V, \partial_t\rangle\Big)U \\ &- \Big(\langle W, U\rangle - \langle W, \partial_t\rangle\langle U, \partial_t\rangle\Big)V \\ &+ \Big(\langle V, \partial_t\rangle\langle W, U\rangle - \langle U, \partial_t\rangle\langle W, V\rangle\Big)\partial_t\Big] \\ &- \frac{f''(\sigma)}{f(\sigma)}\langle W, \partial_t\rangle\langle V, \partial_t\rangle U + \frac{f''(\sigma)}{f(\sigma)}\langle W, \partial_t\rangle\langle U, \partial_t\rangle V \\ &- \frac{f''(\sigma)}{f(\sigma)}\Big[\langle W, V\rangle\langle U, \partial_t\rangle - \langle W, U\rangle\langle V, \partial_t\rangle\Big]\partial_t. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Temos assim, a seguinte proposição:

Proposição 2.2.3 *Seja $\boldsymbol{x}\colon M^k \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana k-dimensional M^k no produto warped $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$, onde $\mathbf{F}^n$ é uma variedade Riemanniana*

n-dimensional com curvatura seccional constante igual a c. Seja ϱ uma seção de $TM^{\perp}$ e X a projeção canônica de ∂_t em TM, tal que $\partial_t = X + \varrho$. Sejam $U, V, W, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in TM^{\perp}$. Então, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, para a imerssão $\boldsymbol{x}$, são as seguintes:

Equação de Gauss

$$\begin{aligned}
\langle R(U,V)W,Z\rangle &= \Big(\frac{c}{f(h)^2} - \Big(\frac{f'(h)}{f(h)}\Big)^2\Big)\Big[\langle W,V\rangle\langle U,Z\rangle - \langle W,U\rangle\langle V,Z\rangle\Big] \\
&+ \Big(\frac{c}{f(h)^2} - \Big(\frac{f'(h)}{f(h)}\Big)^2 + \frac{f''(h)}{f(h)}\Big)\Big[\langle V,Z\rangle\langle W,X\rangle\langle U,X\rangle - \langle U,Z\rangle\langle W,X\rangle\langle V,X\rangle \\
&+ \langle W,U\rangle\langle V,X\rangle\langle Z,X\rangle - \langle W,V\rangle\langle U,X\rangle\langle Z,X\rangle\Big] \\
&- \langle\alpha(U,W),\alpha(V,Z)\rangle + \langle\alpha(U,Z),\alpha(V,W)\rangle
\end{aligned}$$

Equação de Codazzi

$$(\nabla^{\perp}_U\alpha)(V,W) - (\nabla^{\perp}_V\alpha)(U,W) = \Big(\frac{c}{f(h)^2} - \Big(\frac{f'(h)}{f(h)}\Big)^2 + \frac{f''(h)}{f(h)}\Big)\Big[\langle W,U\rangle\langle V,X\rangle - \langle W,V\rangle\langle U,X\rangle\Big]\varrho$$

Equação de Ricci

$$\langle R^{\perp}(U,V)\xi,\eta\rangle = \langle[A_\xi, A_\eta]U,V\rangle.$$

Observações:

1. *Se fizermos $c = 0$ e supusermos a imersão de codimensão 1, as equações de Gauss e Codazzi se resumem a*

$$\begin{aligned}
\langle R(U,V)W,Z\rangle &= -\Big(\frac{f'(h)}{f(h)}\Big)^2\Big(\langle W,V\rangle\langle U,Z\rangle - \langle W,U\rangle\langle V,Z\rangle\Big) \\
&+ \Big(-\Big(\frac{f'(h)}{f(h)}\Big)^2 + \frac{f''(h)}{f(h)}\Big)\Big[\langle V,Z\rangle\langle W,X\rangle\langle U,X\rangle - \langle U,Z\rangle\langle W,X\rangle\langle V,X\rangle \\
&+ \langle W,U\rangle\langle V,X\rangle\langle Z,X\rangle - \langle W,V\rangle\langle U,X\rangle\langle Z,X\rangle\Big] \\
&- \langle\alpha(U,W),\alpha(V,Z)\rangle + \langle\alpha(U,Z),\alpha(V,W)\rangle
\end{aligned}$$

$$\nabla_U AV - \nabla_V AU - A([U,V]) = \Big(-\Big(\frac{f'(h)}{f(h)}\Big)^2 + \frac{f''(h)}{f(h)}\Big)\Big[\langle N,\varrho\rangle\langle V,\varrho\rangle U - \langle N,\varrho\rangle\langle U,\varrho\rangle V\Big].$$

onde N é o campo normal unitário a imersão.

2. *Se fizermos $f = 1$ e supusermos a imersão de codimensão 1, as equações de Gauss e Codazzi se resumem a*

$$\begin{aligned}\langle R(U,V)W,Z\rangle &= c\Big[\langle W,V\rangle\langle U,Z\rangle - \langle W,U\rangle\langle V,Z\rangle \\ &\quad + \langle V,Z\rangle\langle W,X\rangle\langle U,X\rangle - \langle U,Z\rangle\langle W,X\rangle\langle V,X\rangle \\ &\quad + \langle W,U\rangle\langle V,X\rangle\langle Z,X\rangle - \langle W,V\rangle\langle U,X\rangle\langle Z,X\rangle\Big] \\ &\quad - \langle \alpha(U,W), \alpha(V,Z)\rangle + \langle \alpha(U,Z), \alpha(V,W)\rangle\end{aligned}$$

$$\langle \overline{R}(U,V)N,Z\rangle = c\langle N,\varrho\rangle\big(\langle N,U\rangle\langle V,\varrho\rangle - \langle N,V\rangle\langle U,\varrho\rangle\big)$$

onde N é o campo normal unitário a imersão.

Assim, podemos recuperar o lema 2.1 de [CX] e a proposição 2.1 de [Da1], respectivamente.

Capítulo 3

Um Teorema de Bonnet

3.1 Um Teorema de Bonnet Para Produtos Warped

Nesta seção, provamos que as condições necessárias obtidas nas proposições 2.2.2 e 2.2.3 são suficientes. Em outras palavras, provamos um teorema similar ao teorema de Bonnet para superficies em $\mathbb{R}^3$ para uma classe de variedades Riemannianas.

Para esse propósito, fixamos algumas notações.

Seja $(M^k, \langle , \rangle, \nabla)$ uma variedade Riemanniana $k-$dimensional, $\langle , \rangle$ sua métrica e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial Riemanniano de posto $l = n-k$, com conexão compatível ∇'. Sejam $h \in C^\infty(M)$, $\varrho \in \Gamma(E)$ e α' uma seção simétrica no fibrado dos homomofismos $Hom(TM \times TM, E)$. Defina para cada seção local ξ de E, a aplicação $A'_\xi : TM \longrightarrow TM$ por

$$\langle A'_\xi U, V\rangle = \langle \alpha'(U,V), \xi\rangle \qquad U, V \in TM. \tag{3.1}$$

As equações de compatibilidades para subvariedades de $\mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$, obtidas no capítulo anterior, sugeri introduzir a seguinte definição:

Definição 3.1.1 *Dizemos que $(\langle , \rangle, \nabla, \nabla', \alpha', \varrho, h)$ satisfaz as equações de compatibilidade para $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbf{F}^n$, onde $\mathbf{F}^n$ é uma variedade Riemanniana e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é positiva e suave, se*

$$|X|^2 + |\varrho|^2 = 1, \quad X = \nabla h \tag{3.2}$$

e para todo $U, V, W, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in E$, as seguintes equações valem:

$$\alpha'(V, X) + \nabla'_V \varrho = -\frac{f'(h)}{f(h)}\langle V, X\rangle \varrho \tag{3.3}$$

$$\nabla_V X - A'_\varrho V = \frac{f'(h)}{f(h)}\big(V - \langle V, X\rangle X\big) \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
\langle R(U,V)W,Z\rangle &= \left(\frac{c}{f(h)^2} - \Big(\frac{f'(h)}{f(h)}\Big)^2\right)\Big(\langle U,Z\rangle\langle V,W\rangle - \langle U,W\rangle\langle V,Z\rangle\Big) \qquad (3.5)\\
&+ \left(\frac{c}{f(h)^2} - \Big(\frac{f'(h)}{f(h)}\Big)^2 + \frac{f''(h)}{f(h)}\right)\Big[\langle U,W\rangle\langle V,X\rangle\langle Z,X\rangle + \langle V,Z\rangle\langle U,X\rangle\langle W,X\rangle\\
&- \langle U,Z\rangle\langle V,X\rangle\langle W,X\rangle - \langle V,W\rangle\langle U,X\rangle\langle Z,X\rangle\Big]\\
&- \langle \alpha'(U,W), \alpha'(V,Z)\rangle + \langle \alpha'(U,Z), \alpha'(V,W)\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla'_U\alpha')(V,W) - (\nabla'_V\alpha')(U,W),\xi\rangle &= \left(\frac{c}{f(h)^2} - \Big(\frac{f'(h)}{f(h)}\Big)^2 + \frac{f''(h)}{f(h)}\right) \qquad (3.6)\\
&\Big[\langle U,W\rangle\langle V,X\rangle - \langle V,W\rangle\langle U,X\rangle\Big]\langle\varrho,\xi\rangle
\end{aligned}$$

$$\langle R'(U,V)\xi,\eta\rangle = \langle [A'_\xi, A'_\eta]U, V\rangle. \tag{3.7}$$

A definição 3.1.1 está bem posta.

É sábido que podemos criar um outro fibrado vetorial Riemanniano $\tilde{E}$, dado pela soma de Whitney $\tilde{E} = TM \oplus_W E$. De fato, é facil ver que em $\tilde{E}$, podemos definir uma conexão compatível com a métrica por

$$\begin{aligned}
\nabla''_V U &= \nabla_V U + \alpha'(V,U) \qquad (3.8)\\
\nabla''_V \xi &= -A'_\xi V + \nabla'_V \xi
\end{aligned}$$

O lema a seguir mostra que as equações (3.2), (3.3) e (3.4), da definição 3.1.1, determinam uma seção unitária ∂'_t em $\tilde{E}$ satisfazendo

$$\nabla''_V f(h)\partial'_t = f'(h)V, \quad \forall\, V \in \mathfrak{X}(M).$$

Lema 3.1.1 *Assuma que as equações (3.2), (3.3) e (3.4) valem. Então existe uma seção ∂'_t unitária em $\tilde{E}$, tal que*

$$\nabla''_V f(h)\partial'_t = f'(h)V \quad \forall\, V \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração. Defina
$$\partial_t' = X + \varrho.$$
Usando a equação (3.2), temos que
$$V(f(h)) = \langle V, \nabla f(h)\rangle = \langle V, f'(h)\nabla h\rangle = f'(h)\langle V, \nabla h\rangle = f'(h)\langle V, X\rangle = f'(h)\langle V, \partial_t'\rangle,$$
e
$$V(h) = \langle V, \partial_t'\rangle.$$
Agora, usando as equações (3.3), (3.4) e (3.8), temos que
$$\begin{aligned}
\nabla''_V f(h)\partial_t' &= f(h)\nabla''_V\partial_t' + V(f(h))\partial_t' \\
&= f(h)\nabla''_V\big(X+\varrho\big) + f'(h)\langle V, X\rangle\partial_t' \\
&= f(h)\big(\nabla''_V X + \nabla''_V\varrho\big) + f'(h)\langle V, X\rangle\partial_t' \\
&= f(h)\Big(\nabla_V X + \alpha'(V,X) - A'_\varrho V + \nabla'_V\varrho\Big) + f'(h)\langle V, X\rangle\partial_t' \\
&= f(h)\Big(\alpha'(V,X) + \nabla'_V\varrho\Big) + f(h)\Big(\nabla_V X - A'_\varrho V\Big) + f'(h)\langle V, X\rangle\partial_t' \\
&= -f'(h)\langle V, X\rangle\varrho + f'(h)V - f'(h)\langle V, X\rangle X + f'(h)\langle V, X\rangle\partial_t' \\
&= f'(h)V - f'(h)\langle V, X\rangle\partial_t' + f'(h)\langle V, X\rangle\partial_t' \\
&= f'(h)V
\end{aligned}$$
para todo $V \in \mathfrak{X}(M)$. Além disso,
$$|\partial_t'|^2 = |X|^2 + |\varrho|^2 = 1.$$
Isso conclui a demonstração. ■

Em particular,
$$f'(h)V = \nabla''_V f(h)\partial_t' = f(h)\nabla''_V\partial_t' + V(f(h))\partial_t' = f(h)\nabla''_V\partial_t' + f'(h)\langle V, \partial_t\rangle\partial_t',$$
ou seja,
$$\nabla''_V\partial_t' = \frac{f'(h)}{f(h)}\Big(V - \langle V, \partial_t'\rangle\partial_t'\Big), \quad \forall V \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.9}$$
Além disso, se $\langle V, \partial_t'\rangle = 0$, temos que $V(f(h)) = V(h) = 0$ e $\nabla''_V\partial_t' = \frac{f'(h)}{f(h)}V$.

Suponha que $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$. Seja $\check{E} = E \oplus_W \langle\zeta\rangle$ um fibrado Riemanniano de posto $l+1$, onde $\langle\zeta\rangle$ é um fibrado de linhas em M. Defina em $\check{E}$

$$\begin{aligned}
\check{\nabla} &: TM \times \check{E} \longrightarrow \check{E} \\
\check{\alpha} &: TM \times TM \longrightarrow \check{E}
\end{aligned}$$

por

$$\begin{aligned}
\check{\alpha}(U,V) &= \alpha'(U,V) + (\lambda\langle U,V\rangle - \mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle V,\partial_t'\rangle)\zeta \qquad (3.10)\\
\check{\nabla}_V\phi &= \nabla'_V(\phi)_E - \langle\phi,\zeta\rangle(\lambda V - \mu\langle V,\partial_t'\rangle\partial_t') + V\langle\phi,\zeta\rangle\zeta
\end{aligned}$$

onde $U,V \in TM$, ϕ é uma seção em $\check{E}$, $(\phi)_E$ é a projeção canônica de ϕ em E e λ,μ satisfazem

$$\lambda^2 := \frac{1-(f'(h))^2}{f(h)^2} \quad e \quad \lambda\mu := \lambda^2 + \frac{f''(h)}{f(h)}.$$

Note que com a definição de λ e μ, temos que ter necessariamente,

$$-1 < f'(h) < 1.$$

Com essas notações, obtemos o seguinte lema:

Lema 3.1.2 *Assuma que* $(\langle,\rangle, \nabla, \nabla', \alpha', \varrho, h)$ *satisfaz as equações de compatibilidade para* $\overline{M}$. *Então* $(\langle,\rangle, \nabla, \check{\nabla}, \check{\alpha})$ *satisfaz as equações de compatibilidade para o espaço euclidiano* $\mathbb{R}^{n+2}$. *Em outras palavras,*

$$\begin{aligned}
\langle R(U,V)W,Z\rangle &= \langle\check{\alpha}(U,Z),\check{\alpha}(V,W)\rangle - \langle\check{\alpha}(U,W),\check{\alpha}(V,Z)\rangle \qquad (3.11)\\
(\check{\nabla}_V\check{\alpha})(U,W) &= (\check{\nabla}_U\check{\alpha})(V,W) \qquad (3.12)\\
\langle\check{R}(U,V)\xi,\eta\rangle &= \langle[\check{A}_\xi,\check{A}_\eta]U,V\rangle \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Demonstração. Vamos dividir a demostração em três partes.

(a) Primeiro, verificaremos que vale a equação (3.11).

Como $\langle\alpha'(U,V),\zeta\rangle = 0,\ \forall\ U,V \in TM$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle\check{\alpha}(U,W),\check{\alpha}(V,Z)\rangle &= \langle\alpha'(U,W),\alpha'(V,Z)\rangle \\
&\quad + \Big\langle(\lambda\langle U,W\rangle - \mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle)\zeta, (\lambda\langle V,Z\rangle - \mu\langle V,\partial_t'\rangle\langle Z,\partial_t'\rangle)\zeta\Big\rangle \\
&= \langle\alpha'(U,W),\alpha'(V,Z)\rangle \\
&\quad + \lambda^2\langle U,W\rangle\langle V,Z\rangle - \lambda\mu\langle U,W\rangle\langle V,\partial_t'\rangle\langle Z,\partial_t'\rangle \\
&\quad - \mu\lambda\langle V,Z\rangle\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle + \mu^2\langle U,\partial_t'\rangle\langle V,\partial_t'\rangle\langle Z,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle.
\end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned}\langle \breve{\alpha}(U,Z), \breve{\alpha}(V,W)\rangle &= \langle \alpha'(U,Z), \alpha'(V,W)\rangle\\ &\quad + \lambda^2\langle U,Z\rangle\langle V,W\rangle - \lambda\mu\langle U,Z\rangle\langle V,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle\\ &\quad - \mu\lambda\langle V,W\rangle\langle U,\partial_t'\rangle\langle Z,\partial_t'\rangle + \mu^2\langle U,\partial_t'\rangle\langle V,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle\langle Z,\partial_t'\rangle.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&- \langle \breve{\alpha}(U,W), \breve{\alpha}(V,Z)\rangle + \langle \breve{\alpha}(U,Z), \breve{\alpha}(V,W)\rangle\\ = \;& -\langle \alpha'(U,W), \alpha'(V,Z)\rangle - \lambda^2\langle U,W\rangle\langle V,Z\rangle\lambda\mu\langle U,W\rangle\langle V,\partial_t'\rangle\langle Z,\partial_t'\rangle\\ & + \mu\lambda\langle V,Z\rangle\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle + \langle \alpha'(U,Z), \alpha'(V,W)\rangle + \lambda^2\langle U,Z\rangle\langle V,W\rangle\\ & - \lambda\mu\langle U,Z\rangle\langle V,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle - \mu\lambda\langle V,W\rangle\langle U,\partial_t'\rangle\langle Z,\partial_t'\rangle\\ = \;& -\langle \alpha'(U,W), \alpha'(V,Z)\rangle + \langle \alpha'(U,Z), \alpha'(V,W)\rangle + \lambda^2\Big(\langle U,Z\rangle\langle V,W\rangle - \langle U,W\rangle\langle V,Z\rangle\Big)\\ & + \mu\lambda\Big(\langle V,Z\rangle\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle - \langle U,Z\rangle\langle V,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle\\ & + \langle U,W\rangle\langle V,\partial_t'\rangle\langle Z,\partial_t'\rangle - \langle V,W\rangle\langle U,\partial_t'\rangle\langle Z,\partial_t'\rangle\Big)\\ = \;& \langle R(U,V)W,Z\rangle.\end{aligned}$$

(b) Verificaremos, agora, que a equação (3.12) é satisfeita.

Lembrando que

$$(\breve{\nabla}_V\breve{\alpha})(U,W) = \breve{\nabla}_V\breve{\alpha}(U,W) - \breve{\alpha}(\nabla_V U,W) - \breve{\alpha}(U,\nabla_V W),$$

temos, usando a equação (3.10), que

$$\begin{aligned}\breve{\nabla}_V\breve{\alpha}(U,W) &= \nabla'_V\alpha'(U,W) - \big(\lambda\langle U,W\rangle - \mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle\big)(\lambda V - \mu\langle V,\partial_t'\rangle\partial_t')\\ &\quad + V\big(\lambda\langle U,W\rangle\big)\zeta - V\big(\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle\big)\zeta\\ \breve{\alpha}(\nabla_V U,W) &= \alpha'(\nabla_V U,W) + (\lambda\langle\nabla_V U,W\rangle - \mu\langle\nabla_V U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle)\zeta\\ \breve{\alpha}(U,\nabla_V W) &= \alpha'(U,\nabla_V W) + (\lambda\langle U,\nabla_V W\rangle - \mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle\nabla_V W,\partial_t'\rangle)\zeta.\end{aligned}$$

Assim, se $\xi \in \Gamma(E)$, pela equação (3.6)

$$\begin{aligned}\langle(\breve{\nabla}_U\breve{\alpha})(V,W) - (\breve{\nabla}_V\breve{\alpha})(U,W),\xi\rangle &= \langle(\nabla'_U\alpha')(V,W) - (\nabla'_V\alpha')(U,W),\xi\rangle\\ &\quad - \lambda\mu\big(\langle U,W\rangle\langle V,\partial_t'\rangle - \langle V,W\rangle\langle U,\partial_t'\rangle\big)\langle\partial_t',\xi\rangle\\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Por outro lado, observando que

$$V\big(\lambda\langle U,W\rangle\big)=V(\lambda)\langle U,W\rangle+\lambda\langle\nabla_V U,W\rangle+\lambda\langle U,\nabla_V W\rangle,$$

$$\begin{aligned}V\big(\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle\big) &= V(\mu)\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle+\mu\langle\nabla_V U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle+\frac{f'}{f}\mu\langle U,V\rangle\langle W,\partial_t'\rangle\\ &\quad-\frac{f'}{f}\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle V,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle+\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle\nabla_V W,\partial_t'\rangle+\frac{f'}{f}\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,V\rangle\\ &\quad-\frac{f'}{f}\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle V,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle,\end{aligned}$$

$\langle U,\partial_t'\rangle=\langle U,(\partial_t')^\top\rangle$, onde $(\partial_t')^\top$ denota a projeção de ∂_t' em TM,

e

$\nabla''_V\partial_t'=\frac{f'(h)}{f(h)}\Bigg(V-\langle V,\partial_t'\rangle\partial_t'\Bigg)$, obtemos que

$$\begin{aligned}\langle\big(\check\nabla_V\check\alpha\big)(U,W),\zeta\rangle &= V\big(\lambda\langle U,W\rangle\big)-V\big(\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle\big)-\lambda\langle\nabla_V U,W\rangle+\mu\langle\nabla_V U,\partial_t'\rangle\langle W\partial_t'\rangle\\ &\quad-\lambda\langle U,\nabla_V W\rangle+\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle\nabla_V W,\partial_t'\rangle\\ &= V(\lambda)\langle U,W\rangle+\lambda\langle\nabla_V U,W\rangle+\lambda\langle U,\nabla_V W\rangle\\ &\quad-V(\mu)\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle-\mu\langle\nabla_V U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle-\frac{f'}{f}\mu\langle U,V\rangle\langle W,\partial_t'\rangle\\ &\quad-\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle\nabla_V W,\partial_t'\rangle-\frac{f'}{f}\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,V\rangle+2\frac{f'}{f}\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle V,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle\\ &\quad-\lambda\langle\nabla_V U,W\rangle+\mu\langle\nabla_V U,\partial_t'\rangle\langle W\partial_t'\rangle-\lambda\langle U,\nabla_V W\rangle+\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle\nabla_V W,\partial_t'\rangle\\ &= V(\lambda)\langle U,W\rangle-V(\mu)\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle\\ &\quad-\frac{f'}{f}\mu\langle U,V\rangle\langle W,\partial_t'\rangle-\frac{f'}{f}\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,V\rangle\\ &\quad+2\frac{f'}{f}\mu\langle U,\partial_t'\rangle\langle V,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle.\end{aligned}$$

Além disso, como μ só depende de t, $\nabla\mu=\partial_t'(\mu)\partial_t'=\mu'\partial_t'$ e $V(\mu)=\mu'\langle V,\partial_t'\rangle$, donde

$$V(\mu)\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle-U(\mu)\langle V,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle=\mu'\langle U,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle\langle V,\partial_t'\rangle-\mu'\langle U,\partial_t'\rangle\langle V,\partial_t'\rangle\langle W,\partial_t'\rangle=0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \big(\check{\nabla}_V \check{\alpha}\big)(U,W) - \big(\check{\nabla}_U \check{\alpha}\big)(V,W), \zeta \rangle &= V(\lambda)\langle U, W\rangle - V(\mu)\langle U, \partial_t'\rangle\langle W, \partial_t'\rangle \\
&\quad - \frac{f'}{f}\mu\langle U, V\rangle\langle W, \partial_t'\rangle - \frac{f'}{f}\mu\langle U, \partial_t'\rangle\langle W, V\rangle \\
&\quad + 2\frac{f'}{f}\mu\langle U, \partial_t'\rangle\langle V, \partial_t'\rangle\langle W, \partial_t'\rangle \\
&\quad - U(\lambda)\langle V, W\rangle + U(\mu)\langle V, \partial_t'\rangle\langle W, \partial_t'\rangle \\
&\quad + \frac{f'}{f}\mu\langle V, U\rangle\langle W, \partial_t'\rangle + \frac{f'}{f}\mu\langle V, \partial_t'\rangle\langle W, U\rangle \\
&\quad - 2\frac{f'}{f}\mu\langle U, \partial_t'\rangle\langle V, \partial_t'\rangle\langle W, \partial_t'\rangle \\
&= \lambda'\langle V, \partial_t'\rangle\langle U, W\rangle - \frac{f'}{f}\mu\langle U, \partial_t'\rangle\langle W, V\rangle \\
&\quad - \lambda'\langle U, \partial_t'\rangle\langle V, W\rangle + \frac{f'}{f}\mu\langle V, \partial_t'\rangle\langle W, U\rangle.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\langle \big(\check{\nabla}_V \check{\alpha}\big)(U,W) - \big(\check{\nabla}_U \check{\alpha}\big)(V,W), \zeta \rangle = (\lambda' + \frac{f'}{f}\mu)\langle V, \partial_t'\rangle\langle U, W\rangle - (\lambda' + \frac{f'}{f}\mu)\langle U, \partial_t'\rangle\langle V, W\rangle.$$

É suficiente mostrar que $\lambda' + \frac{f'}{f}\mu \equiv 0$. Como

$$\lambda' = \frac{\frac{-f'f''}{\sqrt{1-(f')^2}} f - f'\sqrt{1-(f')^2}}{f^2} = -\frac{f'}{f}\left(\frac{f''}{\sqrt{1-(f')^2}} + \frac{\sqrt{1-(f')^2}}{f}\right) = -\frac{f'}{f}\mu,$$

temos que

$$\langle \big(\check{\nabla}_V \check{\alpha}\big)(U,W) - \big(\check{\nabla}_U \check{\alpha}\big)(V,W), \zeta \rangle = 0. \tag{3.15}$$

Concluimos pelas equações (3.14) e (3.15) que

$$\big(\check{\nabla}_V \check{\alpha}\big)(U,W) = \big(\check{\nabla}_U \check{\alpha}\big)(V,W). \tag{3.16}$$

(c) Finalmente, mostraremos que a equação (3.13) vale.

Se ξ *e* η são seções em E,

$$\begin{aligned}
\langle \check{A}_\xi \circ \check{A}_\eta U, V\rangle &= \langle \check{A}_\eta U, \check{A}_\xi V\rangle = \langle \check{\alpha}(\check{A}_\eta U, V), \xi\rangle = \langle \alpha'(\check{A}_\eta U, V), \xi\rangle = \langle \check{A}_\eta U, A_\xi' V\rangle \\
&= \langle \check{\alpha}(A_\xi' V, U), \eta\rangle = \langle \alpha'(A_\xi' V, U), \eta\rangle = \langle A_\xi' V, A_\eta' U\rangle = \langle A_\xi' \circ A_\eta' U, V\rangle.
\end{aligned}$$

Analogamente, $\langle \check{A}_\eta \circ \check{A}_\xi U, V\rangle = \langle A_\eta' \circ A_\xi' U, V\rangle$, donde

$$\langle [\check{A}_\xi, \check{A}_\eta]U, V\rangle = \langle [A_\xi', A_\eta']U, V\rangle.$$

Por outro lado, como $\check{\nabla}_V \xi = \nabla'_V \xi$, segue que $\check{\nabla}_U \check{\nabla}_V \xi = \check{\nabla}_U \nabla'_V \xi = \nabla'_U \nabla'_V \xi$. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \check{R}(U,V)\xi, \eta \rangle &= \langle \check{\nabla}_U \check{\nabla}_V \xi - \check{\nabla}_V \check{\nabla}_U \xi - \check{\nabla}_{[U,V]}\xi, \eta \rangle \\
&= \langle \nabla'_U \nabla'_V \xi - \nabla'_V \nabla'_U \xi - \nabla'_{[U,V]}\xi, \eta \rangle \\
&= \langle R'(U,V)\xi, \eta \rangle.
\end{aligned}$$

Usando as equações de compatibilidade,

$$\langle \check{R}(U,V)\xi, \eta \rangle = \langle R'(U,V)\xi, \eta \rangle = \langle [A'_\xi, A'_\eta]U, V \rangle = \langle [\check{A}_\xi, \check{A}_\eta]U, V \rangle.$$

Se ξ é uma seção em E e $\eta = \zeta$,

$$\langle \check{R}(U,V)\xi, \zeta \rangle = \langle R'(U,V)\xi, \zeta \rangle = 0,$$

pois, $R'(U,V)\xi$ é uma seção em E.

Se $\xi = \zeta$ e η é uma seção em E,

$$\langle \check{R}(U,V)\zeta, \eta \rangle = -\langle \check{R}(U,V)\eta, \zeta \rangle = 0. \tag{3.17}$$

Se $\xi = \eta = \zeta$, pela propriedade do tensor curvatura

$$\langle \check{R}(U,V)\zeta, \zeta \rangle = 0, \tag{3.18}$$

Por outro lado, se ξ é uma seção em E,

$$\begin{aligned}
\langle \check{A}_\xi \circ \check{A}_\zeta U, V \rangle &= \langle \check{A}_\zeta U, \check{A}_\xi V \rangle \\
&= \langle \check{\alpha}(\check{A}_\xi V, U), \zeta \rangle \\
&= \lambda \langle \check{A}_\xi V, U \rangle - \mu \langle U, \partial'_t \rangle \langle \check{A}_\xi V, \partial'_t \rangle \\
&= \langle \lambda \check{A}_\xi V - \mu \langle \check{A}_\xi V, \partial'_t \rangle \partial'_t, U \rangle \\
&= \langle \check{\nabla}_{\check{A}_\xi V} \zeta, U \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $U, V \in TM$ foi arbitrário, $\check{A}_\xi \circ \check{A}_\zeta \equiv 0$. Logo, $\langle [\check{A}_\xi, \check{A}_\zeta]U, V \rangle = 0$. Isso finaliza a demonstração do lema. ■

Assim, pelo teorema fundamental das subvariedades (proposição 1.3.2), existe uma imersão isométrica $g : M \to \mathbb{R}^{n+2}$ e um isomorfismo de fibrados $\breve{g} : \breve{E} \to TM^{\perp}$ ao longo de g, tal que para todo $U, V \in TM$ e toda seção local ξ, η de $\breve{E}$

$$\begin{aligned} \langle \breve{g}(\xi), \breve{g}(\eta) \rangle &= \langle \xi, \eta \rangle \\ \breve{g}\breve{\alpha}(U, V) &= \tilde{\alpha}(U, V) \\ \breve{g}\breve{\nabla}_U \xi &= \tilde{\nabla}^{\perp}_U \breve{g}(\xi) \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde $\tilde{\nabla}^{\perp}$ e $\tilde{\alpha}$ são a conexão normal e a segunda forma fundamental de $g(M) \subset \mathbb{R}^{n+2}$, respectivamente. Está sendo feita a identificação $g_*(U) = U,\ U \in TM$, ou seja, $TM = Tg(M)$.

É importante, para o que segue, explicitar alguns resultados que foram obtidos no decorrer da demonstração do teorema fundamental das subvariedades. Existe um isomorfismo de fibrados $\breve{\phi} : TM \oplus_W \breve{E} \to T\mathbb{R}^{n+2}\ |_{g(M)} = Tg(M) \oplus_W Tg(M)^{\perp}$ tal que $\breve{\phi}|_{TM} = g_* : TM \to Tg(M)$ e $\breve{\phi}|_{\breve{E}} = \breve{g} : \breve{E} \to Tg(M)^{\perp}$. Além disso, no fibrado $TM \oplus_W \breve{E}$, a conexão

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_U V &= \nabla_U V + \breve{\alpha}(U, V), \quad U, V \in TM \\ \widehat{\nabla}_U \xi &= -\breve{A}_{\xi} U + \breve{\nabla}_U \xi, \quad U \in TM \ e \ \xi \in \breve{E} \end{aligned} \tag{3.20}$$

satisfaz

$$D_U V = \breve{\phi}(\widehat{\nabla}_U V) \quad e \quad D_U \breve{g}(\xi) = \breve{\phi}(\widehat{\nabla}_U \xi), \tag{3.21}$$

onde D é a conexão de Levi-Civita do $\mathbb{R}^{n+2}$.

Temos que $D_U V = \breve{\phi}(\widehat{\nabla}_U V) = \breve{\phi}(\nabla_U V + \breve{\alpha}(U, V)) = g_*(\nabla_U V) + \breve{g}\breve{\alpha}(U, V) = \nabla_U V + \tilde{\alpha}(U, V)$. Seja $\tilde{A}$ o endomorfismo de Weingarten associado a $\tilde{\alpha}$. Então, dados $U, V \in TM$ e $\xi \in \Gamma(\breve{E})$, $\langle \tilde{\alpha}(U, V), \breve{g}(\xi) \rangle = \langle \breve{g}\breve{\alpha}(U, V), \breve{g}(\xi) \rangle = \langle \breve{\alpha}(U, V), \xi \rangle$, ou seja, $\langle \tilde{A}_{\breve{g}(\xi)} U, V \rangle = \langle \breve{A}_{\xi} U, V \rangle$. Donde

$$\breve{A}_{\xi} U = \tilde{A}_{\breve{g}(\xi)} U, \quad \forall\ U \in TM \ e \ \xi \in \Gamma(\breve{E}). \tag{3.22}$$

Assim, $D_U \breve{g}(\xi) = \breve{\phi}(\widehat{\nabla}_U \xi) = \breve{\phi}(-\breve{A}_{\xi} U + \breve{\nabla}_U \xi) = -\tilde{A}_{\breve{g}(\xi)} U + \tilde{\nabla}^{\perp}_U \breve{g}(\xi)$. Logo,

$$\begin{aligned} D_U V &= \nabla_U V + \tilde{\alpha}(U, V), \quad U, V \in TM \\ D_U \breve{g}(\xi) &= -\tilde{A}_{\breve{g}(\xi)} U + \tilde{\nabla}^{\perp}_U \breve{g}(\xi), \quad U \in TM \ e \ \xi \in \Gamma(\breve{E}). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Fazendo $\breve{\phi}(\partial'_t) = \partial'_t$, desde que $D_U \breve{g}(\zeta) = -\tilde{A}_{\breve{g}(\zeta)} U + \tilde{\nabla}^{\perp}_U \breve{g}(\zeta)$, obtemnos

$$\langle D_U \breve{g}(\zeta), V \rangle = -\langle \breve{A}_{\zeta} U, V \rangle = -\langle \breve{\alpha}(U, V), \zeta \rangle = -\langle \lambda U - \mu \langle U, \partial'_t \rangle \partial'_t, V \rangle$$

e

$$\langle D_U \breve{g}(\zeta), \breve{g}(\xi)\rangle = \langle \breve{g}\check{\nabla}_U \zeta, \breve{g}(\xi)\rangle = \langle \check{\nabla}_U \zeta, \xi\rangle = -\langle \lambda U - \mu\langle U, \partial_t'\rangle \partial_t', \xi\rangle.$$

Asim, como todo campo de vetores X em $\mathbb{R}^{n+2}$ pode ser escrito na forma $X = V + \breve{g}(\xi)$ onde $V \in TM$ e $\xi \in \Gamma(\check{E})$, segue que

$$\langle D_U \breve{g}(\zeta), \breve{g}(\xi) + V\rangle = \langle -\lambda U + \mu\langle U, \partial_t'\rangle \partial_t', \xi + V\rangle$$

ou seja,

$$D_U \breve{g}(\zeta) = -\lambda U + \mu\langle U, \partial_t'\rangle \partial_t'. \tag{3.24}$$

Fazendo $(\partial_t')^\top = T$ e $(\partial_t')^\perp = N$, temos também que

$$\begin{aligned}
D_U \partial_t' &= D_U T + D_U N \\
&= \nabla_U T + \tilde{\alpha}(U,T) - \tilde{A}_N U + \tilde{\nabla}^\perp_U N \\
&= \nabla_U T + \alpha'(U,T) + (\lambda\langle U,T\rangle - \mu\langle U,T\rangle)\breve{g}(\zeta) - A'_N U + \check{\phi}\nabla'_U N \\
&= \check{\phi}\nabla''_U T + \check{\phi}\nabla''_U N + (\lambda\langle U,T\rangle - \mu\langle U,T\rangle)\breve{g}(\zeta) \\
&= \check{\phi}\nabla''_U \partial_t' + (\lambda\langle U,T\rangle - \mu\langle U,\partial_t'\rangle)\breve{g}(\zeta) \\
&= \frac{f'}{f}(U - \langle U,\partial_t'\rangle\partial_t') + \langle U,\partial_t'\rangle(\lambda-\mu)\breve{g}(\zeta),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$D_U \partial_t' = \frac{f'}{f}(U - \langle U,\partial_t'\rangle\partial_t') + \langle U,\partial_t'\rangle(\lambda-\mu)\breve{g}(\zeta), \quad \forall\, U \in TM. \tag{3.25}$$

Seja $\pi' : \langle\zeta\rangle \to \overline{M}$ um fibrado de linhas com conexão compatível $\nabla^\sharp$ e $\alpha^\sharp$ uma seção simétrica no fibrado dos homomorfismos $Hom(T\overline{M} \times T\overline{M}, \langle\zeta\rangle)$, definidos por

$$\begin{aligned}
\nabla^\sharp_X \xi &= X\langle \xi, \zeta\rangle \zeta, && (3.26)\\
\alpha^\sharp(X,Y) &= (\tilde{\lambda}\langle X,Y\rangle - \tilde{\mu}\langle X,\partial_t\rangle\langle Y,\partial_t\rangle)\zeta,\ \ X,Y \in T\overline{M},\ \xi \in \Gamma(\langle\zeta\rangle), && (3.27)
\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{1-(f'(\sigma))^2}{f(\sigma)^2} \quad e \quad \tilde{\lambda}\tilde{\mu} = \lambda^2 + \frac{f''(\sigma)}{f(\sigma)}. \tag{3.28}$$

Para que $\tilde{\lambda}$ esteja bem definido e positivo, tem-se necessariamente que

$$-1 < f'(\sigma) < 1.$$

Defina a aplicação $A^\sharp : T\overline{M} \to T\overline{M}$ por

$$\langle A^\sharp X, Y\rangle = \langle \alpha^\sharp(X,Y), \zeta\rangle, \quad X, Y \in T\overline{M}, \tag{3.29}$$

ou seja,

$$A^\sharp X = \tilde{\lambda} X - \tilde{\mu}\langle X, \partial_t\rangle \partial_t.$$

Proposição 3.1.1 *Com as notações acima,* $(\langle,\rangle, \overline{\nabla}, \nabla^\sharp, \alpha^\sharp)$ *satisfaz as equações de compatibilidade para o espaço euclidiano* $\mathbb{R}^{n+2}$*. Em outras palavras,*

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(U,V)W, Z\rangle &= \langle \alpha^\sharp(U,Z), \alpha^\sharp(V,W)\rangle - \langle \alpha^\sharp(U,W), \alpha^\sharp(V,Z)\rangle & (3.30)\\ (\nabla^\sharp_V \alpha^\sharp)(U,W) &= (\nabla^\sharp_U \alpha^\sharp)(V,W) & (3.31) \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema fundamental das subvariedades, existe uma imersão isométrica $q : \overline{M} \to \mathbb{R}^{n+2}$ e um isomorfismo de fibrados $\check{q} : \langle \zeta\rangle \to T\overline{M}^\perp$ ao longo de q, tal que para todo $U, V \in T\overline{M}$ e toda seção local ξ, η de $\langle\zeta\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \check{q}(\xi), \check{q}(\eta)\rangle &= \langle \xi, \eta\rangle \\ \check{q}\alpha^\sharp(U,V) &= \overline{\alpha}(U,V) \\ \check{q}\nabla^\sharp_U \xi &= \overline{\nabla}^\perp_U \check{q}(\xi) \end{aligned} \tag{3.32}$$

onde $\overline{\nabla}^\perp$ e $\overline{\alpha}$ são a conexão normal e a segunda forma fundamental de $q(\overline{M}) \subset \mathbb{R}^{n+2}$, respectivamente.

Segue que $\overline{\nabla}^\perp_U \check{q}(\xi) = U\big(\langle \check{q}(\xi), \check{q}(\zeta)\rangle\big)\check{q}(\zeta)$ e $\overline{\alpha}(U,V) = \big(\tilde{\lambda}\langle U,V\rangle - \tilde{\mu}\langle U, \partial_t\rangle\langle V, \partial_t\rangle\big)\check{q}(\zeta)$. Além disso,

$$\begin{aligned} D_U V &= \overline{\nabla}_U V + \overline{\alpha}(U,V), \qquad U, V \in T\overline{M} & (3.33)\\ D_U \check{q}(\xi) &= -\overline{A}_{\check{q}(\xi)} U + \overline{\nabla}^\perp_U \check{q}(\xi), \qquad U \in T\overline{M} \text{ e } \xi \in \langle\zeta\rangle. & (3.34) \end{aligned}$$

onde D é a conexão de Levi-Civita do $\mathbb{R}^{n+2}$.

Em particular, temos que,

$$D_U \check{q}(\zeta) = -\overline{A}_{\check{q}(\zeta)} U = -\tilde{\lambda} U + \tilde{\mu}\langle U, \partial_t\rangle \partial_t, \qquad U \in T\overline{M}. \tag{3.35}$$

e

$$D_U \partial_t = \frac{f'}{f}(U - \langle U, \partial_t\rangle \partial_t) + \langle U, \partial_t\rangle(\tilde{\lambda} - \tilde{\mu})\check{q}(\zeta), \quad \forall\, U \in T\overline{M}. \tag{3.36}$$

Finalizamos esta dissertação com o enuciado do seguinte teorema, resumo de todo cálculo feito nesta seção:

Teorema 3.1.1 *Seja* $(M^k, \langle\ ,\ \rangle, \nabla)$ *uma variedade Riemanniana simplesmente conexa* $k-$*dimensional,* $\langle\ ,\ \rangle$ *sua métrica e* ∇ *sua conexão de Levi-Civita. Assuma que* $(\langle , \rangle, \nabla, \nabla', \alpha', \varrho, h)$ *satisfaz as equações de compatibilidade para* $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$, *com* $-1 < f' < 1$. *Então, existe uma imersão isométrica* $g : M^k \to \mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$ *e um isomorfismo de fibrados vetoriais* $\tilde{g} : E \to TM^{\perp}$ *ao longo de* g, *tal que para todo* $U, V \in TM$ *e toda seção local* $\xi, \eta \in E$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{g}(\xi), \tilde{g}(\eta) \rangle &= \langle \xi, \eta \rangle \\ \tilde{g}\alpha'(U, V) &= \alpha(U, V) \\ \tilde{g}\nabla'_U \xi &= \nabla^{\perp}_U \xi, \end{aligned}$$

onde $\nabla^{\perp}$ *e* α *são a conexão normal e a segunda forma fundamental de* $g(M) \subset \mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$, *respectivamente. Além disso, a imersão é única, a menos de isometrias globais na variedade* $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$.

Referências Bibliográficas

[BGM] Bar, Ch., Gauduchon, P., Moroianu, A.: *Generalized cylinders in semi-Riemannian and spin geometry*, Math. Z **249**, 545-580 (2005).

[Ca] Camacho, C., Neto, L. A.: *Teoria geométrica das folheações*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[CC] Chen, Q., Cui, Q.: *Isometric immersions into* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ *with high codimensions*, Results. Math. **57**, 319-333 (2010).

[CX] Chen, Q., Xiang, C. R.: *Isometric immersions into warped product spaces*, Acta Math. Sinica, English Series **26**, 2269-2282 (2010).

[CL] Ciarlet, P.G., Larsonneur, F.: *On the recovery of a surface with prescribed first and second fundamental form*, J. Math. Pures Appl. **82**, 167-185 (2002).

[Da1] Daniel, B.: *Isometric immersions into* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ *and applications to minimal surfaces*, Trans. American Math. Sosiety **361** 6255-6282 (2009).

[Da2] Daniel, B.: *Isometric immersions into* $3-$*dimensional homogeneous manifolds*, Comment. Math. Helv. **82**, 87-131 (2007).

[dC] Do Carmo, M. P.:*Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 4ª edição, 2008.

[Dj] Dajczer, M. et al.: *Submanifolds and isometric immersions* , Publish or Perish Inc., Houston, 1990.

[DT] Dajczer, M., Tojeiro, R.: *Isometric immersions in codimension two of warped products into space forms*, Illinois J. Math. **48** 711-746 (2004).

[Le] Lee, J. M.: *Introduction to smooth manifolds*, Springer Verlag, Nova Iorque, 2000.

[LTV] Lira, J. H., Tojeiro, R., Vitório, F.: *A Bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms*, Arch. Math. **95** 469-479 (2010).

[Mo] Montiel, S.: *Stable constant mean curvature hypersurfaces in some Riemannian manifolds*, Comment. Math. Helv. **73**, 584-602 (1998).

[OB] Bonnet, O.: *Mémorie sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, J. École Polytech. **42** (1867).

[ON] O'Neill, B.: *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[PT] Piccione, P. & Tausk, D. *An existence theorem for G-strucure preserving affine immersions*, Indiana Univ. Math. J. 57, 1431D1465 (2008).

[SN] S. Nölker : *Isometric immersions of warped produts*, Differential Geom. Appl. **6** 1-30 (1996).

[Sp] Spivak, M.: *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol.4, 2nd Edition, Publish or Perish Inc, Houston, 1979.

[Te] Tenenblat, K.: *On isometric immersions of Riemannian manifolds*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **2**(2), 23-36 (1971).